PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOẰNG HÓA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
Năm học: 2014-2015
Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 16/03/2015

Bài 1. (4,5 điểm)

Cho biểu thức : $Q=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{6x+3}{x^3+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\right):(x+2)$

a) Tìm điều kiện xác định của Q, rút gọn Q

b) Tìm x khi $Q=\frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q.

Bài 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình : $\frac{2x+3}{2x+1}-\frac{2x+5}{2x+7}=1-\frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: x^3-2x^2-x+2

c) Tìm các giá trị x,y nguyên dương sao cho : $x^2=y^2+2y+13$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Cho $abc\neq\pm1$ và $\frac{ab+1}{b}=\frac{bc+1}{c}=\frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a=b=c$

b) Cho số tự nhiên $n>3$. Chứng minh rằng nếu $2^n=10a+b\left(a,b\in\mathbb{N},0<b<10\right)$ thì tích ab chia hết cho 6

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $BD.DC=DH.DA$

b) Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1.$

c) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

d) Gọi M,N,P,Q,I,K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC,CA,AB, EF,FD,DE. Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ,NI,PK đồng quy tại một điểm

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $AB=AC=b;BC=a$. Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{(a+b)^2}$.

Bài 6. (1,0 điểm)

Cho $a,b,c>0;a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐK: $x\ne-1;x\ne-2$

$$Q=\frac{x^2-x+1+6x+3-2x-2}{x^3+1}.\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{1}{x^2-x+1}$$

b) $\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x^2-x+1=3\Leftrightarrow(x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

So sánh với điều kiện suy ra $x=2$ thì $Q=\frac{1}{3}$

c) $Q=\frac{1}{x^2-x+1}$; Vì $1>0;x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}>0$

Q đạt GTLN $\Leftrightarrow x^2-x+1$ đạt $GTLN\Leftrightarrow x^2-x+1=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(tm)$. Lúc đó $Q=\frac{4}{3}$

Vậy GTLN của Q là $Q=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{1}{2}$

Câu 2. a) ĐK: $x\ne\frac{-1}{2};x\ne\frac{-7}{2}$

$$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)}-\frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)}=\frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)}-\frac{6x^2+9x-9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x^2+20x+21-4x^2-12x-5}{(2x+7)(2x+1)}=\frac{4x^2+16x+7-6x^2-9x+9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)}=\frac{-2x^2+7x+16}{(2x+7)}$$

$$\Rightarrow 8x+16=-2x^2+7x+16\Leftrightarrow 2x^2+x=0\Leftrightarrow x(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & (tm)\\ x=\frac{-1}{2} & (ktm)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$

b) Ta có

$$x^3-2x^2-x+2=(x^3-2x^2)-(x-2)=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x-1)(x+1)$$

c) Ta có:

$x^2=y^2+2y+13 \Leftrightarrow x^2=(y+1)^2+12$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(x-y-1)=12$

Do $x+y+1-(x-y-1)=2y+2$ là số chẵn và $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên $x+y+1>x-y-1$. Do đó $x+y+1$ và $x-y-1$ là hai số nguyên dương chẵn

Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp : $x+y+1=6$ và $x-y-1=2$

$\Leftrightarrow x=4$ và $y=1$. Vậy $(x;y)=(4;1)$

Câu 3.

a) Từ $\dfrac{ab+1}{b}=\dfrac{bc+1}{c}=\dfrac{ca+1}{a}\Rightarrow a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$

Do đó:

$a-b=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-c}{bc};b-c=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{c-a}{ac};c-a=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-b}{ab}$

Suy ra : $(a-b)(b-c)(c-a)=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$

$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2-1)=0$

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=0$ (do $abc\neq\pm1$)

Suy ra $a=b=c$

b) Ta có: $2^n=10a+b\Rightarrow b\,\vdots\,2\Rightarrow ab\,\vdots\,2$ (1)

Ta chứng minh $ab\,\vdots\,3$ (2)

Thật vậy , từ đẳng thức $2^n=10a+b\Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

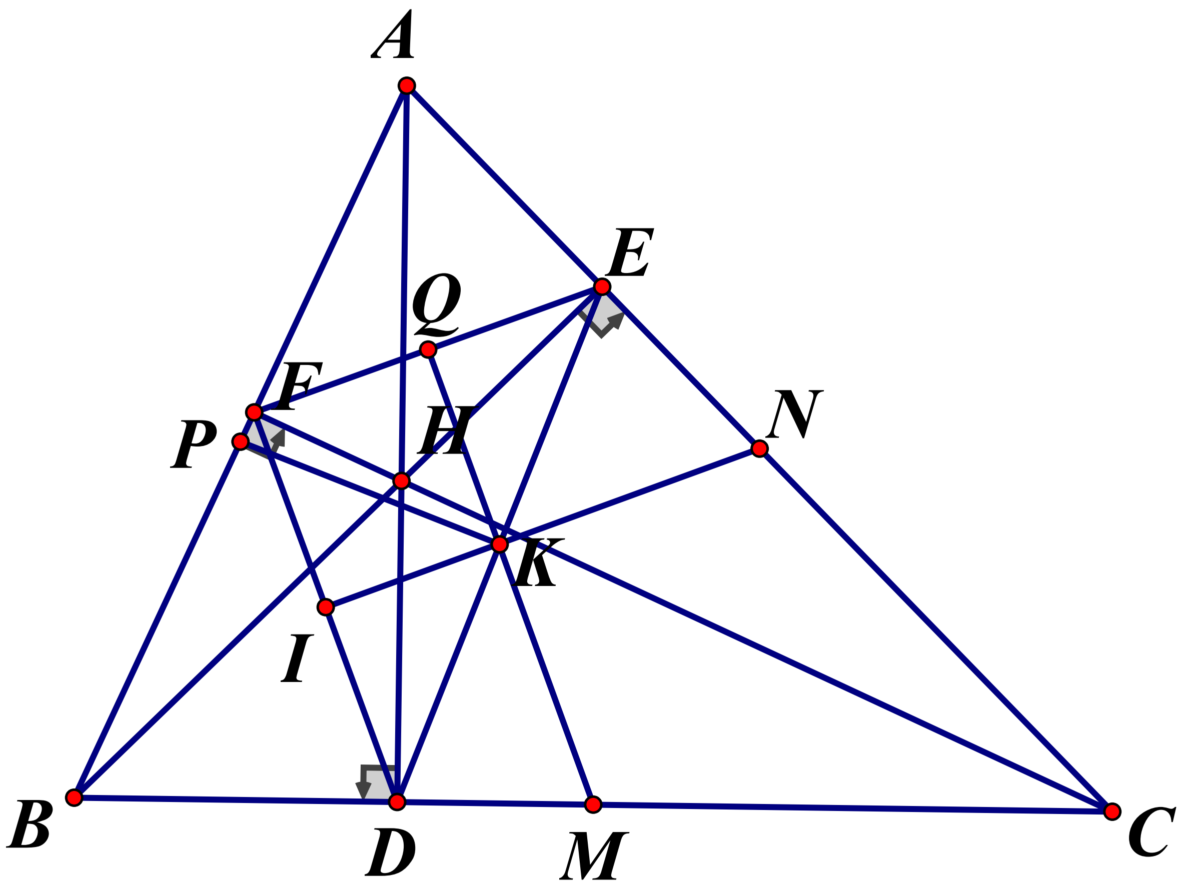
Đặt $n=4k+r\,(k,r\in\mathbb{N},0\le r\le3)$ ta có: $2^n=16^k.2^r$

Nếu $r=0$ thì $2^n-2^r=2^r.(16^k-1)\,\vdots\,10\Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b=2^r\Rightarrow 10a=2^n-2^r=2^r.(16^k-1)\,\vdots\,3\Rightarrow a\,\vdots\,3\Rightarrow ab\,\vdots\,3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab\,\vdots\,6$

Câu 4.



a) Chỉ ra được $\Delta BDH \sim \Delta ADC(g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{DH}{DC} \Rightarrow BD.DC = DH.DA$

b) Ta có: $\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC} = \dfrac{HD}{AD}$

Tương tự $\dfrac{HE}{BE} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Do đó: $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

c) Chứng minh được $\Delta AEF \sim \Delta ABC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

Tương tự: $\widehat{DEC} = \widehat{ABC}$. Do đó: $\widehat{AEF} = \widehat{DEC}$

Mà $\widehat{AEF} + \widehat{HEF} = \widehat{DEC} + \widehat{HED} = 90^0$ nên $\widehat{HEF} = \widehat{HED}$

