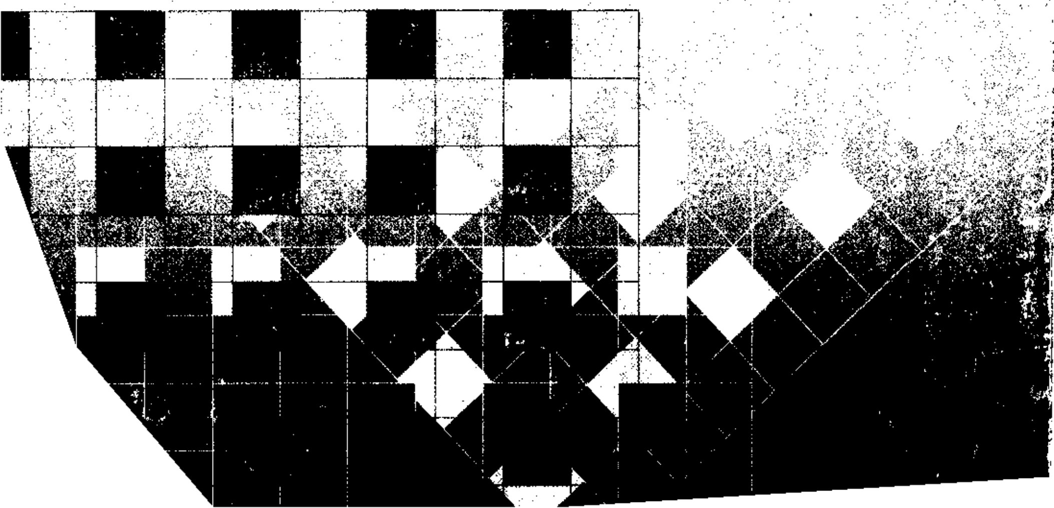
NGUYỄN HỮU ĐIỂN

GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN



NGUYỄN HỮU ĐIỂN

GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN

(*Tái bản lần thứ nhất*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

$\frac{517}{GD - 05}$ 21/727-05

Mã số: 8I004T5-TTS

LỜI NÓI ĐẦU

Dĩ bất biến, ứng vạn biến

Tôn tử (Binh pháp)

Ta hãy tưởng tượng có một hệ thống trên đó ta thực hiện những thao tác khác nhau. Ta có thể phân tích trạng thái của hệ thống để xác định vị trí (mục đích) cần đạt được từ những vị trí khác. Một trong những công cụ rất mạnh cho việc phân tích hệ thống là tính chất *bất biến* của một số đại lượng trong hệ thống. Những đại lượng này không thay đổi dưới những thao tác khác nhau trong hệ thống. Sự bất biến có thể dùng để chỉ ra rằng từ một cấu hình không thể đạt tới một cấu hình khác. Xuyên suốt cuốn sách này là tư tưởng bất biến thông qua các chủ đề trong số học, đại số, hình học và trò chơi toán học,...

Cuốn sách được đặt tên là *Phương pháp đại lượng bất biến*, đây là mong muốn của tác giả muốn biên soạn một loạt các phương pháp toán học trong học tập và nghiên cứu. Trước đây tác giả đã biên soạn một số phương pháp giải toán trong các cuốn sách [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Người xưa làm ra Binh pháp để áp dụng và giải quyết những cuộc chiến tranh, điển hình nhất là bộ *Binh pháp* của Tôn tử và bộ *Binh pháp* của Tôn Tẫn trong từng thời kì mà hai soạn giả trên đã trải nghiệm qua và áp dụng vào thực tiễn. Như ta đã biết Binh pháp chỉ cần có 36 mưu kế mà hoá giải được hầu hết các tình thế của các cuộc chiến tranh đặt ra. Đặc biệt người nắm được Binh pháp và áp dụng nó vào thực tế như thế nào là một vấn đề sáng tạo của từng người và từng thời đại. Có thể nói các phương pháp giải toán là những *mưu kế* trong khi giải bài tập toán. Tác giả cuốn sách mạo muội biên soạn những phương pháp giải toán và học toán cũng hi vọng thành bộ *Toán pháp* cho mình và các bạn tham khảo. Rất nhiều vấn đề trong cách giải toán và học toán có thể tổng kết lại, tác giả đã sưu tầm và chọn lọc những phương pháp đặc trưng nhất, những bài tập hay và có mức khái quát cao mang nội dung toán học cơ bản và sâu sắc. Bạn đọc tìm thấy phần nào các phương pháp *hóa giải* các bài tập hoặc một cách nhìn trong học tập cũng như thực hành tự mình giải bài tập.

