|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GD & ĐT TÂY NINH**  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **HOÀNG LÊ KHA** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XIV - NĂM 2023 – THÁI NGUYÊN**  **MÔN THI: TOÁN KHỐI 10**  **(Thời gian: 180’ không kể thời gian giao đề)**  *(Đề gồm 5 câu trong 1 trang)* |

**PHẦN ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bài | Nội dung trình bày | Điểm |
| 1 | **Bài 1**: Tìm tất cả các hàm số  sao cho | **4đ** |
| \* Thay  ta được: | 0,25 |
| Lần lượt thử các giá trị  ta chỉ thấy có  là thỏa mãn. | 0,25 |
| Từ đó: | 0,25 |
| Ta cm  bằng quy nạp.  Thật vậy, giả sử đúng với , tức là | 0,25 |
| Ta cần cm đúng với .    Vậy:  (1) | 0,25 |
| \* Bây giờ, thay  ta có: , từ đó | 0,25 |
| Lần lượt thử các giá trị  ta chỉ thấy có  là thỏa mãn. | 0,25 |
| - Tính thêm | 0,25 |
| Ta cm  bằng phép quy nạp.  Thật vậy, giả sử đúng với , tức là | 0,25 |
| Ta cần cm đúng với .    Vậy:  (2) | 0,25 |
| \* Bây giờ, thay  ta có: , từ đó | 0,25 |
| Lần lượt thử các giá trị  ta chỉ thấy có  là thỏa mãn. | 0,25 |
| - Tính thêm | 0,25 |
| Ta cm  bằng phép quy nạp.  Thật vậy, giả sử đúng với , tức là  Ta cần cm đúng với .    Vậy:  (3) | 0,25 |
| Từ (1), (2), (3), ta có | 0,25 |
| Thử lại ta thấy thỏa mãn.  Vậy: | 0,25 |
| \* Thay  ta được: | 0,25 |
| Lần lượt thử các giá trị  ta chỉ thấy có  là thỏa mãn. | 0,25 |
| 2 | Cho  là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện: . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: | 4 |
|  | 0,5 |
| Đặt | 0,5 |
| Khi đó  , với | 0,5 |
| Ta chứng minh    Thật vậy, biến đổi bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức sau:  , đúng với mọi  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  hoặc | 0,5  0,5 |
| Khi đó,  Áp dụng BĐT AM – GM ta có: | 0,5  0,5 |
| Vậy  khi | 0,5 |
| 3 | Cho tam giác  nhọn không cân, nội tiếp và có trực tâm . Gọi lần lượt là điểm đối xứng của  qua  Gọi là điểm đối xứng của  qua ,  là điểm đối xứng của  qua  và  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng  và  cắt nhau trên . | 4 |
|  |  |
| Gọi S là giao điểm của  và  Ta cần chứng minh . | **0.5** |
| Xét tam giác  và  có:  chung    Nên | **0.5** |
|  | **0.5** |
| Mà (tính chất trực tâm) | **0.5** |
| Nên | **0.5** |
| Ta có  (đồng vị) | **0.5** |
|  | **0.5** |
| Khi đó,  là hình thang cân nên  Từ (1), (2) suy ra  Vậy, . | **0.5** |
| 4 | Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình  (1) | 4 |
| Xét  thì | 0,5 |
| Xét khi đó, nếu phương trình có nghiệm nguyên dương  thì  Suy ra  lẻ.  Đặt | 0,5  0,5 |
| Nếu lẻ thì  Trong khi  Suy ra (1) vô nghiệm. | 0,5  0,5 |
| Nếu  chẵn, đặt  Khi đó, (1) trở thành    , vô lí vì vế trái luôn lớn hơn 2.  Vậy phương trình (1) chỉ có một nghiệm nguyên duy nhất là | 0,5  0,5  0,5 |
| 5 | Cho số nguyên . Hãy tìm số các hoán vị  của  sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số  thoả mãn . | 4 |
| Gọi  là số các hoán vị thoả mãn điều kiện bài toán.  . số các hoán vị có dạng là | 0.5 |
| . số các hoán vị có dạng  là | 0.5 |
| . số các hoán vị thoả mãn là  với . | 0.5 |
| Do vậy ta có: | 0.5 |
|  | 0.5 |
| Từ đó: | 0.5 |
|  | 0.5 |
| (do ) | 0.5 |

**GV làm đề:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Họ và tên** | **Chữ ký** | **Số điện thoại** |
| Huỳnh Quốc Hào (bài 1,5) |  | 0949504379 |
| Trịnh Văn Bé Ba (bài 2,4) |  | 0983617167 |
| Hoàng Anh (bài 3) |  | 0985828047 |