ĐỀ ĐỀ XUẤT DHBB

ĐÁP ÁN-THANG ĐIỂM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI DUYÊN HẢI BẮC BỘ
Môn: TOÁN 11

(Đáp án-thang điểm gồm ***05*** *trang)*

I. Một số chú ý khi chấm bài

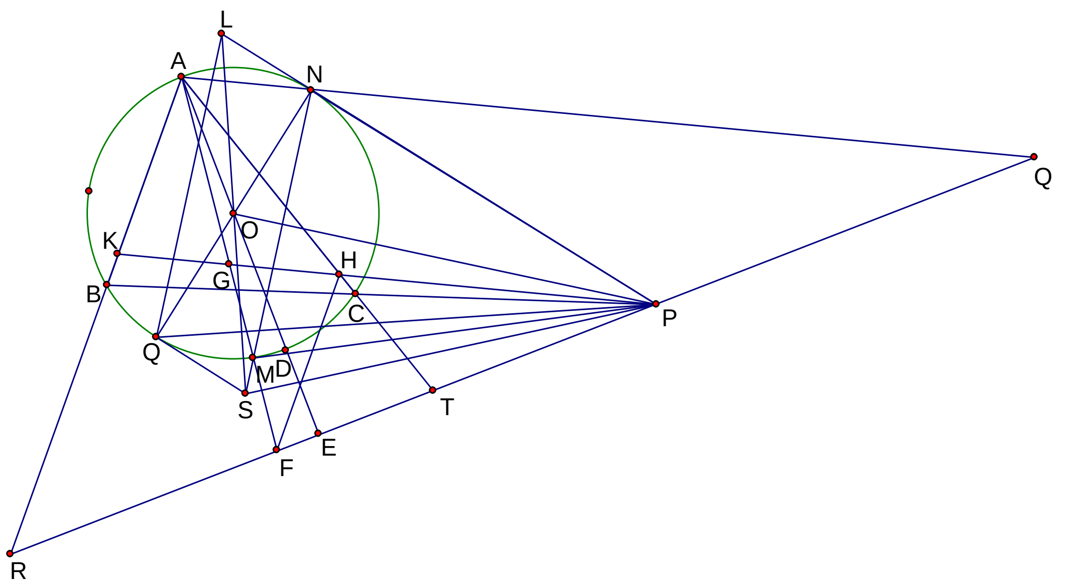
• Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách, khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp lô-gic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.

• Thí sinh làm bài cách khác với Đáp án mà đúng thì Tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của Đáp án.

• **Điểm bài thi** là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án-thang điểm

<table>
<tr><td colspan="2">Bài 1 (4,0 điểm). Cho dãy số thực $(x_n)(n=1,2,...)$ được xác định như sau
$$x_1=0; x_2=3 \text{ và } x_{n+2}=\frac{1}{3}\left[3^{-\frac{x_n}{2}+1}+5\right], n=1,2,...$$
Tìm giới hạn $\lim x_n$.</td></tr>
<tr><td>Ta viết lại dãy số như sau
$$x_{n+2}=\left(\sqrt{3}\right)^{-x_n}+\frac{5}{3}, n=1,2,...$$
Xét hàm số $f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^{-x}+\frac{5}{3}, x\in R$. Với mỗi $n\in N^*$, ta có $x_{n+4}=f(x_{n+2})=f(f(x_n))$ hay $x_{n+4}=g(x_n)$, trong đó g là hàm số xác định trên R và $g(x)=f(f(x)), x\in R$ (1)</td><td>1 điểm</td></tr>
<tr><td>Tacó
$f'(x)=-\left(\sqrt{3}\right)^{-x}.\left(\ln\sqrt{3}\right)\Rightarrow g'(x)=\left[-\left(\sqrt{3}\right)^{-f(x)}.\left(\ln\sqrt{3}\right)\right].\left[-\left(\sqrt{3}\right)^{-x}.\left(\ln\sqrt{3}\right)\right]=\left(\sqrt{3}\right)^{-(f(x)+x)}.\left(\ln\sqrt{3}\right)^2>0, x\in R$
Do đó g là hàm tăng trên R. Vì thế từ (1) suy ra: với mỗi $k\in\{1;2;3;4\}$ dãy $(x_{4n+k}), n\in N^*$ là dãy đơn điệu. Hơn nữa, từ cách xác định dãy (x_n) ta thấy $0\le x_n\le 3, \forall n\in N^*$.</td><td>1 điểm</td></tr>
<tr><td>Do đó, với mỗi $k\in\{1;2;3;4\}$ dãy $(x_{4n+k}), n\in N^*$ là dãy hội tụ. Với mỗi $k\in\{1;2;3;4\}$, đặt $\lim x_{4n+k}=a_k$, ta có $0\le a_k\le 3$. Hơn nữa, do hàm số g liên tục trên R nên từ (1) suy ra $g(a_k)=a_k$ (2)</td><td>1 điểm</td></tr>
<tr><td>Xét hàm số $h(x)=g(x)-x$ trên $[0;3]$. Ta có
$$h'(x)=\left(\sqrt{3}\right)^{-(f(x)+x)}.\left(\ln\sqrt{3}\right)^2-1<0, \forall x\in[0;3] \text{ vì } f(x)+x>0, \forall x\in[0;3]$$
Suy ra hàm số h giảm trên $[0;3]$. Do vậy $h(x)=0$ sẽ có không quá một nghiệm trên đoạn $[0;3]$ hay phương trình $g(x)=x$ có nghiệm duy nhất $x\in[0;3]$. Dễ thấy $g(2)=2$ nên từ (2) ta được $a_k=2, \forall k\in\{1;2;3;4\}$. Từ đó, vì dãy (x_n) là hợp của bốn dãy con (x_{4n+k}) nên (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n=2$.■</td><td>1 điểm</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bài 2 (4,0 điểm).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $\left(P(x)-6\right)^3=P\left(x^3+x-1\right), \forall x\in\mathbb{R}$.</td></tr>
</table>

