

CHƯƠNG 2

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1

VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

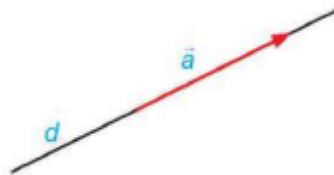
1. Khái niệm vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là “vectơ AB ”.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $a, b, u, v, \dots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ a được kí hiệu là $|a|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ a

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ a và b được gọi là bằng nhau, kí hiệu $a = b$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

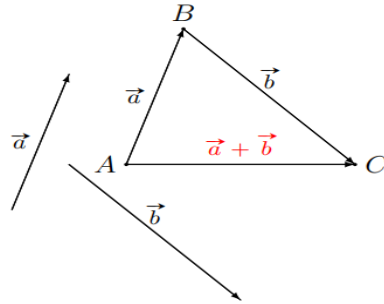
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ a cho trước, có duy nhất điểm sao cho $\overrightarrow{OM} = a$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0 , cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là 0 .

2. Các phép toán vector trong không gian

a. Tổng của hai vector

Trong không gian, cho hai vector a và b . Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$. Vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vector a và b** , kí hiệu $a + b$. Vậy $a + b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Phép lấy tổng hai vector còn được gọi là **phép cộng vector**.

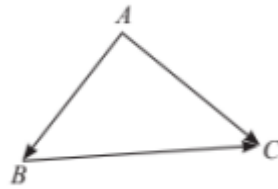


Chú ý: Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:

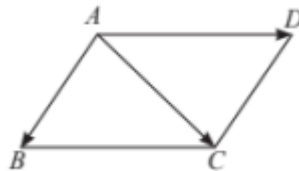
- Tính chất giao hoán: $a + b = b + a$.
- Tính chất kết hợp: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Tính chất của vector-không: $a + 0 = 0 + a = a$.

Đối với vector trong không gian, ta có các quy tắc sau:

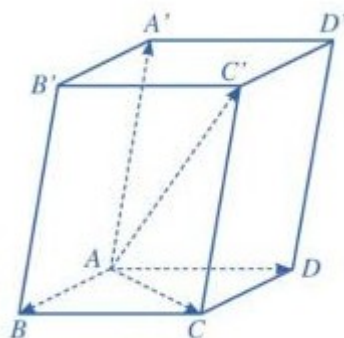
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



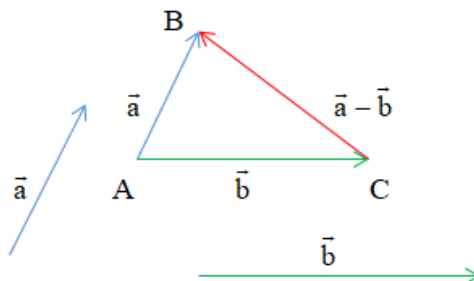
- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



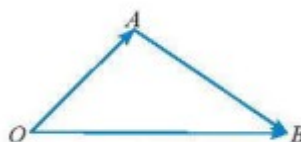
b. Hiệu của hai vector

Trong không gian, cho hai vector a và b . Hiệu của vector a và vector b là tổng vector a và vector đối của vector b , kí hiệu $a - b$.

Phép lấy hiệu hai vector còn được gọi là **phép trừ vector**.



Chú ý: Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$.



3. Tích của một số với một vector trong không gian

a. Định nghĩa:

Cho số $k \neq 0$ và một vector $a \neq 0$. Tích của vector a với số k là một vector, kí hiệu ka .

Vector ka cùng hướng với a nếu $k > 0$, ngược hướng với a nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||a|$.

Phép lấy tích của một số với một vector gọi là **phép nhân một số với một vector**.

