

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN**DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC****Câu 1.** Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $6 \sin 2x + 3 = 0$.

b) $\sin \frac{x+\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{3}$.

c) $\sin 4x + \cos(180^\circ - 3x) = 0$.

Lời giải

a) $6 \sin 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{6} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} (< 1)$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x+\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k10\pi \\ x = \frac{7\pi}{3} + k10\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b)

c) $\sin 4x + \cos(180^\circ - 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = \sin(90^\circ - 3x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 90^\circ - 3x + k360^\circ \\ 4x = 180^\circ - 90^\circ + 3x + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{90^\circ}{7} + k\frac{360^\circ}{7} \\ x = 90^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 2. Giải các phương trình lượng giác:

a) $\cos 6x = -1$.

c) $2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$.

b) $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

a) $\cos 6x = -1 \Leftrightarrow 6x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b)

$$\text{c) } 2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Điều kiện: } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 8 \cos^2 x + 7 \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 8 \cos^2 x + 5 \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 3. Giải các phương trình lượng giác:

$$\text{a) } \tan(2x - 1) = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\text{b) } \tan(2x - 25^\circ) = 1$$

$$\text{c) } \tan x + \cot x = -\frac{2}{\sin x}$$

Lời giải

$$\text{a) } \tan(2x - 1) = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b) } \tan(2x - 25^\circ) = 1 \Leftrightarrow \tan(2x - 25^\circ) = \tan 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2x - 25^\circ = 45^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 35^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) } \tan x + \cot x = -\frac{2}{\sin x} \left(x \neq k\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{2}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$\text{a) } \sqrt{3} \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$$

$$\text{b) } \sin 2x = \sqrt{2} \sin(x + \pi) + \cos(2x + \pi)$$

$$c) \quad 4 \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3 \sin^2 \frac{x}{2} = 3$$

Lời giải

$$a) \quad \sqrt{3} \sin^2 x - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (\sqrt{3} \tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b)

$$\sin 2x = \sqrt{2} \sin(x + \pi) + \cos(2x + \pi) \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin(x + \pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x + \pi + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

154

$$c) \quad 4 \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3 \sin^2 \frac{x}{2} = 3$$

Trường hợp 1: $\cos^2 \frac{x}{2} = 0$, không thỏa phương trình.

Trường hợp 2: $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$, ta được:

$$4 + \tan \frac{x}{2} + 3 \tan^2 \frac{x}{2} = 3 \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \quad \cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x$$

$$b) \quad 2 \cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

Lời giải

a)

$$\cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + k2\pi \\ 4x = -2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b)

$$2 \cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \cos 3x = 1 + 2 \cos^2 x - 1 + \cos 3x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 6. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan(2x + 30^\circ) + \tan 20^\circ = 0$

b) $\cos^3 2x - \sin^3 2x = \sin 2x - \cos 2x$

Lời giải

a) Điều kiện: $2x + 30^\circ \neq 90^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \tan(2x + 30^\circ) = \tan(-20^\circ) \Leftrightarrow 2x + 30^\circ = -20^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -25^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\cos^3 2x - \sin^3 2x = \sin 2x - \cos 2x$

Trường hợp 1: $\cos \frac{x}{2} = 0$, không thỏa phương trình.

Trường hợp 2: $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 \frac{x}{2} \neq 0$, ta được

$$1 - \tan^3 x = \tan x (1 + \tan^2 x) - (1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 7. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$

b) $\cot 3x = \tan \frac{2\pi}{5}$

c) $\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$5 \tan^2 x - 2 - 3 \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{-2}{5}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\cot 3x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{c) } \frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi (L) \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 8. Tìm m để các phương trình lượng giác sau có nghiệm:

$$\text{a) } 2 \sin 3x = m - 1$$

$$\text{b) } 3 \sin^2 x + \sin 2x - m \cos^2 x = 0$$

$$\text{c) } m \tan x + 2 = m$$

Lời giải

$$\text{a) } 2 \sin 3x = m - 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{m - 1}{2}$$

$$\text{Điều kiện có nghiệm: } -1 \leq \frac{m - 1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$$

$$\text{b) } 3 \sin^2 x + \sin 2x - m \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (m - 1) \cos x = 3m + 2$$

Trường hợp 1: $m = 1, \cos x = 2$ (loại).

$$\text{Trường hợp 2: } m \neq 1, \cos x = \frac{3m + 2}{m - 1}$$

$$\left| \frac{3m + 2}{m - 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (3m - 2)^2 - (m - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq m \leq \frac{-1}{4}$$

$$\text{c) } m \tan x + 2 = m \Leftrightarrow \tan x = \frac{m - 2}{m}$$

Điều kiện có nghiệm: $m \neq 0$

Câu 9. Giải các phương trình lượng giác:

$$\text{a) } \cot \left(\frac{x}{4} + 20^\circ \right) = -\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \cot 3x = \cot \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{c) } \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{4} \right) = 4$$

Lời giải

$$\text{a) } \cot\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = \tan(-30^\circ) \Leftrightarrow \frac{x}{4} + 20^\circ = -30^\circ + k180^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = -200^\circ + k320^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{b) } \cot 3x = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) } \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{4}\right) = 4$$

Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \cdot \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 10. Tìm nghiệm phương trình sau trên các khoảng đã cho:

$$\text{a) } \sin 2x = -\frac{1}{2}, 0 < x < \pi$$

$$\text{b) } \tan(2x - 15^\circ) = 1, -180^\circ < x < 90^\circ$$

$$\text{c) } \cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

Lời giải

$$\text{a) } \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{-\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \\ 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$$\text{b) } \tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$-180^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow -180^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \{-2; -1; 0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -150^\circ \\ x = -60^\circ \\ x = 30^\circ \end{cases}$$

$$\text{c) } \cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{1}{3} \Rightarrow k = \{-1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{9} \\ x = \frac{-4\pi}{9} \end{cases}$$

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ & LOGARIT

Câu 11. Giải phương trình sau:

$$\text{a) } 3^{x^2-5x-1} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{b) } 2^{3x+4} = (\sqrt{2})^{-x+1} \quad (2).$$

Lời giải

$$\text{a) } (1) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = \log_3 \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 5\}$.

$$\text{b) } (2) \Leftrightarrow 2^{3x+4} = 2^{\frac{1}{2}(-x+1)} \Leftrightarrow 3x+4 = \frac{1}{2}(-x+1) \Leftrightarrow \frac{7}{2}x = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy $S = \{-1\}$.

