

▮ BÀI GIẢNG 2 : CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC – CHỨNG MINH VUÔNG GÓC



LÝ THUYẾT



Memorize :

Lý thuyết bài giảng :



LÀM

Câu 221: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

 **Lời giải :**

Câu 222: Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh:

a). $\overline{AM} \cdot \overline{AI} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}; \overline{BN} \cdot \overline{BI} = \overline{BA} \cdot \overline{BI}$

b). $\overline{AM} \cdot \overline{AI} + \overline{BN} \cdot \overline{BI} = 4R^2$

 **Lời giải :**

Câu 223: Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \angle BAC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn

thẳng BC . Điểm D thoả mãn $AD = \frac{7}{12} AC$.

a) Tính AB, AC .

b) Biểu diễn $\vec{AM}, \vec{BD}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.

c) Chứng minh $AM \perp BD$.

 **Lời giải :**

Câu 224: Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng

a) $AB \cdot AC = AM^2 + \frac{1}{4}BC^2$

b) $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

 **Lời giải :**

Câu 225: Cho hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC . N là điểm nằm giữa A và C . Đặt $x = \frac{AN}{AC}$. Tìm x thỏa mãn $AM \perp BN$?

 **Lời giải :**



MÓN QUÀ

Câu 226: Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng $MA^2 - MB^2 = 2MO \cdot BA$.

Lời giải

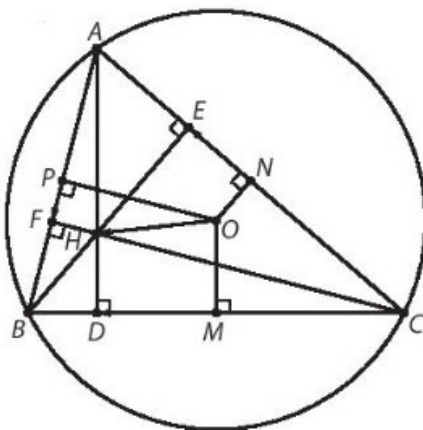
Cách 1: $MA^2 - MB^2 = (MA + MB) \cdot (MA - MB) = 2MO \cdot BA$.

Cách 2: $MA^2 - MB^2 = (MO + OA)^2 - (MO + OB)^2$
 $= MO^2 + 2MO \cdot OA + OA^2 - MO^2 - 2MO \cdot OB - OB^2$
 $= 2MO \cdot (OA - OB) = 2MO \cdot BA$.

Câu 227: Cho tam giác ABC không cân. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C ; gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng $MD \cdot BC + NE \cdot CA + PF \cdot AB = 0$

Lời giải

Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Khi đó D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của H trên BC, CA, AB và M, N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O trên BC, CA, AB .



Theo định lý chiếu ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QH} \cdot (\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QB}) = \overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{QB} \\ \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Câu 228: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\text{a). } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad \text{b). } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Lời giải

a).

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (1)$$

$$\text{b). } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

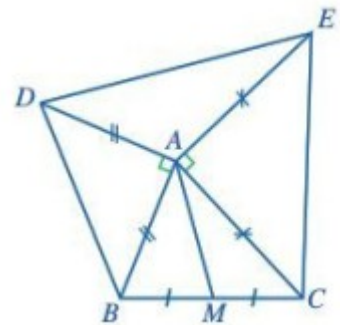
$$= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \quad (2)$$

Câu 229: Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=4, \angle A=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{DE}$.



Lời giải

a) Do $\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = 150^\circ, \angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 150^\circ$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos \angle BAE = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \cos \angle CAD = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

b) Ta có:

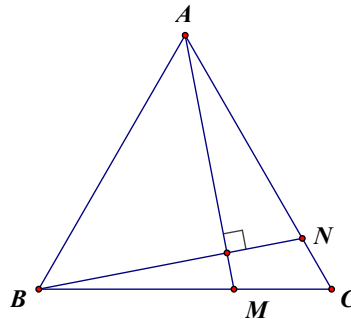
$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} \\ \vec{AM} \cdot \vec{DE} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AE} - \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AC} \cdot \vec{AE} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AD}) \\ \text{Vì } \vec{AB} \perp \vec{AD}, \vec{AC} \perp \vec{AE} \text{ nên } \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= 0, \vec{AC} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \text{Suy ra } \vec{AM} \cdot \vec{DE} &= \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{DE}\end{aligned}$$

Câu 230: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\vec{BM} = 2\vec{BC}$, $5\vec{AN} = 4\vec{AC}$.

a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{BC} \cdot \vec{AC}$

b) Chứng minh AM vuông góc với BN .

Lời giải



a).

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{AC} = CB \cdot CA \cdot \cos \angle BCA = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

b).

$$3\vec{BM} = 2\vec{BC} \Leftrightarrow 3(\vec{AM} - \vec{AB}) = 2(\vec{AC} - \vec{AB}) \Rightarrow \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$5\vec{AN} = 4\vec{AC} \Leftrightarrow 5(\vec{BN} - \vec{BA}) = 4\vec{AC} \Rightarrow \vec{BN} = -\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AC}$$

Ta có:

$$\vec{AM} \cdot \vec{BN} = \left(\frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB} \right) \cdot \left(-\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AC} \right) = -\frac{2}{3}\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \frac{8}{15}\vec{AC}^2 - \frac{1}{3}\vec{AB}^2 + \frac{4}{15}\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$= -\frac{2}{5}\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \frac{8}{15}\vec{AC}^2 - \frac{1}{3}\vec{AB}^2$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{8}{15} \cdot a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0 \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{BN} \Leftrightarrow$$

AM vuông góc với BN .



Câu 231: Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{OI} \cdot \vec{IA} + \vec{OI} \cdot \vec{IB} &= 0 & \text{b) } \vec{OI} \cdot \vec{AB} &= \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 - \vec{OA}^2) \end{aligned}$$

Lời giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

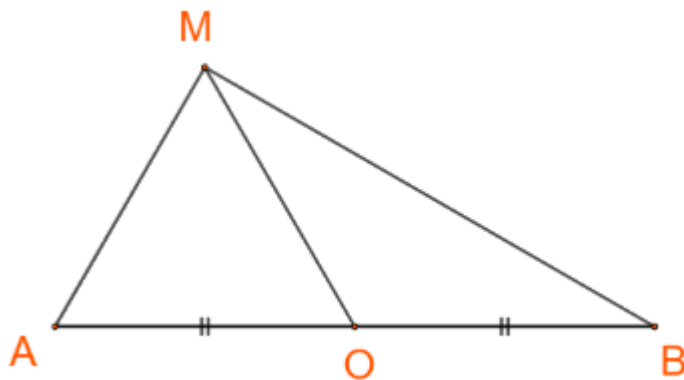
Vậy $\vec{OI} \cdot \vec{IA} + \vec{OI} \cdot \vec{IB} = \vec{OI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) = \vec{OI} \cdot \vec{0} = 0$

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\vec{OI} = \vec{OB} + \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA})$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \vec{OI} \cdot \vec{AB} &= \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (-\vec{OA}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OA} = \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 - \vec{OA}^2) \end{aligned}$$

Câu 232: Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:
 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2$

Lời giải



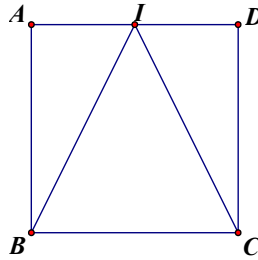
Ta có: $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{OA} = \vec{OB}$

$$\Rightarrow \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2 = (\vec{MO} - \vec{OA})(\vec{MO} + \vec{OA}) = (\vec{MO} + \vec{OB})(\vec{MO} + \vec{OA}) = \vec{MB} \cdot \vec{MA} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 233: Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

$$\begin{aligned} \text{a) Tính } \vec{IB} \cdot \vec{IC} & & \text{b) Chứng minh rằng } \vec{MAMC} &= \vec{MB} \cdot \vec{MD} \end{aligned}$$

Lời giải



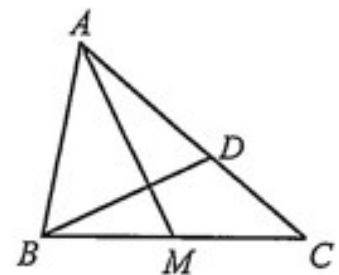
a).

$$\begin{aligned}
 IB \cdot IC &= BI \cdot CI = \frac{1}{2} (BA + BD) \cdot \frac{1}{2} (CD + CA) = \frac{1}{4} (BA + BA + BC) (CD + CD + CB) \\
 &= \frac{1}{4} (2BA + BC) (2BA - BC) = \frac{1}{4} [(2BA)^2 - BC^2] \\
 &= \frac{1}{4} (4BA^2 - BC^2) = \frac{1}{4} \cdot 3AB^2 = \frac{9a^2}{4}
 \end{aligned}$$

b). Ta có:

$$\begin{aligned}
 MA \cdot MC &= (MB + BA) \cdot (MD + DC) = MB \cdot MD + MB \cdot DC + BA \cdot MD + BA \cdot DC \\
 &= MB \cdot MD + MB \cdot DC - DC \cdot MD + BA \cdot DC \quad (\text{do } BA = CD = -DC) \\
 &= MB \cdot MD + (MB - MD + BA) \cdot DC \\
 &= MB \cdot MD + (DB + BA) \cdot DC \\
 &= MB \cdot MD + DA \cdot DC \\
 &= MB \cdot MD \quad (\text{Do } DA \perp DC \Rightarrow DA \cdot DC = 0)
 \end{aligned}$$

Câu 234: Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \angle BAC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thuộc cạnh AC thỏa mãn $AD = \frac{7}{12} AC$ (Hình 52). Chứng minh $AM \perp BD$.



Hình 52

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } AM &= \frac{1}{2} (AB + AC), BD = AD - AB = \frac{7}{12} AC - AB \\
 \Rightarrow AM \cdot BD &= \frac{1}{2} (AB + AC) \cdot \left(\frac{7}{12} AC - AB \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{12} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

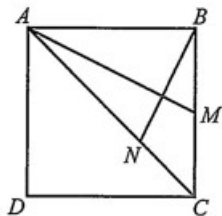
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \cdot 3^2 - 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (7 - 4 - 3) = 0.$$

Vậy $AM \perp BD$

Câu 235: Cho hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC . N là điểm nằm giữa hai điểm A và C . Đặt $x = \frac{AN}{AC}$. Tìm x thoả mãn $AM \perp BN$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$



Hình 70

$$\overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BN} = x \overrightarrow{BC} + (1-x) \overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \right) \cdot [x \overrightarrow{BC} + (1-x) \overrightarrow{BA}]$$

$$= \left[\frac{x}{2} - (1-x) \right] BC^2 = \left(\frac{3x}{2} - 1 \right) BC^2$$

$$AM \perp BN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{2} - 1 \right) BC^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Giấc mơ không phải là thứ bạn nhìn thấy khi ngủ, giấc mơ là những điều mà không cho phép bạn ngủ.

“Nếu bạn muốn hoàn thành ước mơ của mình thì bạn nên hoàn thành những việc nhỏ nhất đó là hoàn thành bài tập về nhà của tớ giao nhé”.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>