Cùng với những cuốn sách của tác giả đã được xuất bản, cuốn sách này quan tâm tới 5 vấn đề, mỗi vấn đề được gói gọn trong một chương và là một phương pháp giải áp dụng đại lượng bất biến. Mỗi chương tương đối độc lập với nhau, sau mỗi tiết nhỏ trong chủ đề là một vấn đề được đặt ra và có ví dụ minh hoạ, sau đó là bài tập áp dụng những tư tưởng của tiết. Mỗi chương có những tiết đặc trưng khác nhau. *Đặc biệt phần* cuối mỗi chương là một chuyên đề hay thể hiện sử dụng phương pháp của chương đó, mỗi vấn đề ở đây có thể phát triển thành nội dung một buổi nói chuyện ngoại khóa. Những bài tập được áp dụng cách giải của các bài mẫu nên không có giải chi tiết. Chỉ có hai chương có hướng dẫn và gợi ý của bài tập trong cả chuyên đề. Nội dung của mỗi chuyên đề được tóm tắt như sau:

Chương 1: Nguyên lí bất biến. Nhiều bài toán cho biết thực hiện một số thao tác trên một hệ đối tượng nào đó như các số, quân bài, quân cờ hoặc những biến đã cho. Tuy bài toán có phức tạp nhưng ẩn chứa những đại lượng bất biến như tính chẵn lẻ hoặc tổng, tích của các biến không thay đổi. Nhờ phát hiện ra hoặc cố tình đưa ra những biến có tính chất bất biến hoặc đơn điệu bất biến, nhờ vào những dữ kiện bất biến đưa ta đến kết luận của bài toán. Những bài toán của chương này là dựa vào các tính chất số học, bài toán cũng mang tính các bài tập số học. Chuyên đề là thiết lập các hàm bất biến và ứng dụng của nó.

Chương 2: Đa thức đối xứng hai biến. Tính bất biến thể hiện rõ việc định nghĩa những đa thức đối xứng: Một đa thức hai biến gọi là đối xứng nếu ta thay đổi vai trò và vị trí giữa hai biến cho nhau, giá trị của đa thức không thay đổi. Từ định nghĩa trên ta chứng minh được mọi đa thức đối xứng hai biến đều biểu diễn như đa thức của các đa thức đối xứng cơ sở, mà các đa thức đối xứng cơ sở liên quan đến công thức nghiệm của Viète[1]. Từ đó áp dụng đa thức cho hàng loạt các vấn đề trong đại số sơ cấp như giải hệ phương trình với mỗi vế của các phương trình là những đa thức đối xứng; phân tích đa thức ra thừa số; giải phương trình bằng cách đặt ẩn số phụ; giải phương trình với hệ số đối xứng, ... Chuyên đề là một lớp bài toán đa thức bậc cao có các hệ số đối xứng, ứng dụng chuyên đề giải phương trình bậc cao bằng cách hạ bậc.

Chương 3: Bất đẳng thức của các dãy số đồng thứ tự. Khi chứng minh bất đẳng thức thì vai trò các biến hoặc các biến số tham gia trong bất đẳng thức ngang nhau. Nhiều khi sự chuyển đổi vai trò và vị trí giữa các biến cho nhau thì bất đẳng thức vẫn không thay đổi, do đó ta cho rằng những biến số này được xếp theo một thứ tự nào đó và nhờ thêm điều kiện được sắp mà chứng minh được bất đẳng thức dễ dàng hơn. Trong chủ đề này ta xét bất đẳng thức được tạo bởi hai bộ số có sắp xếp theo một thứ tự đã biết, đây là bất đẳng thức về tổng các cặp số trong hai bộ số được sắp xếp tối ưu nhất. Từ định lí cơ bản của chuyên đề, ta có thể chứng minh bất đẳng thức Cauchy[2], Chebyshev[3] và nhiều ứng dụng khác. Chuyên đề là một bất đẳng thức rất tổng quát, có thể nhận được các bất đẳng thức nổi tiếng khác. Kết quả của chuyên đề là các bạn có thể sáng tạo ra rất nhiều bất đẳng thức mới và rất đẹp.