Nếu $P(x)=c$ thì $(c-6)^3=c \Leftrightarrow (c-8)\left[(c-5)^2+2\right]=0 \Leftrightarrow c=8.$	1 điểm
Nếu $\deg P(x)\geq 1$. Xét phương trình $x=x^3+x-1 \Leftrightarrow x=x_0=1.$ Suy ra $P(x_0)=c$. Đặt $P(x)=(x-x_0)^n Q(x)+c,\ Q(x_0)\neq 0, n\in\mathbb{N}^*.$	1 điểm
Thay vào phương trình đã cho và biến đổi như các bài toán trên, ta được $\left((x-x_0)^n Q(x)+c-6\right)^3=\left(x^3+x-1-x_0\right)^n Q\left(x^3+x-1\right)+c, \forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (x-x_0)^{3n} Q^3(x)+3(x-x_0)^{2n}(c-6)Q^2(x)+3(x-x_0)(c-6)^2 Q(x)+(c-6)^3=$ $=\left(x^3+x-x_0^3-x_0\right)Q\left(x^3+x-1\right)+c, \forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow (x-x_0)^{2n} Q^3(x)+3(c-6)(x-x_0)^n Q^2(x)+3(c-6)^2 Q(x)=$ $=\left(x^2+xx_0+x_0^2+1\right)Q\left(x^3+x-1\right), \forall x\in\mathbb{R}$ Suy ra $(x-x_0)^{2n} Q^3(x)+3(c-6)(x-x_0)^n Q^2(x)+3(c-6)^2 Q(x)=\left(x^2+xx_0+x_0^2+1\right)^n Q\left(x^3+x-1\right), \forall x\in\mathbb{R}$ với mọi số thực x	1 điểm
Thay x bởi x_0, ta được $3(c-6)^2 Q(x_0)=\left(3x_0^2+1\right)^n Q\left(x_0^3+x_0-1\right) \Rightarrow 3(c-6)^2=\left(3x_0^2+1\right)^n \Rightarrow 12=4^n$ Đẳng thức cuối cùng là vô lý với $n\in\mathbb{N}^*$. Kết luận: Đa thức cần tìm là $\mathrm{P}(x)=8, \forall x\in\mathbb{R}$.	1 điểm
Bài 3 (4,0 *điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường kính AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E và qua E vẽ đường thẳng vuông góc với AD cắt đường thẳng BC tại P. Từ P vẽ hai tiếp tuyến PM, PN đến (O) (M, N là các tiếp điểm và A, N nằm cùng phía so với đường thẳng BC). Đường thẳng AM cắt PE tại F. Gọi G là trung điểm của AF, đường thẳng GP cắt đường thẳng AC tại H. Gọi Q là điểm đối xứng với N qua O, từ Q vẽ đường thẳng vuông góc với ON và cắt đường thẳng MN tại S. Chứng minh rằng: a) $PS^2=PM^2+SM.SN$. Đường thẳng HF song song với đường thẳng AB.	
 Gọi L là giao điểm của PN và SO. Khi đó $NLQS$ là hình bình hành suy ra $LQ \parallel SN$,	1 điểm

kết hợp với $OP \perp SN \Rightarrow OP \perp LQ \Rightarrow O$ là trực tâm tam giác $PLQ \Rightarrow PQ \perp OS$	
Do $PQ \perp OS$ nên $OP^2 - OQ^2 = SP^2 - SQ^2 \Leftrightarrow OP^2 - OM^2 = SP^2 - SM.SN$ $\Leftrightarrow PS^2 = PM^2 + SM.SN$.	1 điểm
Gọi K là giao điểm của PH với AB, qua A kẻ đường thẳng song song với PH và cắt PE tại Q^*. Gọi giao điểm của PE với AB, AC lần lượt tại R, T. Để chứng minh HF song song AB tương đương với chứng minh G là trung điểm của KH hay chứng minh $A\left(BCGQ^*\right) = -1 \Leftrightarrow \left(RTFQ^*\right) = -1$ (tính chất của chùm điều hòa). Do GP là đường trung bình của tam giác FAQ^* nên P là trung điểm của FQ^*. Khi đó theo hệ thức Newton ta có: $\left(RTFQ^*\right) = -1 \Leftrightarrow PF^2 = \overline{PT}.\overline{PR} \quad (1)$. Chứng minh (1) ta chứng minh tam giác PMF cân tại P và tứ giác $BCTR$ nội tiếp.	1 điểm
$(PM, MF) \equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}\right) (\text{mod}\, \pi)$ $(MF, PF) \equiv (MF, OA) + (OA, PF) \equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}\right) (\text{mod}\, \pi)$ Do đó $(PM, MF) \equiv (MF, PF) (\text{mod}\, \pi)$ suy ra tam giác PMF cân tại P hay $PM = PF$ $(RT, RB) \equiv (RT, OA) + (OA, RB) \equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right) (\text{mod}\, \pi)$ $\equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv (CT, CB) (\text{mod}\, \pi)$ suy ra tứ giác $BCTR$ nội tiếp. Ta có $PF^2 = TM^2 = \overline{TB}.\overline{TC} = \overline{PT}.\overline{PR}$ do đó (1) được chứng minh.	1 điểm
Bài 4 (4,0 *điểm*). Cho $p > 3$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng $2^{p-1} \equiv 1 \left(\text{mod}\, p^2\right)$ nếu và chỉ nếu tử số của tổng $\sum_{k=2}^{(p-1)/2} \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1}\right)$ là một bội của p.	
Ta cần chỉ ra rằng $\sum_{k=2}^{(p-1)/2} \frac{H_{k-1}(1)}{k} = \frac{1}{2}\left(\left(H_{(p-1)/2}(1)\right)^2 - H_{(p-1)/2}(2)\right) \equiv 2q^2 (\text{mod}\, p)$ Với $H_{k-1}(d) = 1 + \frac{1}{2^d} + \ldots + \frac{1}{(k-1)^d}$.	1 điểm
Từ đó, theo định lý Wolstenholme $H_{p-1}(1) \equiv H_{p-1}(2) \equiv 0 (\text{mod}\, p)$ với số nguyên tố $p > 3$, suy ra $2q = \frac{2^p - 2}{p}$ $= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} (\text{mod}\, p) = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{2k} = H_{p-1}(1) - H_{(p-1)/2}(1) \equiv -H_{(p-1)/2}(1) (\text{mod}\, p)$	1 điểm

