

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

BÀI 1

NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in K$.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Chú ý:

- Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$.
- Vậy, $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà khoogn chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$

2. Các tính chất của nguyên hàm

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, với k là hằng số khác 0
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3. Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$

CHỦ ĐỀ 1

TÍNH NGUYÊN HÀM MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP

DẠNG 1

NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Bảng nguyên hàm hàm số lũy thừa

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$

Chú ý : dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

2. Lũy thừa với số mũ thực

Cho a, b là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

- $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

- $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

- $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

Chọn A.

$$\int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$

B. $x^4 + x^2 + C$

C. $x^5 + x^3 + C$

D. $4x^3 + 2x + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$$

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

A. $\frac{x^{2023}}{2023} + 1$

B. $\frac{x^{2023}}{2023}$

C. $y = 2022x^{2021}$

D. $\frac{x^{2023}}{2023} - 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int x^{2022} dx = \frac{x^{2023}}{2023} + C$, C là hằng số.

Nên các phương án **A, B, D** đều là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$.

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$

C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$

D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2024x + C$

Lời giải

Chọn C.

Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2024x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C.$$

Câu 9. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C$

B. $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$

D. $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$

Lời giải

Chọn C.

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

Ta có:

$$\Rightarrow F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$

- A. $(5x+3)^6 + C$ B. $(5x+3)^4 + C$ **C. $\frac{(5x+3)^6}{30} + C$** D. $\frac{(5x+3)^4}{30} + C$

Lời giải

Chọn C.

$$f(x) = (5x+3)^5 \Rightarrow \int f(x) dx = \int (5x+3)^5 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+3)^6}{6} + C = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$$

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$** B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$
C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$ D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

Câu 12. Tính $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

- A. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$** **B. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$** C. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$ D. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$

Lời giải

Chọn B.

$$\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int \sqrt{x} \sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{2}}} dx = \int \sqrt{x^{\frac{5}{2}}} dx = \int x^{\frac{5}{4}} dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{4}{9} x^{\frac{9}{4}} + C = \frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$$

Câu 13. Tính $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

- A. $x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - 2x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$** **B. $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$**
C. $x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$ D. $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - 2x^{\frac{17}{4}} \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$

Lời giải

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2x + C$

B. $\int f(x)dx = x^2 + 4x + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$

D. $\int f(x)dx = x^3 + 4x + C$

Ta có: $f(x) = x^2 + 4 \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$

Câu 15. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

B. $\int f(x) dx = \int \sqrt{x^3} dx$

$$\int f(x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

D $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C$

Ta có: $\int f(x) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$

C. $\int f(x) dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{x^4 + 2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$

B. $\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$

C. $\int (2x - 2024)^2 dx = x - 1012 + C$

D. $\int \left(\frac{1}{4} x^4 + 4x^3 \right) dx = \frac{1}{20} x^5 + \frac{4}{3} x^4 + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

$$\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$$

$$\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023} \int x^{-2024} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$$

$$\int (2x - 2024)^2 dx = \frac{(2x - 2024)^3}{3} + C$$

$$\int \left(\frac{1}{4} x^4 + 4x^3 \right) dx = \frac{1}{20} x^5 + \frac{4}{3} x^4 + C$$

Câu 18. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} x^2 + \ln|x| + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$.

B. $F(x) = \frac{(5x+3)^6}{6} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

C. $F(x) = \frac{3}{2} x\sqrt{x} + \frac{4}{3} x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4} x\sqrt[4]{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

D. $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2024x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

$$f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int \left(x^3 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^3 dx - 3 \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} x^2 + \ln|x| + C$$

$$f(x) = (5x+3)^5 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (5x+3)^5 dx = \int (5x+3)^5 \frac{d(5x+3)}{5} = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$$

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} \right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + \frac{4}{5} x\sqrt[4]{x} + C$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{x^3 - 2024x}{x} dx = \int (x^2 - 2024) dx = \frac{1}{3} x^3 - 2024x + C$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2 \right) dx = 4\sqrt{x} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3}{2} x^2 - 2x + C$

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2 \right) dx = 4\sqrt{x} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3}{2} x^2 - 2x + C$$

Câu 20. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m$ (m là tham số).

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = \frac{m}{4} x^4 - x^3 - \frac{4m}{2x^2} - \frac{5}{2x^2} - 7mx + C$

$$\int \left(mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m \right) dx = \frac{m}{4} x^4 - x^3 - \frac{4m}{2x^2} - \frac{5}{2x^2} - 7mx + C$$

Câu 21. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 22. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 23. Tính $\int \left(\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 24. Tính $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 25. Tính $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 26. Tính $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 27. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 28. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 29. Tính $\int (x^2-1)^3 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 30. Tính $\int (2 - x^2)^4 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 31. Tính $\int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 32. Tính $\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \right)^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 33. Tìm m để $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 34. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 4x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 35. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

DẠNG 2
NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Bảng nguyên hàm hàm số lượng giác

Nguyên hàm hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

Chú ý: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 36. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

- A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ C. $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ D. $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Lời giải

Chọn D.

Có $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ suy ra $F(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = x - \cos x + C$ B. $\int f(x) dx = x + \sin x + C$
C. $\int f(x) dx = x + \cos x + C$ D. $\int f(x) dx = \cos x + C$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x) dx = \int (1 + \sin x) dx = \int 1 dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$

Câu 38. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

- A. $F(x) = 2\cos \frac{x}{2} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$
C. $F(x) = 2\sin \frac{x}{2} + C$ D. $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x) + C$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow F(x) = \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = x + \tan x + C$ B. $\int f(x) dx = x + \cot x + C$
C. $\int f(x) dx = x - \tan x + C$ D. $\int f(x) dx = x - \cot x + C$

Lời giải

Chọn C.

$$\int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - \tan x + C$$

Câu 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A. $\sin x + 3x^2 + C$ B. $-\sin x + 3x^2 + C$ C. $\sin x + 6x^2 + C$ D. $-\sin x + C$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x) dx = \int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C$

Câu 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x + 3x$.

A. $\int (2\sin x + 3x) dx = -2\cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$

B. $\int (2\sin x + 3x) dx = 2\cos x + 3x^2 + C$

C. $\int (2\sin x + 3x) dx = \sin^2 x + \frac{3}{2}x + C$

D. $\int (2\sin x + 3x) dx = \sin 2x + \frac{3}{2}x^2 + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (2\sin x + 3x) dx = -2\cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$$

Câu 42. Tính $\int (x - \sin x) dx$.

A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$

B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$

C. $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$

D. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int (x - \sin x) dx = \frac{x^2}{2} + \cos x + C$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$

B. $6x + \cos x + C$

C. $x^3 - \cos x + C$

D. $6x - \cos x + C$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C$

Câu 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C$

B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$

C. $\ln |x| + \cos x + C$

D. $\ln |x| - \cos x + C$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln |x| - \cos x + C$

Câu 45. Cho $\int f(x) dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x$

B. $f(x) = -\cos x$

C. $f(x) = \sin x$

D. $f(x) = \cos x$

Lời giải

Áp dụng công thức $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Suy ra $f(x) = \sin x$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = \int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C$.
 B. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C$
 C. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C$.
D. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C$

Lời giải

$$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 47. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A.** $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C$.
 B. $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C$
 C. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = x + \cos x + C$.
 D. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = x - \cos x + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

$$\int (2 + \cot^2 x) dx = \int (1 + 1 + \cot^2 x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x - \cot x + C$$

$$\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C$$

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C$$

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

Trả lời:

Lời giải

$$F(x) = 2023x - \sin x + C$$

Đáp án:

$$\Rightarrow F(x) = \int \left(2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (2023 + \cos x) dx = 2023x - \sin x + C$$

Câu 49. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 50. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$\int x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{2} \right) dx$$

Câu 51. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$\int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2} \right) dx$$

Câu 52. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$\int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

Câu 53. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$\int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx =$$

Câu 54. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

$$\int x^2 \left[\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] dx =$$

Câu 55. Tính

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

DẠNG 3
NGUYÊN HÀM HÀM MŨ

**Nguyên hàm hàm số
mũ**

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Chú ý :

$$\bullet \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\bullet \int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 56. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C$.

B. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$.

C. $\frac{1}{3}e^x + C$.

D. $3e^{3x} + C$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: $\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$

Cách 2: Thử nghiệm $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$, với C là hằng số bất kì.

Câu 57. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- A. $2e^{2x-1} + C$. B. $e^{2x-1} + C$. C. $\frac{1}{2} e^{2x-1} + C$. D. $\frac{1}{2} e^x + C$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: $\int e^{2x-1} dx = \int e^{-1} \cdot (e^2)^x dx = e^{-1} \cdot \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x-1}}{2} + C$

Cách 2: $\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A. $\int f(x) dx = e^{x-2} + C$. B. $\int f(x) dx = e^x + 2x + C$.
C. $\int f(x) dx = e^x + C$. D. $\int f(x) dx = e^x - 2x + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int f(x) dx = \int (e^x + 2) dx = e^x + 2x + C$

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$. B. $\int f(x) dx = e^x + C$.
C. $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C$. D. $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Câu 60. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

- A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$. C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$. D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$

Câu 61. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$. B. $\int 2^x dx = 2^x + C$. C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$. D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$.

Lời giải

Chọn C.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Do theo bảng nguyên hàm:

Câu 62. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

- A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$ B. $-3^{-x} + C$ C. $3^{-x} \ln 3 + C$ D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\int f(x) dx = \int 3^{-x} dx = \int (3^{-1})^x d(x) = \frac{3^{-x}}{\ln 3^{-1}} + C = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Cách 2: $\int f(x) dx = \int 3^{-x} dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Câu 63. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 2x$

- A. $\int (3^x + 2x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$ B. $\int (3^x + 2x) dx = 2^x \cdot \ln 2 + x^2 + C$
C. $\int (3^x + 2x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$ D. $\int (3^x + 2x) dx = 2^x \cdot \ln 2 + x + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (3^x + 2x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$$

Câu 64. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

- A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x - x^2 + C$. C. $\frac{1}{x+1} e^x - x^2 + C$. D. $e^x - 2 + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int (e^x - 2x) dx = e^x - x^2 + C$

Câu 65. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$

- A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$ B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$

C. $\int f(x)dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$

D. $\int f(x)dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$

Lời giải

Chọn C.

$$\int f(x)dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$$

Câu 66. Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$

B. $2e^x - \tan x + C$

C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$

D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) = 2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int y dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2e^x + \tan x + C$$

Câu 67. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

Câu 68. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int e^x dx = xe^x + C$

B. $\int e^x dx = e^{x+1} + C$

C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$

D. $\int e^x dx = e^x + C$

Lời giải

Ta có $\int e^x dx = e^x + C$

Câu 69. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^x + C.$

B. $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C.$

C. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

D. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C.$

Lời giải

Ta có $\int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + C.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 70. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

B. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

D. $\int e^x dx = e^x + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Ta có:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Câu 71. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int \cos x dx = \sin x + C$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

D. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Ta có: $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ sai vì $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 72. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$

B. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$

C. $\int e^x (e^x - 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + e^x + C$

D. $\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Ta có:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\int e^x (e^x - 1) dx = \int (e^{2x} - e^x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + C$$

$$\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \int (3e^3)^x dx = \frac{(3e^3)^x}{\ln(3e^3)} + C = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 73. Tính $\int (2^x + 3^x) dx$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

$$\int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

Câu 74. Tính $\int e^{3x+2024} dx$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{3}e^{3x+2024} + C$

$$\int e^{3x+2024} dx = \frac{1}{3}e^{3x+2024} + C$$

Câu 75. Tính $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $18 \frac{12^x}{2 \ln 2 + \ln 3} + C$

$$\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = 18 \int 12^x dx = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C = 18 \frac{12^x}{2 \ln 2 + \ln 3} + C$$

Câu 76. Tính $\int (3^x + 5^x)^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$

$$\int (3^x + 5^x)^2 dx = \int (9^x + 30^x + 25^x) dx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{30^x}{\ln 30} + \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$$

Câu 77. Tính $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 78. Tính $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 79. Tính $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + C$

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{1 - \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x (e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} dx = \int e^x (e^x + 1) dx = \int (e^{2x} + e^x) dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + e^x + C$$

Câu 80. Chứng minh $F(x) = (4x - 5)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (4x - 1)e^x$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$

Ta có $F'(x) = 4e^x + (4x - 5)e^x = (4x - 1)e^x = f(x)$ điều phải chứng minh

Câu 81. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của các hàm số $f(x) = me^x + 2a^x - 2\sin x$ (m là tham số)

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = me^x + \frac{2a^x}{\ln a} + \cos x + C$

$$F(x) = \int (me^x + 2a^x - 2\sin x) dx = me^x + \frac{2a^x}{\ln a} + \cos x + C$$

Câu 82. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}.$$

Trả lời:

Lời giải

$$\begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-1 \end{cases}$$

Đáp án:

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$

Ta có

$$F'(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x} = (2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{-2x} = -[2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c]e^{-2x}$$

$$\text{Do } F'(x) = f(x) \text{ nên } \begin{cases} 2a=2 \\ 2a-2b=-8 \\ b-2c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-1 \end{cases}.$$