Câu 12. Giải phương trình sau:

$$\text{a) } \log_5(2-3x) = 2 \quad (1)$$

$$\text{b) } \log_2(3x+1) - \log_2(x+2) = 1 \quad (2)$$

Lời giải

$$\text{a) } \text{ĐK: } 2-3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2-3x = 5^2 \Leftrightarrow x = -\frac{23}{3} \quad \left(\text{thỏa mãn điều kiện} \right). \text{ Vậy } S = \left\{ -\frac{23}{3} \right\}.$$

$$\text{b) } \text{ĐK: } \begin{cases} 3x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2 \frac{3x+1}{x+1} = 1 = \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}). \text{ Vậy } S = \{1\}.$$

Câu 13. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x+1} = 27;$

b) $4^{x^2-2} = 16;$

c) $8^{x+1} = 4^{3-2x}$

d) $3^x \cdot 5^{2x} = 75.$

Lời giải

a) $3^{x+1} = 27 \Leftrightarrow x+1 = \log_3 27 = 3 \Leftrightarrow x = 2.$

b) $4^{x^2-2} = 16 \Leftrightarrow x^2 - 2 = \log_4 16 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

c) $8^{x+1} = 4^{3-2x} \Leftrightarrow 2^{3x+3} = 2^{6-4x} \Leftrightarrow 3x+3 = 6-4x \Leftrightarrow 7x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$

d) $3^x \cdot 5^{2x} = 75 \Leftrightarrow 3^x \cdot 25^x = 75 \Leftrightarrow 75^x = 75 \Leftrightarrow x = 1.$

Câu 14. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(x+1) = 3.$

b) $\log(x^2 - 9x) = 1;$

c) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1;$

d) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7);$

Lời giải

a) $\log_2(x+1) = 3 \Leftrightarrow x+1 = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x = 7.$

b) $\log(x^2 - 9x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9x = 10 \Leftrightarrow x^2 - 9x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 10 \end{cases}.$

c) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1;$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

$PT \Leftrightarrow \log_2 x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(L) \\ x = 2(N) \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2.$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \\ x+7 > 0 \end{cases}$$

d) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$; Điều kiện:

$$PT \Leftrightarrow \ln(x+1) \cdot (x+3) = \ln(x+7) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(N) \\ x = -4(L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Câu 15. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+3} > 8$

b) $5^{x^2+x} \leq 25^{x+1}$;

c) $2^{x+1} + 2^{x+2} < 3^x + 3^{x+1}$.

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+3} > 8 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 < -3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

b) $5^{x^2+x} \leq 25^{x+1} \Leftrightarrow 5^{x^2+x} \leq 5^{2x+2} \Leftrightarrow x^2 + x \leq 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

c) $2^{x+1} + 2^{x+2} < 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x < 3^x + 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow 6 \cdot 2^x < 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{4}{6} \Leftrightarrow x > 2$

Câu 16. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 3x + 11) \leq 4$;

b) $\log_3(3x - 1) > \log_3(2x + 7)$;

c) $\log_5(1 - 2x) > 1 + \log_5(x + 1)$.

Lời giải

a)

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 3x + 11) \leq 4$$

$$DK: x^2 - 3x + 11 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$PT \Leftrightarrow x^2 - 3x + 11 \leq \sqrt{3}^4 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

b)

$$\log_3(3x - 1) > \log_3(2x + 7)$$

$$DK: \begin{cases} 2x + 7 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$PT \Leftrightarrow 3x - 1 > 2x + 7 \Leftrightarrow x > 8 \Leftrightarrow x > 8$$

Kết hợp điều kiện, ta có: $x > 8$

c) $\log_5(1 - 2x) > 1 + \log_5(x + 1)$.

$$ĐK: \begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$PT \Leftrightarrow \log_5(1 - 2x) > \log_5 5 + \log_5(x + 1) \Leftrightarrow \log_5(1 - 2x) > \log_5 5(x + 1) \\ \Leftrightarrow 1 - 2x > 5x + 5 \Leftrightarrow -7x > 4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{7}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện, ta có: } -1 < x < -\frac{4}{7}.$$

Câu 17. Giải bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-2x} \leq 49$ (1)

b) $9^{x-1} > 3^{x^2-2}$ (2)

Lời giải

a) (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{1-2x} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \Leftrightarrow 1 - 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$. Vậy $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

b) (2) $\Leftrightarrow 3^{2(x-1)} > 3^{x^2-2} \Leftrightarrow 2(x-1) > x^2 - 2 \Leftrightarrow -x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$. Vậy $S = (0; 2)$.

Câu 18. Giải bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 6) < 3$ (1)

b) $\log(x + 5) \geq \log(-x^2 + 4x + 5)$ (2)

Lời giải

a) ĐK: $x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$

(1) $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x - 6) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x - 6 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x > \frac{163}{27}$. Vậy $S = \left(\frac{163}{27}; +\infty\right)$.

b) ĐK: $\begin{cases} x + 5 > 0 \\ -x^2 + 4x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x \in (-1; 5) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$

(2) $\Leftrightarrow x + 5 \geq -x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

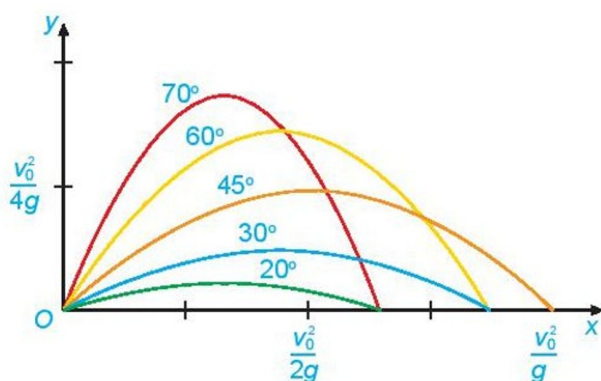
Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm: $S = (-1; 0] \cup [3; 5)$.