Quy ước: $0.a = 0$ và $k.a = 0$.

b. Tính chất:

Với hai vector a, b bất kỳ, với mọi số thực h và k , ta có:

- $k(a + b) = ka + kb; k(a - b) = ka - kb$
- $(h + k)a = ha + ka$
- $h(ka) = (hk)a$
- $1a = a, (-1)a = -a$

Chú ý:

- Hai vector a và b (b khác 0) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $a = kb$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$.
- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , M tùy ý, ta có:

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}; \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC , M tùy ý, ta có:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}; \quad \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tùy ý. Ta có:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}; \quad \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$$

c. Sự đồng phẳng của ba vector (tham khảo thêm)

- Ba vector được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- **Điều kiện để ba vector đồng phẳng:** Cho ba vector a, b, c , trong đó a và b không cùng phương. Khi đó: a, b, c đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số duy nhất $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho $c = ma + nb$
- Cho ba vector a, b, c không đồng phẳng, x tùy ý.

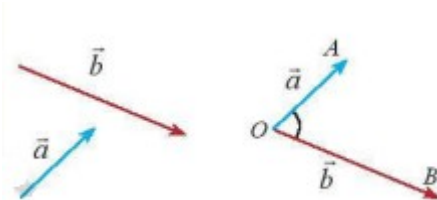
Khi đó: $\exists m, n, p \in \mathbb{R} : x = ma + nb + pc$

4. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

a. Góc giữa hai vector

Trong không gian, cho hai vector a và b đều khác vector 0 . Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = a$ và $\vec{OB} = b$.

Góc cho hai vector a và b trong không gian, kí hiệu (a, b) , là góc giữa hai vector $\vec{OA}, \vec{OB}$.



Chú ý:

- $0^\circ \leq (a, b) \leq 180^\circ$
- Nếu $(a, b) = 90^\circ$ thì ta nói rằng a và b vuông góc với nhau, kí hiệu là $a \perp b$.
- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác 0 luôn bằng 0° .
- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác 0 luôn bằng 180° .



b. Tích vô hướng của hai vector

Trong không gian, cho hai vector a và b đều khác vector 0 . **Tích vô hướng** của hai vector a và b là một

số thực, kí hiệu $a.b$, được xác định bởi công thức sau: $a.b = |a|.|b|\cos(a,b)$

Chú ý:

- Trường hợp có ít nhất một trong hai vector a và b bằng 0 , ta quy ước $a.b = 0$.
- Với hai vector a và b đều khác vector 0 , ta có $a \perp b \Leftrightarrow a.b = 0$.
- Khi $a = b$ thì tích vô hướng $a.b$ được kí hiệu là a^2 và được gọi là bình phương vô hướng của vector a .

Ta có $a^2 = |a|.|a|\cos 0^\circ = |a|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vector luôn bằng bình phương độ dài của vector đó.

- Tính chất của tích vô hướng: Với ba vector a, b, c bất kì và mọi số k , ta có:

$$+ a.b = b.a \quad (\text{tính chất giao hoán})$$

$$+ a(b+c) = a.b + a.c \quad (\text{tính chất phân phối})$$

$$+ (ka).b = k(a.b) = a.(kb)$$

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + 2a.b + b^2$$

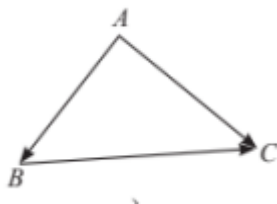
$$\bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2a.b + b^2$$

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$$

CHỦ ĐỀ 1

CÁC PHÉP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

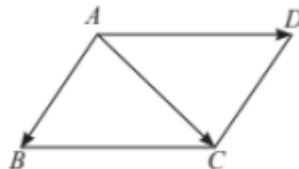
- **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



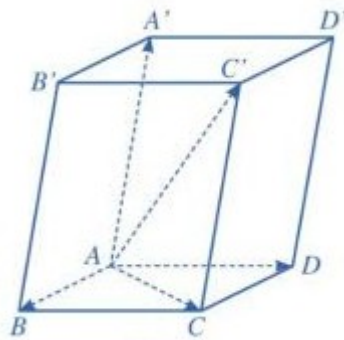
- với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , M tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \mathbf{0}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC , M tùy ý, ta có:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}; \quad \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$$

• **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tùy ý. Ta có:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}; \quad \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$$

• Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

DẠNG 1

CÁC PHÉP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**.

