

Bài 1. (2,5 điểm)

- a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 0$
- b) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thỏa mãn $13a + b + 2c = 0$
Chứng tỏ rằng $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010}$ b) $(2x-5)^3 - (x-2)^3 = (x-3)^3$

Bài 3. (2,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Hạ ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AD

- a) Chứng minh $DE \perp CF$
- b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy
- c) Xác định vị trí điểm M trên BD để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD (AC > BD)$. Gọi G, H lần lượt là hình chiếu của C lên AB và AD. Chứng minh

- a) $\Delta ABC \sim \Delta HCG$
- b) $AC^2 = AB \cdot AG + AD \cdot AH$

Bài 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Có: $a^2 + b^2 \geq 2ab; a^2 + c^2 \geq 2ac; b^2 + c^2 \geq 2bc$

Cộng được: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (1)

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow -a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$ (2)

Cộng (1) với (2) được $3ab + 3ac + 3bc \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 0$

b) $f(-2) = 4a - 2b + c; f(3) = 9a + 3b + c$

Có $f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$ nên:

Hoặc: $f(-2) = 0$ và $f(3) = 0 \Rightarrow f(-2).f(3) = 0$ (1)

Hoặc: $f(-2)$ và $f(3)$ là hai số đối nhau $\Rightarrow f(-2).f(3) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) được $f(-2).f(3) \leq 0$

c) $4M = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 4y + 4$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3y^2 + 2y + 3$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) + \frac{8}{3}$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$$

Giá trị nhỏ nhất của $4M$ là $\frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ nên

Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Bài 2.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 = \frac{x-4}{2010} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} = \frac{x-2014}{2010} + \frac{x-2014}{2011} \\ &\Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) = 0 \end{aligned}$$

a) $\Leftrightarrow x = 2014$

b) Đặt $2x - 5 = a; \quad x - 2 = b \Rightarrow a - b = x - 3$

Phương trình đã cho trở thành: $a^3 - b^3 = (a - b)^3$

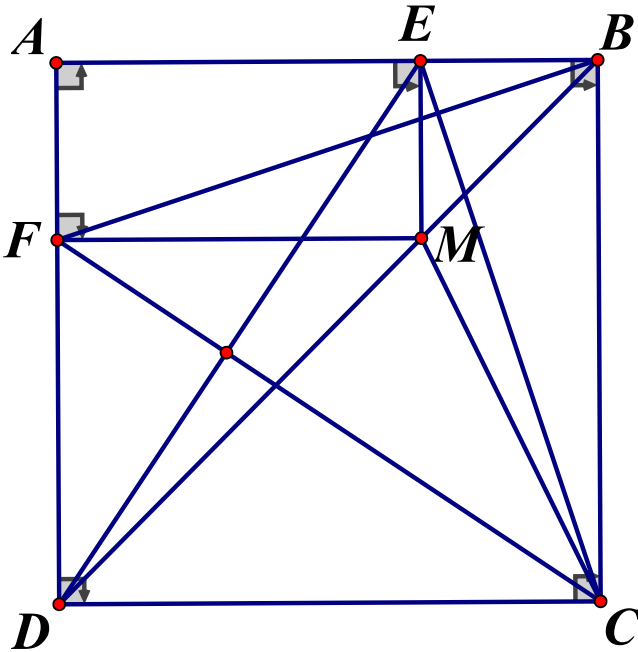
$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ b = 0 \Rightarrow x = 2 \\ a = b \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Bài 3.



a) Chứng tỏ được $AE = DF$ (cùng bằng MF)

Chứng tỏ được $\triangle CDF = \triangle DAE \Rightarrow \sphericalangle FCD = \sphericalangle EDA$

Có: $\sphericalangle EDA$ và $\sphericalangle EDC$ phụ nhau $\Rightarrow \sphericalangle ECD$ và $\sphericalangle EDA$ phụ nhau hay $CF \perp DE$

b) Tương tự có $CE \perp BF$

Chứng minh được $CM \perp EF$

Gọi G là giao điểm của FM và BC; H là giao điểm của CM và EF.

$\sphericalangle MCG = \sphericalangle FEM$ (hai HCN bằng nhau)

$\sphericalangle CMG = \sphericalangle FMH$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \sphericalangle MHF = \sphericalangle MGC = 90^\circ$

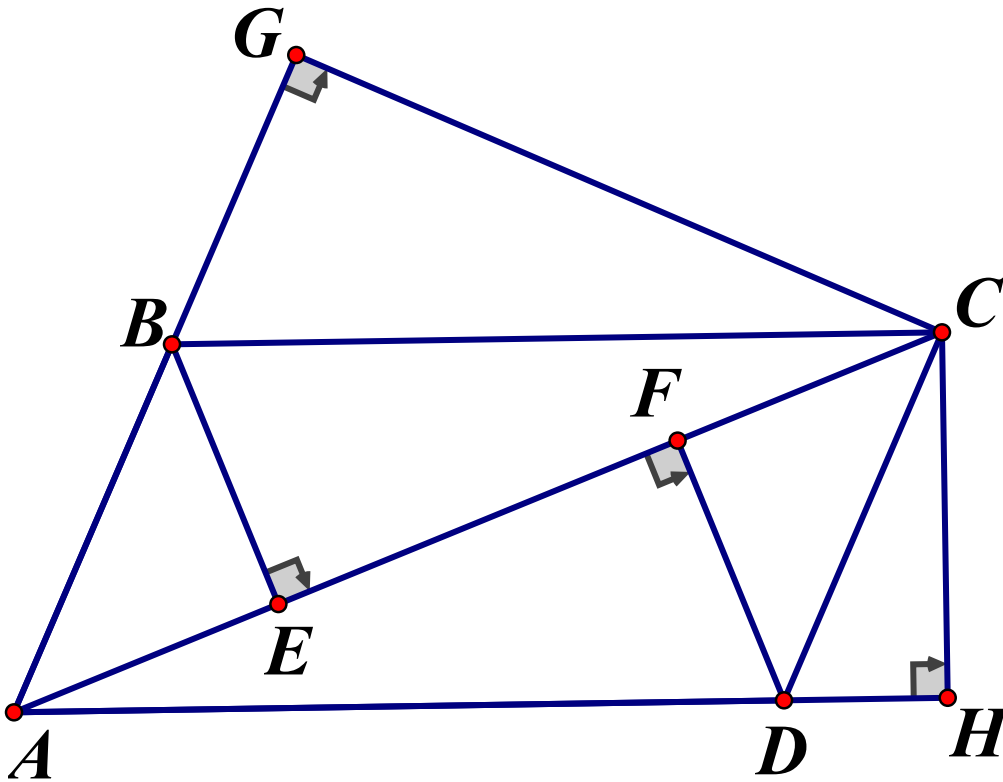
CM, FB, ED là ba đường cao của $\triangle CEF$ nên chúng đồng quy

c) $(AE - ME)^2 \geq 0$ nên $(AE + ME)^2 \geq 4AE \cdot ME \Leftrightarrow AE \cdot ME \leq \frac{(AE + ME)^2}{4}$

$\Leftrightarrow S_{AEMF} \leq \frac{AB^2}{4}$. Mà AB là hằng số nên S_{AEMF} lớn nhất $\Leftrightarrow AE = ME$

Lúc đó M là trung điểm của BD

Bài 4.



a) Chứng tỏ được $\triangle CBG \sim \triangle CDH \Rightarrow \frac{CG}{CH} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{BA}$

Và $\sphericalangle ABC = \sphericalangle HCG$ (cùng bù với $\sphericalangle BAD$) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HCG$

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D trên AC.

$$\triangle AFD \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF \cdot AC = AD \cdot AH$$

$$\triangle AEB \sim \triangle AGC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AG \cdot AB$$

Cộng được : $AF \cdot AC + AE \cdot AC = AD \cdot AH + AG \cdot AB$

$$\Leftrightarrow AC \cdot (AF + AE) = AD \cdot AH + AG \cdot AB$$

Chứng tỏ được: $AE = FC$. Thay được:

$$AC \cdot (AF + FC) = AD \cdot AH + AG \cdot AB \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AH + AG \cdot AB$$

Bài 5.

$$A = 5^n (5^n + 1) - 6^n (3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$$

$$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n) \cdot A \text{ chia hết cho } 7$$

$$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n) \cdot A \text{ chia hết cho } 13$$

Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91