DẠNG 3. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 19. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ đặt tại vị trí khẩu pháo, trục Ox theo hướng khẩu pháo như hình bên. Khi đó, theo Vật lí, ta biết rằng quỹ đạo của quả đạn pháo có dạng đường parabol có phương

trình (với g là gia tốc trọng trường)

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

Cho $y = 0$ ta được $-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Quả đạn tiếp đất khi $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

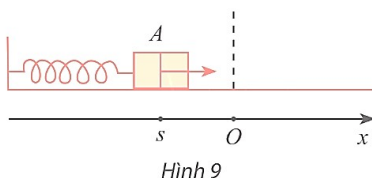
Ta có $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \frac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45^\circ$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng 45° .

Câu 20. Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Tọa độ $s(\text{cm})$ của A trên trục Ox vào thời điểm

t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3} \text{ cm}$?



Hình 9

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Lời giải

Khi: $s = -5\sqrt{3}$ thì $10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3}$

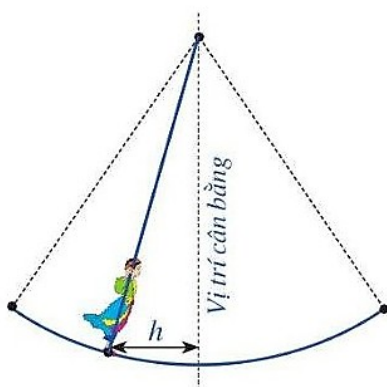
$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 10t + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 21. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua

thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?



Hình 39

Lời giải

• Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3 m thì:

$$\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right]\right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right] = 3 \\ 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right] = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right] = 1 \\ \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right] = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3}(2t-1) = k2\pi \\ \frac{\pi}{3}(2t-1) = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1 = 6k \\ 2t-1 = 3+6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6k+1 \\ 2t = 6k+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3k + \frac{1}{2} \\ t = 3k + 2 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$

Khi đó $\begin{cases} t \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}; \dots \right\} \\ t \in \{2; 5; 8; \dots\} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right\}$

Vậy $t \in \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right)$ (giây) thì khoảng cách h là $3m$.

• Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là $0m$ thì:

$$\left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] \right| = 0 \Leftrightarrow 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2t-1 = \frac{3}{2} + 3k$$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{5}{2} + 3k \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k.$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$, khi đó $t \in \left\{ \frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots \right\}$.

Vậy $t \in \left\{ \frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots \right\}$ (giây) thì khoảng cách h là $0m$.

Câu 22. Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v = -3 \sin \left(1,5t + \frac{\pi}{3} \right)$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
- Vận tốc con lắc bằng $1,5cm/s$.

Lời giải

$$\sin \left(1,5t + \frac{\pi}{3} \right) = -1$$

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

b) Khi $v=1,5$ Ta có:

$$\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{-\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 23. Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển

động được cho bởi công thức
$$h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao $40m$ lần đầu tiên?

Lời giải

a) $50m$;

b) 12,5 giây.

Câu 24. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là:

$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu; T là chu kỳ bán rã chất phóng xạ.

Đồng vị phóng xạ của polonium-209 có chu kỳ bán rã là 103 ngày, biết khối lượng ban đầu $M_0 = 300g$.

a) Hỏi khối lượng polonium-209 còn lại sau 515 ngày.

b) Hỏi sau thời gian bao lâu thì còn lại $50g$ polonium-209.

Lời giải

a) Khối lượng polonium-209 còn lại sau 515 ngày là: $M(515) = 300 \cdot 2^{-\frac{515}{103}} = 9,375g$.

b) Ta có: $M(t) = 50; T = 103; M_0 = 300$.

Suy ra: $50 = 300 \cdot 2^{-\frac{t}{103}} \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{103}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{t}{103} = \log_2 \frac{1}{6} \Leftrightarrow t = -103 \cdot \log_2 \frac{1}{6} \simeq 266$ ngày.

Câu 25. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất kép r mỗi kì thì sau n kì, số tiền T người ấy thu được cả vốn lẫn lãi được cho bởi công thức $T_n = A(1+r)^n$.

Một người gửi 150 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất cố định là $8,4\%/$ năm.

a) Nếu theo kì hạn là 1 năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

b) Nếu theo kì hạn là 1 quý (3 tháng) thì sau ít nhất bao nhiêu quý, người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn gấp đôi số tiền ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

a) Ta có: $A = 150$ (triệu đồng), $r = 8,4\%$

Vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng nghĩa là $T_n > 200$ (triệu đồng)

Ta có: $150(1 + 8,4\%)^n > 200 \Leftrightarrow (1 + 8,4\%)^n > \frac{4}{3} \Leftrightarrow n > \log_{1+8,4\%} \frac{4}{3} \approx 3,6$

Vậy thực tế thì sau ít nhất 4 năm người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn 200 triệu đồng.

b) Ta có: $A = 150$ (triệu đồng), $r = 8,4\% : 4 = 2,1\%$

Vốn và tiền lãi hơn gấp đôi số tiền ban đầu nghĩa là $T_n > 2A$

Ta có: $2A < A(1 + 2,1\%)^n \Leftrightarrow (1 + 2,1\%)^n > 2 \Leftrightarrow n > 33,4$

Vậy thực tế thì sau ít nhất 34 quý người đó thu được cả vốn và tiền lãi hơn gấp đôi số tiền ban đầu.

Câu 26. Áp suất khí quyển P (tính bằng kilôpascal, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển,

tính bằng km) được tính theo công thức sau:
(Theo britannica.com)

$$\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{h}{7}$$

a) Tính áp suất khí quyển ở độ cao 4 km.

b) Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

Lời giải

a) Ta có: $\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{4}{7}$, từ đó: $\frac{P}{100} = e^{-\frac{4}{7}} \Leftrightarrow P = 100e^{-\frac{4}{7}} \approx 56,47(kPa)$

b) Khi ở độ cao trên 10 km thì $h > 10$, do đó:

$\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{h}{7} < -\frac{10}{7} \Leftrightarrow 0 < \frac{P}{100} < e^{-\frac{10}{7}} \Leftrightarrow 0 < P < 100 \cdot e^{-\frac{10}{7}} \approx 23,97(kPa).$

Vậy áp suất khí quyển sẽ nhỏ hơn 23,97 kPa.

Câu 27. Nhắc lại rằng độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log[H^+]$, ở đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen của dung dịch tính bằng mol/lít. Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45. Hỏi nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn nào?

