ĐỀ SỐ 25

ĐÈ THI HSG TOÁN 9 TP HỒ CHÍ MINH 2023-2024

Câu 1. (3 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ và $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức P = a^4+b^4.

Câu 2.(4 điểm) Cho phương trình $x^3+mx^2-x+m-m^2=0$ (*) với tham số m.

a, Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có nghiệm x = 1 – m với mọi giá trị của tham số m.

b, Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3$.

Câu 3. (4 điểm) Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (0) có đường cao AD; AM là đường kính của đường tròn (0); K là hình chiếu của B lên AM. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BD và CM.

a, Chứng minh rằng DK vuông góc AC.

b, Chứng minh rằng AEFC là tứ giác nội tiếp.

c, Gọi H là trực tâm của tam giác AEC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEFC. Chứng minh rằng HE = 2IO.

Câu 4. (3 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức dưới đấy:

a, $\frac{(a+1)^2}{a^2+1}\leq 2$.

b, $\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\leq\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}$.

Câu 5. (3 điểm) Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=2\widehat{B}$. Chứng minh rằng

$BC^2=AB.AC+AC^2$.

Câu 6. (3 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên x, y và số nguyên tố p sao cho

$p^x=y^4+64$.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow a+b=ab$ (1)

$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}=\frac{a+b+2}{2(a+b)}$ (2)

Kết hợp (1) và (2) $\Rightarrow a+b=ab=-2$

$P=a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2(ab)^2=\left[\left(a^2+b^2\right)^2-2ab\right]^2-2(ab)^2=\left[(-2)^2-2.(-2)\right]^2-2.(-2)^2=56$

Câu 2.

a, Đặt: f(x;m) = $x^3+mx^2-x+m-m^2$ với tham số m.

Xét f(1 – m),

$f(1-m)=(1-m)^3+m(1-m)^2-(1-m)+m-m^2$

$¿1-3m+3m^2-m^3+m-2m^2+m^3-1+m+m-m^2=0$

$\Rightarrow x=1-m$ là nghiệm của f(x;m) hay x = 1 – m là nghiệm của (*).

b, Nhận xét: f(x; m) $⋮(x+m-1)$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow x^3+mx^2-x^2+x^2+xm-x-m^2-xm+m=0$

$\Leftrightarrow x^2(x+m-1)+x(x+m-1)-m(x+m-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+m-1)(x^2+x-m)=0$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+m-1=0\\x^2+x-m=0(1)\end{array}\right.$

Vậy phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1- m.

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta_{(1)}=1+4m>0\\(1-m)^2+(1-m)-m\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>\frac{-1}{4}\\m\neq 2\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Gọi $x_1=1-m$và $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1).

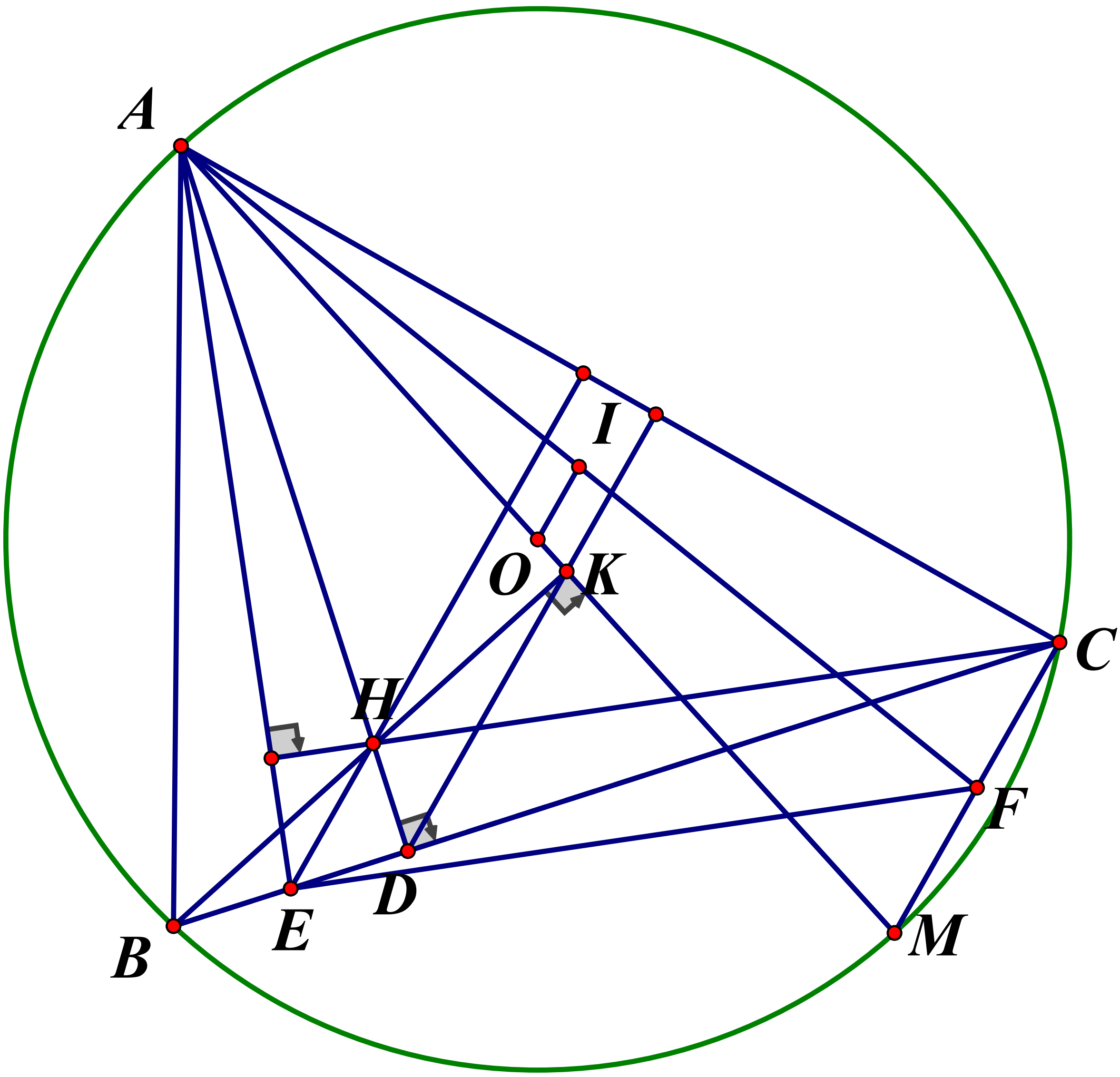
Theo Vi – ét: $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=-1\\x_1.x_2=-m\end{array}\right.$

Ta có: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3$

$\Leftrightarrow(1-m)^2+(-1)2-2(-m)=3$

$\Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$ (nhân)

Câu 3.



a, Chứng minh rằng DK ⊥ AC:

$\widehat{BCM}=\widehat{BAD} \Rightarrow DK/¿MC \Rightarrow DK \perp AC$

b, Chứng minh rằng AEFC là tứ giác nội tiếp:

$\Delta ABD \sim \Delta AMC$; E trung điểm BD; F trung điểm MC

$\Rightarrow ABE \sim AMF$ (T/c tam giác phân đôi)

$\Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{MAF} \Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{MCE}=\widehat{EAF}$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEFC nội tiếp.

c, Chứng minh rằng HE = 2IO:

Chứng minh EHCF là hình bình hành $\Rightarrow HE=CF=MF$

$OI = \frac{1}{2}MF \Rightarrow$ đpcm

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

a, $\frac{(a+1)^2}{a^2+1} \leq 2$.

$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 \leq 2(a^2+1) \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$: đúng với mọi a.

b, $\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2} \leq \frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}$.

$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+1} \leq \frac{2}{(a+1)^2}$;

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{1}{b^2+1} \leq \frac{2}{(b+1)^2}, \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{1}{(c+1)^2}$

Khi đó: $\frac{4}{a^2+b^2+2}=\frac{4}{a^2+1+b^2+1} \leq \frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} \leq 2\left[\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\right]$

