ĐỀ VDC SỐ 11 Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1: Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$

A. $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in(3;4)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 2: Với m là một tham số thực sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\ge 2$. **B.** $0\le m<2$. **C.** $-2\le m<0$. **D.** $m<-2$.

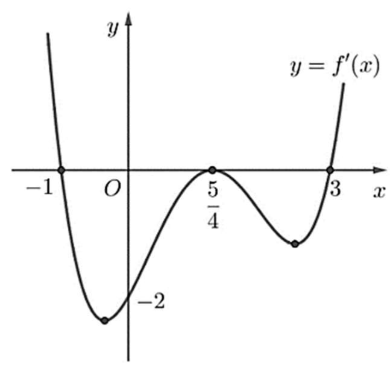
Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $0<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x^2-1)^3(x+2),\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 6: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+(m-2019)x^2+2018$ có ba điểm cực trị là

A. $m<2019$. **B.** $m\le 2019$. **C.** $m<2018$. **D.** $m\le 1009$.

Câu 7: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(m^2-4)x^2+1-m$ có một điểm cực trị

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

C. $[-2;2]$. **D.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị là

A. $m>0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 0$.

Câu 9: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=mx^4-(m-3)x^2+m^2$ không có điểm cực đại là

A. 2. **B.** vô số. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - \left(m^2 - 2019m\right)x^2 - 1$ có đúng một điểm cực trị.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu 11: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x$ trên $\left[0;2\pi\right]$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị.

A. $m \in \left(-\infty;-6\right) \cup \left(0;+\infty\right)$. **B.** $m \in \left(-6;0\right)$. **C.** $m \in \left[-6;0\right)$. **D.** $m \in \left[-6;0\right]$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm $y = \frac{1}{3}x^3 + \left(m+3\right)x^2 + 4\left(m+3\right)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

A. $-3 < m < 1$. **B.** $-\frac{7}{2} < m < -3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$. **D.** $-\frac{7}{2} < m < -2$.

Câu 14: Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x + m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $\left(a;b\right)$. Khi đó giá trị $a + 2b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 15: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2\left(m-2\right)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

A. $m \in \left(2;+\infty\right)$. **B.** $m \in \left(-2;2\right)$. **C.** $m \in \left(-\infty;2\right)$. **D.** $m \in \left(0;2\right)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1\left(1\right)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $\left(1\right)$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 17: Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k = -1; k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 1; k = \frac{1}{3}$. **C.** $k = 1; k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = \frac{1}{3}; k = \frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^4 - 2\left(m^2 - m + 1\right)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m \geq 1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m>2$. **B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$. **D.** $m<-1$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 22: Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(0;3)$. **B.** $m_0\in[-5;-3)$. **C.** $m_0\in(-3;0]$. **D.** $m_0\in(3;7)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+m+1)x^2+m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=0$.

Câu 24: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx+2019$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=-8$.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 25: Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 28: Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^2$ có hai điểm cực trị là A,B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 31: Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m<-2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $0<m<3$. **D.** $m>3$.

Câu 32: Hỏi hàm số $y=|\sin 2x+x|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

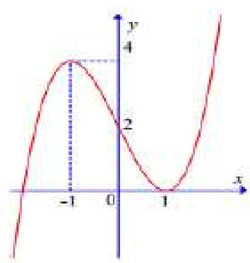
Câu 34: Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-x)(x^3-3x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 35: Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 37: Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Câu 38: Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Câu 40: Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $\left(C\right):\left(x-1\right)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=\dfrac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}\left(m-1\right)x^3-\left(m-1\right)x^2+2mx+m+3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2019 của tham số m để hàm số trên không có cực trị?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 42: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào sau đấy đúng?

A. $m_0\in\left(-1;7\right)$. **B.** $m_0\in\left(7;10\right)$. **C.** $m_0\in\left(-7;-1\right)$. **D.** $m_0\in\left(-15;-7\right)$.

Câu 43: Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

A. $\dfrac{5}{4}\le m\le\dfrac{7}{5}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{5}{4} \\ m>\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le\dfrac{5}{4} \\ m\ge\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$.

Câu 44: Cho hàm số $y=x^3-3mx+m-1$ có đồ thị $\left(C\right)$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị $\left(C\right)$ có hai điểm cực trị là A,B cùng với điểm $C\left(0;-1\right)$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 10?

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 45: Đồ thị hàm số $y=2x^3-3\left(2m+1\right)x^2+6m\left(m+1\right)x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm $M\left(2m^3;m\right)$ tạo với hai điểm A và B một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-7;-3\right)$. **B.** $\left(-3;3\right)$. **C.** $\left(3;7\right)$. **D.** $\left(7;13\right)$.

Câu 46: Cho hàm số $y=x^3+2x^2+\left(m-3\right)x+m$ (m là tham số), có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để $\left(C_m\right)$ có hai điểm cực trị và điểm $M\left(9;-5\right)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của $\left(C_m\right)$.

