UBND TP PHỦ LÝ
PHÒNG GD & ĐT

KỲ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI 6,7,8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2015-2016
Môn: Toán – Lớp 8

Bài 1. (2,5 điểm)

a) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca\le 0$

b) Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thỏa mãn $13a+b+2c=0$

Chứng tỏ rằng $f(-2).f(3)\le 0$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x^2+y^2-xy-x+y+1$

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

$a)\ \dfrac{x-1}{2013}+\dfrac{x-2}{2012}-\dfrac{x-3}{2011}=\dfrac{x-4}{2010}$ $\qquad b)\ (2x-5)^3-(x-2)^3=(x-3)^3$

Bài 3. (2,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Hạ ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AD

a) Chứng minh $DE\perp CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE,BF,CM đồng quy

c) Xác định vị trí điểm M trên BD để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD(AC>BD)$. Gọi G, H lần lượt là hình chiếu của C lên AB và AD. Chứng minh

a) $\Delta ABC\sim\Delta HCG$

b) $AC^2=AB.AG+AD.AH$

Bài 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)\vdots 91$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Có: $a^2 + b^2 \ge 2ab; a^2 + c^2 \ge 2ac; b^2 + c^2 \ge 2ac$

Cộng được: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$ (1)

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow -a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$ (2)

Cộng (1) với (2) được $3ab + 3ac + 3bc \le 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \le 0$

b) $f(-2) = 4a - 2b + c; f(3) = 9a + 3b + c$

Có $f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$ nên:

Hoặc: $f(-2) = 0$ và $f(3) = 0 \Rightarrow f(-2).f(3) = 0$ (1)

Hoặc : $f(-2)$ và $f(3)$ là hai số đối nhau $\Rightarrow f(-2).f(3) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) được $f(-2).f(3) \le 0$

c) $4M = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 4y + 4$

$= (2x - y - 1)^2 + 3y^2 + 2y + 3$

$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) + \frac{8}{3}$

$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$

Giá trị nhỏ nhất của $4M$ là $\frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ nên

Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases}$

Bài 2.

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013}-1+\frac{x-2}{2012}-1=\frac{x-4}{2010}-1+\frac{x-3}{2011}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013}+\frac{x-2014}{2012}=\frac{x-2014}{2010}+\frac{x-2014}{2011}$$

$$\Leftrightarrow (x-2014)\left(\frac{1}{2013}+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)=0$$

a) $\Leftrightarrow x=2014$

b) Đặt $2x-5=a;\quad x-2=b\Rightarrow a-b=x-3$

Phương trình đã cho trở thành: $a^3-b^3=(a-b)^3$

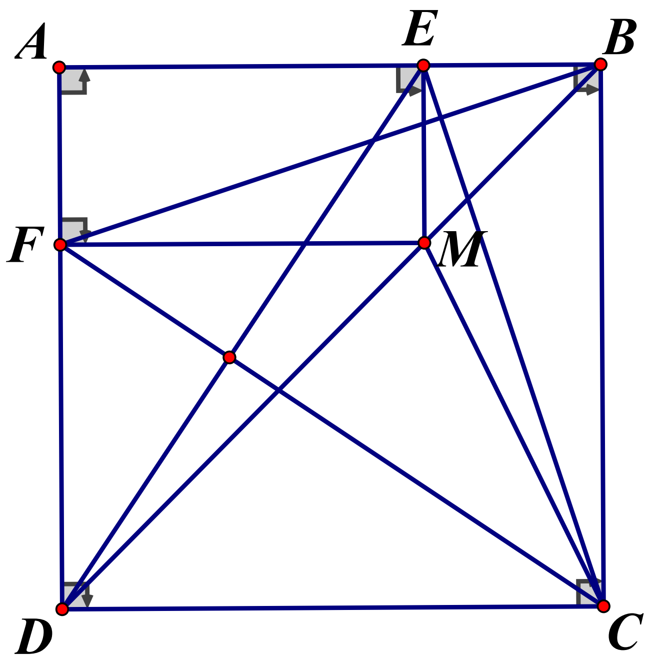
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2-a^2+2ab-b^2)=0$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ b=0\Rightarrow x=2 \\ a=b\Rightarrow x=3 \end{array}\right.$$

Bài 3.



a) Chứng tỏ được $AE = DF$ (cùng bằng MF)

Chứng tỏ được $\Delta CDF = \Delta DAE \Rightarrow \widehat{FCD} = \widehat{EDA}$

Có: $\widehat{EDA}$ và $\widehat{EDC}$ phụ nhau $\Rightarrow$ $\widehat{FCD}$ và $\widehat{EDA}$ phụ nhau hay $CF \perp DE$

b) Tương tự có $CE \perp BF$

Chứng minh được $CM \perp EF$

Gọi G là giao điểm của FM và $BC; H$ là giao điểm của CM và EF.