[1] Francois Viète (1540-1603): Nhà toán học người Pháp.
[2] Augustin Louis Cauchy (1789-1857): Nhà toán học người Đức.
[3] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894): Nhà toán học người Nga.

Chương 4: Phương trình hàm. Để giải một phương trình hàm, người ta thường thay đổi giá trị của đối số để nhận được những phương trình thích hợp rồi suy ra hàm phải tìm. *Với những giá trị khác nhau, đẳng thức của phương trình hàm không đổi, hoặc bất biến, ta đưa ra phương pháp thế* các giá trị. Phương pháp thứ hai để giải phương trình hàm là phương pháp điểm bất động. Chuyên đề là những đa thức giao hoán, cách tìm những đa thức giao hoán.

Chương 5: Những trò chơi toán học. Một số *bài toán trò chơi tìm kiếm những chiến thuật thắng và hoà của người chơi cũng đều dựa vào tính* bất biến của những điều kiện đã cho. Tìm kiếm một lời giải cho bài toán trò chơi là một việc rất khó, người ta thường phát hiện ra những biến đơn điệu bất biến, nghĩa là có tăng hoặc giảm một đại lượng nào đó theo một quy luật cố định. Nhiều bài thi học sinh giỏi rất hay ra ở các nước, vì nó đòi hỏi học sinh suy luận một cách logic và thông minh. Chuyên đề là các chiến thuật trong trò chơi Nim, một trò chơi xuất xứ từ Trung Quốc. Trò chơi được phân tích kĩ và chỉ ra bước đi để cho kết quả thắng.

Nhiều bài tập đã được lựa chọn từ nhiều nguồn khác nhau, việc giải ví dụ và bài tập nhằm mô tả tốt phương pháp đã đặt ra, còn những cách chứng minh khác có thể có và hay hơn tác giả đã bỏ qua (ví dụ như bất *đẳng thức Cauchy*).

Cuốn sách dành cho học sinh phổ thông yêu toán, học sinh khá *giỏi môn toán, các thầy cô giáo, sinh viên đại học ngành toán, ngành tin học* và *những người* yêu thích toán học phổ thông. Trong biên soạn không thể tránh khỏi sai sót và nhầm lẫn mong bạn đọc cho ý kiến. Mọi góp ý gửi về địa chỉ: Nhà xuất bản Giáo dục, 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Hà Nội, tháng 9 năm 2004

NGUYỄN HỮU ĐIỂN

Chương 1
NGUYÊN LÍ BẤT BIẾN

1.1. Giới thiệu phương pháp đại lượng bất biến

Cho a, b, c là những số thực. Ta xét tổng $S = a + b + c$. Nếu ta đổi chỗ a cho b, b cho c và c cho a, thì tổng S luôn luôn chỉ là một. Tổng này không thay đổi đối với thứ tự thực hiện phép cộng. Dù a, b, c có thay đổi thứ tự như thế nào chăng nữa S vẫn không thay đổi, nghĩa là S *bất biến* đối với việc thay đổi các biến khác. Trong thực tế cũng như trong toán học, rất nhiều vấn đề liên quan đến một số đối tượng nghiên cứu lại bất biến đối với sự thay đổi của nhiều đối tượng khác. Ví dụ, nếu ta chuyển chỗ theo hướng một hình khối nào đó trong một mặt phẳng hoặc trong không gian, thì độ dài các cạnh, độ lớn các góc của hình, khối không thay đổi...

Ta có thể hiểu là : *Mọi đại lượng định tính hay tính chất và quan hệ giữa những phần tử của một hoặc một số tập hợp mà không thay đổi với một biến đổi nào đó được gọi là bất biến.*

Nhiều ví dụ chỉ ra rằng sự bất biến có trong môn số học, đại số và hình học,... Những bài toán có liên quan đến bất biến chia làm hai loại :

1. Những bài toán lấy bất biến làm kết luận (hoặc kết quả) phải tìm. Những bài toán loại này được liệt kê rất nhiều trong chương 1 của cuốn sách [11]. Những bất biến của bài toán là kết quả của quá trình lặp trong nội dung bài toán.