A. $m=-5$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng d : $y=\left(3m+1\right)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $m = \frac{1}{6}$. **B.** $m = \frac{-1}{3}$. **C.** $m = \frac{1}{3}$. **D.** $m = \frac{-1}{6}$.

Câu 48: Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1.

A. $-1 < m < 0$. **B.** $m > -1$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $m > 0$.

Câu 49: Cho hàm số $y = (m-2)x^4 + (m-1)x^2 - 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.

A. $m \in [2; +\infty)$. **B.** $m \in (-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 1]$. **D.** $m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 50: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 1$ đều thuộc khoảng $(-1; 1)$.

A. $(-1; 1)$. **B.** $\left(-\frac{4}{5}; 0\right)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(-1; 0)$.

Câu 51: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời hoành độ hai điểm cực tiểu x_1; x_2 thỏa điều kiện $|x_1 - x_2| \le 2$.

A. $\left(0; \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **B.** $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **C.** $(0; 1]$. **D.** $[0; 1]$.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi.

A. $m = -1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Câu 53: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. **B.** $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $m \in (2; 3)$. **D.** $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Câu 54: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x - 1}$ có hai điểm cực trị A, B. Khi $\widehat{AOB} = 90°$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 16.

Câu 55: Cho hàm số $f(x) = x^4 - (2m+1)x^3 + (m+4)x^2 + (5m-6)x + 2m - 12$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 15. **B.** 16. **C.** 13. **D.** 14.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.B	5.C	6.A	7.D	8.A	9.D	10.C
11.A	12.D	13.B	14.D	15.C	16.D	17.C	18.D	19.A	20.B
21.A	22.C	23.B	24.A	25.A	26.A	27.B	28.C	29.C	30.D
31.D	32.A	33.C	34.B	35.D	36.B	37.C	38.A	39.B	40.A
41.A	42.D	43.C	44.D	45.B	46.B	47.D	48.D	49.D	50.D
51.D	52.B	53.D	54.A	55.D					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Xét hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$. Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2-m\end{array}\right.$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2-m\neq-1\Leftrightarrow m\neq 3$.

Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<-1<3\\-2<2-m<3\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<4$.

Kết hợp điều kiện $m\neq 3$, ta được $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$.

Câu 2: Chọn C

Cách 1:

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi $b^3=-8a$. Áp dụng vào bài toán ta có: $(2m)^3=-8\Leftrightarrow m^3=-1\Leftrightarrow m=-1$.

Cách 2:

Ta có: $y'=4x^3+4mx$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \\ x^2+m=0 & (1)\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, nghĩa là $m<0$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=\pm\sqrt{-m}\Rightarrow y=1-m^2\end{array}\right.$.

Gọi $A(0;1)$, $B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$ và $C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$ lần lượt ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Theo tính chất của hàm số đã cho thì tam giác ABC luôn cân tại A, vậy tam giác ABC chỉ có thể vuông tại A. Ta có: $\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{-m};m^2\right)$, $\overrightarrow{CA}=\left(-\sqrt{-m};m^2\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow m+m^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$. So với điều kiện ta nhận $m=-1$.

Câu 3: Chọn D

Ta có: $y'=-x^2+2mx-2m$

Hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 4: **Chọn B**

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)^3(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-1)^3(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.
Lưu ý: có thể dùng tính chất nghiệm bội chẵn, nghiệm bội lẻ để giải bài toán nhanh hơn.

Câu 5: **Chọn C**

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Khi đi qua điểm $x=-1$, $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" nên $x=-1$ điểm cực đại của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x=\frac{5}{4}$, $f'(x)$ không đổi dấu nên $x=\frac{5}{4}$ không là điểm cực trị của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x=3$, $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" nên $x=3$ điểm cực tiểu của $f(x)$.

Do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là 2.

Câu 6: **Chọn A**

Cách 1: Ta có $y'=4x^3+2(m-2019)x=2x(2x^2+m-2019)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{2019-m}{2} \quad (*) \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m<2019$.

Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow a.b<0$. Do đó hàm số $y=x^4+(m-2019)x^2+2018$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 1.(m-2019)<0 \Leftrightarrow m<2019$.

Câu 7: **Chọn D**

Ta có $y' = 4x^3 + 2\left(m^2 - 4\right)x = 2x\left(x^2 + m^2 - 4\right)$

Hàm số đã cho là hàm số trùng phương nên có đúng một cực trị khi $y' = 0$ có một nghiệm.

Hay $2x\left(x^2 + m^2 - 4\right) = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Chú ý: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$. (1)

Đặc biệt: Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $ab \geq 0$. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab < 0$. (2)

Câu 8: **Chọn A**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m(*) \end{array}\right.$.

Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$.

Câu 9: **Chọn D**

Trường hợp 1: $m = 0$ thì $y = 3x^2$. Hàm số không có điểm cực đại. Vậy $m = 0$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ Hàm số là hàm bậc bốn trùng phương

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(m-3)x = 2x\left(2mx^2 - m + 3\right)$

Để hàm số không có điểm cực đại thì $m > 0$ và $y' = 0$ có một nghiệm.