Và $H_{(p-1)/2}(2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\frac{1}{(p-k)^2}\equiv\frac{1}{2}H_{p-1}(2)\equiv 0\pmod p$	1 điểm
Vì vậy $$\frac{1}{2}\left(\left(H_{(p-1)/2}(1)\right)^2-H_{(p-1)/2}(2)\right)\equiv\frac{1}{2}\left((-2q)^2+0\right)\equiv 2q^2\pmod p.$$	1điểm
Bài 5 (4,0 *điểm*). Cho $S=\{A_1,A_2,...,A_{11}\}$ là họ các tập hợp thoả mãn đồng thời hai điều kiện: (i) $A_i\cap A_j\neq\varnothing\ \forall 1\le i<j\le 11$; (ii) $\lvert A_j\rvert=5\ \forall 1\le i\le 11$. Đặt $A=A_1\cup A_2\cup...\cup A_{11}$, với mỗi $x\in A$ ký hiệu $d(x)$ là số các tập hợp thuộc S chứa x và $d=\max\{d(x):x\in A\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của d.	
Giả sử $A=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, xét bảng $m\times 11$ ô vuông (gồm m hàng, 11 cột) sao cho tại mỗi ô vuông thứ (i,j)(hàng thứ i, cột thứ j) ta đặt một số $a_{i,j}$ xác định bởi: $$a_{i,j}=\begin{cases}1 & x_i\in A_j\\ 0 & x_i\notin A_j\end{cases}.$$	1 điểm
Khi đó: $$d(x_i)=\sum_{j=1}^{11}a_{i,j},\ \forall i\in\{1,2,...,m\};$$ $$\lvert A_j\rvert=\sum_{i=1}^{m}a_{i,j},\ \forall j\in\{1,2,...,11\}$$ và $$\sum_{i=1}^{m}d(x_i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{11}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{11}\sum_{i=1}^{m}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{11}\lvert A_j\rvert$$ hay $$\sum_{i=1}^{m}d(x_i)=55. \qquad (2.1)$$ Ta có: $$\sum_{i<j}\lvert A_i\cap A_j\rvert=\sum_{k=1}^{m}C_{d(x_k)}^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}d(x_k)\left(d(x_k)-1\right)\le\frac{1}{2}(d-1)\sum_{k=1}^{m}d(x_k). \qquad (2.2)$$	1 điểm

Từ (2.1) và (2.2) suy ra: $\displaystyle\sum_{i<j}\left|A_i \cap A_j\right| \le \frac{55(d-1)}{2}.$ (2.3) Mặt khác, từ giả thiết $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ nên với mỗi cặp $\left(A_i, A_j\right)$ luôn tồn tại $x_k \in A_i \cap A_j$ hay cặp $\left(A_i, A_j\right)$ được tính ít nhất một lần trong biểu thức $\displaystyle\sum_{i<j}\left|A_i \cap A_j\right|$, do đó ta có: $\displaystyle\sum_{i<j}\left|A_i \cap A_j\right| \ge C_{11}^2 = 55.$ (2.4) Từ (2.3) và (2.4) ta suy ra $d \ge 3$. Nếu $d = 3$ thì với mỗi $x_i \in S$ ta có $d(x_i) \le d = 3$.	
Ta chứng minh không tồn tại $x_j \in S$ để $d(x_j) \le 2$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_j \in S$ để $d(x_j) \le 2$, khi đó $\displaystyle 55 \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} d(x_i)\left(d(x_i)-1\right)$ $\displaystyle = \frac{1}{2}\sum_{i \ne j} d(x_i)\left(d(x_i)-1\right) + \frac{1}{2} d(x_j)\left(d(x_j)-1\right)$ $\displaystyle \le \frac{n-1}{2}\sum_{i \ne j} d(x_i) + \frac{d(x_j)\left(d(x_j)-1\right)}{2}$ Mà $\displaystyle \frac{n-1}{2}\sum_{i \ne j} d(x_i) + \frac{d(x_j)\left(d(x_j)-1\right)}{2} = \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{m} d(x_i) + \frac{d(x_j)\left(d(x_j)-d\right)}{2}$ $\displaystyle \le \frac{(3-1)55}{2} + \frac{2(2-3)}{2} = 54.$ Điều này dẫn đến vô lý hay ta có $d(x_i) = 3\ \forall x_i \in S$, suy ra $3m = 55$ (không thoả mãn).	1 điểm
Vậy $d = 4$ và ta chỉ ra có 11 tập hợp thoả mãn yêu cầu bài toán là: $A_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $A_2 = \{1,2,3,4,5\}$, $A_3 = \{1,6,7,8,9\}$, $A_4 = \{1,10,11,12,13\}$, $A_5 = \{2,6,9,10,14\}$, $A_6 = \{3,7,11,14,15\}$, $A_7 = \{4,8,9,12,15\}$, $A_8 = \{3,6,8,10,13\}$, $A_9 = \{4,5,6,11,14\}$, $A_{10} = \{2,7,11,12,13\}$, $A_{11} = \{5,9,13,14,15\}$.	1 điểm