

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài

Trong chương trình Toán lớp 11 hiện nay, phần hình học không gian làm cho phần lớn học sinh đều cảm thấy chán nản, khó hiểu khi tiếp xúc với môn học đòi hỏi nhiều kỹ năng và tư duy trừu tượng cao này. Một trong những khó khăn mà học sinh hay gặp phải là sự khác nhau giữa hình phẳng và hình học không gian. Khi xét về quan hệ vuông góc và các bài toán liên quan, đối với hình học phẳng, hình vẽ mang tính trực quan, hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau. Nhưng đối với các bài toán về quan hệ vuông góc trong không gian, học sinh phải dựa trên các định nghĩa, định lý và hình biểu diễn để tìm lời giải nên học sinh gặp rất nhiều khó khăn. Một trong các bài toán quan trọng về quan hệ vuông góc trong không gian là bài toán về khoảng cách, nó xuất hiện ở hầu hết các đề thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng, đề thi học sinh giỏi và đề thi THPT quốc gia trong những năm gần đây. Mặc dù vậy, đây lại là phần kiến thức đòi hỏi học sinh phải có tư duy sâu sắc, có trí tưởng tượng hình không gian phong phú, có khả năng tổng hợp kiến thức cả về quan hệ song song lẫn quan hệ vuông góc trong không gian, cả về các bài toán định tính, định lượng trong hình học phẳng. Xuất phát từ những lí do trên tôi lựa chọn đề tài sáng kiến kinh nghiệm: ***“Giúp học sinh lớp 11 tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng cách tìm hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng”***.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Qua thực tế giảng dạy, với một số năm kinh nghiệm, tôi đã rút ra được một số kinh nghiệm nhỏ trong việc hướng dẫn, giúp học sinh giải các bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Một thao tác hết sức quan trọng mà học sinh cần phải có đó là xác định đúng hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng cho trước. Vì vậy, trong bài viết này, tôi tập trung vào việc giúp học sinh xác định hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng từ đó tính được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Trong đề tài này, đối tượng nghiên cứu của tôi là cách tìm hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Trong quá trình nghiên cứu tôi đã sử dụng các phương pháp sau:

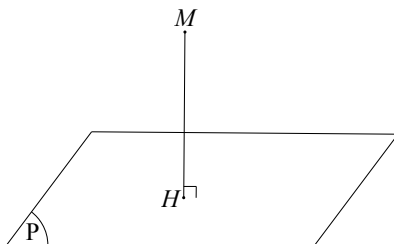
- Phương pháp điều tra giáo dục.
- Phương pháp quan sát sự phạm.
- Phương pháp phân tích và tổng hợp lý thuyết.
- Phương pháp phân loại và hệ thống hóa lý thuyết.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lý luận

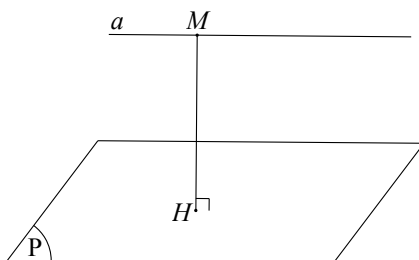
2.1.1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (P).
- Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) được kí hiệu là: $d(M; (P)) = MH$.



2.1.2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

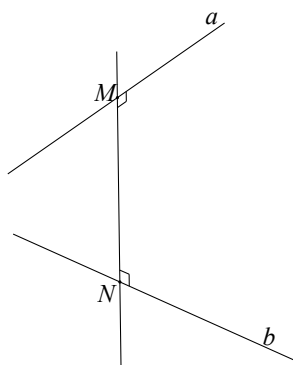
- Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của đường thẳng a đến mặt phẳng (P).
- Kí hiệu khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nó là: $d(a; (P))$.



$$d(a, (P)) = d(M, (P)) \text{ với } M \in a$$

2.1.3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

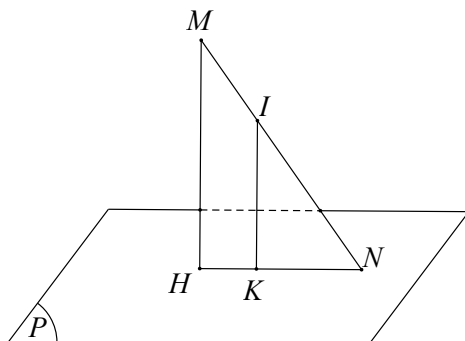


$$d(a, b) = MN$$

2.1.4. Một số nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

- Nếu $MI \cap (P) = \{N\}$ thì $\frac{d(M, (P))}{d(I, (P))} = \frac{MN}{IN}$.



2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Thực trạng dạy học hình học không gian lớp 11 nói chung và bài khoảng cách nói riêng ở trường THPT được thể hiện ở một số điểm sau:

Thứ nhất: Đối với giáo viên, để giúp học sinh nắm vững được lý thuyết và vận dụng được lý thuyết vào giải quyết các bài toán về khoảng cách thì thường cần mất nhiều thời gian và công sức. Trong những năm gần đây, trong các đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng và đề thi THPT quốc gia bài toán khoảng cách đều được xuất hiện và là nội dung khó, có tính phân loại cao. Trong khi đó, nó chỉ chiếm từ 5% - 10% tổng số điểm của cả bài thi. Vì vậy, nhiều giáo viên còn có tâm lý xem nhẹ, ngại khi dạy bài toán này.

Thứ hai: Đối với học sinh, để có thể làm tốt được các bài toán về khoảng cách đòi hỏi các em phải nắm chắc được các kiến thức trong hình học phẳng như chứng minh hai tam giác bằng nhau, định lý Pi-ta-go, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, định lý cosin... cũng như khả năng tư duy trừu tượng, quan sát hình biểu diễn, tổng hợp, phân tích các định nghĩa, định lý... trong hình học không gian. Trong khi đó, trường tôi lại nằm trên vùng kinh tế thuần nông, hầu hết gia đình các em đều có hoàn cảnh khó khăn nên sự quan tâm của gia đình đối với việc học tập của các em còn nhiều hạn chế, chất lượng đầu vào còn thấp. Chính vì vậy, đối với hầu hết học sinh, thậm chí đối với một số học sinh khá giỏi còn có tâm lý chán nản khi học về bài toán khoảng cách.

Thứ ba: Bài “Khoảng cách” trong sách giáo khoa lớp 11 chương trình cơ bản được phân phối trong ba tiết, trong đó hai tiết lý thuyết và một tiết bài tập. Với một thời lượng ít như vậy, giáo viên khó có thể vừa giảng dạy lý thuyết vừa giúp học sinh vận dụng lý thuyết vào giải bài tập. Các ví dụ cũng như các bài toán đưa ra trong sách giáo khoa mang tính tổng quan, giới thiệu chưa rõ ràng, chi tiết theo từng bước cụ thể nên học sinh khó tiếp thu, cảm thấy lúng túng, có thể các em hiểu cách giải nhưng không biết nên bắt đầu từ đâu và áp dụng thế nào để giải các bài toán.

Qua các bài kiểm tra thường xuyên, bài kiểm tra định kì ở lớp 11B3 tôi thấy học sinh thường không làm được bài tập phần này. Vì thế điểm kiểm tra thường thấp hơn so với các phần học khác. Cụ thể kết quả bài kiểm tra 45 phút của lớp 11B3 trước khi tôi chưa đưa ra phương pháp như sau:

Lớp 11B3: (Tổng số HS :40)

Giỏi		Khá		TB		Yếu		Kém	
SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
0	0	5	12,5	14	35,0	15	37,5	6	15,0

2.3. Các biện pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

2.3.1. Bài toán cơ bản về tìm hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng

Bài toán: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Tìm hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (SBC). Từ đó suy ra khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

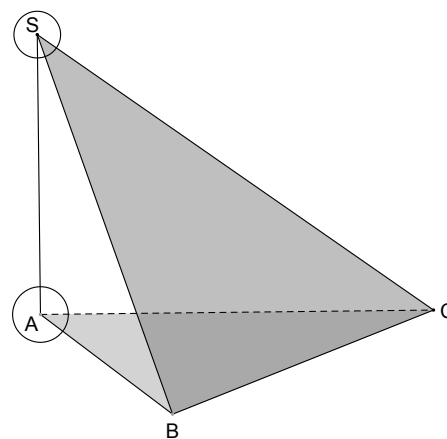
Phân tích hướng giải:

Để tìm hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBC) ta thực hiện như sau:

- Bước 1 :

~~$SA \perp (ABC)$~~

Chọn mp(ABC) là mặt phẳng chứa A sao cho A là hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng (ABC), với .



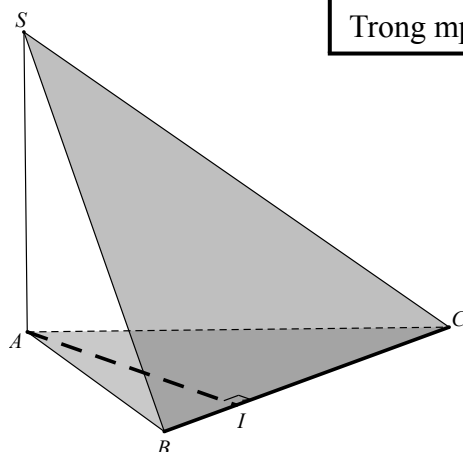
- Bước 2 :

Tìm giao tuyến của (ABC) và (SBC)



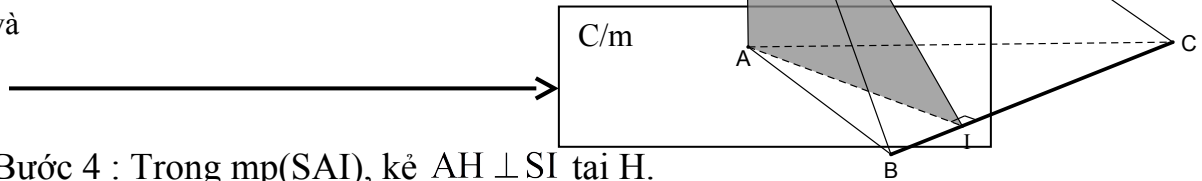
Trong mp(ABC)