$y' = 0$ có một nghiệm $\Leftrightarrow 2mx^2 - m + 3 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m-3}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$. Vì m nguyên nên $m = \{1;2;3\}$. Vậy m có 4 giá trị nguyên.

Câu 10: **Chọn C**

Xét $m = 0$ thì $y = 1$ đồ thị hàm số không có cực trị.

Xét $m \neq 0$

Để đồ thị hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow m^2\left(-m^2 + 2019m\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2019$

Do m nguyên nên có 2018 giá trị của m.

Câu 11: **Chọn A**

Ta có $y' = \cos x + 2\sin x.\cos x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(1 + 2\sin x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Trên $[0;2\pi]$, phương trình $y' = 0$ có 4 nghiệm đơn $x = \dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{3\pi}{2}; x = \dfrac{11\pi}{6}; x = \dfrac{7\pi}{6}$.

Suy ra trên $[0;2\pi]$, hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 12: **Chọn D**

Ta có $y'=3mx^2-4mx+m-2$

• Nếu $m=0$ thì $y'=-2$ nên hàm số không có cực trị.

• Nếu $m\neq 0$ thì $y'=3mx^2-4mx+m-2$ là tam thức bậc hai.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta=(2m)^2-3m(m-2)\le 0 \Leftrightarrow m^2+6m\le 0 \overset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} m\in[-6;0)$.

Kết hợp các trường hợp ta có $m\in[-6;0]$ thì hàm số không có cực trị.

Câu 13: Chọn B

Ta có $y'=x^2+2(m+3)x+4(m+3)$

Đặt $t=x+1\Leftrightarrow x=t-1$. Khi đó $y'=t^2+2(m+2)t+2m+7$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow x^2+2(m+3)x+4(m+3)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow t^2+2(m+2)t+2m+7=0$ có hai nghiệm phân biệt dương. Điều này tương đương với $\begin{cases}\Delta'=m^2+2m-3>0\\ S=-2(m+2)>0\\ P=2m+7>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m<-2\\ m>-\dfrac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2}<m<-3$

.

Cách 2

Ta có $y'=f(x)=x^2+2(m+3)x+4(m+3)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow x^2+2(m+3)x+4(m+3)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ a.f(-1)>0\\ \dfrac{S}{2}>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+2m-3>0\\ 1-2(m+3)+4(m+3)>0\\ \dfrac{-2(m+3)}{2}>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m>-\dfrac{7}{2}\\ m<-3\end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7}{2}<m<3.$$

Câu 14: Chọn D

Ta có $y'=3x^2+6mx+3(m^2-1)$. Xét $3x^2+6mx+3(m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m-1\\ x=-m+1\end{array}\right.$.

Hai nghiệm trên phân biệt với mọi m.

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị là $y=-2x+m$.

Vậy nên các giá trị cực trị $y(-m-1)=3m+2$, $y(-m+1)=3m-2$.

Theo yêu cầu bài toán ta phải có $(3m+2)(3m-2)<0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{2}{3}$. Vậy $a+2b=\dfrac{2}{3}$.

Câu 15: Chọn C

Ta có: $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$

$y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x(x^2 + m - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \quad (1) \end{array}\right.$

y có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Câu 16: Chọn D

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{m}$ với $m > 0$

Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là 3 điểm cực trị của hàm số; khi đó tam giác ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn đi qua A, B, C nên $I \in Oy$, gọi $I(0;b)$

Ta có: $IA = R = 1 \Leftrightarrow 1 - b = 1 \Leftrightarrow b = 0$; $IB = R = 1 \Leftrightarrow m + m^4 - 2m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0$

$\Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ nên loại m_4 và m_1. Ta có $m_2^3 + m_3^3 = -1 + \sqrt{5}$.

Câu 17: Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 4kx = 4x(x^2 - k)$.; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = k \ (1) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0;k), B(-\sqrt{k}; k - k^2)$, $C(\sqrt{k}; k - k^2)$.

Từ yêu cầu bài toán ta có: $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{k + (k - k^2) + (k - k^2)}{3}$

$\Leftrightarrow -2k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 18: Chọn D

$y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x(x^2 - m^2 + m - 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 - m + 1 \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2 - m^2 + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{m^2 - m + 1}, x_2 = \sqrt{m^2 - m + 1}, x_3 = 0$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		y_1		y_2		y_1		$+\infty$

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B\left(-\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$ và $C\left(\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là $BC=2\sqrt{m^2-m+1}=2\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m=\frac{1}{2}$.

Câu 19: Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1;m-2)$, $B(-1;m+2)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-2x+m$

Theo giả thiết $d(O;AB)\leq\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{|-m|}{\sqrt{5}}\leq\sqrt{5}\Leftrightarrow|-m|\leq 5\Leftrightarrow -5\leq m\leq 5$.

Mà m nguyên dương nên có 5 giá trị.

Câu 20: Chọn B

Cách 1:

Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$; $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.(*)$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là: $y=\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)x+\frac{1}{3}m(m+2)$.

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1+y_2>0$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1+x_2=2m$

Nên $y_1+y_2>0\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(x_1+x_2)+\frac{2}{3}m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(2m)+\frac{2}{3}m(m+2)>0 \Leftrightarrow 2m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(**)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất. Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$

.

Để phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta=9m^2-12m-24<0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(***)$.

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2:

Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.(*)$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện:

$\Delta=9m^2-12m-24<0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(**)$.

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương: $y'=x^2-2mx+m+2, y''=2x-2m$

$y''=0 \Leftrightarrow 2x-2m=0 \Leftrightarrow x=m$. Ta có: $y(m)>0 \Rightarrow \frac{m^3}{3}-m^3+m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow m\left(-2m^2+3m+6\right)>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(***)$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Câu 21: Chọn A

Ta có $y=x^4-2mx^2+3m-2\Rightarrow y'=4x^3-4mx$. Khi $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A\left(0;3m-2\right)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$ và $C\left(-\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2+3m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

Cách 1.

Ta có $y'=4x^3+4mx$. Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x^3+4mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<0$. Khi đó 3 điểm cực trị là $A\left(0;1\right)$, $B\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$.

Ta thấy ΔABC cân tại A. Nên ΔABC vuông khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow m+m^4=0\Leftrightarrow m\left(1+m^3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$. Kết hợp $m<0$ ta có $m=-1$.

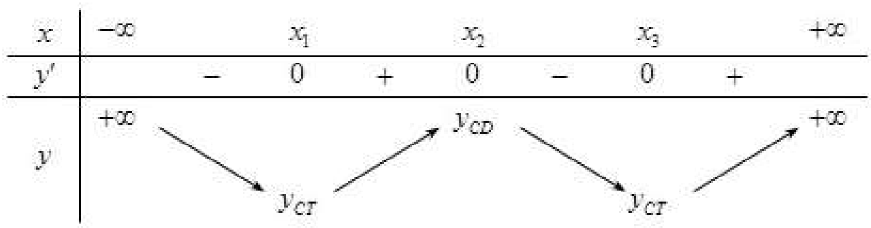
Cách 2.

Gọi A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

ΔABC vuông cân $\Rightarrow b^3=-8a\Rightarrow\left(2m\right)^3=-8\Rightarrow m^3=-1\Rightarrow m=-1$.

Câu 23: Chọn B

Ta có: $y'=4x^3-4\left(m^2+m+1\right)x=4x\left[x^2-\left(m^2+m+1\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-\sqrt{m^2+m+1}\\x_2=0\\x_3=\sqrt{m^2+m+1}\end{array}\right.$.



Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu: $d=\left|x_3-x_1\right|=2\sqrt{m^2+m+1}=2\sqrt{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\geq\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 24: Chọn A

$y'=3x^2-6(m+1)x+12m$;

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6(m+1)x+12m=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+4m=0 \qquad (1)$.

Để hàm số có 2 cực trị x_1,x_2 $\Leftrightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Với điều kiện $m\neq 1$ ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=4m \end{cases}$.

Do đó $x_1+x_2+2x_1x_2=-8 \Leftrightarrow 2m+2+8m=-8 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 25: Chọn A

Ta có: $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2-4x-10 \Rightarrow y'=x^2-mx-4$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2-mx-4=0$.

$\Delta=m^2+16>0, \forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Áp dụng định lí viet: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=m \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=-4 \end{cases}$.

$S=(x_1^2-1)(x_2^2-1)=(x_1x_2)^2-[(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2]+1=16-(m^2+8)+1=9-m^2\le 9$.

Câu 26: Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=3(x^2-2mx+m^2-1)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3m+2$	$\searrow$	$-3m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M(m-1;-3m+2)$.

Nhận xét: $y_M=-3m+2=-3(m-1)-1=-3x_M-1 \Rightarrow M\in(d): y=-3x-1, \forall m.$

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y=-3x-1$. Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k=-3$.

Câu 27: Chọn B

Ta có: $y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)$.

Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-1>0 \\ 2-3m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Do $m\in N, m<20$ nên $1\le m<20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 28: Chọn C

Xét $y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right)$.

$y'=0\Rightarrow 3x\left(x-2m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m\neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;3m^2\right), B\left(2m;3m^2-4m^3\right)$.

Phương trình đường thẳng OA : $x=0$.

Ta có: $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}OA.d\left(B;OA\right)=\dfrac{1}{2}3m^2.\left|2m\right|=24\Rightarrow m^2\left|m\right|=8\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 29: Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

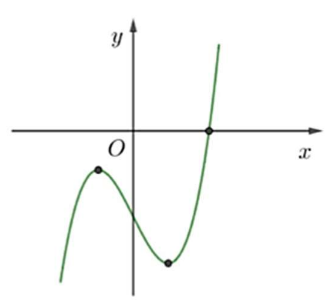
$y'=3x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-2$ có $\Delta'=-2m^2+2m+7$.