$\widehat{MCG} = \widehat{EFM}$ (hai HCN bằng nhau)

$\widehat{CMG} = \widehat{FMH}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow$ $\widehat{MHF} = \widehat{MGC} = 90^0$

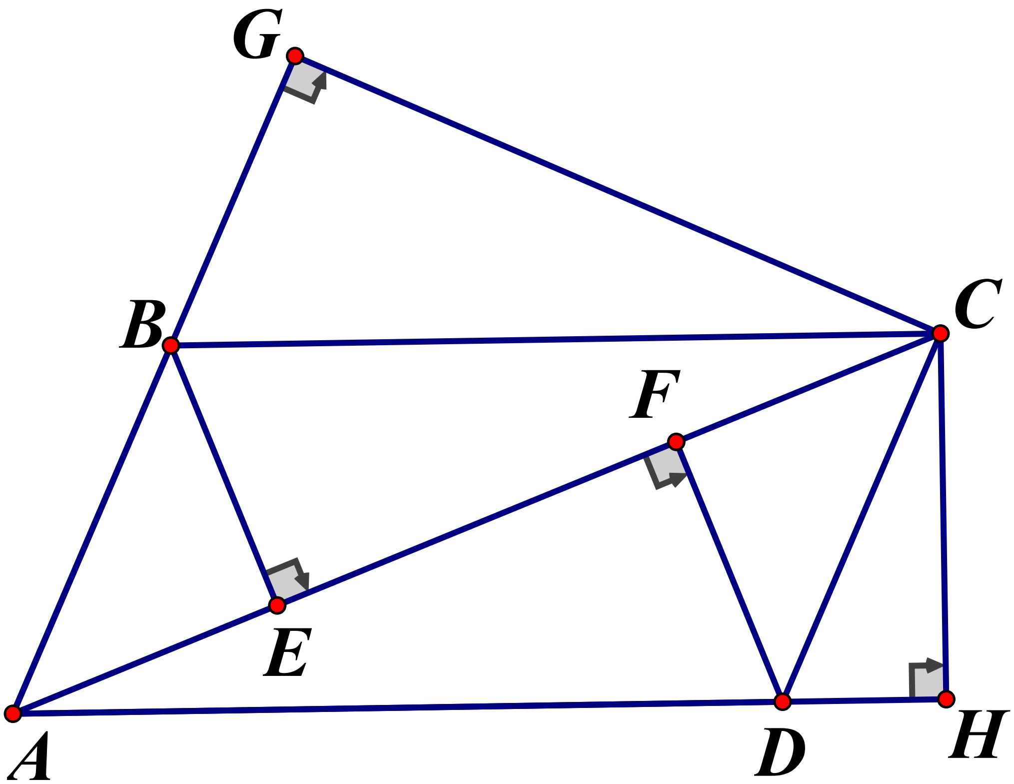
CM, FB, ED là ba đường cao của ΔCEF nên chúng đồng quy

c) $(AE - ME)^2 \geq 0$ nên $(AE + ME)^2 \geq 4AE.ME \Leftrightarrow AE.ME \leq \dfrac{(AE + ME)^2}{4}$

$\Leftrightarrow S_{AEMF} \leq \dfrac{AB^2}{4}$. Mà AB là hằng số nên S_{AEMF} lớn nhất $\Leftrightarrow AE = ME$

Lúc đó M là trung điểm của BD

Bài 4.



a) Chứng tỏ được $\Delta CBG \sim \Delta CDH \Rightarrow \dfrac{CG}{CH} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{BC}{BA}$

Và $\widehat{ABC} = \widehat{HCG}$ (cùng bù với $\widehat{BAD}$) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta HCG$

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D trên AC.

$\Delta AFD \sim \Delta AHC \Rightarrow \dfrac{AF}{AH} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AF.AC = AD.AH$

$\Delta AEB \sim \Delta AGC \Rightarrow \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AG.AB$

Cộng được : $AF.AC + AE.AC = AD.AH + AG.AB$

$\Leftrightarrow AC.(AF + AE) = AD.AH + AG.AB$

Chứng tỏ được: $AE = FC$. Thay được:

$AC.(AF + FC) = AD.AH + AG.AB \Rightarrow AC^2 = AD.AH + AG.AB$

Bài 5.

$A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$

$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n) . A$ chia hết cho 7

$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n) . A$ chia hết cho 13

Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91