A. $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$

B. $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$

C. $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

D. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

A. $\vec{PQ} = \frac{1}{4}(\vec{BC} + \vec{AD})$

B. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AD})$

C. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{AD})$

D. $\vec{PQ} = \vec{BC} + \vec{AD}$

Câu 3. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OD}$

B. $\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OC} = \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OD}$

C. $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$

D. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

Câu 4. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

B. $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$

C. $\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OD}$

D. $\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OC} = \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OD}$

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$

B. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GD}$

C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

D. $\vec{GM} + \vec{GN} = \vec{0}$

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .

Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{IJ}$
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{JI}$ D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{JI}$

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$
 C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai**?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$ B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$
 C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$ D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{AC} = c, \overrightarrow{BC} = d$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $a + b + c + d = \vec{0}$ B. $a + b + c = d$ C. $b - c + d = \vec{0}$ D. $a = b + c$

Câu 11. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{IA} + (2k - 1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

- A. $k = 2$ B. $k = 4$ C. $k = 1$ D. $k = 0$

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DG}$

- A. $k = \frac{1}{3}$ B. $k = 2$ C. $k = 3$ D. $k = \frac{1}{2}$

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$

- A. $k = 0$ B. $k = 1$ C. $k = 4$ D. $k = 2$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$
- B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$
- C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$
- D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$
- B. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$
- C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$
- D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'D}$

Câu 16. Hãy nhận xét tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau đây:

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
- B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Câu 17. Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O .

- A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
- B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$
- C. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
- D. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$.

- A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$
- B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$
- C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$
- D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .

- A. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.
- B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$
- C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$

D. Nếu $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$.

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$.

B. Nếu $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\vec{SB} + 2\vec{SD} = \vec{SA} + 2\vec{SC}$.

D. Nếu $\vec{SB} + 2\vec{SD} = \vec{SA} + 2\vec{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O .

A. $\vec{AB} + \vec{AA_1} = \vec{AD} + \vec{DD_1}$.

B. $\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$.

C. $\vec{AB} + \vec{BC_1} + \vec{CD} + \vec{D_1A} = 0$.

D. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AD_1} + \vec{D_1O} + \vec{OC_1}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích

hợp điền vào đẳng thức vector: $\vec{MN} = k(\vec{AC} + \vec{BD})$

Câu 23. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức

vector: $\vec{PI} = k(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích

hợp điền vào đẳng thức vector: $\vec{MN} = k(\vec{AD} + \vec{BC})$

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector:

$\vec{BD} - \vec{D'D} - \vec{B'D'} = k\vec{BB'}$

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector:

$\vec{AB} + \vec{B_1C_1} + \vec{DD_1} = k\vec{AC_1}$

DẠNG 2

PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\vec{AB} = a, \vec{AC} = b, \vec{AD} = c$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\vec{AG} = a + b + c$. B. $\vec{AG} = \frac{1}{3}(a + b + c)$. C. $\vec{AG} = \frac{1}{2}(a + b + c)$. D. $\vec{AG} = \frac{1}{4}(a + b + c)$.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\vec{AB} = a, \vec{AC} = b, \vec{AD} = c$, gọi M là trung điểm của BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\vec{DM} = \frac{1}{2}(a + b - 2c)$. B. $\vec{DM} = \frac{1}{2}(-2a + b + c)$.
C. $\vec{DM} = \frac{1}{2}(a - 2b + c)$. D. $\vec{DM} = \frac{1}{2}(a + 2b - c)$.

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\vec{AB} = b, \vec{AC} = c, \vec{AD} = d$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(c + d + b)$. B. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(d + b - c)$.
C. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(c + b - d)$. D. $\vec{MP} = \frac{1}{2}(c + d - b)$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$

B. $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$

C. $\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$

D. $\vec{AO} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$

Câu 31. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\vec{AA'} = a, \vec{AB} = b, \vec{AC} = c$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\vec{BC'}$ qua các vector a, b, c .