Từ A, kẻ tại I

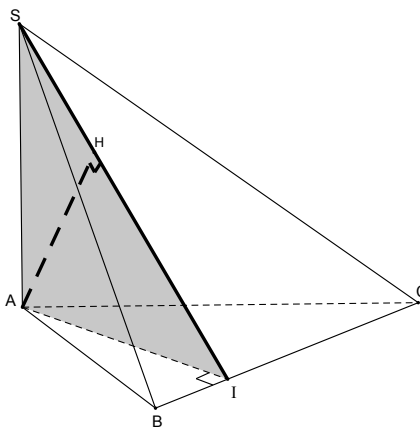


- Bước 3 :

và

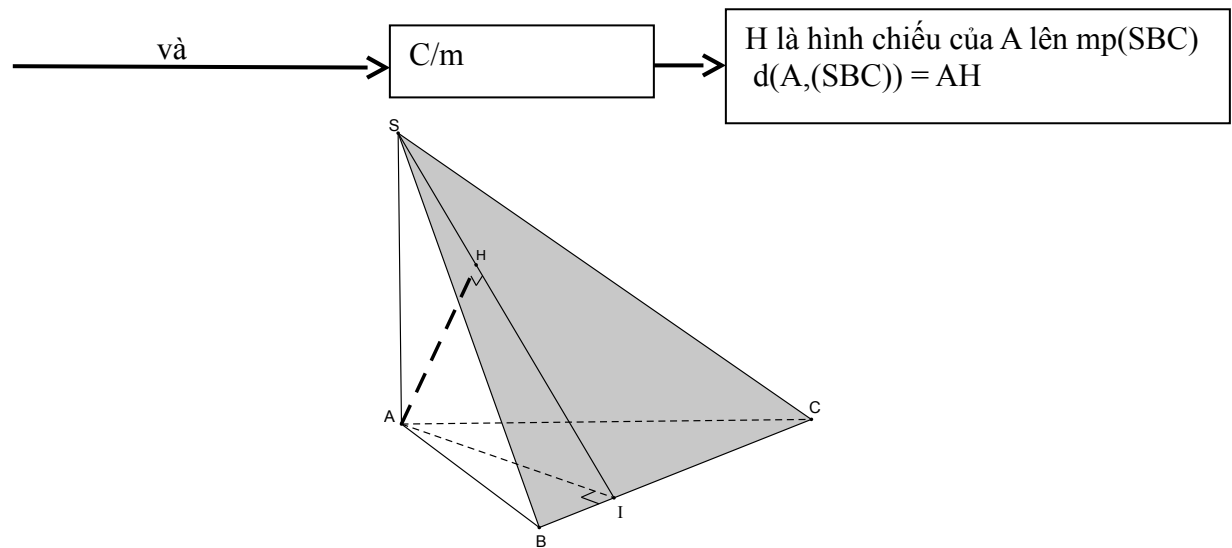


- Bước 4 : Trong mp(SAI), kẻ $AH \perp SI$ tại H.



- Bước 5:

và



Giải:

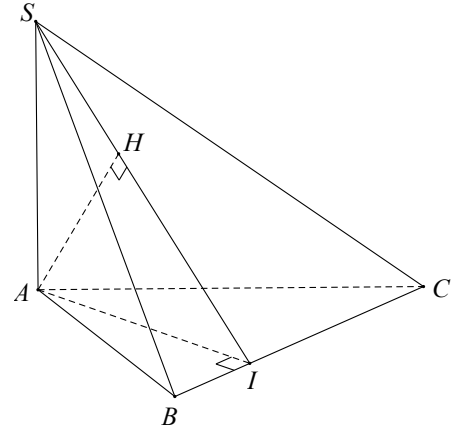
Trong mp(ABC), kẻ $AI \perp BC$ tại I. Ta lại có : $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Trong mp(SAI), kẻ $AH \perp SI$ tại H.

$$BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBC)$$

Do đó: H là hình chiếu của A lên mp(SBC)
hay $d(A; (SBC)) = AH$



2.3.2. Các ví dụ.

a. Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm I, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm của AI. Biết $SH \perp (ABCD)$, tam giác SAC vuông tại S. Tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Phân tích hướng giải:

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên để tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) ta có thể áp dụng ngay bài toán cơ bản.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên ta chọn mặt phẳng (ABCD) là mặt phẳng chứa H sao cho H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) với $S \in (SCD)$. Giao tuyến của (SCD) và (ABCD) là đường thẳng CD.

Trong mặt phẳng (ABCD), từ H kẻ $HM \perp CD$ tại M. Từ đó, chứng minh $CD \perp (SHM)$.

Trong mp(SHM), kẻ $HN \perp SM$ tại N. Ta chứng minh $HN \perp (SCD)$ hay N là hình chiếu của H lên mp(SCD). Từ đó suy ra, $d(H, (SCD)) = HN$.

Giải

Trong mặt phẳng (ABCD), kẻ $HM \perp CD$ tại M. Ta có: $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp CD$.

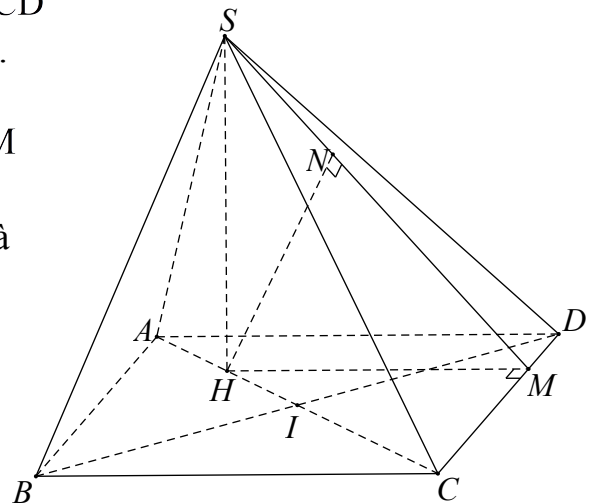
Suy ra $CD \perp (SHM)$.

Trong mặt phẳng (SHM), kẻ $HN \perp SM$ tại N. Ta lại có, $CD \perp (SHM)$ (c/m trên)

$\Rightarrow CD \perp HN$. Suy ra, $HN \perp (SCD)$ hay N là hình chiếu của H lên mp(SCD). Từ đó suy ra, $d(H, (SCD)) = HN$.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HM$. Suy ra, tam giác SHM vuông tại H.

Trong mp(ABCD) có:
 $HM \perp CD, AD \perp CD \Rightarrow HM \parallel AD$



$$\Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{CH}{CA} \quad (\text{§ 1.1 Ý Ta-Id})$$

$$\Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow HM = \frac{3}{4}AD = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

Tam giác SAC vuông tại S có SH là đường cao nên :

$$SH^2 = AH \cdot CH = \frac{3}{16}AC^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta lại có, tam giác SHM vuông tại H có HN là đường cao nên :

$$\frac{1}{HN^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{52}{27a^2} \Rightarrow HN = \frac{3a\sqrt{39}}{26} \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{3a\sqrt{39}}{26}$$

Bài 2(A-2013) : Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\angle ABC = 30^\circ$. SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Phân tích hướng giải :

Vì $(SBC) \perp (ABC)$, $(SBC) \cap (ABC) = BC$ nên nếu trong mp(SBC) ta kẻ đường thẳng vuông góc với BC thì đường thẳng đó sẽ vuông góc với mp(ABC). Ta lại có, SBC là tam giác đều nên hình chiếu của S lên mp(ABC) là trung điểm H của BC.

Vì $SH \perp (ABC)$ nên ta sẽ tìm cách để tính khoảng cách từ C đến mp(SAB) thông qua khoảng cách từ H đến mp(SAB) bằng cách tìm mối liên hệ giữa chúng.

Ta có: $CH \cap (SAB) = \{B\}$ nên :

$$\frac{d(C, (SAB))}{d(H, (SAB))} = \frac{BC}{BH} \Leftrightarrow \frac{d(C, (SAB))}{d(H, (SAB))} = 2 \Leftrightarrow d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)).$$

Như vậy, bài toán lúc này được chuyển về bài toán cơ bản. Vì $SH \perp (ABC)$ nên ta chọn mp(ABC) là mặt phẳng chứa H sao cho H là hình chiếu của S lên mp(ABC) với $S \in (SAB)$. Giao tuyến của (SAB) và (ABC) là đường thẳng AB. Trong mp(ABC), kẻ $HK \perp AB$ tại K. Ta chứng minh được $AB \perp (SHK)$. Trong mp(SHK), kẻ $HI \perp SK$ tại I. Từ đó ta cũng chứng minh được $HI \perp (SAB) \Rightarrow I$ là hình chiếu của H lên mặt phẳng (SAB) hay $d(H, (SAB)) = HI$. Từ đó suy ra $d(C, (SAB))$.

Giải

Gọi H là trung điểm của BC. Tam giác SBC đều nên $SH \perp BC$. Ta lại có, $(SBC) \perp (ABC)$, $(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Vì $CH \cap (SAB) = \{B\}$ nên :

$$\frac{d(C, (SAB))}{d(H, (SAB))} = \frac{BC}{BH} \Leftrightarrow \frac{d(C, (SAB))}{d(H, (SAB))} = 2 \Leftrightarrow d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB))$$

Trong mp(ABC), kẻ $HK \perp AB$ tại K.
Ta lại có: $AB \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$)
 $\Rightarrow AB \perp (SHK)$.

Trong mp(SHK), kẻ $HI \perp SK$ tại I. Ta có :
 $HI \perp SK, HI \perp AB$ (vì $AB \perp (SHK)$) $\Rightarrow HI \perp (SAB)$
 $\Rightarrow I$ là hình chiếu của H lên mặt phẳng (SAB).
 $\Rightarrow d(H; (SAB)) = HI$.

$$AC = BC \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$$

Ta có, trong mp(ABC) : $HK \perp AB, AC \perp AB$
 $\Rightarrow HK \parallel AC$. Mặt khác, trong $\triangle ABC$ có $HK \parallel AC$, H là trung điểm của BC nên K là trung điểm của AB. Suy ra HK là đường trung bình trong $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow HK = \frac{AC}{2} = \frac{a}{4}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HK$. Suy ra $\triangle SHK$ vuông tại H.

Tam giác SHK vuông tại H có HI là đường cao nên:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{52}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{39}}{26} \Rightarrow d(H, (SAB)) = \frac{a\sqrt{39}}{26}$$

$$\Rightarrow d(C; (SAB)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$$

Bài 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $BD = 2a$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách từ B đến mp(SAD).

Phân tích hướng giải :

Ta có: $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SAC) \cap (ABCD) = AC$, trong mp(SAC) kẻ $SH \perp AC$ tại H $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

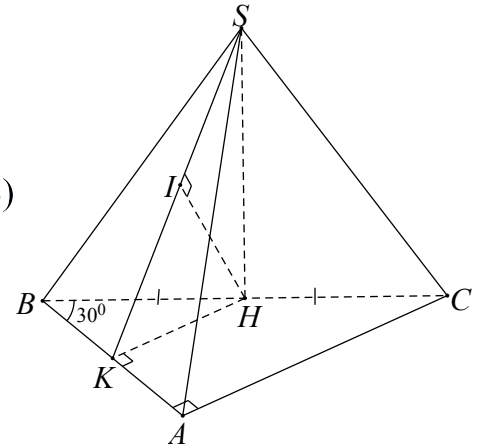
Như vậy, ta sẽ tính khoảng cách từ B đến mp(SAD) gián tiếp thông qua khoảng cách từ H đến (SAD) bằng cách tìm mối liên hệ giữa chúng. Ta có, $BC \parallel AD$ nên $BC \parallel (SAD) \Rightarrow d(B, (SAD)) = d(C, (SAD))$. Ta lại có, $CH \cap (SAD) = \{A\}$ nên:

$$\frac{d(C, (SAD))}{d(H, (SAD))} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow d(C; (SAD)) = \frac{AC}{AH} d(H, (SAD))$$

$$\Rightarrow d(B, (SAD)) = \frac{AC}{AH} d(H, (SAD))$$

Lúc này bài toán đã cho được chuyển về bài toán cơ bản.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên ta chọn mp(ABCD) là mặt phẳng chứa H sao cho H là hình chiếu của S lên mp(ABCD) với $S \in (SAD)$. Giao tuyến của (SAD) và (ABCD)



là đường thẳng AD. Trong mp(ABCD), kẻ $HK \perp AD$ tại K, ta chứng minh $AD \perp (SHK)$. Trong mp(SHK), kẻ $HJ \perp SK$ tại J. Chứng minh $HJ \perp (SAD)$. Suy ra, J là hình chiếu của H lên mp(SAD) hay $d(H, (SAD)) = HJ$ và suy ra $d(B, (SAD))$.

Giải:

Ta có : $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SAC) \cap (ABCD) = AC$, trong mp(SAC) kẻ $SH \perp AC$ tại H $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Vì $BC \parallel AD$ nên $BC \parallel (SAD)$. Suy ra:
 $d(B, (SAD)) = d(C, (SAD))$.

Vì $CH \cap (SAD) = \{A\}$ nên:

$$\frac{d(C, (SAD))}{d(H, (SAD))} = \frac{AC}{AH}$$

$$\Rightarrow d(C, (SAD)) = \frac{AC}{AH} d(H, (SAD))$$

$$\Rightarrow d(B, (SAD)) = \frac{AC}{AH} d(H, (SAD))$$

$$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a, SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{AC}{AH} = 4$$

$$\Rightarrow d(B, (SAD)) = 4d(H, (SAD)).$$

Trong mp(ABCD), kẻ $HK \perp AD$ tại K. Ta có: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AD$. Suy ra $AD \perp (SHK)$.

Trong mp(SHK), kẻ $HJ \perp SK$ tại J. Mặt khác, $AD \perp (SHK) \Rightarrow AD \perp HJ$. Do đó, $HJ \perp (SAD)$ hay J là hình chiếu của H lên mp(SAD) $\Rightarrow d(H, (SAD)) = HJ$

$$\text{Tam giác AHK vuông cân tại K nên } HK = AH \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HK$. Suy ra $\triangle SHK$ vuông tại H.

Tam giác SHK vuông tại H có HJ là đường cao nên :

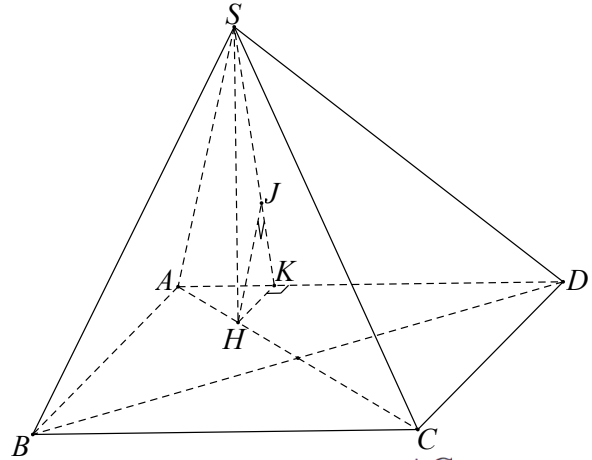
$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HJ = \frac{a\sqrt{21}}{14} \Rightarrow d(H, (SAD)) = \frac{a\sqrt{21}}{14}$$

$$\Rightarrow d(B, (SAD)) = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) theo a.

Phân tích hướng giải :

Vì $A' \in IC$ nên $A' \in (IBC)$. Ta lại có: $AA' \perp (ABC)$ nên bài toán đã cho được chuyển về bài toán cơ bản.



Vì $AA' \perp (ABC)$ nên ta chọn mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng chứa A sao cho A là hình chiếu của A' lên $mp(ABC)$ với $A' \in (IBC)$. Giao tuyến của (IBC) và (ABC) là đường thẳng BC .

Trong $mp(ABC)$, kẻ $AJ \perp BC$ tại J nhưng $AB \perp BC$ (tam giác ABC vuông tại B) nên $J \equiv B$. Ta chứng minh $BC \perp (A'AB)$. Trong $mp(A'AB)$, kẻ $AH \perp A'B$ tại H . Chứng minh $AH \perp (IBC)$. Từ đó suy ra H là hình chiếu của A lên $mp(IBC)$ hay $d(A; (IBC)) = AH$.

Giải

Ta có: $BC \perp AB$ (do tam giác ABC vuông tại B).

Ta lại có: $AA' \perp (ABC)$ (do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng) $\Rightarrow BC \perp A'A$
 $\Rightarrow BC \perp (A'AB)$.

Trong $mp(A'AB)$, kẻ $AH \perp A'B$ tại H .
 Ta có: $AH \perp A'B, BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AH$
 $\Rightarrow AH \perp (IBC) \Rightarrow H$ là hình chiếu của A lên $mp(IBC) \Rightarrow d(A, (IBC)) = AH$.

Vì $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp AB$. Suy ra $\Delta A'AB$ vuông tại A .

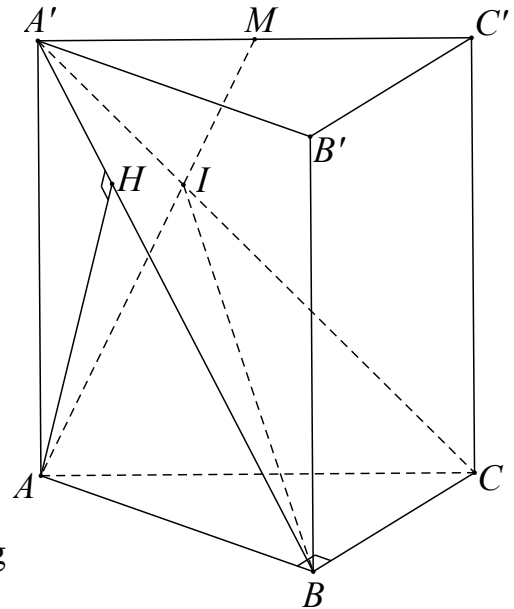
Tam giác $A'AB$ vuông tại A có AH là đường cao nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d(A; (IBC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Nhận xét: Nghiên cứu các đề tuyển sinh ĐH – CĐ và đề thi THPT quốc gia trong những năm gần đây, tôi nhận thấy dạng bài toán về khoảng cách thường được sử dụng trong các kì thi. Đặc biệt là các bài toán về tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng a đến mặt phẳng (P) . Do đó, nếu ta tính được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thì cũng sẽ tính được khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Sau đây, tôi sẽ trình bày một số bài toán mở rộng từ cách tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau vận dụng nhận xét trên.

b. Bài toán mở rộng tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau thông qua tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng



Bài 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của A' lên mặt đáy (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC , góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' .

Phân tích hướng giải:

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó, $CI \perp AB$ (do ΔABC đều). Ta chứng minh được $A'I \perp AB$. Suy ra góc giữa $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'IC} = 60^\circ$.

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' ta cần xác định một phẳng chứa AB và song song với CC' hoặc một mặt phẳng chứa CC' và song song với AB . Vậy để giải quyết bài toán này, chúng ta nên chọn hướng giải quyết nào?

Vì $CC' \parallel BB'$ nên $CC' \parallel (ABB'A')$. Mặt khác, $AB \subset (ABB'A')$ nên $d(AB; CC') = d(CC'; (ABB'A')) = d(C; (ABB'A'))$.

Ở đây vì sao ta lại chọn: $d(AB; CC') = d(C; (ABB'A'))$ mà không phải là $d(C'; (ABB'A'))$ hay khoảng cách từ một điểm khác đến mp($ABB'A'$)? Vì $A'O \perp (ABC)$, $CO \cap (ABB'A') = \{I\}$ nên ta chọn điểm C , rồi thay cho việc tính khoảng cách từ điểm C đến mp($ABB'A'$) ta tính khoảng cách từ điểm O đến mp($ABB'A'$) bằng cách tìm mối liên hệ giữa chúng và đưa bài toán đã cho về bài toán cơ bản.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB . Ta có: $CI \perp AB$ (do ΔABC là tam giác đều). Ta lại có: $A'O \perp (ABC) \Rightarrow A'O \perp AB$. Do đó: $AB \perp (A'OI) \Rightarrow A'I \perp AB$. Suy ra góc giữa $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'IC} = 60^\circ$.

Ta có: $CC' \parallel BB'$ nên $CC' \parallel (ABB'A')$. Mặt khác, $AB \subset (ABB'A')$ nên $d(AB; CC') = d(CC'; (ABB'A')) = d(C; (ABB'A'))$.

Vì $CO \cap (ABB'A') = \{I\}$ nên :

$$\frac{d(C, (ABB'A'))}{d(O; (ABB'A'))} = \frac{IC}{IO}$$

$$\Rightarrow \frac{d(C, (ABB'A'))}{d(O; (ABB'A'))} = 3$$

$$\Rightarrow d(C, (ABB'A')) = 3d(O, (ABB'A'))$$

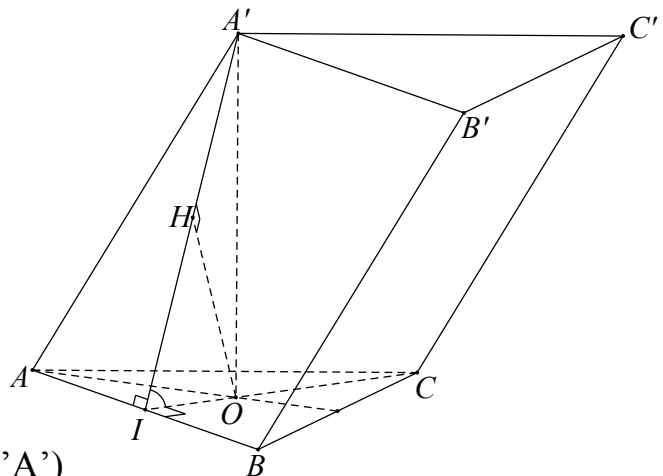
Trong mp($A'OI$), kẻ $OH \perp A'I$ tại H . Ta lại có : $AB \perp (A'OI)$

$$\Rightarrow AB \perp OH. \text{ Do đó: } OH \perp (ABB'A')$$

$$\Rightarrow H \text{ là hình chiếu của } O \text{ lên mp } (ABB'A')$$

$$\Rightarrow d(O, (ABB'A')) = OH \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = 3OH.$$

$$CI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}, A'O = OI \tan 60^\circ = \frac{a}{2}$$



Vì $A'O \perp (ABC)$ nên $A'O \perp OI$. Suy ra $\Delta A'OI$ vuông tại O.

Tam giác $A'OI$ vuông tại O có OH là đường cao nên :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{A'O^2} = \frac{16}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{4} \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = \frac{3a}{4} \Rightarrow d(AB; CC') = \frac{3a}{4}.$$

Bài 6 (A- 2012): Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Phân tích hướng giải:

Vì $SH \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ nên để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC, ta đi xác định một mặt phẳng chứa SA và song song với BC. Tức là, ta phải xác định được một đường thẳng song song với BC và đồng phẳng với SA.

Tuy nhiên, ở bài 5 ta có thể tìm ngay được trên hình vẽ $BB' // CC'$ thì ở bài này trên hình vẽ chưa xuất hiện đường thẳng song song với BC và đồng phẳng với SA. Do đó, ta sẽ có cách làm như sau:

Trong mp(ABC), lấy điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành. Khi đó: $BC // AD \Rightarrow BC // (SAD)$. Suy ra: $d(SA; BC) = d(BC; (SAD))$. Vì $SH \perp (ABCD)$, $BH \cap (SAD) = \{A\}$ nên ta sẽ chọn $d(BC; (SAD)) = d(B; (SAD))$. Sau đó, ta chuyển từ tính khoảng cách từ điểm B đến mp(SAD) sang tính khoảng cách từ H đến mp(SAD), để đưa bài toán về bài toán cơ bản.

Giải

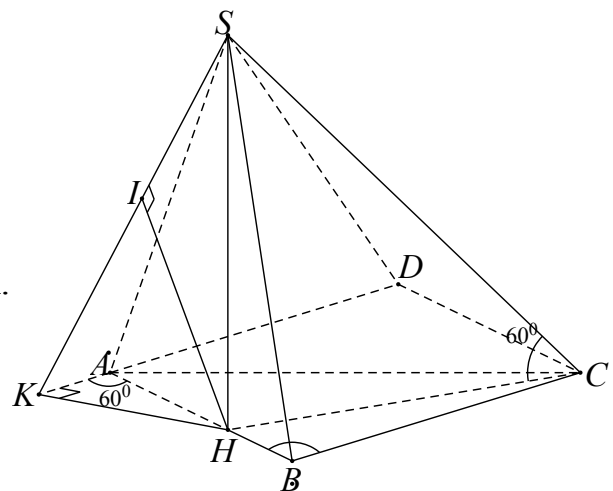
Ta có : $SH \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và mp(ABC) là $\angle SCH = 60^\circ$.

Trong mp(ABC), ta lấy điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành. Khi đó: $BC // AD \Rightarrow BC // (SAD)$. Suy ra:
 $d(SA; BC) = d(BC; (SAD)) = d(B; (SAD))$
 $= \frac{3}{2}d(H; (SAD)).$

Trong mp(ABCD), kẻ $HK \perp AD$ tại K.
 Ta lại có : $AD \perp SH$ (vì $SH \perp (ABC)$).
 Do đó: $AD \perp (SHK)$

Trong mp(SHK), kẻ $HI \perp SK$ tại I.
 Ta lại có : $AD \perp (SHK)$ (c/m trên)
 $\Rightarrow HI \perp AD$. Do đó, $HI \perp (SAD)$. Suy ra I là hình chiếu của H lên mp(SAD)
 $\Rightarrow d(H; (SAD)) = HI$.

Vì ΔABC đều nên tứ giác ABCD là hình thoi $\Rightarrow \angle B = 120^\circ \Rightarrow \angle HAK = 60^\circ$



$$AH = \frac{2}{3} AB = \frac{2a}{3}$$

$$HK = AH \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}, CH^2 = BH^2 + BC^2 - 2BH \cdot BC \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$SH = CH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp HK$. Suy ra $\triangle SHK$ vuông tại H.

Tam giác SHK vuông tại H có HI là đường cao nên:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{24}{7a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow d(H, (SAD)) = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

$$\Rightarrow d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

2.3.3. Bài tập áp dụng

Bài 1 (B-2011): Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

$$\text{ĐS: } d(B_1, (A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2 (B-2013): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) .

$$\text{ĐS: } d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Bài 3 (A, A1-2014): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = 3a/2$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB . Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

$$\text{ĐS: } d(A; (SBD)) = 2a/3$$

Bài 4 (A-2011): Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

$$\text{ĐS: } d(AB, SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , cạnh $AB = 2a$ và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Góc giữa mặt phẳng $(C'AB)$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và CB' .

$$\text{ĐS: } d(AC', CB') = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Với cách làm tôi vừa trình bày ở trên, giáo viên chỉ cần phân tích hướng giải và gợi mở vấn đề cho học sinh, học sinh chủ động phát hiện ra các điểm mấu chốt của bài toán để có thể đưa bài toán phức tạp về bài toán cơ bản đơn giản hơn.

Sau khi dạy xong chủ đề: “ *Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng cách tìm hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng*”, tôi đã cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút như sau:

Đề bài:

Bài 1 (5đ): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° , cạnh $AC = a$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Bài 2 (5đ): Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính theo a khoảng cách giữa SB và CM .

Kết quả của bài kiểm tra thể hiện cụ thể như sau:

Lớp 11B3: (Tổng số HS :40)

Giỏi		Khá		TB		Yếu		Kém	
SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
3	7,5	9	22,5	17	42,5	8	20,0	3	7,5

Qua bảng trên, có thể thấy rằng kết quả học tập của lớp 11B3 sau khi học xong chủ đề này đã có sự thay đổi rõ rệt. Từ chỗ chưa có học sinh đạt điểm giỏi khi chưa áp dụng cách làm mà tôi đã trình bày ở trên, thì khi áp dụng cách làm này đã có 3 học sinh đạt điểm giỏi. Số lượng học sinh đạt điểm khá, trung bình tăng lên, số lượng học sinh đạt điểm yếu, kém giảm xuống. Như vậy, thành công bước đầu và quan trọng của cách làm là đã cải thiện được chất lượng học tập của học sinh cũng như tạo ra được sự hứng thú, say mê của học sinh khi học phần kiến thức này.

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận

Bài tập về tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong chương trình hình học 11 nói chung rất đa dạng, phong phú và phức tạp. Để có thể áp dụng sáng kiến kinh nghiệm của bản thân có hiệu quả vào đối tượng học sinh thì yêu cầu cả người dạy và người học phải không ngừng học hỏi và tìm kiếm những tri thức mới. Riêng đối với các em học sinh phải luôn cố gắng, chăm chỉ rèn luyện thì mới có thể phát triển tư duy suy luận logic, phân tích vấn đề và khái quát hoá vấn đề, từ đó mới có thể giải quyết vấn đề một cách khoa học, nhanh gọn và bắt kịp với xu hướng học hiện nay. Trong khuôn khổ bài viết của mình, tôi xin mạnh dạn đưa ra một số bài toán về tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau cùng với cách phân tích hướng giải giúp học sinh có thể đưa bài toán đã cho về bài toán cơ bản. Từ đó, giúp các em giải quyết bài toán một cách dễ dàng hơn.

Kiến thức khoa học nói chung và kiến thức toán học nói riêng rất phong phú và đa dạng. Do đó, bài viết không thể tránh khỏi những thiếu sót. Rất kính mong được sự ủng hộ nhiệt tình của các bạn đồng nghiệp và góp ý cho tôi.

3.2. Kiến nghị

Đối với giáo viên : Trong các giờ học, cần thường xuyên kiểm tra học sinh các định nghĩa, định lý, tính chất trọng tâm của chương II và chương III trong sách giáo khoa hình học 11. Trong khi học sinh làm bài tập, giáo viên cần quan sát và đến chỗ ngồi của các em, đọc các bài nháp của các em để có thể định hướng, giúp đỡ, tháo gỡ khó khăn chỉnh sửa ngay các sai lầm trong bài làm.

Đối với nhà trường: Trong các buổi họp tổ chuyên môn, các giáo viên trong tổ có thể chọn ra một chủ đề nào đó mà giáo viên còn gặp khó khăn trong giảng dạy cũng như học sinh còn lúng túng, chưa biết cách để làm các bài tập để trao đổi kinh nghiệm giảng dạy cũng như hệ thống các bài tập hay đối với từng lớp trong các buổi họp tiếp theo.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 05 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác.

Ký và ghi rõ họ tên

Vũ Thị Phụng

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hình học 11. NXB Giáo dục.

2. Bài tập hình học 11. NXB Giáo dục.
3. Giải toán hình học 11. Nhà xuất bản Hà Nội. Lê Hồng Đức - Nhóm Cự Môn.
4. Phương pháp giải toán hình không gian 11. NXB Đà Nẵng. Nguyễn Văn Dự - Trần Quang Nghĩa - Nguyễn Anh Trường.
5. Tổng hợp đề thi đại học môn toán từ năm 2010 đến năm 2014. Nguồn internet.

1. MỞ ĐẦU	1
1.1. Lí do chọn đề tài	1
1.2. Mục đích nghiên cứu	1

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT ĐẶNG THAI MẠI**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**GIÚP HỌC SINH LỚP 11 TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT
ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG BẰNG CÁCH TÌM HÌNH CHIẾU
CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT MẶT PHẪNG**

**Người thực hiện: Vũ Thị Phượng
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực (môn): Toán**