2. Những bài toán lấy tính bất biến làm phương pháp giải. Trong cuốn sách [11] có một phần rất nhỏ đề cập đến vấn đề này. Chương này ta đề cập đến các khía cạnh của loại bài toán này, cũng là trình bày phương pháp giải cho một lớp bài toán.

Bài toán xuất phát như một chuyện cổ tích :

Người Nông dân trồng được một cây khế thần có 99 quả chưa chín màu xanh và 1000 quả đã chín màu vàng. Một con Quạ đến ăn mỗi ngày hai quả khế và nói với người nông dân: "Ăn một quả trả cục vàng, may túi ba gang mang đi mà đựng". Quạ đến ăn hai quả khế bất kì không phân biệt quả xanh và quả vàng. Nếu Quạ ăn một quả vàng và một quả xanh thì cây khế lại sinh ra một quả xanh. Nếu Quạ ăn hai quả vàng, thì cây khế lại sinh ra một quả vàng. Nếu Quạ ăn hai quả xanh thì cây khế lại sinh cũng quả vàng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp quả khế cuối cùng còn lại trên cây là màu vàng không ?

Để thuận tiện cho việc giải ta kí hiệu : Quả khế xanh là X; quả khế vàng là V; quạ ăn quả là $+$ và cây khế sinh ra quả là $=$. Khi đó bài toán có thể viết lại ngắn gọn:

$$V + V = V, \quad X + X = V, \quad V + X = X.$$

Từ cách viết trên ta thấy rằng số lượng quả xanh hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi 2 quả sau mỗi lần ăn (mỗi lần Quạ ăn hai quả). Vì trên cây số những quả màu xanh là lẻ, còn số những quả màu vàng là chẵn, nên quả cuối cùng trên cây sẽ là màu xanh, không phụ thuộc vào cách ăn quả của Quạ.

Tính bất biến trong bài toán trên là gì ? Đó là số những quả xanh dù Quạ có ăn quả như thế nào đi nữa thì nó không thay đổi hoặc nếu nó thay đổi thì thay đổi một cách cố định là giảm đi hai quả. Chính điều bất biến đối với quả xanh và giả thiết bài toán đưa ta đến lời giải. Như vậy việc tìm ra tính bất biến trong những đại lượng đã cho của bài toán là rất quan trọng.

Những bài toán có dạng như một quy trình hay thuật toán thường tồn tại một trạng thái khởi đầu và một dãy những bước đi hợp lệ (bước biến đổi). Kết luận của những bài toán loại này thường phải trả lời những câu hỏi sau đây :

1. Có thể đạt tới được trạng thái cuối cùng đã cho không ?
2. Tìm tất cả trạng thái cuối cùng có thể đạt tới ?
3. Có tồn tại giới hạn tiến tới một trạng thái cuối cùng không ?
4. Tìm tất cả chu kì có thể có trong dãy trạng thái ?

Phần sau đây ta xét những cách thức tìm tính bất biến trong một bài toán như thế nào thông qua các ví dụ.

1.2. Phát hiện bất biến trong bài toán

Thông qua ví dụ sau đây, bạn đọc sẽ thấy sự bất biến được nhìn từ những khía cạnh khác nhau đều giải được bài toán.

Ví dụ 1.1. *Trên bảng ta viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ tại các vị trí bất kì. Ta thực hiện xóa hai dấu bất kì trong đó và viết vào đó một dấu cộng nếu xóa hai dấu giống nhau và dấu trừ nếu xóa hai dấu khác nhau. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì sau khi ta thực hiện thao tác trên 24 lần?*

Lời giải. *Cách 1:* Ta thay mỗi dấu cộng bằng số 1, còn mỗi dấu trừ bằng số -1. Thao tác thực hiện xóa hai số và viết lại một số sẽ là tích của chúng. Vì thế tích của tất cả các số viết trên bảng sẽ không thay đổi. Vì vậy ngay từ đầu giả thiết cho tích các số trên bảng bằng -1, thì cuối cùng cũng còn lại số -1, nghĩa là trên bảng còn lại dấu trừ.

Cách 2: Ta lại thay mỗi dấu cộng bằng số 0, còn dấu trừ bằng số 1. Thao tác thực hiện là tổng của hai số xóa đi là số chẵn thì ta viết lại số 0. Như vậy tổng các số trên bảng *sau khi thực hiện một thao tác* hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi 2. Đầu tiên tổng các số trên bảng là một số lẻ (bằng 15), thì số cuối cùng trên bảng *còn lại là số lẻ*, vậy là số 1. Nghĩa là trên bảng còn dấu trừ.