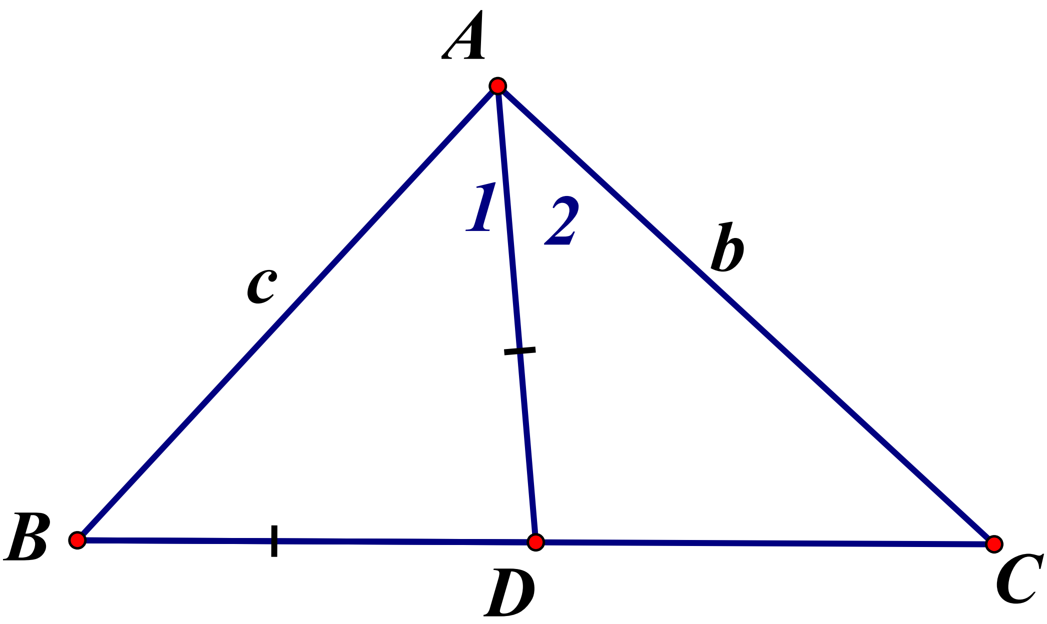
$\Leftrightarrow \frac{2}{a^2+b^2+2} \leq \frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}$.

Chứng minh tương tự:

$\frac{2}{b^2+c^2+2} \leq \frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}; \frac{2}{c^2+a^2+2} \leq \frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^2}$.

Từ đây, suy ra điều cần chứng minh.

Câu 5. Chứng minh: $BC^2=AB.AC+AC^2 \Leftrightarrow a^2=bc+b^2$



$\Delta CAD \sim \Delta CBA \Rightarrow BC=\frac{AC^2}{CD}=AC.\frac{AC}{CD}=AC.\frac{AB}{BD}$ (1)

BD = $\frac{ac}{b+c}$ (bài toán quen thuộc lớp 8)

(1) $\Rightarrow a=b.\frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \Rightarrow a=\frac{b(b+c)}{a} \Rightarrow a^2=bc+b^2$ (đpcm)

Câu 6. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y và số nguyên tố p sao cho

$p^x=y^4+64$ (1)

Trường hợp 1: $y \vdots 2 \Rightarrow y=2k$ (k thuộc N)

$\Rightarrow p^x \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2 \Rightarrow p=2.$

(1) $\Leftrightarrow 2^x=(2k)^4+64 \Leftrightarrow 2^x=16(k^4+4)$

Nếu k > 0, khi đó:

$k^4+4=2^m$¿

$\Rightarrow k \vdots 2 \Rightarrow y=4m_1(m_1 \in$ N*)

$\Rightarrow 2^x=(4m_1)^4+64=64(2m_1{}^4+1)=2^6(2m_1{}^4+1)$

$\Rightarrow (2m_1{}^4+1) \vdots 2$ (vô lí) $\Rightarrow k=2 \Rightarrow y=0; x=6$

Trường hợp 2: y không chia hết cho 2, suy ra p không chia hết cho 2

$p^x=(y^2+8)^2-(4y)^2=(y^2+4y+8)(y^2-4y+8)$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2+4y+8=p^m \\ y^2+4y+8=p^n \end{cases}$ (m, n ∈ N*; m > n; m + n = x)

$\Rightarrow p^m-p^n=8y \Rightarrow p^n\left(p^{m-n}-1\right)=8y$, trong đó (8;y) = 1

$\Rightarrow p^m=8$ (vô lí) ⇒ y không thể là số lẻ

Đáp số (p ; x ; y) = (2; 6 ; 0)