Lời giải

Ta có: $7,30 \leq -\log[H^+] \leq 7,45$

$$\Leftrightarrow -7,30 \geq \log [H^+] \geq -7,45$$

$$\Leftrightarrow 10^{-7,30} \geq [H^+] \geq 10^{-7,45}.$$

Vậy nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn $[5,01 \cdot 10^{-8}; 3,55 \cdot 10^{-8}]$.

Câu 28. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu m_0 được cho

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}},$$

bởi công thức: trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kỳ bán rã của chất đó. Biết rằng chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Từ khối lượng polonium-210 ban đầu $100g$, sau bao lâu khối lượng còn lại là:

a) $50g$? b) $10g$?

(Kết quả tính theo ngày và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Giải phương trình $100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} = 50$, ta được $t = 138$.

Vậy sau 138 ngày thì khối lượng polonium-210 còn $50g$.

b) Giải phương trình $100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} = 10$, ta được $t \approx 458,43$.

Vậy sau khoảng 458,43 ngày thì khối lượng polonium-210 còn $10g$.

Câu 29. Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức:

$S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó di chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã di chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

6,4 dặm.

Câu 30. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha ?

Lời giải

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019 + 1$ là $600(1 + 6\%)$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019 + 2$ là $600(1 + 6\%)^2$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019 + n$ là $600(1+6\%)^n$.

$$600(1+6\%)^n > 1000 \Leftrightarrow (1+6\%)^n > \frac{5}{3} \Leftrightarrow n > \log_{(1+6\%)} \frac{5}{3} \approx 8,76$$

Ta có

Như vậy kể từ năm 2019 thì năm 2028 là năm đầu tiên diện tích rừng trồng mới đạt trên 1000 ha.

Câu 31. (Mã 102 - 2020 Lần 2) Năm 2020 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là 750.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải

Giá xe năm 2020 là A

Giá xe năm 2021 là $A_1 = A - A.r = A(1 - r)$.

Giá xe năm 2022 là $A_2 = A_1 - A_1.r = A(1 - r)^2$.

Giá xe năm 2023 là $A_3 = A_2 - A_2.r = A(1 - r)^3$.

Giá xe năm 2024 là $A_4 = A_3 - A_3.r = A(1 - r)^4$.

Giá xe năm 2025 là $A_5 = A_4 - A_4.r = A(1 - r)^5 = 750.000.000 \left(1 - \frac{2}{100}\right)^5 \approx 677.941.000$ đồng.

Câu 32. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202.300 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người?

Lời giải

Lấy năm 2005 làm mốc, khi đó $A = 202.300$.

Giả sử sau n năm thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người, tức là ta có

$$255.000 = 202.300 \cdot e^{\frac{1,47n}{100}} \Leftrightarrow n = 100 \cdot \ln \frac{255000}{202300} \approx 15,75$$

năm.

Vậy đến năm 2021 thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người.

Câu 33. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) COVID19 là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona (nCoV) bắt nguồn từ Trung Quốc (đầu tháng 12/2019) gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh (tính đến 7/4/2020 đã có 1 360 039 người nhiễm bệnh). Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên (1 người lây 4 người). Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh? (Biết rằng những người nhiễm bệnh không phát hiện bản thân bị bệnh và không phòng tránh cách li, do trong thời gian ủ bệnh vẫn lây bệnh sang người khác).

Lời giải

Sau 1 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $1 + 4 = 5$ người.

Sau 2 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4) + (1+4).4 = (1+4)^2$ người.

Sau 3 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^2 + (1+4)^2 .4 = (1+4)^3$ người.

$\Rightarrow$ Sau 7 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^7 = 78125$ người.

Ngoài ra chúng ta có thể áp dụng công thức lãi kép để tính nhanh:

$$S_n = A(1+r)^n = 1.(1+4)^7 = 78125, \text{ với } A=1, r=4, n=7.$$

DẠNG 4. (NÂNG CAO) PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

Câu 34. (Mã 101 2018) Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

Đặt $t = 4^x, (t > 0)$. Phương trình trở thành:

$$t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0 \quad (1).$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m < -3 \vee m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{4; 5; 6\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 35. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$. Tìm giá trị của m

Lời giải

Đặt $t = 2^x$. Ta có phương trình $t^2 - 6t + m = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1 \Leftrightarrow$ pt có hai nghiệm dương

$$t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } t_1.t_2 = 2^{x_1+x_2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 36. (Chuyên Bắc Giang 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4.4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

$$4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2+2x+1} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)9^{x^2+2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x+1} + (2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1} - (6m+3) = 0 \quad (2)$$

• Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. Suy ra $0 < t \leq 1$

Pt (2) trở thành: $t^2 + (2m-2)t - 6m-3 = 0 \quad (3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3 & (\text{loại}) \\ t=-2m-1 \end{cases}$$

• Để phương trình (1) có 2 nghiệm x phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } t^2 + (2m-2)t - 6m-3 = 0 \text{ có đúng một nghiệm } t \text{ thuộc khoảng } (0;1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < -2m-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$$

Chú ý: Nếu $t=1$ thì phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2} = 1$ chỉ có nghiệm duy nhất là $x=-1$.

Câu 37. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$

Lời giải

$$\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow [1 + \log_2(x)]^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \log_2 x = g(x) \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ và mỗi giá trị của x sẽ cho một giá trị của t

$$(*) \text{ trở thành } (1+t)^2 - (m+2)t + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 - mt - 2t + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 1 = m(t-1)$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+1-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=m-1 & (1) \\ t=1 & (2) \end{cases}$$

Với $t=1$ thì phương trình có một nghiệm $x=2$

Vậy để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình ⁽¹⁾ phải có một nghiệm $t \neq 1$

$$0 \leq m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$$

Vậy $m \in [1;2)$ để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số

$$3\log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$$

. Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình

đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| < 15$

Lời giải

$$3\log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \log_3 [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] = \log_3 (x^2 - x + 1 - 3m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 \\ 2x^2 - (m+3)x + 1 - m = x^2 - x + 1 - 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 (*) \\ x^2 - (m+2)x + 2m = 0 (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 (*) \\ \begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 - 3m > 0 \\ 2^2 - 1 + 1 - 3m > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 1 > 0 \\ 4 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{3}$$

biệt thỏa mãn (*)

Theo giả thiết $|x_1 - x_2| < 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 225 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 221 < 0 \Leftrightarrow -13 < m < 17$ Do đó $-13 < m < 2 - \sqrt{3}$.

