

**Bài 1: (4,5 điểm).** Cho biểu thức:  $Q = \left( \frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$ .

a) Tìm điều kiện xác định của Q, rút gọn Q.

b) Tìm x khi  $Q = \frac{1}{3}$ .

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q.

**Bài 2: (4,5 điểm).**

a) Giải phương trình:  $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$ .

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $x^3 - 2x^2 - x + 2$

c) Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho:  $x^2 = y^2 + 2y + 13$ .

**Bài 3: (4,0 điểm).**

a) Cho  $abc \neq \pm 1$  và  $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$ . Chứng minh rằng  $a = b = c$ .

b) Cho số tự nhiên  $n > 3$ . Chứng minh rằng nếu  $2^n = 10a + b$  ( $a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$ ) thì tích  $ab$  chia hết cho 6.

**Bài 4: (5,0 điểm).** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng:  $BD \cdot DC = DH \cdot DA$ .

b) Chứng minh rằng:  $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$ .

c) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF.

d) Gọi M, N, P, Q, I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB, EF, FD, DE. Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm.

**Bài 5: (1,0 điểm).** Cho tam giác ABC cân tại A có  $AB = AC = b$ ;  $BC = a$ . Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC. Chứng minh

rằng:  $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}$ .

**Bài 6: (1,0 điểm).**

Cho  $a, b, c > 0$ ;  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$ .

Hết

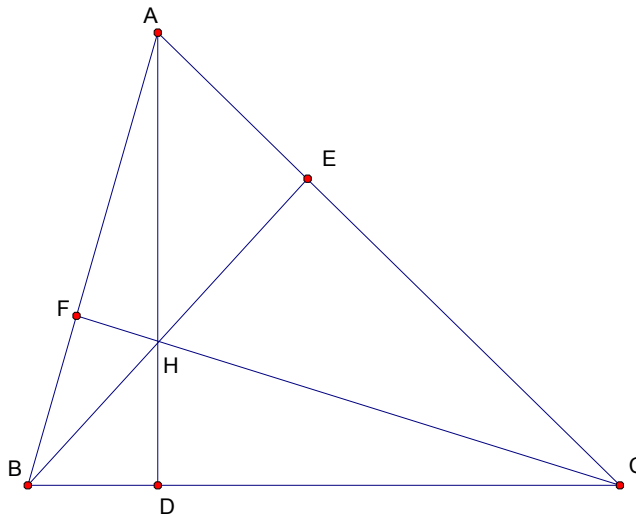
Họ tên thí sinh : ..... Giám thị số 1 : .....

Số báo danh : ..... Giám thị số 2: .....

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

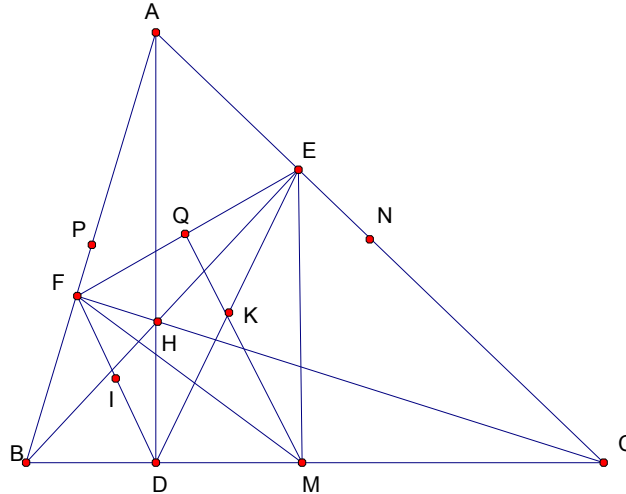
Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang

Bài	Nội dung cần đạt	Thang điểm
<b>Bài 1</b> <b>(4,5đ)</b>	a) Đk: $x \neq -1; x \neq -2$ .	<b>0,5</b>
	$Q = \frac{x^2 - x + 1 + 6x + 3 - 2x - 2}{x^3 + 1} \cdot \frac{1}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x^2 - x + 1}$	<b>1,5</b>
	b) $\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$	<b>0,5</b>
	Suy ra $x = -1$ hoặc $x = 2$ .	<b>0,5</b>
	So sánh với điều kiện suy ra $x = 2$ thì $Q = \frac{1}{3}$	<b>0,5</b>
	c) $Q = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ ; Vì $1 > 0$ ; $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ .	<b>0,25</b>
	Q đạt GTLN $\Leftrightarrow x^2 - x + 1$ đạt GTNN $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$	<b>0,25</b>
	$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (t/m). Lúc đó $Q = \frac{4}{3}$	<b>0,25</b>
	Vậy GTLN của Q là $Q = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{2}$ .	<b>0,25</b>
	<b>Bài 2</b> <b>(4,5đ)</b>	a) ĐK: $x \neq -\frac{1}{2}; x \neq -\frac{7}{2}$
$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+7)(2x+1)}$		
$\Leftrightarrow \frac{4x^2+20x+21-4x^2-12x-5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2+16x+7-6x^2-9x+9}{(2x+7)(2x+1)}$		
$\Leftrightarrow \frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2+7x+16}{(2x+7)(2x+1)}$	<b>0,5</b>	
$\Rightarrow 8x+16 = -2x^2+7x+16 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \text{ (Lo}^i\text{i)} \end{cases}$	<b>0,5</b>	
Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$	<b>0,25</b>	
	b) Ta có $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2) = x^2(x - 2) - (x - 2)$	<b>0,5</b>
	$= (x - 2)(x^2 - 1)$	<b>0,5</b>
	$= (x - 2)(x - 1)(x + 1)$ .	<b>0,5</b>
	c) Ta có $x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 = (y + 1)^2 + 12$	
	$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y - 1) = 12$	<b>0,5</b>
	Do $x + y + 1 - (x - y - 1) = 2y + 2$ là số chẵn và $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x + y + 1 > x - y - 1$ . Do đó $x + y + 1$ và $x - y - 1$ là hai số nguyên dương chẵn.	<b>0,5</b>
	Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp: $x + y + 1 = 6$ và $x - y - 1 = 2$ $\Leftrightarrow x = 4$ và $y = 1$ . Vậy $(x; y) = (4; 1)$ .	<b>0,5</b>

<b>Bài 3</b> <b>(4,0đ)</b>	<p>a) Từ <math>\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}</math>.</p> <p>Do đó:</p> $a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}; \quad b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c-a}{ac}; \quad c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$ <p>Suy ra: <math>(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}</math></p> $\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2 - 1) = 0$ $\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ (do } abc \neq \pm 1)$ <p>Suy ra <math>a = b = c</math></p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>b) Ta có <math>2^n = 10a + b \Rightarrow b \equiv 2^n \pmod{10} \Rightarrow b \equiv 2 \pmod{10}</math> (1)</p> <p>Ta chứng minh <math>ab \equiv 3 \pmod{6}</math> (2)</p> <p>Thật vậy, từ đẳng thức <math>2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n</math> có chữ số tận cùng là b.</p> <p>Đặt <math>n = 4k + r</math> (<math>k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3</math>) ta có: <math>2^n = 16^k 2^r</math>.</p> <p>Nếu <math>r = 0</math> thì <math>2^n = 16^k</math> tận cùng là <math>6 \Rightarrow b \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow ab \equiv 6 \pmod{6}</math>.</p> <p>Nếu <math>1 \leq r \leq 3</math> thì <math>2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) \equiv 10 \pmod{10} \Rightarrow 2^n</math> tận cùng là <math>2^r</math></p> <p>suy ra <math>b \equiv 2^r \pmod{10} \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow ab \equiv 3 \pmod{6}</math>.</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>ab \equiv 6 \pmod{6}</math></p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<b>Bài 4</b> <b>(5,0đ)</b>		
	<p>a) Chỉ ra được <math>\Delta BDH \sim \Delta ADC</math> (g.g)</p> $\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC}$ $\Rightarrow BD \cdot DC = DH \cdot DA$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>b) Ta có: <math>\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} = \frac{HD}{AD}</math></p> <p>Tương tự: <math>\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}</math></p> <p>Do đó <math>\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1</math></p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

c) Chứng minh được  $\triangle AEF \sim \triangle ABC$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$  0,25  
 Tương tự  $\widehat{DEC} = \widehat{ACB}$ . Do đó:  $\widehat{AEF} = \widehat{DEC}$  0,25  
 Mà  $\widehat{AEF} + \widehat{HEF} = \widehat{DEC} + \widehat{HED} = 90^\circ$  nên  $\widehat{HEF} = \widehat{HED}$   
 $\Rightarrow EH$  là phân giác của góc DEF. 0,25  
 Tương tự FH là phân giác của góc EFD  
 Do đó H là giao các đường phân giác của tam giác DEF. 0,25

d)