A. $\vec{BC'} = a + b - c$

B. $\vec{BC'} = -a + b - c$

C. $\vec{BC'} = -a - b + c$

D. $\vec{BC'} = a - b + c$

Câu 32. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\vec{AA'} = a, \vec{AB} = b, \vec{AC} = c$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\vec{B'C}$ qua các vector a, b, c .

A. $\vec{B'C} = a + b - c$

B. $\vec{B'C} = -a + b + c$

C. $\vec{B'C} = a + b + c$

D. $\vec{B'C} = -a - b + c$

Câu 33. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\vec{CA} = a, \vec{CB} = b, \vec{AA'} = c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{AM} = a + c - \frac{1}{2}b$

B. $\vec{AM} = b + c - \frac{1}{2}a$

C. $\vec{AM} = b - a + \frac{1}{2}c$

D. $\vec{AM} = a - c + \frac{1}{2}b$

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\vec{AC'} = u, \vec{CA'} = v, \vec{BD'} = x, \vec{DB'} = y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$

B. $2\vec{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$

C. $2\vec{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$

D. $2\vec{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$

Câu 35. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD . Chọn đẳng thức đúng.

A. $\vec{B_1M} = \vec{B_1B} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1}$

B. $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$

C. $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \frac{1}{2}\vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$

D. $\vec{BB_1} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1} = 2\vec{B_1D}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ và I là trọng tâm tam giác ABC . Phân tích vector $\vec{SI}$ theo ba vector $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $x = \vec{AB}, y = \vec{AC}, z = \vec{AD}$. Phân tích vector $\vec{AG}$ theo ba vector x, y, z .

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\vec{AB} = b, \vec{AC} = c, \vec{AD} = d$. Phân tích vector $\vec{MP}$ theo ba vector d, b, c .

Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

DẠNG 3

HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG

BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTƠ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 40. Cho $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{y} = -6\vec{a} - 3\vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng nhất?

- A. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương
- B. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và cùng hướng
- C. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng
- D. Hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là không cùng phương

Câu 41. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. Hai vectơ $\vec{y}; \vec{z}$ cùng phương.
- B. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương.
- C. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{z}$ cùng phương.
- D. Đáp án A, B, C, đều sai.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện).

Gọi G_0 là giao điểm của GA và mp (BCD) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$
- B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$
- C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$
- D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng.

B. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$

D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 44. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kỳ không thuộc đường thẳng AB .

A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$.

C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$.

D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB' .

D. M là trung điểm CC' .

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$
”

A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD).

B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD .

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC .

D. Chưa thể xác định được.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 47. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là điểm trên AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $x\overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{C'N}$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

Câu 48. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M, N lần lượt trên AC và DC' sao

cho $MN \parallel BD'$. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'} (k \neq 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .

a) Giả sử $a\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ thì giá trị của a bằng bao nhiêu?

b) Xác định vị trí của M để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.

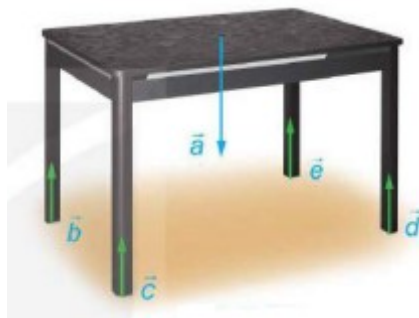
Câu 52. Trong không gian cho tam giác ABC . Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

DẠNG 4

BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 53. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vector $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

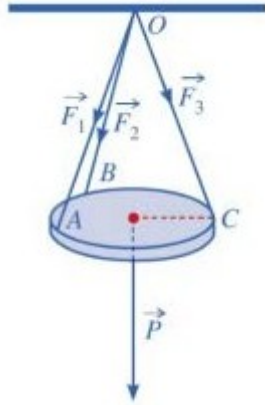
A. Vector $\vec{d}$ ngược hướng với vector $\vec{a}$.

B. Các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vector $\vec{a}$.

C. Vector $\vec{b}$ với vector $\vec{a}$ đối nhau.

D. Các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Câu 54. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

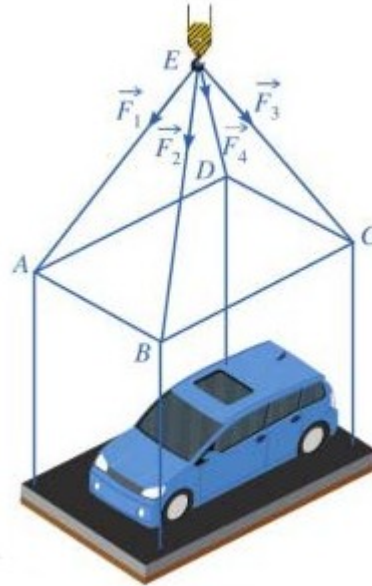
A. $30\sqrt{3}$.

B. 10.

C. $10\sqrt{2}$.

D. $10\sqrt{3}$.

Câu 55. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $2000(N)$. Trọng lượng của chiếc xe ô tô gần nhất số nào sau đây?



A. 15321(N)

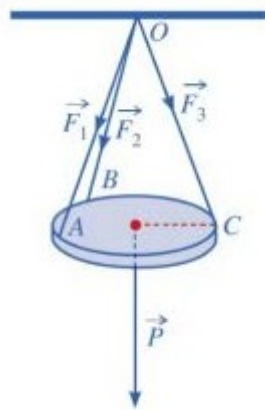
B. 6660(N)

C. 5000(N)

D. 10000(N)

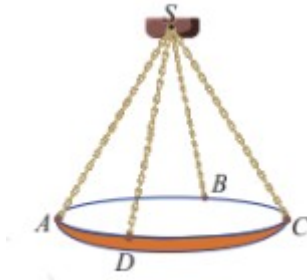
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 56. Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2024\sqrt{3}(N)$ (xem hình vẽ).



Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.

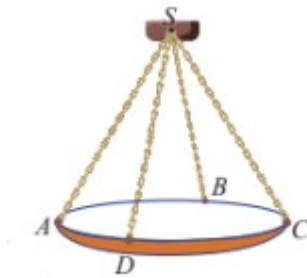
Câu 57. Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m = 10(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\angle ASC = 45^\circ$ (xem hình vẽ).



a) Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vector gia tốc rơi tự do có độ lớn $10(m/s^2)$, tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

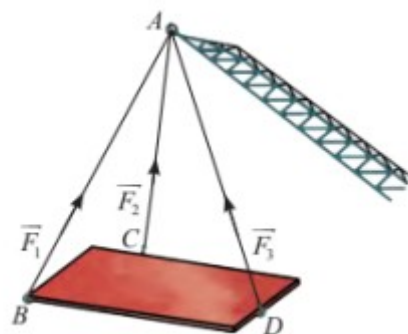
b) Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.

Câu 58. Một chiếc đèn chùm được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD sao cho $SA = SB = SC = SD$ và $ABCD$ là hình vuông, đồng thời các cạnh SA, SB, SC, SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc có 60° (xem hình vẽ).



Biết độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp $4(N)$. Tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

Câu 59. Một chiếc cần cẩu, cần tẩm kim loại có trọng lực $2000(N)$, được thiết kế với tẩm kim loại được giữ bởi ba đoạn cáp AB, AC, AD sao cho $AB = AC = AD$ và BCD là tam giác đều, đồng thời các cạnh AB, AC, AD tạo với mặt phẳng (BCD) một góc có 30° (xem hình vẽ). Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.



Câu 60. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cân cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cân cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$, trọng lượng khung sắt là $1000(N)$ và trọng lượng của chiếc xe ô tô $4000(N)$. Tính cường độ lực căng của các đoạn dây cáp.