Cách 3: Bằng cách thay như ở cách 1, bây giờ sau mỗi lần thao tác, số -1 hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi 2. Vì thế lúc ban đầu số chữ số -1 là lẻ, thì cuối cùng chỉ còn lại một số -1, nghĩa là còn lại một dấu trừ. ☺

Phân tích ba cách giải ta thấy cách 1 lợi dụng tính không đổi của tích *các số viết trên bảng*; cách 2 sử dụng tính không đổi của tổng chẵn các số và cách 3 là sự không đổi của số chẵn các dấu trừ. Như vậy trong cách *giải ta đã sử dụng tính chất bất biến của tích*, tổng hoặc số lượng chẵn lẻ của các số. Qua cách giải trên ta thấy rằng khi gặp những lớp bài toán mà thao tác lặp đi lặp lại, ta *phải biến đổi* và *tìm ra những* tính bất biến của thao tác ta thực hiện. Chú ý rằng các thao tác ta thực hiện không phụ thuộc vào thao tác trên hai số nào bắt đầu, việc chứng minh *nó tương tự* như cách làm trên, bạn đọc làm bài tập 1.18 (ở cuối phần này). Một biến thể của bài toán trên được cho dưới dạng như ví dụ sau:

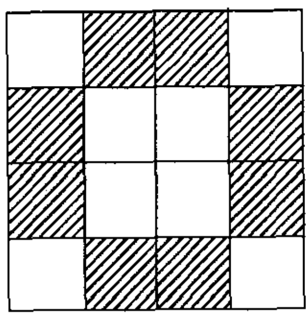
Ví dụ 1.2. *Bốn kí tự X và năm kí tự O được viết xung quanh một đường tròn theo một thứ tự bất kì. Nếu hai kí tự cạnh nhau là như nhau thì ta viết thêm vào giữa chúng X mới, ngược lại ta viết thêm vào giữa chúng O mới. Sau đó ta xóa những kí tự cũ X và O đi. Ta thực hiện thao tác trên lặp lại* *một số lần. Hỏi sau một số lần thực hiện quá trình trên, ta có nhận được chín kí tự O quanh đường tròn hay không?*

Lời giải. Nếu ta đặt $X = 1$ và $O = -1$, khi đó chú ý là giữa những kí tự cạnh nhau được thay bằng tích của chúng. Nếu ta xét tích P của tất cả giá trị trước và sau khi thực hiện một lần thay đổi, ta sẽ thấy rằng P mới bằng bình phương của P cũ. Do đó P luôn luôn bằng 1 sau khi thực hiện thay đổi. Nhưng chín kí hiệu O đòi hỏi $P = -1$ không bao giờ có thể xảy ra. ☺

Ví dụ 1.3. *Một hình vuông có cạnh 4 cm được chia thành 16 ô vuông, mỗi ô vuông có cạnh 1cm. Trong mỗi ô vuông đánh dấu cộng (+), trừ một ô đánh dấu trừ (−). Những dấu ở các ô vuông có thể thay đổi đồng thời theo hàng, cột hoặc đường chéo. Có khả năng sau hữu hạn lần đổi dấu theo nguyên tắc trên dẫn đến tất cả các ô vuông đều có dấu cộng (+) không?.*

1	1	−1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Hình 1.1



Hình 1.2

Lời giải. Ta thay dấu cộng, trừ bằng các số tương ứng 1 và −1. Trạng thái ban đầu giả sử là hình 1.1. Đại lượng bất biến ở đây là tích các số ở các ô có gạch chéo trong hình 1.2, vì sau những thao tác mô tả trong bài toán đại lượng này luôn luôn có giá trị −1. Nghĩa là trong các ô được gạch chéo luôn luôn tồn tại một ô có số −1, suy ra không thể nhận được bảng không chứa một dấu trừ nào. ☺