Câu 39. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Tìm m để phương trình :

$$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$$

có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 2$. Phương trình đã cho

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (m-1)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2\right]^2 + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m-1)[-2\log_2(x-2)]^2 + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m-1)\log_2^2(x-2) + (m-5)\log_2(x-2) + m - 1 = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_2(x-2)$. Vì $x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Phương trình (1) trở thành $(m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0, t \in [-1; 1]$. (2)

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1} = f(t), t \in [-1; 1]$$

$$f'(t) = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên

t	-1						1
$f'(t)$				+			
$f(t)$							$\frac{7}{3}$
	-3						

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\frac{5}{2}; 4 \right]$ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [-1; 1]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.

Câu 40. (Mã 104 2019) Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

Lời giải

Ta có điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_4 m \end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).

Phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 & (2) \\ 4^x = m & (3) \end{cases}$

Phương trình $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Phương trình $(3) \Leftrightarrow x = \log_4 m$

Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $m = 1$ thì $\log_4 m = 0$. Do đó (*) là $x > 0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).

Do đó nhận giá trị $m = 1$.

TH 2: $m \geq 2$ thì (*) là $x \geq \log_4 m$ (vì $\log_4 m \geq \frac{1}{2}$)

Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \log_4 m < 3$

$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \leq m < 4^3$

Suy ra $m \in \{3; 4; 5; \dots; 63\}$.

Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63 - 3 + 1 + 1 = 62$ giá trị nguyên dương m .

Câu 41. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2 - 2x + 1 - 2|x - m|} = \log_{x^2 - 2x + 3}(2|x - m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

Lời giải

$$3^{x^2 - 2x + 3 - (2|x - m| + 2)} = \frac{\ln(2|x - m| + 2)}{\ln(x^2 - 2x + 3)}$$

Phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow 3^{x^2 - 2x + 3} \cdot \ln(x^2 - 2x + 3) = 3^{2|x - m| + 2} \cdot \ln(2|x - m| + 2) \quad (*)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t \cdot \ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x - m| + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 2|x - m| + 1 = 0$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 & \text{khi } x \geq m \\ x^2 - 2m + 1 & \text{khi } x \leq m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq m \\ 2x & \text{khi } x \leq m \end{cases}$$

Có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{khi } x \geq m \\ x = 0 & \text{khi } x \leq m \end{cases}$$

và

Xét các trường hợp sau:

TH1: $m \leq 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thỏa mãn.

TH2: $m \geq 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	m	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$-2m+1$	$(m-1)^2$	$2m-3$	$+\infty$

$$\begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ -2m+1 = 0 > 2m-3 \Leftrightarrow \\ -2m+1 < 0 = 2m-3 \end{cases} \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{1}{2} \\ m=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Phương trình có 3 nghiệm khi

Cả 3 giá trị trên đều thỏa mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

Câu 42. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\ln(7x^2 + 7) \geq \ln(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tính S .

Lời giải

Ta có:

$$\ln(7x^2 + 7) \geq \ln(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-m)x^2 - 4x + 7-m \geq 0 \quad (1) \\ mx^2 + 4x + m > 0 \quad (2) \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi các bất phương trình ^{(1), (2)} đúng với mọi

$$x \in \mathbb{R}$$

Xét $(7 - m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0$ (1)

+ Khi $m = 7$ ta có ⁽¹⁾ trở thành $-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Do đó $m = 7$ không thỏa mãn.

+ Khi $m \neq 7$ ta có ⁽¹⁾ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ 4 - (7 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \vee m \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5 \quad (*)$$

Xét $mx^2 - 4x + m > 0$ (2)

+ Khi $m = 0$ ta có ⁽²⁾ trở thành $-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$. Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.

+ Khi $m \neq 0$ ta có ⁽²⁾ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \quad (**)$$

Từ ^(*) và ^(**) ta có $2 < m \leq 5$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$. Từ đó $S = 3 + 4 + 5 = 12$.

Câu 43. (Chuyên Bắc Giang 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x .

Lời giải

Cách 1:

$$\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$

Bpt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (m - 7)x^2 + 4x + m - 7 \leq 0 \\ g(x) = mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$

$$\text{Bpt đã cho nghiệm đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• Trường hợp 1: $m = 7$

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq 0 \\ 7x^2 + 4x + 7 > 0 \end{cases}$$

Vậy $m = 7$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 2: $m=0$

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x^2 + 4x - 7 \leq 0 \\ 4x > 0 \end{cases}$$

Vậy $m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 3: $m \neq 0; m \neq 7$

$$\begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_f < 0 \\ \Delta'_f \leq 0 \\ a_g > 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 < 0 \\ 4-(m-7)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ 4-m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \vee m \geq 9 \\ m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$$

Khi đó:

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{3; 4; 5\}.$$

Cách 2:

$$\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-7)x^2 + 4x + m-7 \leq 0 \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 4x + 7 \geq m(x^2 + 1) \\ m(x^2 + 1) > -4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x^2 - 4x + 7}{x^2 + 1} \geq m \\ m > \frac{-4x}{x^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + \frac{-4x}{x^2 + 1} \geq m \\ m > \frac{-4x}{x^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 \leq \frac{-4x}{x^2 + 1} \\ m > \frac{-4x}{x^2 + 1} \end{cases} \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{-4x}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-4(x^2 + 1) + 4x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 - 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
g		2		-2	0
	0				

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-7 \leq -2 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$$

Vậy đk (*)

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{3; 4; 5\}.$$

Câu 44. (Sở Bình Phước - 2021) Cho bất phương trình

$$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0 \quad (m \text{ là tham số thực}). \text{ Tìm tập hợp tất cả các giá trị của } m \text{ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi } x \text{ thuộc đoạn } \left[\frac{5}{2}; 4\right].$$

Lời giải

Điều kiện: $x > 2$.

$$\begin{aligned} & (m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0 \\ \text{Ta có:} & \Leftrightarrow 4(m-1)\log_2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(x-2)$$

$$\text{Với } x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

$$\begin{aligned} & (m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0 \\ \text{Do đó bất phương trình} & \text{ nghiệm đúng với} \\ \text{mọi } x \text{ thuộc đoạn } & \left[\frac{5}{2}; 4\right] \text{ khi và chỉ khi bất phương trình} \\ & 4(m-1)t^2 + 4(m-5)t + 4m - 4 \geq 0 \quad (1), \text{ nghiệm đúng với mọi } t \text{ thuộc đoạn } [-1; 1]. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } 4(m-1)t^2 + 4(m-5)t + 4m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m(t^2 + t + 1) \geq t^2 + 5t + 1$$

$$\text{Vì } t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ nên } m(t^2 + t + 1) \geq t^2 + 5t + 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1} \text{ trên đoạn } [-1; 1].$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{(t^2 + t + 1)^2} = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

$$f(-1) = -3; \quad f(1) = \frac{7}{3}. \text{ Suy ra } \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(1) = \frac{7}{3}; \quad \min_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(-1) = -3$$

$$\text{Vậy } m \geq \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1} \text{ nghiệm đúng với mọi } t \text{ thuộc đoạn } [-1; 1] \text{ khi } m \in \left[-3; \frac{7}{3}\right].$$

Câu 45. (THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$

$$\text{để bất phương trình sau nghiệm đúng với } \forall x \in \mathbb{R}: (6 + 2\sqrt{7})^x + (2 - m)(3 - \sqrt{7})^x - (m+1)2^x \geq 0$$

Lời giải

Ta có:

$$(6+2\sqrt{7})^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x - (m+1)2^x \geq 0 \Leftrightarrow 2^x(3+\sqrt{7})^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x > (m+1)2^x$$

$$\Leftrightarrow (3+\sqrt{7})^x + (2-m)\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^x > m+1$$

Đặt $t = (3+\sqrt{7})^x$, $t > 0 \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$$t + (2-m) \cdot \frac{1}{t} > m+1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t + 2}{t+1} > m$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t+1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 0 \end{cases}$. Khi đó, ta có bảng biến thiên sau:

x	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		0	+
$f(t)$	2	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta suy ra để bất phương trình đã cho nghiệm đúng thì $m < 1$. Suy ra trong đoạn $[-10; 10]$ có tất cả 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. (Sở Hải Phòng 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 60)$ để bất phương trình $\log_3(x^2+1) + (2m-1)\log_{x^2+1} 3 + 4 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \neq 0$?

Lời giải

Đặt $t = \log_3(x^2+1)$ mà $x \neq 0$ nên $x^2+1 > 1 \Leftrightarrow \log_3(x^2+1) > \log_3 1 = 0$ suy ra $t > 0$

Bất phương trình đã cho trở thành: $t + (2m-1) \cdot \frac{1}{t} + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2m - 1 + 4t \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \leq t^2 + 4t; \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2m \leq \min_{(0; +\infty)} f(t), \text{ với } f(t) = t^2 + 4t.$$

Ta có $f'(t) = 2t + 4 > 0; \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(t) = f(0) = 0$

Do đó $1 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Kết hợp với $m \in (-10; 60), m \in \mathbb{Z} \rightarrow$ có $59 - 1 + 1 = 59$ số nguyên m cần tìm.

Câu 47. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - 2021) Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $e^x - 1 = m \ln(mx + 1)$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[-10; 10]$?

Lời giải

♦ Điều kiện $mx + 1 > 0$.

Ta có $e^x - 1 = m \ln(mx + 1)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^x + mx &= mx + 1 + m \ln(mx + 1) \\ \Leftrightarrow e^x + mx &= e^{\ln(mx+1)} + m \ln(mx + 1) \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + mt, t \in \mathbb{R}$.

Có $f'(t) = e^t + m > 0, \forall t \in \mathbb{R}, m > 0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) ta được $f(x) = f(\ln(mx + 1)) \Leftrightarrow x = \ln(mx + 1) \Leftrightarrow e^x = mx + 1 \quad (2)$.

♦ Ta thấy (2) luôn có một nghiệm $x = 0 \in [-10; 10]$. Do đó ta cần tìm các giá trị của m để (2) có đúng một nghiệm $x \neq 0, x \in [-10; 10]$.

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = m$$

Với $x \neq 0$ thì (2)

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x}, x \in [-10; 10] \setminus \{0\}$$

$$g'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\text{Đặt } h(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Có } h'(x) = xe^x, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Ta thấy } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1, h(0) = 0$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	1	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \neq 0$

$$\text{♦ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$$

Bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ với $x \in [-10; 10] \setminus \{0\}$ như sau

x	-10	0	10
y'	+		+
y	$\frac{1-e^{-10}}{10}$	1	$\frac{e^{10}-1}{10}$

Từ bảng biến thiên suy ra (2) có đúng một nghiệm $x \neq 0, x \in [-10; 10]$

$$\Leftrightarrow m \in \left[\frac{1-e^{-10}}{10}, \frac{e^{10}-1}{10} \right] \setminus \{1\}$$

♦ Do m nguyên dương nên $m \in \{2, 3, 4, \dots, 2202\}$. Vậy có 2201 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48. (Sở Bạc Liêu - 2021) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để phương trình $2^{x-2+\sqrt{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có một nghiệm duy nhất?

Lời giải

Chia cả hai vế của phương trình cho 2^{x-2} ta được:

$$2^{\sqrt{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m) = 8 + 2^{2-x} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3 \quad (*)$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 2^t + t^3$

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Rightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 2-x \Leftrightarrow m = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0 +	0	-
$f(x)$	$+\infty$	4	8	$-\infty$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\begin{cases} m > 8 \\ m < 4 \end{cases}$

Kết hợp với yêu cầu đề bài ta có: $\begin{cases} 9 \leq m \leq 2021 \\ -2021 \leq m \leq 3 \end{cases}$. Vậy có tất cả 4038 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 49. (Sở Cần Thơ - 2021) Cho phương trình $\log_2(2x - m) = 4^x + m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-27; 27)$ sao cho phương trình trên có nghiệm?

Lời giải

♦ Điều kiện: $2x - m > 0$.

♦ Ta có $\log_2(2x - m) = 4^x + m$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x - m) + 2x - m = 4^x + 2x \Leftrightarrow 2^{\log_2(2x - m)} + \log_2(2x - m) = 2^{2x} + 2x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, t \in \mathbb{R}$

Có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$f(\log_2(2x - m)) = f(2x) \Leftrightarrow \log_2(2x - m) = 2x$$

Từ (1) ta được

$$\Leftrightarrow 4^x = 2x - m \Leftrightarrow 4^x - 2x = -m \quad (2).$$

Xét hàm $g(x) = 4^x - 2x$

Ta có $g'(x) = 4^x \ln 4 - 2 = 4^x \cdot 2 \ln 2 - 2$

$$\text{Có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_4 \frac{1}{\ln 2}$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(x_0)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow -m \geq g(x_0) \Leftrightarrow m \leq -g(x_0) = -g\left(\log_4 \frac{1}{\ln 2}\right) \approx -0,914$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-27; 27)$ nên ta được $m \in \{-26; -25; \dots; -1\}$

Vậy có 26 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \hat{=} \log_3(x+1) + x + 1 = 2y + 3^{2y} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \log_3(x+1) = t \Rightarrow x+1 = 3^t$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t + 3^t = 2y + 3^{2y} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(u) = u + 3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u) = 1 + 3^u \ln 3 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó (2) } \hat{=} f(t) = f(2y) \hat{=} t = 2y \Rightarrow \log_3(x+1) = 2y \hat{=} x+1 = 9^y \hat{=} x = 9^y - 1$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq 9^y - 1 \leq 2020 \hat{=} 1 \leq 9^y \leq 2021 \hat{=} 0 \leq y \leq \log_9 2021$$

$$(\log_9 2021 \approx 3,464)$$

Do $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của x

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \hat{=} \log_3(x+1) + x + 1 = 2y + 3^{2y}$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(x+1) + x + 1$ với $x \in [0; 2020]$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + 1 > 0, \forall x \in [0; 2020]$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0; 2020]$

$$\text{Suy ra } f(0) \leq f(x) = \log_3(x+1) + x + 1 \leq f(2020) \hat{=} 1 \leq f(x) \leq \log_9 2021 + 2021$$

$$p \quad 1 \leq 2y + 9^y \leq \log_3 2021 + 2021 < 2028$$

$$\text{Nếu } y < 0 \quad p \quad 2y + 9^y < 9^y < 9^0 = 1 \quad p \quad y^3 > 0$$

$$\text{Khi đó } y \in \mathbb{N} \quad p \quad (2y + 9^y) \in \mathbb{N} \quad p \quad 2y + 9^y \leq 2027 \quad p \quad 9^y \leq 2027 - 2y \leq 2027$$

$$p \quad y \leq \log_9 2027 \approx 3,465 \Rightarrow y \leq 3 \quad p \quad 0 \leq y \leq 3$$

$p \quad y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x .

$$+) \quad y = 0 \quad p \quad \log_3(x+1) + x + 1 = 1 \quad \hat{=} \quad x = 0$$

$$+) \quad y = 1 \quad p \quad \log_3(x+1) + x + 1 = 11 \quad \hat{=} \quad \log_3(x+1) + x = 10 \quad \hat{=} \quad x = 8$$

$$+) \quad y = 2 \quad p \quad \log_3(x+1) + x + 1 = 85 \quad \hat{=} \quad \log_3(x+1) + x = 84 \quad \hat{=} \quad x = 80$$

$$+) \quad y = 3 \quad p \quad \log_3(x+1) + x + 1 = 735 \quad \hat{=} \quad \log_3(x+1) + x = 734 \quad \hat{=} \quad x = 729$$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 51. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-1; 1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2)$ có nghiệm nguyên $(x; y)$ duy nhất?

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ x + y - 1 > 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Vì x, y có vai trò như nhau nên nếu phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là một nghiệm của phương trình.

***) Điều kiện cần:** Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_0 = y_0$.

$$\text{Thay vào phương trình ta được } \log_{m^2+1}(2x_0^2) = \log_2(4x_0 - 2)$$

$$\text{Vì } x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x_0 - 2 > 1$$

Lại

có

$$2x_0^2 \geq 4x_0 - 2 \Rightarrow \log_2(4x_0 - 2) = \log_{m^2+1}(2x_0^2) \geq \log_{m^2+1}(4x_0 - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_{4x_0-2} 2} \geq \frac{1}{\log_{4x_0-2}(m^2+1)} \Rightarrow \log_{4x_0-2}(m^2+1) \geq \log_{4x_0-2} 2$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow m^2 \geq 1 \text{ mà } m \in [-1; 1] \Rightarrow m = \pm 1$$

***) Điều kiện đủ:** Với $m = \pm 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2y - 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

Vậy có hai giá trị m cần tìm là $m = \pm 1$.

Câu 52. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho phương trình $\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ và $0 < x < 2020; y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

Lời giải

$$\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 \quad (1).$$

Đặt $\log_3(x^2 - 2x + 2) = z \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^z$ thì (1) trở thành:

$$\Leftrightarrow 3^z + z = 3^{y^2} + y^2 \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow f(z) = f(y^2) \Leftrightarrow z = y^2$$

Thay trở lại cách đặt ta có: $\log_3(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^{y^2}$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 2x + 2, x \in (0; 2020) \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	2020
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	2	1	4076362

Suy ra:

$$\Leftrightarrow 1 \leq g(x) < 4076362 \Leftrightarrow 1 \leq 3^{y^2} < 4076362 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 < \log_3 4076362$$

Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq y < \sqrt{\log_3 4076362} \approx 3,7 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 3^4 \\ g(x) = 3^9 \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta thấy mỗi phương trình trên có một nghiệm $0 < x < 2020$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 53. (Trung Tâm Thanh Trường - 2021) Có bao nhiêu cặp số x, y là các số nguyên không âm thỏa

mãn: $2(1 + \sqrt{x+2y})^2 + \log_2(x+2y) = 2\log_2(x^2 + y^2 + 2xy + x) + 2(x+y)^2 + 4x + 4y$

Lời giải

Ta có $2(1 + \sqrt{x+2y})^2 + \log_2(x+2y) = 2\log_2(x^2 + y^2 + 2xy + x) + 2(x+y)^2 + 4x + 4y$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{x+2y} + x + 2y + \frac{1}{2}\log_2(x+2y) = \log_2[(x+y)^2 + x] + (x+y)^2 + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2 \sqrt{x+2y} + 2\sqrt{x+2y} = \log_2[(x+y)^2 + x] + (x+y)^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2\sqrt{x+2y} + 2\sqrt{x+2y} = \log_2[(x+y)^2 + x] + [(x+y)^2 + x] \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $y = g(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (1) $\Leftrightarrow g(2\sqrt{x+2y}) = g((x+y)^2 + x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2y} = (x+y)^2 + x$

$$\Leftrightarrow x+2y+2\sqrt{x+2y} = (x+y)^2 + 2(x+y) \quad (2)$$

Xét hàm số $h(u) = u^2 + u$ với $u > 0$, có $h'(u) = 2u + 1 > 0, \forall u > 0$.

Suy ra hàm số $y = h(u) = u^2 + u$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (2) $\Leftrightarrow h(\sqrt{x+2y}) = h(x+y) \Leftrightarrow \sqrt{x+2y} = x+y \Leftrightarrow x+2y = (x+y)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x+2y \Leftrightarrow y^2 + 2(x-1)y + x^2 - x = 0 \quad (3)$$

Ta coi phương trình (3) là phương trình bậc hai ẩn y , khi đó: Phương trình (3) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_y' \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (x^2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Do x là số nguyên không âm nên $x=0$ hoặc $x=1$.

+) Với $x=0$, suy ra $(3) \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

+) Với $x=1$, suy ra $(3) \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y=0$ (thỏa mãn).

Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(0;0), (0;2), (1;0)$.

Câu 54. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

Lời giải

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y)$.

Tập xác định $D = (-x; +\infty)$ (do $y > -x \Rightarrow y > -x^2$).

$$f'(y) = \frac{1}{(x+y)\ln 3} - \frac{1}{(x^2+y)\ln 4} \geq 0, \forall x \in D \quad (\text{do } x^2 + y \geq x + y > 0, \ln 4 > \ln 3)$$

$\Rightarrow f$ tăng trên D .

Ta có $f(-x+1) = \log_3(x - x + 1) - \log_4(x^2 - x + 1) \leq 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \leq 0$

$$\Leftrightarrow f(-x+729) > 0 \Leftrightarrow \log_3 729 - \log_4(x^2 - x + 729) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 729 - 4^6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3367 < 0$$

$$\Leftrightarrow -57,5 \leq x \leq 58,5$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-57, -56, \dots, 58\}$.

Vậy có $58 - (-57) + 1 = 116$ số nguyên x thỏa.

Câu 55. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và

$$1 \leq x, y \leq 2020 \text{ thỏa mãn } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) ?$$

Lời giải

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}$$

$$\text{BPT cho có dạng } (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{y-2}{y+2} + 1 \right) \leq 0 \quad (*)$$

$$+ \text{Xét } y=1 \text{ thì } (*) \text{ thành } - (x-3) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0$$

, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x > 3$ vì $- (x-3) < 0, \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) > \log_2 (0+1) = 0, 3(x+4) > 0, \log_3 \frac{2}{3} < 0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x; y) = (x; 1)$ với $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

+ Xét $y=2$ thì $(*)$ thành $4(x+4) \log_3 1 \leq 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x; y)$ nữa.

+ Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên $(*)$ không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 56. (THPT Phan Bội Châu - Gia Lai - 2022 - 2023) Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn:

$$3^{x^2+y^2+1} \leq (820x^2 + 820y^2 - 1640y + 821) \cdot 9^y ?$$

Lời giải

Ta có:

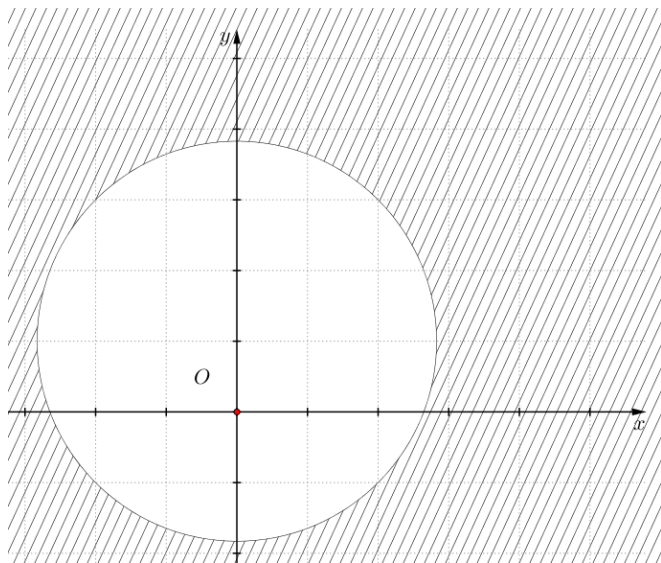
$$3^{x^2+y^2+1} \leq (820x^2 + 820y^2 - 1640y + 821) \cdot 9^y \Leftrightarrow \frac{3^{x^2+y^2+1}}{9^y} \leq (820x^2 + 820y^2 - 820 \cdot 2y + 820) + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2y+1} \leq 820(x^2 + y^2 - 2y + 1) + 1$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

Bất phương trình trở thành: $3^t \leq 820t + 1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 8$

Hay $0 \leq x^2 + (y - 1)^2 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 \leq 8$.



Có 25 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 57. (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2023) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $(x + 2y)^2 2^{2x^2 + 2xy + 5y^2 - 3} + (x - y)^2 \leq 3$?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (x + 2y)^2 2^{2x^2 + 2xy + 5y^2 - 3} + (x - y)^2 \leq 3 &\Leftrightarrow (x + 2y)^2 2^{(x + 2y)^2 + (x - y)^2 - 3} \leq 3 - (x - y)^2 \\ &\Leftrightarrow (x + 2y)^2 2^{(x + 2y)^2 + (x - y)^2 - 3} \leq [3 - (x - y)^2] 2^{3 - (x - y)^2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t$ với $t \in [0; 3]$

Ta có $f'(t) = 2^t + \ln 2 \cdot 2^t > 0, \forall t \in [0; 3]$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[0; 3]$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow (x + 2y)^2 \leq 3 - (x - y)^2 \Leftrightarrow (x + 2y)^2 + (x - y)^2 \leq 3$.

$$\begin{aligned} \text{Do } x, y \text{ là số nguyên nên } &\begin{cases} -1 \leq x + 2y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x + 2y \leq 1 \\ -1 \leq y - x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 3y \leq 2 \\ -1 \leq y - x \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} \leq y \leq \frac{2}{3} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có các cặp số nguyên $(x; y)$ là $(-1; 0), (0; 0)$ và $(1; 0)$.

Vậy có tất cả ba cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa.