Sở Giáo dục-Đào tạo
TP.Hồ Chí Minh

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12-THPT
CẤP THÀNH PHỐ
Năm học 2009 - 2010 (khóa ngày 3/3/2010)
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài : 180 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1 : *(4 điểm)*

a) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x^4+1}$.

b) Cho x, y, z thỏa : $x > 0; y > 0; z > 0;\ x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{x+y}{xyz}$.

Bài 2 : *(4 điểm)*

Chứng minh :

a) $25(x^2 + y^2) + (12 - 3x - 4y)^2 - 72 \geq 0,\quad \forall x, y \in R.$

b) $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} \geq \dfrac{2}{1+xy}$, với $xy \geq 1$.

Bài 3 : *(3 điểm)*

Giải các phương trình và hệ phương trình:

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$

Bài 4 : *(4 điểm)*

Cho tứ diện ABCD. Giả sử I là điểm thuộc cạnh AB có khoảng cách đến các mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng nhau.

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IB}} = \dfrac{\mathrm{V_{AICD}}}{\mathrm{V_{BICD}}} = \dfrac{\mathrm{S_{ACD}}}{\mathrm{S_{BCD}}}$

b) Cho IA=IB và AB vuông góc với CD. Chứng minh rằng AB vuông góc với mặt phẳng (ICD)

Bài 5 : *(2 điểm)*

Cho tứ diện ABCD, trong tam giác BCD chọn một điểm M và qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, AC, AD cắt các mặt (ACD), (ABD), (ABC) lần lượt tại A', B', C'. Xác định vị trí của M trong tam giác BCD sao cho thể tích tứ diện MA'B'C' đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6 : *(3 điểm)*

Định m để phương trình : sin3x – sin2x = (m – 1)sinx có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[\ \dfrac{\pi}{3}\ ;\ 2\pi\ ]$.

HẾT

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12-THPT CẤP THÀNH PHỐ

Năm học 2009 - 2010 (khóa ngày 3/3/2010)

Bài 1 : *(4 điểm)*

a) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

b) Cho x,y,z thỏa : $x>0; y>0; z>0;\ x+y+z=1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{x+y}{xyz}$.

Giải

a) $y=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

Ta có : $y\ge 0$ nên y đạt GTNN là 0 khi $x=0$.

Ngoài ra ta có $x^4+1\ge 2x^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^4+1}\le\dfrac{1}{2}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^4=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vây y đạt GTLN là $\dfrac{1}{2}$ khi $x=\pm 1$.

b)

Ta có : $x>0; y>0; z>0;\ x+y+z=1$.

Sử dụng BĐT Cô si : $1=x+y+z=(x+y)+z\ge 2\sqrt{(x+y)z}$

$$\Leftrightarrow 1\ge 4(x+y)z \Leftrightarrow x+y\ge 4(x+y)^2 z \qquad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có : $(x+y)^2\ge 4xy \Rightarrow (x+y)^2 z\ge 4xyz$

Suy ra : $x+y\ge 16xyz \Rightarrow \dfrac{x+y}{xyz}\ge 16$

Dấu bằng xảy ra khi : $x=y$; $x+y=z=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=y=\dfrac{1}{4}$

Vây $A=\dfrac{x+y}{xyz}$ đạt nhỏ nhất là 16 khi $z=\dfrac{1}{2};\ x=y=\dfrac{1}{4}$

Bài 2 : *(4 điểm)*

Chứng minh :

a) $25(x^2+y^2)+(12-3x-4y)^2-72\ge 0,\ \forall x,y\in R.$

b) $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\ge\dfrac{2}{1+xy},\ \forall xy\ge 1.$

Giải

a)Ta có :

$25(x^2+y^2)+(12-3x-4y)^2-72=25x^2+25y^2+144+9x^2+16y^2-72x+24xy-96y-72$

$=34x^2-24(3-y)x+41y^2-96y+72$

Ta xem như một tam thức bậc hai theo x và có :

$\Delta'=144(3-y)^2-34(41y^2-96y+72)=-2(625y^2-1200y+576)=-2(25y-24)^2\le 0,\forall y\in R.$

Vậy ta có đpcm.

b)Ta có : $xy\ge 1$

Xét hiệu số :

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}-\frac{2}{1+xy}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}=\frac{xy-x^2}{(1+x^2)(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{(1+y^2)(1+xy)}$$

$$=\frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)}=\frac{y-x}{1+xy}.(\frac{x}{1+x^2}-\frac{y}{1+y^2})=\frac{y-x}{1+xy}.(\frac{x+xy^2-y-x^2y}{(1+x^2)(1+y^{2)}})$$

$=\dfrac{y-x}{1+xy}.(\dfrac{(y-x)(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\dfrac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+xy)(1+x^2)(1+y^2)}\ge 0$. Vậy ta có đpcm.

Bài 3 : *(3 điểm)*
Giải các phương trình và hệ phương trình:

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4\\ x+y=28\end{cases}$

Giải

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

Ta xét vế phải **:** $x^2-6x+11=x^2-6x+9+2=(x-3)^2+2\geq 2$

Ta xét vế trái**:**

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\leq\frac{1+x-2}{2}+\frac{1+4-x}{2}=2$$

Vậy để cho hai vế bằng nhau ta phải có **:**

$$\begin{cases}x^2-6x+11=2\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ x-2=1;\ \ 4-x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=3\text{(nghiệm duy nhất)}$$

b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4\\ x+y=28\end{cases}$

Ta có : $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3=64\Leftrightarrow x+y+\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=64\Leftrightarrow x+y+3.\sqrt[3]{xy}.4=64$

Mà $x+y=28$ nên $\sqrt[3]{xy}=3\Rightarrow xy=27$.

Vậy ta có : $\begin{cases}x+y=28\\ xy=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=27\end{cases}\ v\ \begin{cases}x=27\\ y=1\end{cases}$

Hệ có hai nghiệm như trên.

Bài 4 : *(4 điểm)*
Cho tứ diện ABCD. Giả sử I là điểm thuộc cạnh AB có khoảng cách đến các mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng nhau.

a)Chứng minh rằng : $\dfrac{IA}{IB}=\dfrac{V_{AICD}}{V_{BICD}}=\dfrac{S_{ACD}}{S_{BCD}}$

b)Cho IA=IB và AB vuông góc với CD. Chứng minh rằng AB vuông góc với mp(ICD)

Giải

a) Ta có : $\dfrac{V_{AICD}}{V_{BICD}}=\dfrac{AH}{BK}=\dfrac{AI}{BI}$ với AH là đoạn vuông góc vẽ từ A đến mp(ICD) và BK là đoạn vuông góc vẽ từ B đến mp(ICD).

Ngoài ra ta còn có : $\dfrac{V_{I.ACD}}{V_{I.BCD}}=\dfrac{IM.S_{ACD}}{IN.S_{BCD}}$ với IM là đoạn vuông góc vẽ từ I đến mp(ACD) và IN là đoạn vuông góc vẽ từ I đến mp(BCD).

Vì I thuộc mặt phân giác của nhị diện (ACD, BCD) nên IM=IN cho ta đpcm.

b) Với IA = IB và AB vuông góc với CD, ta vẽ đường cao AJ của tam giác ACD.

Ta có : CD vuông góc AB, CD vuông góc AJ nên CD vuông góc với mp(ABJ) suy ra CD vuông góc với BJ.

Do vì IA = IB nên diện tích (ACD) bằng diện tích (BCD) , do câu a).

Nên suy ra AJ=BJ.

Tam giác ABJ cân tại J cho ta : JI vuông góc với AB.

Vậy AB vuông với IJ, AB vuông với CD nên AB vuông với mp(ICD) (đpcm)

Bài 5 : *(2 điểm)*
Cho tứ diện ABCD, trong tam giác BCD chọn một điểm M và qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, AC, AD cắt các mặt (ACD), (ABD), (ABC) lần lượt tại A', B', C'. Xác định vị trí của M trong tam giác BCD sao cho thể tích tứ diện MA'B'C' đạt lớn nhất.

Giải

Trước hết ta chứng minh : $\dfrac{V_{M.A'B'C'}}{V_{A.BCD}} = \dfrac{MA'}{AB}.\dfrac{MB'}{AC}.\dfrac{MC'}{AD}$ (1)

Thật vậy, ta xét góc tam diện đối đỉnh của góc tam diện A.BCD và lấy trên ba tia đối lần lượt các đoạn $AA_1=MA'$, $BB_1=MB'$, $CC_1=MC'$. Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ MA thì hình tứ diện MA'B'C' biến thành tứ diện $AA_1B_1C_1$ nên thể tích hai hình tứ diện ấy bằng nhau và ta có :

$\dfrac{V_{A.A_1B_1C_1}}{V_{A.BCD}} = \dfrac{AA_1}{AB}.\dfrac{AB_1}{AC}.\dfrac{AC_1}{AD} = \dfrac{MA'}{AB}.\dfrac{MB'}{AC}.\dfrac{MC'}{AD}$ (đ p cm)

và ta chứng minh tiếp : $\dfrac{MA'}{AB} + \dfrac{MB'}{AC} + \dfrac{MC'}{AD} = 1$ (2)

Thật vậy, ta có :

$$V_{ABCD} = V_{MABC} + V_{MACD} + V_{MABD} \Leftrightarrow 1 = \frac{V_{MABC}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MABD}}{V_{ABCD}}$$

Xét $\dfrac{V_{MABC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{V_{MABC}}{V_{D.ABC}} = \dfrac{MK}{DH}$

với MK là khoảng cách từ M đến mp(ABC), DH là khoảng cách từ D đến mp(ABC).

Ta lại có hai tam giác vuông MKC và DHA đồng dạng cho : $\dfrac{MK}{DH} = \dfrac{MC'}{AD}$

Suy ra : $\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{D.ABC}} = \dfrac{MC'}{AD}$

Tương tự ta có : $\dfrac{V_{MACD}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{MA'}{AB}$; $\dfrac{V_{MABD}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{MB'}{AC}$

Vậy (2) đúng.
Từ các kết quả (1) và (2), ta có :

$$1 = \frac{MA'}{AB} + \frac{MB'}{AC} + \frac{MC'}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'.MB'.MC'}{AB.AC.AD}} \Leftrightarrow \frac{1}{27} \geq \frac{MA'.MB'.MC'}{AB.AC.AD} = \frac{V_{MA'B'C'}}{V_{ABCD}}$$

Vậy $V_{MA'B'C'} \leq \dfrac{1}{27}V_{ABCD}$

Thể tích MA'B'C' đạt lớn nhất là $\dfrac{1}{27}V_{ABCD}$ khi xảy ra dấu bằng, lúc ấy M là trọng tâm tam giác BCD.

(vì $MA' = \dfrac{1}{3}AB$, $MB' = \dfrac{1}{3}AC$, $MC' = \dfrac{1}{3}AD$)

Bài 6 : *(3 điểm)*

Định m để phương trình : sin 3x – sin 2x = (m-1)sin x (*) có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[\frac{\pi}{3}; 2\pi]$.

Giải

(*) $\Leftrightarrow$ sinx(3 – 4sin^{2}x – 2cosx – m + 1) = 0

$\Leftrightarrow$ sinx = 0 (1) hoặc 4cos^{2}x – 2cosx = m (2)

(1) cho 2 nghiệm x = π và x = 2π

(2) $\Leftrightarrow$ 4t^2 – 2t = m với t = cosx $\in$[-1 ;1]

Xét hàm số f(t) = 4t^2 – 2t trên [-1 ;1]

f’(t) = 8t – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 1/4

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

t	-1		1/4		1/2		1
f’(t		--	0			+	
f(t)	6	$\searrow$	-1/4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

Nhận xét :

t = -1 : pt cosx = t có 1 nghiệm x = π

-1 < t ≤ 1/2 : pt cosx = t có 2 nghiệm thuộc đoạn [π/3 ;2π]\{π ,2π}

1/2 < t < 1 : pt cosx = t có 1 nghiệm thuộc đoạn [π/3 ;2π]\{π ,2π}

t = 1 : pt cosx = t có 1 nghiệm x = 2π

Khi m = 6 : pt f(t) = m có nghiệm t = -1 $\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm x = π

Khi 2 < m < 6 : pt f(t) = m có 1 nghiệm t $\in$(-1 ;1/4) $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm

Khi m = 2 : pt f(t) = m có 1 nghiệm t = 1 và 1 nghiệm t $\in$(-1 ;1/4) $\Leftrightarrow$ (2) có 3 nghiệm trong đó có 1 nghiệm = 2 π.

Khi 0 < m < 2 : pt f(t) = m có 1 nghiệm t $\in$(1/2 ;1) và 1 nghiệm t $\in$(-1 ;1/4) $\Leftrightarrow$ (2) có 3 nghiệm

Khi -1/4 < m ≤ 0 : pt f(t) = m có 2 nghiệm t $\in$(-1 ;1/2] $\Leftrightarrow$ (2) có 4 nghiệm

Khi m = -1/4 : pt f(t) = m có 1 nghiệm t = 1/4 $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm

Vậy (2) có 3 nghiệm khác π và 2π $\Leftrightarrow$ 0 < m < 2