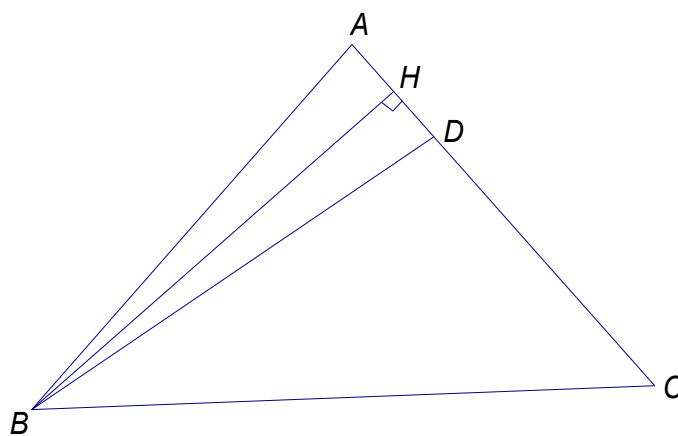
Do  $\triangle BEC$  vuông tại E, M là trung điểm BC nên  $EM = \frac{1}{2}BC$  (trung tuyến ứng với cạnh huyền)

Tương tự :  $FM = \frac{1}{2}BC$

Do đó:  $\triangle EMF$  cân tại M, mà Q là trung điểm EF nên  $MQ \perp EF$   
 $\Rightarrow MQ$  là đường trung trực của EF hay  $MQ$  là đường trung trực của tam giác DEF. 0,5

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được NI và PK cũng là đường trung trực của tam giác DEF nên ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm. 0,5

**Bài 5**  
**(1,0đ)**



Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC.  
 Tam giác BAD cân tại B ( $BA=BD$ ) có BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$$\Rightarrow AH = \frac{AD}{2}.$$

Tam giác ABC có BD là đường phân giác, ta có :

	$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{DA}{b} = \frac{DC}{a} = \frac{DA+DC}{a+b} = \frac{AC}{a+b} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow DA = \frac{b^2}{a+b}$ <p>Tam giác HAB vuông tại H, theo đ/lý Pytago ta có :</p> $AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow BH^2 = b^2 - \frac{AD^2}{4} \quad (1)$	0,25
	<p>Tam giác HBC vuông tại H, theo đ/lý Pytago, ta có</p> $BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2 = a^2 - (b - \frac{AD}{2})^2$ $\Rightarrow BH^2 = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4} \quad (2)$	0,25
	<p>Từ (1) và (2) ta có :</p> $b^2 - \frac{AD^2}{4} = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4} \Rightarrow b^2 - a^2 = b \cdot AD - b^2$ $\Rightarrow (b+a)(b-a) = \frac{-ab^2}{a+b} \Rightarrow \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}$	0,25
	<p>Vậy bài toán được c/m.</p>	0,25
<b>Bài 6 (1,0đ)</b>	<p>Do <math>a, b &gt; 0</math> và <math>1 + b^2 \geq 2b</math> với mọi <math>b</math> nên</p> $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$ <p>Tương tự ta có : <math>\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}</math>; <math>\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}</math></p> <p>mà <math>a + b + c = 3</math> nên <math>\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab + bc + ca}{2} \quad (1)</math></p> <p>Cũng từ <math>a + b + c = 3 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 9</math>  <math>\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9</math>  mà <math>a^2 + b^2 \geq 2ab</math>; <math>b^2 + c^2 \geq 2bc</math>; <math>c^2 + a^2 \geq 2ac</math> nên <math>a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca</math> suy ra <math>3(ab + bc + ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3 \quad (2)</math>.</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}</math> đpcm.</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi <math>a = b = c = 1</math>.</p>	0,25
		0,25

Ghi chú:

- Học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa
- Bài hình nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm.