

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN
KHOA TOÁN
LỚP SƯ PHẠM TOÁN K29

Nhóm thực hiện:

*Huỳnh Thị Diệu Hằng
Võ Thị Hồng Hân
Lê Thị Hậu
Trần Thị Hiền
Nguyễn Đức Hiệp
Bùi Trung Hiếu
Lê Văn Hiếu*

Đề tài:

**HỌ ĐƯỜNG CÔNG TIẾP XÚC VỚI
ĐƯỜNG CỎ ĐÌNH**
(Bài kiểm tra học trình)

Người hướng dẫn: Dương Thanh Vỹ

Quy nhơn, tháng 11 năm 2009

LỜI NÓI ĐẦU

Chuyên đề ***“Họ đường cong tiếp xúc với đường cô định”*** là một vấn đề thường gặp trong các bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc của hai đồ thị, được ứng dụng rất nhiều vào phương trình và bất phương trình có tham số, đặc biệt có trong các đề thi tuyển sinh đại học và cao đẳng.

Tuy nhiên, vấn đề tiếp xúc vẫn đang là vấn đề gây tranh luận nhiều, nhất là từ khi Bộ GD&ĐT quyết định kể từ năm 2000-2001 không được dùng phương pháp nghiệm bội, nghiệm kép để giải các bài toán về tiếp tuyến và tiếp xúc. Thật ra phương pháp này rất tiện lợi cho các hàm đa thức, phân thức và hơn nữa với xu hướng đề ra hiện nay nếu dùng nó có thể giải quyết nhanh các bài toán trắc nghiệm.

Để làm rõ vấn đề trên và nhằm giúp bạn đọc có cái nhìn sâu hơn, đúng đắn hơn về sự tiếp xúc, cụ thể là sự tiếp xúc của một họ đường cong với đường cô định. Trong đề tài này, chúng tôi sẽ giải quyết bài toán ***“Chứng minh họ đường cong tiếp xúc với đường cô định”*** dưới nhiều quan điểm khác nhau, nhiều phương pháp khác nhau.

* Nội dung đề tài được chia làm 3 chương:

Chương 1: Tổng quan lý thuyết về sự tiếp xúc.

Chương 2: Các phương pháp chứng minh họ đường cong tiếp xúc với đường cô định.

Chương 3: Bài tập áp dụng.

Trong chương 1, đề tài đưa ra các khái niệm cơ bản và bổ túc một số kiến thức về sự tiếp xúc. Trong chương 2 trình bày các phương pháp để chứng minh họ đường cong tiếp xúc với đường cô định. Mỗi phương pháp đều có nhận xét và nêu cơ sở các phương pháp kèm theo ví dụ cụ thể. Ở chương 3, chúng tôi đưa ra một số bài tập với nhiều lời giải khác nhau áp dụng từ các phương pháp đã nêu ở chương 2, cùng một số bài tập ứng dụng và tham khảo.

Tuy nhiên, trong quá trình biên soạn, vì điều kiện và thời gian có hạn nên đề tài không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp từ bạn đọc gần xa để đề tài chúng tôi được hoàn thiện hơn. Xin cảm ơn quý bạn đọc !

Quy Nhơn, ngày 20 tháng 11 năm 2009.

MỤC LỤC

	Trang
LỜI NÓI ĐẦU	1
MỤC LỤC	2
Chương 1: TỔNG QUAN LÝ THUYẾT VỀ SỰ TIẾP XÚC	3
I. Các khái niệm cơ bản	3
II. Định lý	4
Chương 2: CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH	5
I. Phương pháp sử dụng định nghĩa tiếp xúc	5
II. Phương pháp điều kiện nghiệm bội, nghiệm kép	6
III. Phương pháp tách bộ phận nghiệm kép	7
IV. Phương pháp đạo hàm	9
V. Phương pháp biên	10
VI. Phương pháp tiếp tuyến cố định	11
VII. Phương pháp tìm tiếp tuyến cố định đi qua các điểm cực trị ..	13
Chương 3: BÀI TẬP AÙP DỤNG	14
* CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG.	22
* BÀI TẬP THAM KHẢO	26
TÀI LIỆU THAM KHẢO	27

Chương I: TỔNG QUAN LÝ THUYẾT VỀ SỰ TIẾP XÚC



I. Các khái niệm cơ bản:

1. Họ đường cong là gì?

Họ đường cong là bao gồm những đường cùng chung một đặc điểm nào đó, thống nhất giữa tất cả các đường. Qua các bài toán đã gặp thì ta xét mối quan hệ đó thông qua tham số.

2. Đường cố định: Đường cố định là bao gồm hai yếu tố: đường & cố định.

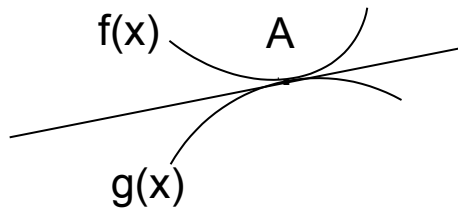
+ Đường: đường thẳng, đường cong

+ Cố định: không lay chuyển, không đổi

3. Quan hệ tiếp xúc:

a. Định nghĩa 1: Hai đường cong (C): $y=f(x)$ & (D): $y=g(x)$ gọi là tiếp xúc nhau nếu giữa chúng tồn tại một tiếp tuyến chung tại cùng một điểm.

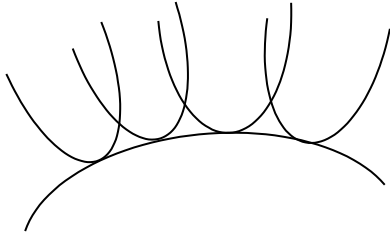
Từ đây, ta có (C) tiếp xúc với (D) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm



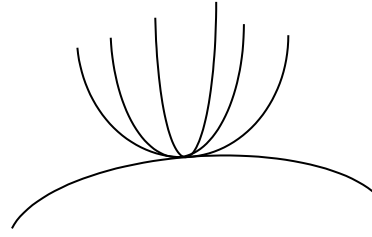
b. Định nghĩa 2: Họ đường cong (C_m): $y=f(x,m)$ được gọi là tiếp xúc với đường cố định (D): $y=g(x)$ nếu mọi đường của họ đường cong (C_m) đều tiếp xúc với đường cố định (D).