Ví dụ 1.4. *Trên bảng ta viết tập hợp số gồm các số 0, 1 và 2. Ta thực hiện xóa đi hai số khác nhau và điền vào đó chữ số của số còn lại (nghĩa là 2 thay cho 0 và 1; 1 thay cho 0 và 2; 0 thay cho 2 và 1). Chứng minh rằng nếu sau một số lần thực hiện thao tác trên, trên bảng chỉ còn lại một chữ số duy nhất thì chữ số đó không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện các thao tác các số đã có trên bảng.*

Lời giải. Ta thực hiện một lần thao tác thì số lượng mỗi loại trong ba loại số trên tăng lên hoặc giảm đi 1, suy ra số lượng các loại số thay đổi tính chẵn lẻ. Khi trên bảng chỉ còn lại một số, nghĩa là hai trong các số 0, 1 và 2 có số lượng bằng không, còn số thứ ba bằng một. Nghĩa là ngay từ đầu số lượng hai số trong ba số trên bảng phải có cùng tính chẵn lẻ và một loại số còn lại có tính chẵn lẻ khác. Vì thế không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện thao tác, cuối cùng chỉ còn một trong các số 0, 1 và 2 còn lại, số này có số lượng chẵn lẻ khác với số lượng chẵn lẻ của hai số kia. ☺

Trong chứng minh bài toán trên, nếu số lượng cả ba loại số trên bảng có cùng tính chẵn lẻ thì dù có thực hiện các thao tác trên thế nào đi nữa, cuối cùng cũng không thể còn một số duy nhất trên bảng. Cách giải những ví dụ trên là rất điển hình, để củng cố phương pháp giải ta xét một vài bài toán sau :

Ví dụ 1.5. *Trên bảng ta viết ba số nguyên. Sau đó ta xóa đi một số và viết vào đó tổng hai số còn lại trừ đi 1. Thao tác như vậy lặp lại một số lần và cuối cùng ta nhận được ba số 17, 1967, 1983. Phải chăng những số đầu tiên trên bảng được viết là 2, 2, 2 ?*

Lời giải. Bài toán này là một bài toán khó đã được ra trong một kì thi học sinh giỏi ở Nga. Ta tưởng chừng như phải tìm lại các bước thực hiện từ ba số kết quả đến các số ban đầu. Nhưng bài toán có câu trả lời là: Với các thao tác đã ra, ta không thể thực hiện biến đổi từ ba số ban đầu đến ba số kết quả, khi đó các cách thử là vô vọng. Bài toán có cho thao tác biến đổi ba số nhưng không cho biết gì về bắt đầu từ số nào và thứ tự ra sao? Thế thì cái gì bất biến trong bài toán này ? Ta xét cụ thể :

Sau bước đầu tiên từ ba số $2, 2, 2$ ta nhận được $2, 2, 3$, ba số này có hai số chẵn và một số lẻ. Từ bước thứ hai trở đi thì kết quả luôn luôn có hai số chẵn và một số lẻ dù ta thực hiện bắt đầu từ bất cứ số nào (vì những số chẵn bằng tổng của một số chẵn và một số lẻ trừ đi 1; số lẻ là tổng của hai số chẵn trừ đi 1). Nhưng trong kết quả đã cho đều là ba số lẻ cả, nên với thao tác đã cho và xuất phát từ $2, 2, 2$ không thể cho kết quả. ☺

Bài toán trên được giải nhờ phát hiện ra tính chẵn lẻ của ba số không thay đổi, nên từ trạng thái xuất phát không thể nhận được trạng thái kết quả.

Ví dụ 1.6 (Kiev 1974). *Những số* $1, 2, 3, \ldots, 1974$ *được viết trên một bảng. Người ta thay hai số bất kì bằng một số hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số đó. Chứng minh rằng sau* 1973 *lần thực hiện thao tác trên, chỉ còn một số còn lại trên bảng không thể là số* 0.