Để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$\Delta'>0\Leftrightarrow -2m^2+2m+7>0\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{15}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên được $m\in\left\{-1;0;1;2\right\}$.

Lúc này, hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)>0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm, tức là, phương trình $x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3=0$ có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m=-1$ thì phương trình là $x^3-x+2=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=-1$.

Xét $m=0$ thì phương trình là $x^3-x^2-2x+3=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=0$.

Xét $m=1$ thì phương trình là $x^3-2x^2-x+2=0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt nên không chọn $m=1$.

Xét $m=2$ thì phương trình là $x^3-3x^2+2x-1=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=2$. Đáp số: $m\in\{-1;0;2\}$.

Câu 30: Chọn D

Ta có $y'=x^2-4mx+m-1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=4m^2-m+1>0 \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

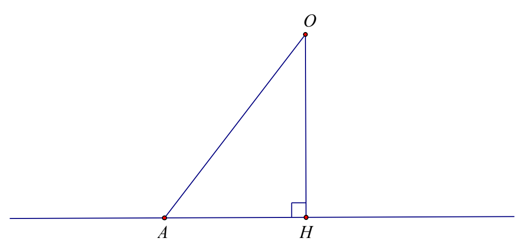
Mà $y(x)=y'(x).\left(\frac{1}{3}x-\frac{2m}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\right)x+\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng Δ:

$y=-\left(\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\right)x+\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1$.

Ta thấy đường thẳng Δ luôn qua điểm cố định $A\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ. Khi đó ta có $d(O;\Delta)=OH\le OA$



Do đó khoảng cách lơn nhất khi $H\equiv A$ hay $\Delta\perp OA$.

Vậy khoảng cách lớn nhất là $OA=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=x^2-2mx+(m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y'=x^2-2mx+(m+6)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-6>0\\2m>0\\m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow m>3.$$

Câu 32: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\sin 2x+x$ có $f'(x)=2\cos 2x+1$.

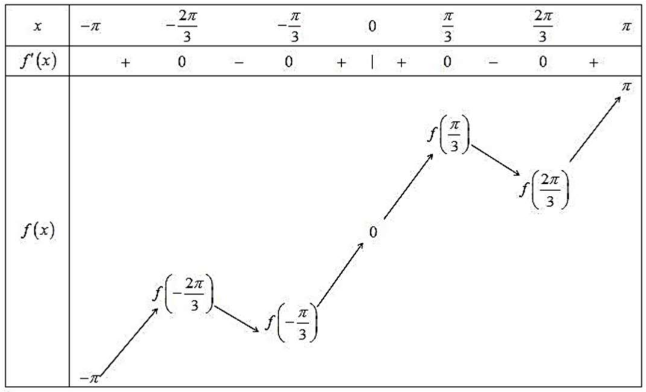
$f'(x)=0\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x \in (-\pi;\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$.

$f\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2\pi}{3} < 0; f\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{3} < 0.$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{3} > 0; f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\pi}{3} > 0$.

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy: trên $(-\pi;\pi)$ đồ thị hàm số $f(x) = \sin 2x + x$ có 4 điểm cực trị và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm có hoành độ $x = 0$. Do đó hàm số $y = |\sin 2x + x|$ có 5 điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$.

Câu 33: Chọn C

Tính được: $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.

Khi đó $\Delta' = 4(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Nhận xét $a.c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Suy ra: $|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = -2 \Leftrightarrow \dfrac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Câu 34: Chọn B

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y = |f(1-2019x)|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1-2019x) = 0$ và số cực trị của hàm số $y = f(1-2019x)$.

Ta có $f'(x) = x^2(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

$[f(1-2019x)]' = -2019 f'(1-2019x)$.

Do đó

$[f(1-2019x)]' = 0 \Leftrightarrow (1-2019x)^2(1-2019x-1)(1-2019x-\sqrt{3})(1-2019x+\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2019} \\ x=0 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2019} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2019} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $y=f\left(1-2019x\right)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2019}$		0		$\frac{1}{2019}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2019}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó phương trình $f\left(1-2019x\right)=0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y=f\left(1-2019x\right)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(1-2019x\right)\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 35: Chọn D

$y'=-3x^2+6mx$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2m$.

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A\left(0;-3m-1\right)$; $B\left(2m;4m^3-3m-1\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2m;4m^3\right)$.

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I\left(m;2m^3-3m-1\right)$.

Đường thẳng d : $x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u}=\left(8;-1\right)$.

và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow \begin{cases} I\in d \\ AB\perp d \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+8\left(2m^3-3m-1\right)-74=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ 16m-4m^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m=2$. Suy ra $m\in\left(1;3\right]$.

Câu 36: Chọn B

$y=f\left(x-2018\right)-2019x+1 \Rightarrow y'=f'\left(x-2018\right)-2019$.

Do đó $y'=0 \Leftrightarrow f'\left(x-2018\right)=2019$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ với đường thẳng $y=2019$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy chỉ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=f\left(x-2018\right)-2019x+1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 37: Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có tập xác định $\mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 6m; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$. Ta có $y = \frac{1}{3}y'.x - 4mx + 4$.

Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $\begin{cases} y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \\ y_1 = y(x_1) = \frac{1}{3}y'(x_1).x_1 - 4mx_1 + 4 \\ y_2 = y(x_2) = \frac{1}{3}y'(x_2).x_2 - 4mx_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4mx_1 + 4 \\ y_2 = -4mx_2 + 4 \end{cases}$.

Suy ra M, N thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -4mx + 4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y = -4mx + 4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B và tạo thành tam giác IAB

$\Leftrightarrow 0 < d(I,d) < R \Leftrightarrow 0 < d(I,d) < \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \dfrac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4)$, $IK = \sqrt{17} > R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A, B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I.

Do đó: $S_{IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB} \leq \frac{1}{2}IA.IB$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I,d) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1$).

$\Leftrightarrow \dfrac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{15}{32}.$

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK < \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I. Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I,d)=t\left(0<t\le l\right)$, với l là độ dài đoạn thẳng IK, rồi tính $S_{\Delta IAB}=f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+y^2=2\ (C)$

Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=2\\ y=-4mx+4\end{cases}\Rightarrow (16m^2+1)x^2-2(16m+1)x+15=0\ (1)$.

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt a,b $\Leftrightarrow (16m+1)^2-15(16m+1)>0$.

Khi đó $A(a;-4ma+4), B(b;-4mb+4)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{IA}=(a-1;-4ma+4)\\ \overrightarrow{IB}=(b-1;-4mb+4)\end{array}\right.$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=ab-(a+b)+16\left[m^2ab-m(a+b)+1\right]+1=0$

$\Leftrightarrow ab-(a+b)+16m^2ab-16m(a+b)+17=0$ $\qquad\Leftrightarrow (16m^2+1)ab-(16m+1)(a+b)+17=0$

$\Leftrightarrow 15-\dfrac{2(16m+1)^2}{16m^2+1}+17=0\Leftrightarrow \dfrac{(16m+1)^2}{16m^2+1}=16\Leftrightarrow m=\dfrac{15}{32}$.

Câu 38: Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+2$. Hàm số $y=f(x)$ có cực trị khi: $a^2-6>0\Leftrightarrow a<-\sqrt{6}\vee a>\sqrt{6}\ (1)$
.

$g'(x)=-3x^2+2bx-3$. Hàm số $y=g(x)$ có cực trị khi $b^2-9>0\Leftrightarrow b<-3\vee b>3\ (2)$.

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x_0^2+2ax_0+2=0\\ -3x_0^2+2bx_0-3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=\dfrac{1}{2x_0}\\ b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{3}{2}x_0\\ b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\end{cases}$$

$$P=|a|+|b|=\left|\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right|+\left|\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)\right|\ge\left|\frac{5}{2x_0}+3x_0\right|$$

$$\Rightarrow P^2=\frac{25}{4x_0^2}+9x_0^2+15\ge 2\sqrt{\frac{25}{4x_0^2}.9x_0^2}+15=30\Rightarrow P\ge\sqrt{30}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)>0\\ \dfrac{25}{4x_0^2}=9x_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)>0\\ x_0=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}\end{cases}\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Với hai giá trị x_0, ta tìm được hai cặp giá trị a,b thoả và. Vậy $\min P=\sqrt{30}$.

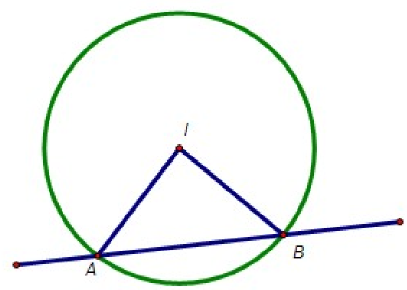
Câu 39: Chọn B

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0 \ (1)$

Ta có $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow d(I;\Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0$ luôn đúng do $m > 0$

Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2}.IA.\text{IB}.\sin\widehat{AIB} = \frac{1}{2}.\sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2}$

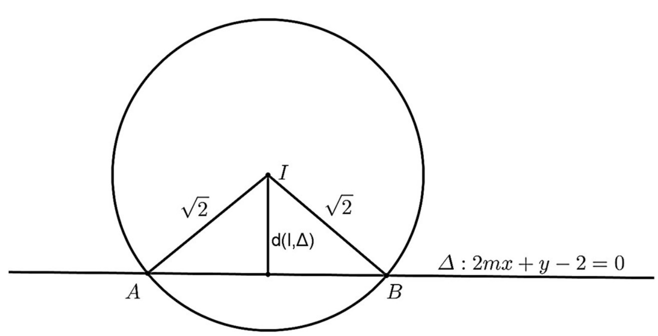
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90°$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$d(I;\Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn đk (1)

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Câu 40: Chọn A



Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m)$, $y' = 0 \Rightarrow x^2 = m$.

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Ta có $y = y'.\left(\frac{1}{3}x\right) - 2mx + 2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cựa trị của đồ thị hàm số là $\Delta: y = -2mx + 2$ hay $\Delta: 2mx + y - 2 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B khi

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}}<\sqrt{2} \Leftrightarrow 4m^2-8m+4<8m^2+2 \Leftrightarrow 4m^2+8m-2>0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}$.

Mà $\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}R^2=1$.

Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^o$.

Từ đó $\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}.R\sqrt{2}=1 \Leftrightarrow \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}}=1\Leftrightarrow 4m^2-8m+4=4m^2+1\Leftrightarrow m=\frac{3}{8}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\frac{3}{8}$.

Câu 41: Chọn A

Trường hợp 1: Với $m=1\Rightarrow y=2x+4$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị.

Trường hợp 2: Với $m\ne1(*)$, khi đó ta có: $y'=(m-1)x^2-2(m-1)x+2m$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow\Delta'=(m-1)^2-2m(m-1)\le0\Leftrightarrow-m^2+1\le0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge1\\m\le-1\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta có $\left[\begin{array}{l}m>1\\m\le-1\end{array}\right.$.

Vậy $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge1\\m\le-1\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{N}^*,m<2019\end{cases}\Rightarrow m\in\{1;2;3;...;2018\}\Rightarrow$ có 2018 giá trị của tham số thực m.

Câu 42: Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^2-6x+m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'=9-3m>0 \Leftrightarrow m<3$. Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=\frac{m}{3}\end{cases}$.

Ta có $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=13$.

Thay hệ thức Vi-ét vào, ta được $4-m=13 \Leftrightarrow m=-9$.

Câu 43: Chọn C

$y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2 \end{cases} \quad (1)$ Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2(1-2m)}{3} \\ x_1 x_2 = \dfrac{2-m}{3} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1; m > \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{2-m}{3} - \dfrac{-2(1-2m)}{3} + 1 > 0 \\ \dfrac{-2(1-2m)}{3} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1; m > \dfrac{5}{4} \\ m < \dfrac{7}{5} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ \dfrac{5}{4} < m < \dfrac{7}{5} \end{array} \right. .$$

Câu 44: Chọn D

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m \quad (*)$

Để đồ thị (C) có 2 điểm cực trị thì $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$.

Đặt: $A\left(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m - 1\right)$ và $B\left(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m - 1\right)$.

Và $\overrightarrow{CA} = \left(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m\right); \overrightarrow{CB} = \left(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m\right)$.

Ta lại có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{m}.\left(2m\sqrt{m} + m\right) - \left(-\sqrt{m}\right).\left(-2m\sqrt{m} + m\right)\right| = m\sqrt{m}$.

Theo đề: $S_{ABC} < 10 \Leftrightarrow m\sqrt{m} < 10 \Leftrightarrow m^3 < 100 \Leftrightarrow m < \sqrt[3]{100}$

Kết hợp với điều kiện $m > 0$ ta được $0 < m < \sqrt[3]{100}$. Suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy: có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu.

Câu 45: Chọn B

$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1); y' = 0 \Leftrightarrow 6(x-m)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array} \right.$.

Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị với $\forall m$.

Với $x = m \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 + 1 \Rightarrow A\left(m; 2m^3 + 3m^2 + 1\right)$.

Với $x = m+1 \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 \Rightarrow B\left(m+1; 2m^3 + 3m^2\right)$.

Có $\overrightarrow{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là: $x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$.

Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(M, AB)$ nhỏ nhất.

$$d(M, AB) = \frac{\left|2m^3 + m - 2m^3 - 3m^2 - m - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|-3m^2 - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M, AB) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu = xảy ra $m = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{MAB} = \dfrac{1}{2}d(M, AB).AB = \dfrac{1}{2}$, đạt khi $m = 0$.

Câu 46: Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$.

(C_m) có hai điểm cực trị khi: phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

Hay: $\Delta'>0 \Leftrightarrow 4-3(m-3)>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{13}{3}$.

Ta có: $y=y'.\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}\right)+\left(\dfrac{2m}{3}-\dfrac{26}{9}\right)x+\dfrac{7m}{9}+\dfrac{2}{3}$.

Nên phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y=\left(\dfrac{2m}{3}-\dfrac{26}{9}\right)x+\dfrac{7m}{9}+\dfrac{2}{3}$.

Đường thẳng d đi qua $M(9;-5)$ nên:

$\left(\dfrac{2m}{3}-\dfrac{26}{9}\right).9+\dfrac{7m}{9}+\dfrac{2}{3}=-5 \Leftrightarrow m=3$.

Câu 47: Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6x$

Ta có: $y=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho $\Rightarrow \Delta: y=-2x-1$

d vuông góc với Δ nên: $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 48: Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ thì hàm số đã cho trở thành: $y=2x^2+1$, hàm số này có một điểm cực trị, do đó ta loại trường hợp này.

Trường hợp 2: Nếu $m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$

Ta có $y'=4(m+1)x^3-4x=4x\left[(m+1)x^2-1\right]$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (m+1)x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{1}{m+1} \quad (1) \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1 khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và nhỏ hơn 1, hay: $0<\dfrac{1}{m+1}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}>0 \\ \dfrac{1}{m+1}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}>0 \\ \dfrac{-m}{m+1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>0$.

Câu 49: Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$ thì hàm số đã cho trở thành $y=x^2-3$, có 1 điểm cực trị.

Trường hợp 2: Nếu $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$.

Ta có $y'=4(m-2)x^3+2(m-1)x=2x\left[2(m-2)x^2+m-1\right]$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2(m-2)x^2+m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{1-m}{2(m-2)} \quad (1) \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất hay phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$, hay: $\dfrac{1-m}{2(m-2)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le 1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với trường hợp 1 ta được: $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Cần nhớ:

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} ab\ge 0 \\ a^2+b^2>0 \end{cases}$. (1)

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab<0$. (2)

Câu 50: Chọn D

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow -2(m+1)<0 \Leftrightarrow m>-1$.

$y'=4x^3-4(m+1)x=4x(x^2-m-1)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in(-1;1) \\ x=\pm\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu đều thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $\pm\sqrt{m+1}\in(-1;1)$ $\Leftrightarrow \sqrt{m+1}<1 \Leftrightarrow -1<m<0$.

Kết hợp điều kiện hàm số có 3 cực trị ta được tập hợp các giá trị của m là $(-1;0)$.

Câu 51: Chọn D

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow -2(m^2-m+1)<0 \Leftrightarrow m^2-m+1>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$..

Ta có $y'=4x^3-4(m^2-m+1)x=4x(x^2-m^2+m-1)$.

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2-m+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m^2-m+1} \end{array}\right.$.

Nhận thấy $x=0$ là điểm cực đại của hàm số nên suy ra $x_{1,2}=\pm\sqrt{m^2-m+1}$.

Do đó $|x_1-x_2|\le 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-m+1}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+1}\le 1 \Leftrightarrow m^2-m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 1$.

Vậy tập hợp các giá trị của m cần tìm là $[0;1]$.

Câu 52: Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4m^2x=4x(x^2-m^2)=0$. Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm m \end{array}\right.$.

Vậy với điều kiện $m\ne 0$ hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0;2m)$, $B(-m;-m^4+2m)$, $C(m;-m^4+2m)$.

Ta có $\overrightarrow{OB}=(-m;-m^4+2m)$; $\overrightarrow{CA}=(-m;m^4)$.

Vì tứ giác $ABOC$ có hai đường chéo AO và BC vuông góc và $AB=AC$ nên nó là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow -m^4+2m=m^4 \Leftrightarrow 2m(m^3-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\ (l) \\ m=1 \end{array}\right.$.

Câu 53: Chọn D

Ta có $y' = 4x\left(x^2 - m\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A\left(0; m^4 - 2m^2\right)$; $B\left(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I\left(0; m^4 - 3m^2\right)$, $J\left(0; \dfrac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

Điều kiện: $m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 54: Chọn A

$$y' = \frac{(2x + m)(x - 1) - x^2 - mx - m^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - \left(m + m^2\right)}{(x - 1)^2}.$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + m^2 > 0 \\ -1 - m - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y = \dfrac{\left(x^2 + mx + m^2\right)'}{(x - 1)'} = 2x + m$.

Gọi $x_A; x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A; x_B$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - \left(m + m^2\right) = 0$.

Theo định lí Viet ta có $x_A + x_B = 2$; $x_A.x_B = -m^2 - m$.

$y_A = 2x_A + m$; $y_B = 2x_B + m$.

$\widehat{AOB} = 90° \Rightarrow x_A.x_B + y_A.y_B = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + 4x_A x_B + 2m\left(x_A + x_B\right) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5\left(-m^2 - m\right) + 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$.

Câu 55: Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathbb{R}$ và cũng là tập xác định của hàm số $y = \left|f(x)\right|$.

Ta có, hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 4 nên nó có tối đa 3 điểm cực trị là x_1, x_2, x_3 và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_4, x_5, x_6, x_7.

Do đó, hàm số $y = \left|f(x)\right|$ có nhiều nhất là 7 điểm cực trị, chính là các điểm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

Vậy để hàm số $y = \left|f(x)\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt hay $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^4-\left(2m+1\right)x^3+\left(m+4\right)x^2+\left(5m-6\right)x+2m-12=0$

$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x^2-2mx+6-m\right)=0$

Suy ra $f\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $g\left(x\right)=x^2-2mx+6-m$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 và khác 2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+m-6>0\\g\left(-1\right)\neq 0\\g\left(2\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>2\end{array}\right.\\m\neq -7\end{cases}$.

Từ đó ta được $m\in\left\{-10;-9;-8;-6;-5;-4;3;4;5;6;7;8;9;10\right\}$. Có 14 số nguyên thỏa mãn.