$\Rightarrow EH$ là phân giác ngoài của góc EFD

Do đó H là giao các đường phân giác của tam giác DEF

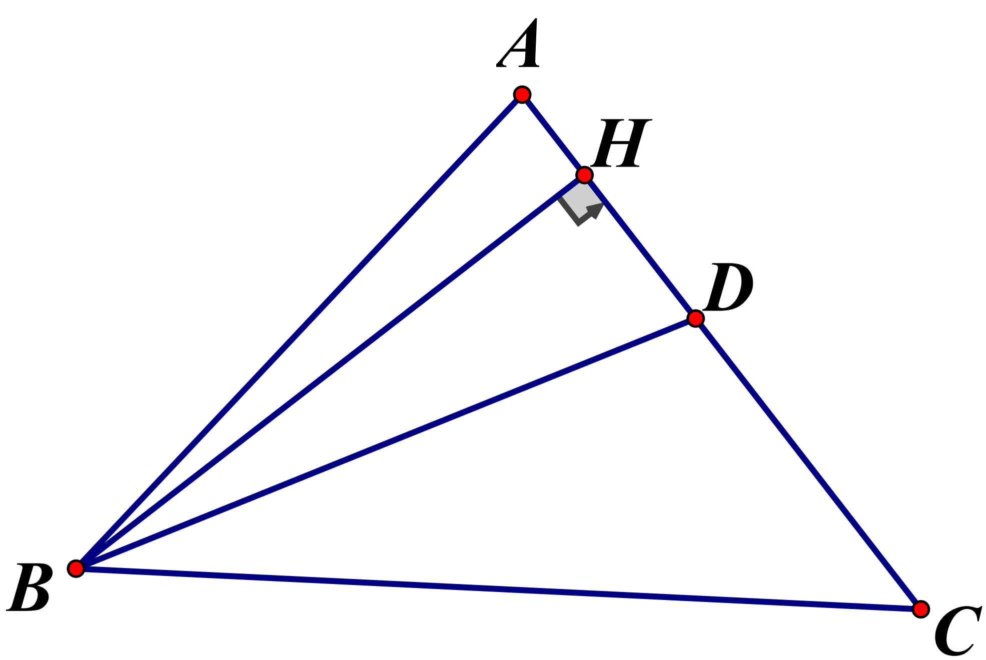
d) Do ΔBEC vuông tại E, M là trung điểm BC nên $EM = \frac{1}{2}BC$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền), Tương tự: $FM = \frac{1}{2}BC$

Do đó: ΔEMF cân tại M, mà Q là trung điểm EF nên $MQ \perp EF$

$\Rightarrow MQ$ là đường trung trực của EF hay MQ là đường trung trực của tam giác DEF.

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được NI và PK cũng là đường trung trực của tam giác DEF nên ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Câu 5.



Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC

Tam giác BAD cân tại B $(BA = BD)$ có BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow AH = \frac{AD}{2}$

Tam giác ABC có BD là đường phân giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{DA}{b} = \frac{DC}{a} = \frac{DA + DC}{a + b} = \frac{AC}{a + b} = \frac{b}{a + b} \Rightarrow DA = \frac{b^2}{a + b}$$

Tam giác HAB vuông tại H, theo định lý Pytago ta có:

$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow BH^2 = b^2 - \frac{AD^2}{4} \qquad (1)$

Tam giác HBC vuông tại H, theo định lý Pytago, ta có:

$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2 = a^2 - \left(b - \frac{AD}{2}\right)^2$

$\Rightarrow BH^2 = a^2 - b^2 + b.AD - \frac{AD^2}{4} (2)$

Từ (1) và (2) ta có:

$b^2 - \frac{AD^2}{4} = a^2 - b^2 + b.AD - \frac{AD^2}{4} \Rightarrow b^2 - a^2 = b.AD - b^2$

$\Rightarrow (b+a)(b-a) = \frac{-ab^2}{a+b} \Rightarrow \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}$

Vậy bài toán dược chứng minh

Câu 6.

Do $a,b > 0$ và $1 + b^2 \geq 2b$ với mọi b nên:

$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$

Mà $a + b + c = 3$ nên $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \qquad (1)$

Cũng từ $a + b + c = 3 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9$

Mà $a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ac$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Suy ra $3(ab + bc + ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3 \ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \qquad dfcm$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$