Sở Giáo dục - Đào tạo
TP.Hồ Chí Minh

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12-THPT CẤP THÀNH PHỐ
Năm học 2008 – 2009
Khóa ngày 25/3/2009
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài : 180 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1 : *(4 điểm)*
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 4 (m > 0)$ trên đoạn [0 ; m]
b) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$ trên đoạn [–2 ; 2] bằng 4.

Bài 2 : *(4 điểm)*
Định a để phương trình : $\log_3(x^2 + 4ax) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - 2a - 1) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Bài 3 : *(3 điểm)*
Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3 = 4x - y^3 \end{cases}$

Bài 4 : *(3 điểm)*
Cho tứ diện ABCD có AB = BC = CA = a, AD = 2a, BD = a$\sqrt{3}$, CD = a$\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC).

Bài 5 : *(3 điểm)*
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB, SC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp A.BCKH theo a.

Bài 6 : *(3 điểm)*
Trong không gian có hệ trục tọa độ Oxyz cho ba mặt phẳng :
(P) : 2x – y – 2z + 1 = 0
(Q) : x + 2y + 2z + 3 = 0
(R) : mx + y – 3z + n = 0
a) Xác định m, n để ba mặt phẳng trên có một điểm chung duy nhất .
b) Xác định m, n để ba mặt phẳng trên cùng đi qua một đường thẳng.

HẾT

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI THPT KHÓA NGÀY 25/3/2009

Bài 1 : *(4 điểm)*
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 4 (m > 0)$ trên đoạn [0 ; m]

Giải

$y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{m}$

Nếu $0 < m \le 1 \Rightarrow m \le \sqrt{m}$
GTNN là f(m) = $m^4 - 2m^3 + 4$

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		m		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–			0	+	
y					0	$\searrow$	f(m)				

Nếu $m > 1 \Rightarrow m > \sqrt{m}$
GTNN là f(m) = $m^4 - 2m^3 + 4$

GTNN là f($\sqrt{m}$) = $4 - m^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		m	$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+		
y					0	$\searrow$	f($\sqrt{m}$)	$\nearrow$		

b) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = (x^2 + x + m)^2$ trên đoạn [– 2 ; 2] bằng 4.

Giải

Đặt t = x^2 + x   x $\in$[-2;2] $\Rightarrow -\frac{1}{4} \le t \le 6$

y = $(t + m)^2$, $t \in [-\frac{1}{4};6]$

y' = 2(t + m)

y' = 0 $\Leftrightarrow$ t = – m

Nếu $-m \le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{4}$, $y_{\min} = f(-\frac{1}{4}) = (m - \frac{1}{4})^2 = 4 \Leftrightarrow$ m = $\frac{9}{4}$

Nếu $-\frac{1}{4} < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4}$, $y_{\min} = f(-m) = 0$

Nếu $-m \ge 6 \Leftrightarrow m \le -6$, $y_{\min} = f(6) = (6+m)^2 = 4 \Leftrightarrow$ m = – 8

Vậy m = $\frac{9}{4}$ hay m = – 8

Bài 2 : *(4 điểm)*

Định a để phương trình : $\log_3(x^2 + 4ax) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - 2a - 1) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Giải

$$\log_3(x^2 + 4ax) = \log_3(2x - 2a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4ax = 2x - 2a - 1 \\ 2x - 2a - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{2x+1} \\ \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{2x+1} < 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{2x+1} \\ \dfrac{5x^2 - 2x}{2x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{2x+1} \\ x \in (-\frac{1}{2};0) \cup (\frac{2}{5};+\infty) \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x+1}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(2x+1)^2},\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -2$$

x	-∞		−2		– 1/2		0		2/5		1		+∞
y’		–	0	+	‖	+		+		+	0	–	
y’		↘		↗	‖ -∞	↗	-1	↗	-1/5	↗	0	↘	-∞

Để có nghiệm duy nhất thì $\left[\begin{array}{l} 2a = 0 \\ -1 \le 2a \le -\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ -\dfrac{1}{2} \le a \le -\dfrac{1}{10} \end{array}\right.$

Bài 3. *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3 = 4x - y^3 \end{cases}$

Giải

(2) $\Leftrightarrow$ $2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \ge 1 \Rightarrow y \le -1 \Rightarrow y^2 \ge 1$

(1) $\Leftrightarrow$ $(x^2 + 1)y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(y^2 - 1) + (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = -1$

Thử lại ta có nghiệm của hệ phương trình là x = 1, y = – 1

Bài 4 : *(3 điểm)*

Cho tứ diện ABCD có AB = BC = CA = a, AD = 2a, BD = $a\sqrt{3}$, CD = $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC).

Giải

Ta có ΔBCD vuông tại C, ΔABD vuông tại B.

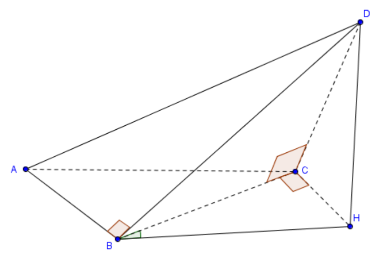
Gọi H là hình chiếu của D lên mp(ABC)

Ta có $AB \perp BD \Rightarrow AB \perp BH \Rightarrow CBH = 30^0$

$BC \perp CD \Rightarrow BC \perp CH$

$\Rightarrow CH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow DH = \sqrt{DC^2 - CH^2} = a\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

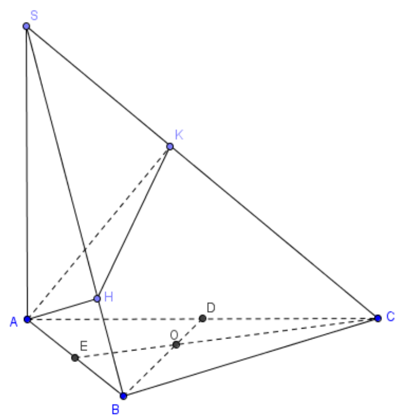


Bài 5 : *(3 điểm)*

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên các đường thẳng SB, SC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp A.BCKH

Giải

Gọi O là giao điểm 2 đường cao BD và CE của ΔABC.



$\Rightarrow$ BD $\perp$ (SAC) và CE $\perp$ (SAB)
Do ABC là tam giác đều nên D, E lần lượt là trung điểm của AC, AB $\Rightarrow$ D, E lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKC và AHB.
$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp A.BCKH

Bán kính OA = $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài 6 : *(3 điểm)*
Trong không gian Oxyz cho ba mặt phẳng :

(P) : 2x – y – 2z + 1 = 0
(Q) : x + 2y + 2z + 3 = 0
(R) : mx + y – 3z + n = 0

a) Xác định m để ba mặt phẳng trên có 1 điểm chung duy nhất .
b) Xác định m để ba mặt phẳng trên cùng đi qua một đường thẳng.

Giải

Phương trình giao tuyến của (P) và (Q): $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 - 6t \\ z = 5t \end{cases}$

Thế x, y, z vào phương trình của (R) ta được : (2m – 21)t = m – n + 1

Ba mp (P), (Q), (R) có điểm chung duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 21 \neq 0 \\ n \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{21}{2} \\ n \in R \end{cases}$

Ba mp (P), (Q), (R) cùng đi qua 1 đường thẳng $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 21 = 0 \\ m - n + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{21}{2} \\ n = \dfrac{23}{2} \end{cases}$

HẾT