Từ đây, ta có (C_m) tiếp xúc với (D) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,m) = g(x) \\ f'(x,m) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm $\forall m$

★ Biểu diễn hình học sự tiếp xúc với một đường cố định:



Điểm tiếp xúc di động



Điểm tiếp xúc cố định

4. Định nghĩa nghiệm bội:

Cho $f(x)$ là đa thức đại số. Số x_0 được gọi là nghiệm bội k của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - x_0)^k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (x - x_0)^k g(x) \\ 2 \leq k \in \mathbb{Z}; g(x_0) \neq 0 \end{cases}$

II. Định lý:

1. Định lý 1: Đa thức $f(x)$ có nghiệm bội $x=x_0$ khi và chỉ khi $f(x_0)=f'(x_0)=0$

Chứng minh: + **Điều kiện cần:** Nếu x_0 là nghiệm bội của phương trình $f(x)=0$. Theo định nghĩa $f(x)=(x - x_0)^2 \cdot Q(x)$ nên:

$$\Rightarrow f'(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q'(x) + 2(x - x_0) \cdot Q(x) \Rightarrow f(x_0)=f'(x_0)=0$$

+ **Điều kiện đủ:** Nếu $f(x_0)=f'(x_0)=0$

$$\text{Do } f(x_0)=0 \Rightarrow f(x)=(x - x_0) \cdot G(x) \Rightarrow f'(x)=(x - x_0) \cdot G'(x) + G(x)$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=G(x_0). \text{ Do } f'(x_0)=0 \Rightarrow G(x_0)=0 \Rightarrow G(x)=(x - x_0) \cdot Q(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_0) \cdot G(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q(x) \quad \square$$

2. Định lý 2: Cho hai phân thức hữu tỉ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $g(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$. Khi đó

đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x=x_0$ khi và chỉ khi phương trình $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ có nghiệm bội $x=x_0$, với $Q(x_0) \neq 0$, $V(x_0) \neq 0$

Chứng minh: Giả sử đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x=x_0$

$$\text{Theo định nghĩa 1 ta có: } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{U(x)}{V(x)} \quad (1)$$

$$\frac{P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)}{Q^2(x_0)} = \frac{U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{V^2(x_0)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow P(x_0)V(x_0) = Q(x_0)U(x_0)$$

Từ (2)

$$\Leftrightarrow [P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)] V^2(x_0) = [U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)] Q^2(x_0)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)] V^2(x_0)Q(x_0)U(x_0) = \\
&= [U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)] Q^2(x_0)P(x_0)V(x_0) \\
&\Leftrightarrow [P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)] V(x_0)U(x_0) = [U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)] Q(x_0)P(x_0) \\
&\Leftrightarrow Q(x_0)U(x_0)[P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0)] = P(x_0)V(x_0)[U(x_0)Q'(x_0) + U'(x_0)Q(x_0)] \\
&\Rightarrow P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0) = U(x_0)Q'(x_0) + U'(x_0)Q(x_0) \\
&\Leftrightarrow P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0) - [U(x_0)Q'(x_0) + U'(x_0)Q(x_0)] = 0 \\
&\Leftrightarrow [P(x)V(x)]' \Big|_{x=x_0} - [U(x)Q(x)]' \Big|_{x=x_0} = 0 \Leftrightarrow (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

Chương 2: CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH



Trong chương này sẽ trình bày các phương pháp để giải quyết bài toán “chứng minh họ đường cong tiếp xúc với đường cố định” theo một trình tự từ tổng quát đến những trường hợp đặc biệt dựa trên sự thay đổi các yếu tố họ đường cong và đường cố định hay điểm tiếp xúc. Mỗi phương pháp đều có ví dụ minh họa và những nhận xét cho mỗi phương pháp để bạn đọc thấy rõ về cơ sở các phương pháp, và áp dụng để giải toán.

Bài toán: Chứng minh họ đường cong (Cm) : $y=f(x,m)$ tiếp xúc với đường cố định (D) ? Với (D) là một đường đã biết phương trình thì ta sử dụng định nghĩa tiếp xúc và định lý 2 để chứng minh (Cm) tiếp xúc với (D). Bây giờ ta chỉ xét các phương pháp chứng minh (Cm) tiếp xúc với đường cố định (D), với (D) chưa biết phương trình của nó.

I. Phương pháp sử dụng định nghĩa tiếp xúc:

Đối với bài toán đã cho biết dạng của đường cố định (D). Dựa vào định nghĩa về sự tiếp xúc của họ đường cong và đường cố định ta thực hiện các bước sau:

• **Bước 1:** Giả sử (Cm) : $y=f(x,m)$ tiếp xúc với đường cố định (D): $y=g(x)$ ($g(x)$ chứa tham số giả định)

• **Bước 2:** (Cm) tiếp xúc với (D) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,m) = g(x) \\ f'(x,m) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm $\forall m$

• **Bước 3:** Giải hệ điều kiện có nghiệm $\forall m$ suy ra các tham số giả định trong $g(x)$

Ví dụ 1: [3] Chứng minh họ (Cm): $y = \frac{(m+1)x+m}{x+m}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Giải: Giả sử (Cm): $y=f(x,m)$ tiếp xúc với đường thẳng cố định (D): $y=ax+b$ (Cm) tiếp xúc với (D) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm $\forall m \neq 0$

$$\begin{cases} f(x,m) = ax+b \\ f'(x,m) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(m+1)x+m}{x+m} = ax+b & (1) \\ \frac{m^2}{(x+m)^2} = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow m+1 - \frac{m^2}{x+m} = ax+b \Leftrightarrow a(x+m) = am+m+1-b - \frac{m^2}{x+m}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{(a+1)m+1-b}{x+m} - \frac{m^2}{(x+m)^2}$$

Kết hợp với (2) ta được
$$\begin{cases} 2a = \frac{(a+1)m+1-b}{x+m} \\ \frac{m^2}{(x+m)^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 = \frac{[(a+1)m+1-b]^2}{(x+m)^2} \\ \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{a}{m^2} \end{cases}$$

$$(m \neq 0)$$

$$\Rightarrow 4am^2 = (a+1)^2 m^2 + 2(1-b)(a+1)m + (1-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 m^2 + 2(1-b)(a+1)m + (1-b)^2 = 0 \quad (*)$$

$$(Cm) \text{ tiếp xúc với } (D) \Leftrightarrow (*) \text{ đúng } \forall m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = 0 \\ (a+1)(1-b) = 0 \\ (1-b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy (Cm) tiếp xúc với đường thẳng cố định (D): $y=x+1$.

☆Chú ý: Khi chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn, các đường conic, thay vì sử dụng định nghĩa sự tiếp xúc ta sử dụng các đẳng thức về điều kiện tiếp xúc của nó.

II. Phương pháp điều kiện nghiệm bội, nghiệm kép:

Dựa trên kết quả suy ra từ Định lý 2, ta có phương pháp sau:

- **Bước 1:** Gọi phương trình (D) là: $y=g(x)$, ($g(x)$ chứa tham số giả định)
- **Bước 2:** (Cm) tiếp xúc với (D) $\Leftrightarrow f(x,m)=g(x)$ có nghiệm bội $\forall m$

• **Bước 3:** Giải phương trình điều kiện $\forall m$ suy ra các tham số giả định trong $g(x)$

Nhận xét: Phương pháp này cũng chỉ sử dụng khi bài tập cho biết dạng của đường cố định. Họ đường cong và đường cố định là đa thức phân thức thì sử dụng phương pháp này, việc tính toán sẽ đơn giản hơn.

Ví dụ 2: [3] Để thấy được phương pháp này đơn giản hơn, ta xét lại Ví dụ 1, với cách giải khác.

Chứng minh họ (Cm): $y = \frac{(m+1)x+m}{x+m}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Giải: Gọi phương trình đường thẳng cố định cần tìm là (D): $y=ax+b$

(Cm) tiếp xúc với (D) $\Leftrightarrow \frac{(m+1)x+m}{x+m} = ax+b$ có nghiệm kép $\forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow (m+1)x+m=(ax+b)(x+m)$ có nghiệm kép $\forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow ax^2 + [(a-1)m+b-1]x + (b-1)m=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = [(a-1)^2 + (b-1)^2] m^2 + 2(a-1)(b-1)m + (b-1)^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0 \\ (a-1)(b-1) = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Vậy (D): $y=x+1$

Ví dụ 3 : [3] Chứng minh rằng họ (Cm):

$y=f(x)=2x^2+2(m-1)x+m^2+4m$ luôn tiếp xúc với một Parabol (P) cố định

Giải: Gọi phương trình (P) cần tìm có dạng $y=ax+bx+c$, $a \neq 0$

(Cm) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow$ phương trình $2x^2+2(m-1)x+m^2+4m=ax^2+bx+c$ có nghiệm kép $\forall m$

$\Leftrightarrow (2-a)x^2 + [2(m-1)-b]x + m^2 + 4m - c = 0$ có nghiệm kép $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-a \neq 0 \\ \Delta_m = [2(m-1)-b]^2 - 4(2-a)(m^2+4m-c) = 0, \forall m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ (4a-4)m^2 + (16a-4b-40)m + b^2 + 4ac + 4b - 8c + 4 = 0, \forall m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ 4a-4=0 \\ 16a-4b-40=0 \\ b^2 + 4ac + 4b - 8c + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=-4 \end{cases}$$

Vậy (P) cần tìm là $y=x^2 - 6x - 4$.

III. Phương pháp tách bộ phận nghiệm kép:

Giả sử (Cm): $y=f(x,m)$ tiếp xúc với đường cố định (D): $y=g(x)$. Khi đó phương trình: $f(x,m) - g(x) = 0$ có nghiệm bội $\forall m$ nên ta có thể biểu diễn

$$f(x,m) - g(x) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\gamma(x,m)} \quad \text{với } 2 \leq k \in \mathbb{Z}$$

Từ đây ta có phương pháp như sau:

• **Bước 1:** Biểu diễn $f(x,m) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\gamma(x,m)} + g(x)$ với $\begin{cases} 2 \leq k \in \mathbb{Z} \\ g'_m = 0 \end{cases}$

• **Bước 2:** Xét $f(x,m) = g(x) \Leftrightarrow \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\gamma(x,m)} = 0$ có nghiệm bội

$$x = -\frac{\beta(m)}{\alpha(m)}$$

• **Bước 3:** Kết luận (Cm) luôn tiếp xúc với (D): $y=g(x)$ cố định.

Nhận xét: Phương pháp này cho cách giải ngắn gọn, độc đáo, nó giải quyết được lớp các bài toán mà không cần biết trước dạng của đường cố định (D). Tuy nhiên, cần nắm vững kỹ thuật biến đổi

$$f(x,m) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\gamma(x,m)} + g(x)$$

Ta có thể biến đổi bằng trực quan toán học hoặc sử dụng phương pháp sau:

• **Bước 1:** Lấy đạo hàm theo m hàm số $y=f(x,m)$

Ta có

$$y'_m = \frac{\left[\alpha(m).x + \beta(m) \right]^{k-1} \left\{ k.y(x, m) \left[\alpha(m).x + \beta(m) \right]' - y'(x, m) \left[\alpha(m).x + \beta(m) \right] \right\}}{y^2(x, m)} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = - \frac{\beta(m)}{\alpha(m)}$$

• **Bước 2:** Biến đổi $f(x, m)$ theo bộ phận nghiệm bội
 $f(x, m) = (x - x_0)^k . h(x)$

Ví dụ 4: [2] Chứng minh khi m thay đổi, họ đồ thị

$$(C_m): f(x, m) = x^3 + 4x^2 + mx + \frac{m^2}{2} \text{ luôn tiếp xúc với một đồ thị cố định}$$

Giải: Ta có

$$f(x, m) = \frac{1}{2}(m^2 + 2mx + x^2) + x^3 + \frac{7}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x + m)^2 + x^3 + \frac{7}{2}x^2$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2. \text{ Ta có}$$

$$\text{Phương trình } f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x + m)^2 = 0 \text{ có nghiệm kép } x = -m, \forall m$$

$$\Rightarrow (C_m) \text{ luôn tiếp xúc với một đường cố định (D): } g(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2$$

Ví dụ 5: [4]

$$\text{Cho (C}_m\text{): } y = \frac{x^2 + (1 - 2m)x + m^2 + 2}{x - 1}. \text{ Chứng minh rằng } \forall m \neq 1,$$

(C_m) luôn luôn tiếp xúc với một đường cố định

Giải:

$$y'_m = \frac{-2x^2 + 2(m+1)x - 2m}{(x-1)^2} = \frac{-2(x-1)(x-m)}{(x-1)^2} = \frac{2(m-x)}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow x = m$$

$$\Rightarrow y = \frac{(x-m)^2 + x + 2}{x-1} = \frac{(x-m)^2}{x-1} + \frac{x+2}{x-1}$$

Đặt $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Ta có

Phương trình $f(x) - g(x) = \frac{(x-m)^2}{x-1} = 0$ có nghiệm kép $x = m, \forall m \neq 1$

Do đó (C_m) luôn tiếp xúc với đường cố định $(D): g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

IV. Phương pháp đạo hàm:

• **Bước 1:** Viết lại phương trình $y=f(x,m)$ thành $F(x,m,y)=0$

• **Bước 2:** Khử m từ hệ $\begin{cases} F(x, y, m) = 0 \\ \frac{dF(x, y, m)}{dm} = 0 \end{cases}$ tìm được hàm $y=g(x)$

• **Bước 3:** Chứng minh họ $(C_m): y=f(x,m)$ tiếp xúc với $y=g(x)$ cố định

Nhận xét: Phương pháp này sử dụng tốt cho lớp các bài toán mà không cần biết dạng của đường cố định (D)

Ví dụ 6: [2] Gọi (C_m) là họ đường cong có phương trình :

$$y = \frac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m} \quad (1)$$

Chứng minh họ (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Giải:

$$\text{Đặt } F(x, y, m) = (x - m)y - (m - 2)x + m^2 - 2m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m(x+y+2) + 2x + xy + 4 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow F'_m(x, y, m) = 2m - (x+y+2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(x+y+2)$$

Thay m vào (2) ta được :

$$\frac{1}{4}(x+y+2)^2 - \frac{1}{2}(x+y+2)^2 + 2x + xy + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - 4(x-y) - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-6 \\ y=x+2 \end{cases}$$

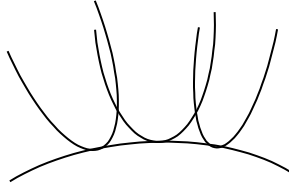
V. Phương pháp biên:

• **Bước 1:** Tìm tập hợp điểm $M(x,y)$ mà không đường cong nào thuộc họ (C_m) đi qua. Tập hợp các điểm này có đường biên $(D): y = g(x)$

(Ta tìm tập hợp điểm $M(x,y)$ mà không đường cong nào thuộc họ (C_m) đi qua bằng cách xem phương trình $F(x,y,m)=0$ là phương trình đối với ẩn m . Sau đó tìm điều kiện giới hạn giữa sự có nghiệm và sự vô nghiệm của phương trình $F(x,y,m)=0$. Giả sử là $y=g(x)$, khi đó $y=g(x)$ là đường cố định cần tìm)

• **Bước 2:** Chứng minh họ $(C_m): y=f(x,m)$ tiếp xúc với đường cố định $(D): y=g(x)$.

Biểu diễn sự tiếp xúc:



Nhận xét: Phương pháp này sử dụng khi đường biên của tập hợp các điểm $M(x,y)$ mà không có đồ thị nào của (C_m) đi qua là một đường cong có tính chất của một hình lồi. Phương pháp này có dấu hiệu nhận dạng đặc trưng là tham số m có bậc cao nhất bằng 2 trong biểu thức $f(x,m)$.

Ví dụ 7: [2] Chứng minh họ $(C_m): y=f(x,m)=\frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{m-x}$ (1)

luôn tiếp xúc với một đường cố định.

Giải: (1) được viết lại $y(m-x) = 2x^2 + (1-m)x + 1 + m$

$$\Leftrightarrow m(x+y-1) = 2x^2 + x + 1 + xy \quad (2)$$

$$\text{Phương trình (2) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x^2+x+1+xy \neq 0 \end{cases}$$

Ta chứng minh (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $(D): g(x) = 1-x$

Xét hệ

$$(3) \quad \begin{cases} f(x,m)=g(x) \\ f'(x,m)=g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{m-x}=1-x \\ \frac{-2x^2+4mx-m^2+2m+1}{(m-x)^2}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1=0 \\ -\frac{(m+1)^2}{(m+1)^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall m \neq -1$ hệ (3) luôn có nghiệm $x = -1$

Vậy (Cm) và đường thẳng (D) luôn tiếp xúc nhau.

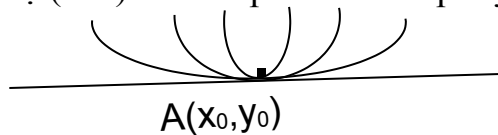
Nhận xét: Lời giải cho thấy:

+ (Cm) tiếp xúc với đường thẳng (D): $y = 1 - x$ tại tiếp điểm cố định có hoành độ $x = -1$

+ Khi $m = -1$, họ (Cm) suy biến thành đường thẳng $y = -x - 2$; không có sự tiếp xúc.

VI. Phương pháp tiếp tuyến cố định:

Nếu họ (Cm) chứa đựng yếu tố “luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định” thì ngoài những phương pháp trên, phương pháp tiếp tuyến cố định sẽ đơn giản hơn nhiều. Phương pháp này được xây dựng trên cơ sở tại điểm cố định, (Cm) có hệ số góc của tiếp tuyến không đổi. Điều đó chứng tỏ khi m thay đổi họ (Cm) luôn tiếp xúc với tiếp tuyến cố định.



Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm các điểm cố định của (Cm).
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ tại hoành độ các điểm cố định. Chứng tỏ trong các điểm cố định, tồn tại một điểm mà tại đó $f'(x)$ là một hằng số. Giả sử tồn tại $A(x_0, y_0)$: $f'(x) = k = \text{const}$.
- **Bước 3:** Kết luận (Cm) luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định là tiếp tuyến của họ (Cm) tại $A(x_0, y_0)$ có phương trình: $y = k(x - x_0) + y_0$

Ví dụ 8: [2] Cho họ Hypebol (Hm): $y = \frac{x^2 + (m-2)x + m}{x^2 - 2x + m}$ (1)

Chúng ta chứng tỏ rằng $\forall m \neq 0$ thì (H_m) luôn tiếp xúc với một đường cố định.

Giải: Giả sử (x_0, y_0) là điểm cố định của họ (H_m) . Khi đó ta có

$$y_0(x_0^2 - 2x_0 + m) = x_0^2 + (m - 2)x_0 + m, \quad \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m(y_0 - x_0 - 1) + x_0(y_0 - 1)(x_0 - 2) = 0, \quad \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y_0 - x_0 - 1) = 0 \\ x_0(y_0 - 1)(x_0 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy $\forall m \neq 0$, họ (H_m) luôn đi qua hai điểm cố định $(0, 1)$ và $(2, 3)$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - mx}{(x^2 - 2x + m)^2}$$

$$y'(0) = 1$$

$\Rightarrow$ Tại điểm cố định $(0, 1)$, (H_m) có hệ số góc của tiếp tuyến không đổi.

Do đó (H_m) luôn tiếp xúc với tiếp tuyến có phương trình $y = x + 1$

Chú ý: Trong ví dụ trên (H_m) có hai điểm cố định là $(0, 1)$ và $(2, 3)$.

Để chứng minh bài toán chỉ cần tồn tại một trong các điểm ấy có đạo

hàm bằng hằng số là đủ. Còn tại $(2, 3)$ ta có $y'(2) = \frac{m-2}{m}$ phụ thuộc vào

tham số m nên tiếp tuyến tại $(2, 3)$ không cố định. Điều này không cần ghi trong bài làm.

VII. Phương pháp tìm tiếp tuyến cố định đi qua các điểm cực trị:

Trong trường hợp họ đường cong tiếp xúc với đường cố định tại các điểm cực trị thì ta sử dụng phương pháp sau sẽ đơn giản hơn.

Bước 1: Tìm các điểm cực trị $x_1, x_2, \dots$ của họ đồ thị $(C_m): y = f(x, m)$ bằng cách giải phương trình $f'(x, m) = 0$

Bước 2: Nếu tồn tại $x_i: f'(x_i) = p = \text{const}$ thì $y = f(x_i, m)$ tiếp xúc với đường $y = p$ tại điểm (x_i, p)

Ví dụ 9: [3] Chứng minh họ (C_m) :

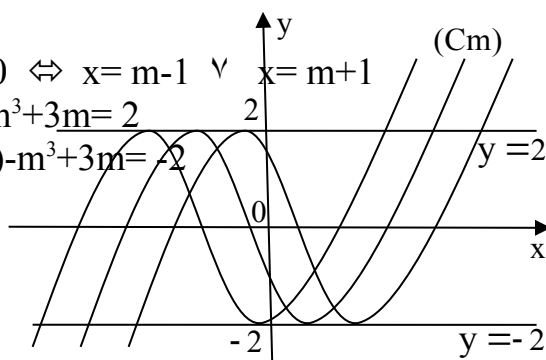
$y = f(x, m) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 3m$ luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Giải: Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = m - 1 \vee x = m + 1$$

$$f(m - 1) = (m - 1)^3 - 3m(m - 1)^2 + 3(m^2 - 1)(m - 1) - m^3 + 3m = 2$$

$$f(m + 1) = (m + 1)^3 - 3m(m + 1)^2 + 3(m^2 - 1)(m + 1) - m^3 + 3m = -2$$



Ta biểu diễn họ đồ thị (Cm) như hình vẽ:
 Từ đồ thị ta thấy (Cm) luôn tiếp xúc với
 Hai đường thẳng cố định là $y=2$ và $y=-2$

Nhận xét: Ở ví dụ này mỗi đường cong (Cm) đều có 2 cực trị, và 2 tiếp tuyến của đồ thị đi qua hai điểm cực trị đều cố định

Bây giờ ta xét 1 ví dụ (Cm) có 2 cực trị nhưng chỉ có 1 tiếp tuyến cố định tại một trong 2 cực trị đó.

Ví dụ 10: [2] Chứng minh họ (Cm) :

$$y = f(x, m) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + 2m^2x - \frac{5}{6}m^3 + 1 \quad (m \neq 0)$$

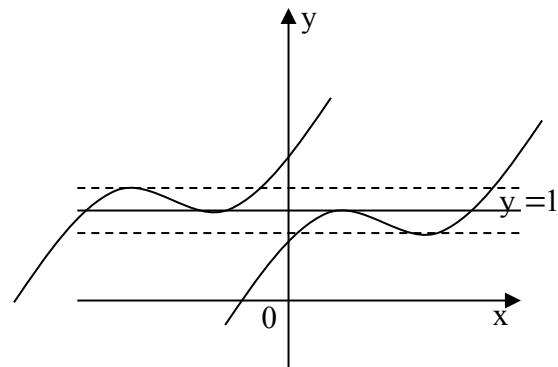
Giải :

$$y' = x^2 - 3mx + 2m^2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 2m \end{cases}$$

$$f(m) = \frac{1}{3}m^3 - \frac{3}{2}m^3 + 2m^3 - \frac{5}{6}m^3 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} f(2m) &= \frac{1}{3} \cdot 8m^3 - \frac{3}{2} \cdot 4m^3 + 4m^3 - \frac{5}{6}m^3 + 1 \\ &= -\frac{1}{6}m^3 + 1 \end{aligned}$$



Từ hình vẽ ta thấy (Cm) luôn tiếp xúc với đường cố định $y=1$ tại điểm cực trị $(m, 1)$.

Nhận xét : + Tiếp tuyến của (Cm) tại điểm cực trị có hoành độ $2m$ song song với nhau

+ Với $m=0$ đồ thị hàm số trở thành $y = \frac{1}{3}x^3$ không có cực trị.

Tóm lại, để chứng minh hai họ đường cong (Cm) tiếp xúc với nhau ở điểm cố định (D) ta thực hiện 2 bước :

Bước 1 : Tìm họ đường có điểm (L).

Bước 2 : Chứng minh (L) tiếp xúc với (Cm).



Chương 3:

BAI TẬP ỨNG DỤNG

Trong chöông naøy chuùng toài seõ ñöa ra caùc daïng baøi taäp ñeõ aùp duïng cho caùc phöông phaùp treân. Moät soá baøi taäp chuùng ta seõ trình baøy nhieàu caùch ñeõ baïn ñoïc thaáy ñöôïc öu ñieåm cuûa moãi phöông phaùp maø bieát caùch löïa choïn phöông phaùp thích hôïp cho töøng baøi taäp cuï theå.

Baøi 1: [3] CMR họ (Cm) : $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x - m}$, $m \neq -1$ (1)

luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Giaûi :

Nhàñ xeùt : Baøi toaùn ñaõ cho bieát daïng cuûa ñöôøng coá ñònh laø ñöôøng thaúng, do ñoù ta coù theå söû duïng ñöôïc caùc phöông phaùp sau :

• **Caùch 1 :** Phương pháp sử dụng hình học tiếp xúc.
(Cm) tiếp xúc với đường thẳng (D) : $y = ax + b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x - m} = ax + b \\ \left(\frac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x - m} \right)' = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + m + 1 + \frac{(m+1)^2}{x - m} = ax + b \\ 2 - \frac{(m+1)^2}{(x - m)^2} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2)(x - m) = \frac{(m+1)^2}{x - m} + (3 - a)m + 1 - b \\ \frac{(m+1)^2}{(x - m)^2} = 2 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = \frac{(m+1)^2}{(x - m)^2} + \frac{(3 - a)m + 1 - b}{x - m} \\ \frac{(m+1)^2}{(x - m)^2} = 2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a - 2) = \frac{(3 - a)m + 1 - b}{x - m} \\ \frac{(m+1)^2}{(x - m)^2} = 2 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(a - 2)(m + 1)^2 + [(3 - a)m + 1 - b]^2 = 0 \quad \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 \cdot m^2 + 2[4(a - 2) + (3 - a)(1 - b)] \cdot m + (1 - b)^2 + 4(a - 2) = 0 \quad \forall m \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 = 0 \\ 4(a - 2) + (3 - a)(1 - b) = 0 \\ (1 - b)^2 + 4(a - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow (D) : y = x - 1$$

• **Caùch 2** : Phương pháp ñieàu kieän nghieäm boäi, nghieäm keùp.

Giả sử (Cm) luôn tieáp xuùc vôùi ñöôøng thaúng coá ñònh

(D) : $y=ax+b$

$\Leftrightarrow$ Phöông trình $\frac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x - m} = ax + b$ coù nghieäm keùp

$\forall m \neq -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + (1-m)x + m + 1 = (ax + b)(x - m)$ coù nghieäm keùp

$\forall m \neq -1$

$\Leftrightarrow (a-2)x^2 - [(a-1)m + 1 - b]x - [(b+1)m + 1] = 0$ co ùnghieäm keùp

$\forall m \neq -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ \Delta = (a-1)^2 m^2 - 2[(a-1)(b-1) - 2(a-2)(b+1)]m + (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \end{cases} \quad \forall m \neq -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ (a-1)^2 = 0 \\ (a-1)(b-1) - 2(a-2)(b+1) = 0 \\ (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ b = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow (D): y = x - 1$

• **Caùch 3** : PP taùch boä phaän nghieäm keùp.

Ta coù $\frac{dy}{dm} = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-m)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x-m)^2} \Rightarrow f(x,m) = \frac{(x+1)^2}{x-m} + x - 1$

Xeùt heä phöông trình töông giao :

$$\begin{cases} (Cm): y = \frac{(x+1)^2}{(x-m)^2} \\ (D): y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{(x+1)^2}{x-m} = 0 \end{cases}$$

Do heä töông giao coù nghieäm keùp $x=-1$ neân (D): $y=x-1$ tieáp xuùc vôùi (Cm).

• **Caùch 4** : Phöông phaùp ñaïo haøm.

Töø (1) ta vieát laïi : $y(x-m) = 2x^2 + (1-m)x + m + 1$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)m - 2x^2 + xy - x - 1 = 0$$

Ñaët $F(x,y,m) = (x-y-1)m - 2x^2 + xy - x - 1$

Suy ra $F'_m = x - y - 1$

$$F'_m = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$$

Ta chöùng minh (Cm) tieáp xuùc vôùi ñöôøng thaúng (D) : $y=x-1$

Xeùt heä :

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x,m) = g(m) \\ f'(x,m) = g'(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x-m} = x-1 \\ \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (1-m)x + m + 1 = (x-1)(x-m) \\ \frac{(m+1)^2}{(x-m)^2} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ (x-m)^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x = 2m+1 \\ x = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Vaäy $\forall m$ heä ñang xeùt luôn coù nghieäm $x = -1$
Suy ra (Cm) luôn tieáp xuùc vôùi ñöông thaúng $y = x - 1$

• **Caùch 5** : Phöông phaùp bieân (lời giải ñã trình bày ở ví dụ phương pháp biên)

Töø caùch 4 ta thaáy (Cm) luôn tieáp xuùc vôùi ñöông thaúng $y = x - 1$ tại ñieåm coá ñònh $(-1; -2)$

Do ñoù ta cuõng coù theå thöïc hieän ñöôïc phöông phaùp tieáp tuyeán coá ñònh.

• **Caùch 5** : PP tieáp tuyeán coá ñònh.

Ta kieåm tra phöông phaùp tieáp tuyeán coá ñònh ñi qua caùc ñieåm coá ñònh :

$$y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m+1}{2} \\ x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Ta coù :

$$f(x_1) = -\frac{1}{2}m^2 - m - \frac{1}{2} \neq \text{const}$$

$$f(x_2) = -\frac{1}{2}m^2 - m - \frac{1}{2} \neq \text{const}$$

Do ñoù khoâng söù duøng phöông phaùp tieáp tuyeán coá ñònh ñi qua coá ñònh.

Baøi 2 : [2] Goïi (Hm) laø hoï Hyperbol coù phöông trình

$$y = f(x, m) = \frac{(m - 2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m} \quad (II)$$

Chöùng minh hoï (Hm) luoân tieáp xuùc vôùi 2 ñöôøng thaúng coá ñònh.

Giaûi :

Nhaän xeùt : Baøi toaùn ñaõ cho bieát daïng cuûa ñöôøng coá ñònh laø ñöôøng thaúng neân ta cuõng coù theå söû duïng ñöôïc caùc phöông phaùp sau :

• **Caùch 1 :** Phöông phaùp duøng ñònh nghóa tieáp xuùc.

Goïi (D) laø ñöôøng thaúng coá ñònh caàn tìm coù phöông trình $y = ax + b$

(Hm) vaø (D) tieáp xuùc nhau $\Leftrightarrow$ Heä sau coù nghieäm vôùi moïi m

$$\begin{cases} f(x, m) = ax + b \\ f'(x, m) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(m - 2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m} = ax + b \\ \frac{4}{(x - m)^2} = a \end{cases} \quad (1)$$

(2) coù nghieäm vôùi moïi m $\Leftrightarrow a > 0$

Töø (1) suy ra $ax^2 + [b + 1 - m(a + 1)]x + m^2 - m(b + 2) + 4 = 0$
(3)

Vôùi $a > 0$, phöông trình (3) coù

$$\begin{aligned} \Delta &= [(b + 1) - m(a + 1)]^2 - 4a[m^2 - m(b + 2) + 4] \\ &= (a - 1)^2 m^2 + 2(a - 1)(b + 2)m + (b + 2)^2 - 16a \end{aligned}$$

Nhö vaäy phöông trình (3) coù nghieäm vôùi moïi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ \Delta \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

TH1: $\Delta = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ (a - 1)(b + 2) = 0 \\ (b + 2)^2 - 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ b = 2 \end{cases}$$

TH2: $\Delta \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ \Delta_m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 16a(a - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{voä nghieäm}$$

Vaäy 2 ñöôøng thaúng tieáp xuùc vôùi hoï (Hm) laø $y = x - 6$
vaø $y = x + 2$

• **Càùch 2 :** Phöông phaùp ñieàu kieän nghieäm boãi, nghieäm keùp.

Goïi (D) laø ñöôøng thaúng coá ñònh caàn tìm coù phöông trình $y=ax+b$

(Hm) tieáp xuùc vôùi (D) $\Leftrightarrow$ phöông trình $f(x,m)=ax+b$ coù nghieäm keùp $\forall m$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m} = ax + b \quad \text{coù nghieäm keùp vôùi}$$

moïi m .

$\Leftrightarrow (m-2)x - (m^2 - 2m + 4) = (ax+b)(x-m)$ coù nghieäm keùp vôùi moïi m

$\Leftrightarrow ax^2 + (-am+b-m+2)x + m^2 - 2m + 4 - bm = 0$ coù nghieäm keùp vôùi moïi m .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = (a+1)^2 m^2 - 2(a+1)m(b+2) + (b+2)^2 - 4a(m^2 - 2m + 4 - bm) = 0, \quad \forall m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ (a^2 - 2a + 1)m^2 + [-2(a+1)(b+2) + 8a + 4ab]m + (b+2)^2 - 16a = 0, \quad \forall m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \\ -2(a+1)(b+2) + 8a + 4ab = 0 \\ (b+2)^2 - 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 2 = 4 \\ b + 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ b = -6 \end{cases}$$

Vaây coù 2 ñöôøng coá ñònh tieáp xuùc vôùi (Hm) laø $y=x+2$ vaø $y=x-6$

• **Càùch 3:** Phöông phaùp taùch boã phaän nghieäm keùp.

$$\text{Ta coù} \quad \frac{dy}{dm} = \frac{(x-m)^2 - 4}{(x-m)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+2 \\ x = m-2 \end{cases}$$

+Vôùi $x=m+2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{-[x - (m+2)]^2 + x^2 - (m+6)x + 6m}{x - m} \\ &= -\frac{[x - (m+2)]^2}{x - m} + \frac{x(x - m) - 6(x - m)}{x - m} = -\frac{[x - (m+2)]^2}{x - m} + x - 6 \end{aligned}$$

Chöùng minh $f(x)$ tieáp xuùc vôùi $g(x)=x-6$ (gioáng BT1)
+Vôùi $x=m-2$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-[x - (m-2)]^2 + x^2 - (m-2)x - 2m}{x - m} = -\frac{[x - (m-2)]^2}{x - m} + x + 2$$

Chöùng minh $f(x)$ tieáp xuùc vôùi ñöôøng thaúng $g(x)=x+2$ (töông töï BT1)

• **Caùch 4 :** Phương pháp ñaïo haøm.

(II) ñöôïc vieát laïi : $y(x-m)=(m-2)x-(m^2-2m+4)$

$$\Leftrightarrow m^2-(x+y+2)m+xy+2x+4=0$$

Ñaët $F(x,y,m)=m^2-(x+y+2)m+xy+2x+4$ (*)

$$\frac{dF(x,y,m)}{dm}=2m-(x+y+2)$$

$$\frac{dF(x,y,m)}{dm}=0 \Leftrightarrow 2m-(x+y+2)=0$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}(x+y+2) \quad \text{theá vaøo (*) ta}$$

ñöôïc

$$\frac{1}{4}(x+y+2)^2 - \frac{1}{2}(x+y+2)^2 + 2x + xy + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - 4(x-y) - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-6 \\ y=x+2 \end{cases}$$

Ta chöùng minh (Hm) tieáp xuùc vôùi 2 ñöôøng thaúng $y=x-6$ vaø $y=x+2$ (nhö treân)

• **Caùch 5 :** Phöông pháp bieân

Töø (II) suy ra $m^2-m(x+y+2)+2x+xy+4=0$

(*)

$$\Delta_m=(x+y+2)^2+4(2x+xy+4)=(y-x)^2+4(y-x)-12$$

(*) voâ nghieäm ñoái vôùi $m \Leftrightarrow \Delta_m < 0 \Leftrightarrow x-6 < y < x+2$

Ta chöùng minh (Hm) tieáp xuùc vôùi 2 ñöôøng thaúng $y=x-6$ vaø $y=x+2$ (baïn ñoïc töï cm)

Töø caùch 3 ta thaáy ñöôøng thaúng $y=x+6$ tieáp xuùc vôùi hoï (Hm) taïi $x=m-2$ vaø ñöôøng thaúng $y=x+2$ tieáp xuùc vôùi (Hm) taïi $x=m-2$

Do ñoù ñieåm tieáp xuùc cuûa 2 ñöôøng thaúng vôùi hoï(Cm) di ñoäng

Suy ra hoï(Hm)khoâng coù ñieåm coá ñònh neân khoâng söû duïng ñöôïc **phöông pháp tieáp tuyeán coá ñònh**.

$$+Ta\ coù: y'=f(x)=x^5-4x^4+3x^3-5x^2+mx+\frac{3-m^2}{4}$$

$$y'=\frac{4}{(x-m)^2} \Rightarrow \text{Hoï (Cm) khoâng coù ñieåm coïc trò}$$

neân khoâng söû duïng ñöôïc **phöông pháp tieáp tuyeán coá ñònh ñi qua caùc ñieåm coïc trò**.

Baøi 3 : [3] CMR hoï (Cm):

$$y = f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx + \frac{3 - m^2}{4} \quad \text{luoân tieáp xuùc}$$

vôùi moät ñöôøng cong coá ñònh

Giaûi :

Nhaän xeùt : Baøi taäp chæ chæ cho bieát ñöôøng coá ñònh laø 1 ñöôøng cong chöù khoâng cho bieát daïng cuûa noù, do ñoù chæ coù theå söû duïng 3 phöông phaùp sau.

- **Caùch 1 :** Taùch boä phaân nghieäm keùp

Ta coù

$$\frac{dy}{dm} = x - \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2} \Rightarrow y = -\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$$

Ta chöùng minh ñöôøng cong $g(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$ tieáp xuùc vôùi (Cm)

Ta coù phöông trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - mx + \frac{m^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 = 0$

coù nghieäm keùp $x = \frac{m}{2}$.

Suy ra hoï (Cm) luôn tieáp xuùc vôùi ñöôøng cong $g(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$

- **Caùch 2 :** Phöông phaùp ñaïo haøm

$$\frac{dy}{dm} = x - \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = 2x$$

Thay vaøo phöông trình $f(x)$, ta ñöôïc

$$y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$$

Chöùng minh ñöôøng cong $y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$ tieáp xuùc vôùi (Cm) (nhö treân)

- **Caùch 3 :** Phöông phaùp bieân.

Vieát laïi pt $f(x)$ theo m ta ñöôïc :

$$\frac{m^2}{4} - mx - x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 5x^2 + y - \frac{3}{4} = 0 \quad (*)$$

$$\Delta_m = x^2 + x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 - y + \frac{3}{4} = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 - y + \frac{3}{4}$$

Ta chứng minh hai họ đường con $y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$ tiếp xúc với (Cm) (như trên)

Bài 4 : [3] Chứng minh rằng :

$$y = x^4 - 4mx^3 + (6m^2 - 1)x^2 - 2mx(2m^2 - 1) + m^4 - m^2 + 1$$

luôn tiếp xúc với 2 họ đường thẳng có dạng.

Giải :

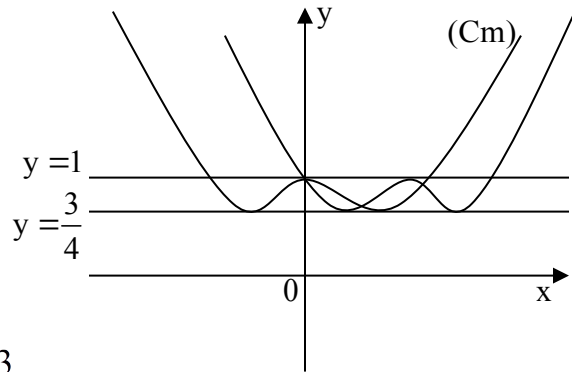
Sử dụng phương pháp tiếp tuyến có dạng như qua 2 điểm cố định

$$y' = 4(x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3) - 2(x - m)$$

$$= 4(x - m)^3 - 2(x - m) - 4(x - m)\left[(x - m)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = m + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có : } \begin{cases} f(m) = 1 \\ f\left(m - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \\ f\left(m + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$



Từ đó ta suy ra hai (Cm) tiếp xúc với hai họ đường thẳng $y=1$ và $y=\frac{3}{4}$

Trong đề tài này chúng ta chỉ nghiên cứu về họ đường con tiếp xúc với đường cố định. Tuy nhiên đối với họ đường thẳng thì cũng làm tương tự. Mở rộng hơn nữa là đối với cả hai họ đường con. Sau đây ta xét hai ví dụ về vấn đề trên.

Ví dụ 11: [1] Cho đường thẳng có phương trình

$$(\Delta_m): 2mx + (1 - m^2)y - (1 + m^2) = 0 \quad (1)$$

Chứng minh rằng: Khi m thay đổi, đường thẳng (Δ_m) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải: (1) $\Leftrightarrow -m^2(y+1) + 2mx + y - 1 = 0 \quad (2)$

Ta tìm những điểm mà đường thẳng không bao giờ đi qua $\forall m$, tức là phương trình (2) vô nghiệm đối với m .

$$\Leftrightarrow \Delta_m = x^2 + y^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$$

$$\Rightarrow \Delta_m \text{ tiếp xúc với đường tròn } x^2 + y^2 = 1$$

Thử lại:

$$d(O, \Delta_m) = \frac{|1 + m^2|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = \frac{1 + m^2}{\sqrt{(1 + m^2)^2}} = 1, \forall m \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \Delta_m$ luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O , bán kính 1, $\forall m \in \mathbb{R}$

Ví dụ 12: [1] Cho hai đường cong $y = mx^3 + (1 - 2m)x^2 + 2mx$ và $y = 3mx^2 + 3(1 - 2m)x + 4m - 2$

Tìm m để hai đường tiếp xúc nhau.

Giải: Hai đường cong đã cho tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm bội

$$mx^3 + (1 - 2m)x^2 + 2mx = 3mx^2 + 3(1 - 2m)x + 4m - 2 \quad (1)$$

$$\text{Để thấy (1)} \Leftrightarrow mx^3 + x^2 - 2mx^2 + 2mx - 3mx^2 + 6mx - 3x - 4m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow mx(x^2 - 3x + 2) - 2mx(x^2 - 3x + 2) + x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(mx - 2m + 1) = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm bội $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm bội.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{hoặclà } x = 1 \text{ là nghiệm của phương trình } mx - 2m + 1 = 0 \\ \text{hoặclà } x = 2 \text{ là nghiệm của phương trình } mx - 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Tóm lại để hai đường đã cho tiếp xúc với nhau, điều kiện cần và đủ là $m = 1$.

CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Bài toán 1: [1] Biện luận theo a số nghiệm của phương trình :

$$(x - 1)^2 - 2|x - a| = 0$$

Giải: Viết lại phương trình đã cho dưới dạng tương đương sau:

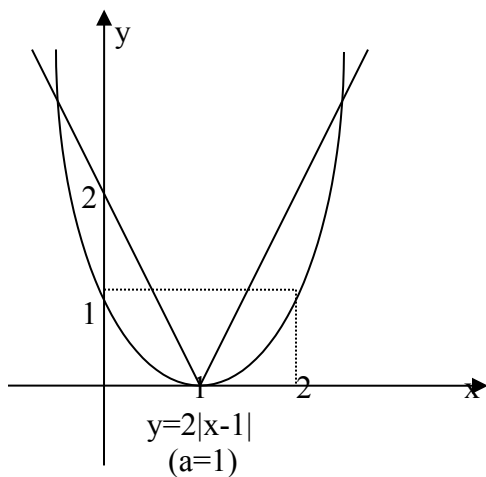
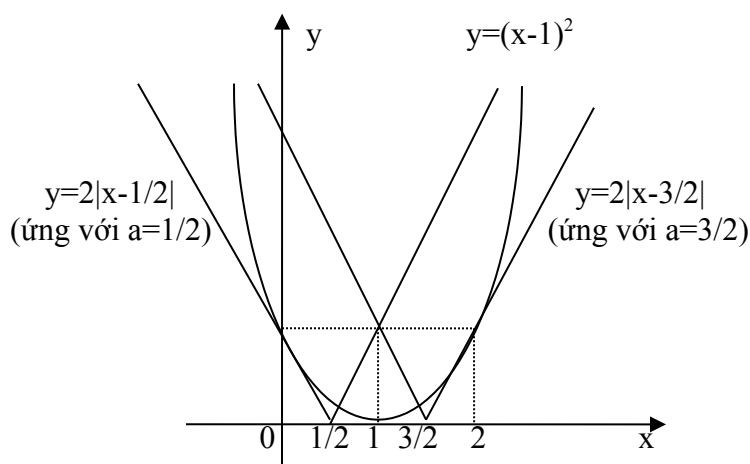
$$(x - 1)^2 = 2|x - a|$$

Trước hết tìm a để nhánh phải của đồ thị $y = 2|x - a|$ tiếp xúc với parabol $y = (x - 1)^2$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của chúng thì ta có hệ sau:

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 = 2|x_0 - a| \\ 2(x_0 - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tương tự khi $a = \frac{1}{2}$ thì nhánh trái của đồ thị $y = 2|x - a|$ tiếp xúc với parabol $y = (x - 1)^2$

Ta có hình vẽ sau đây:



Từ các đồ thị trên ta có nhận xét sau đây:

- Nhánh phải của $y = 2|x - a|$ cắt parabol $y = (x - 1)^2$ tại hai điểm nếu $a < \frac{3}{2}$, một điểm nếu $a = \frac{3}{2}$, không cắt nếu $a > \frac{3}{2}$.

- Nhánh phải của $y = 2|x - a|$ cắt parabol $y = (x - 1)^2$ tại hai điểm nếu $a > \frac{1}{2}$, một điểm nếu $a = \frac{1}{2}$, không cắt nếu $a < \frac{1}{2}$.

- Khi $a = 1$ thì nhánh trái, nhánh phải của $y = 2|x - a|$ và $y = (x - 1)^2$ đồng quy. Từ đó đi đến kết quả sau:

1. Phương trình đã cho có 4 nghiệm khi $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ và $a = 1$.

2. Phương trình đã cho có 3 nghiệm khi $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$ hoặc $a = \frac{3}{2}$.

3. Phương trình đã cho có 2 nghiệm khi $a < \frac{1}{2}$ hoặc $a > \frac{3}{2}$.

Nhận xét: Với phương trình trên ta có thể giải như sau (cũng sử dụng tính tiếp xúc giữa các đường)

Ta đưa phương trình đã cho về dạng tương đương sau:

$$x - a = \pm \frac{1}{2}(x - 1)^2 \Leftrightarrow x \pm \frac{1}{2}(x - 1)^2 = a \quad (*)$$

Như vậy số nghiệm của (*) là số nghiệm của hai phương trình sau:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = a \quad \text{và} \quad -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = a$$

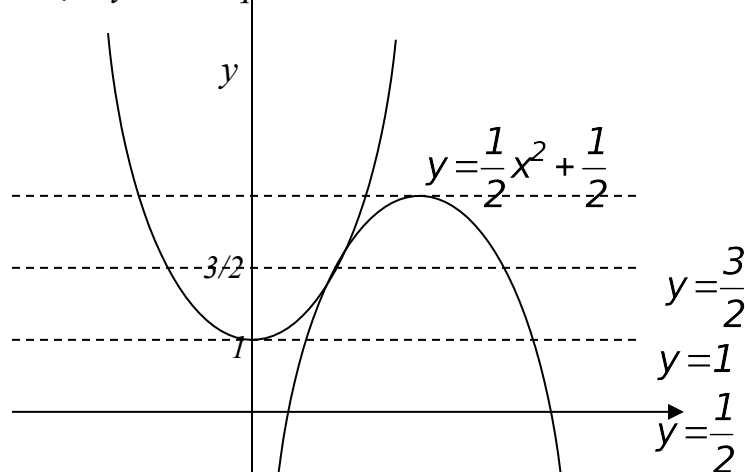
Vẽ hai parabol và $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

$$\text{Để ý rằng } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

Từ đó suy ra hai parabol này tiếp xúc với nhau tại điểm $M(1, 1)$

Bây giờ từ đồ thị suy ra kết quả trên



$$1/2$$

$$0$$

$$x$$

Bài toán 2: [3] Tìm m để hệ: $\begin{cases} (C): y = \frac{1}{2}\cos^2 x - \cos x + 1 \\ (D): y = x\sin x + m \end{cases}$ tiếp xúc với nhau.

Giải: (C) và (D) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\cos^2 x - \cos x + 1 = x\sin x + m \\ (\cos^2 x - \cos x + 1)' = (x\sin x + m)' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\cos^2 x - \cos x + 1 = x\sin x + m \\ \sin x - \sin x \cos x = \sin x + x \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \cos x + 1 = x\sin x + m \\ \cos x(x + \sin x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \cos x + 1 = x\sin x + m \\ \cos x = 0 \\ (x + \sin x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \cos x + 1 = x\sin x + m \\ \cos x = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x - \cos x + 1 = x\sin x + m \\ (x + \sin x) = 0 \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x\sin x + m \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ m = 1 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \\ m = 1 + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra phương trình $x + \sin x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Suy ra hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow m = 1$.

$$\text{Kết luận: } m \in \left\{ 1; 1 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi; 1 + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \right\}$$

BÀI TẬP THAM KHẢO



1. Chứng minh rằng (Cm) : $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$ luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.
2. Tìm đường cố định (D) tiếp xúc với mỗi họ đường cong (Cm):

$$y = f(x) = 8x^3 + (1+2m)x^2 + 6m^2x - m^3 - 1$$
3. Chứng minh rằng (Cm) : $y = \frac{x^3 - (2m+1)x^2 - m(m+2)x + 4 - m^2}{x - 1}$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.
4. Tìm m để (Cm): $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m - 1)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = -49x + 98$.
5. Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ đường cong (Cm) luôn tx với nhau. (Cm) : $y = \frac{mx^3 - 2mx^2 + (m+1)x - 2m - 3}{x^2 + 1}$
6. Chứng minh rằng khi α thay đổi, họ đường thẳng $(D_\alpha) : x \cos \alpha + y \sin \alpha - 7 \cos \alpha + 9 = 0$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.
7. Tìm m để đường thẳng $(D_m) : y = mx + 4m - 12$ tiếp xúc với $(D_m) : y = x^2 + 5mx - 9$
8. Biện luận số nghiệm của phương trình: $|x^2 - 5x + 6| = ax$ theo tham số a.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

---□---

- [1] – Phan Huy Khải – Toán nâng cao Giải tích- tập 2 (Hàm số và ứng dụng hàm số). Nhà xuất bản Hà Nội, năm 2002.
- [2] – Phạm Quốc Phong – Chuyên đề nâng cao Đại số và Giải tích.
- [3] – Trần Phương, Nguyễn Đức Tấn – Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải toán. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2008.
- [4] - www.forum.mathscope.org