Lời giải. Với kinh nghiệm giải bài toán trước, ta quan tâm đến tính chẵn lẻ của các số đã cho và sau mỗi lần thao tác được số chẵn lẻ như thế nào. Khi bắt đầu trên bảng có 987 số lẻ. Mỗi lần ta thực hiện thay đổi, số của những số lẻ hoặc là còn nguyên (khi ta lấy hai số có tính chẵn lẻ khác nhau hoặc hai số cùng tính chẵn) hoặc là giảm đi hai số (khi ta lấy hai số cùng tính lẻ). Như vậy số của những số lẻ còn lại sau mỗi lần thực hiện thay đổi luôn luôn là một số lẻ. Vậy khi còn lại một số cuối cùng trên bảng thì nó phải là số lẻ, do đó nó không thể là 0. ☺

Ví dụ 1.7. *Một hình tròn được chia thành sáu rẻ quạt. Những số* 1, 0, 1, 0, 0, 0 *được viết vào trong các rẻ quạt này thứ tự theo ngược chiều kim đồng hồ. Ta thực hiện thao tác lặp: Tăng số của hai rẻ quạt cạnh nhau lên 1 đơn vị. Khi thực hiện các thao tác trên có đưa đến kết quả các số trong các rẻ quạt đều bằng nhau không ?*

Lời giải. Ký hiệu $a_1, a_2, ..., a_6$ là những số trong các rẻ quạt hiện thời. Khi đó số $S \quad a_1 \quad a_2 + a_3 \quad a_4 + a_5 \quad a_6$ là một đại lượng không đổi. Khởi đầu ta có $S \quad 2$. Đích cuối cùng ta muốn là $S \quad 0$ sẽ không bao giờ đạt đến. ☺

Ví dụ 1.8. *Ngoài biển đông, trên một hòn đảo sinh sống giống thằn lằn có ba loại màu: màu xám có 133 con; màu nâu 155 con và màu đỏ có 177 con. Nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau, thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. (Ví dụ nếu thằn lằn màu xám gặp thằn lằn màu nâu, thì cả hai con đều đổi sang màu đỏ.) Trong những trường hợp hai con thằn lằn cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng là trên đảo tất cả thằn lằn trở thành cùng một màu được không ?*

Lời giải. Tính chẵn lẻ ở các bài trước là những bất biến rất tốt để ta giải toán, tính chẵn lẻ cũng được xác định bởi phép chia các số cho 2. Tương tự như vậy ba số nguyên 133, 155, 177 chia cho 3 ta được bộ số dư 1, 2 và 0.

Ta thử xét nếu một con thằn lằn xám gặp một con thằn lằn nâu, thì chúng đồng thời đổi thành màu đỏ. Khi đó ta có 132 con xám, 154 con nâu và 179 con đỏ. Những số dư của 132, 154 và 179 cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là lại gặp lại đầy đủ các số dư đã có.

Nếu một con thằn lằn xám gặp con thằn lằn màu đỏ, thì chúng đồng thời đổi màu thành nâu. Khi đó ta có 132 thằn lằn xám, 157 thằn lằn nâu và 176 thằn lằn đỏ. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là lại gặp cả ba khả năng của số dư.

Nếu con thằn lằn nâu và thằn lằn đỏ gặp nhau, thì chúng cùng đổi màu thành xám. Khi đó có 135 thằn lằn xám, 154 thằn lằn nâu và 176 thằn lằn đỏ. Số dư của những số thằn lằn trên chia cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, vẫn có đầy đủ các số dư khi chia cho 3.

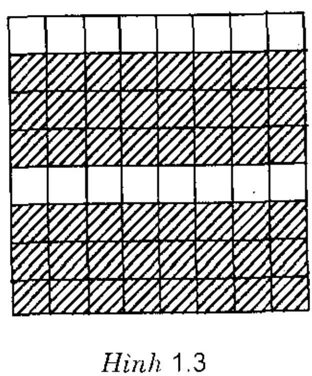
Bất biến ở đây là dù thay đổi màu như thế nào thì số dư của các số lượng thằn lằn chia cho 3 đều có đầy đủ ba số $0, 1, 2$.

Số lượng tất cả thằn lằn trên đảo là $133 + 155 + 177 = 465$ là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả thằn lằn đều cùng một màu thì số dư của số lượng thằn lằn màu xám, nâu và đỏ chia cho 3 tương ứng là $0, 0, 0$. Điều này vô lí vì các số dư phải có đầy đủ các số dư này khi chia cho 3. Như vậy câu trả lời là không thể được. ☺

Việc tìm ra đại lượng bất biến của một đối tượng trong dữ kiện bài toán thật lợi hại khi giải những bài toán loại này. Sự đa dạng của các bài toán này được liệt kê dưới đây:

Ví dụ 1.9. *Tại mỗi ô vuông trong bảng 8×8 được viết một số nguyên. Ta có thể chọn bất kì bảng nhỏ 3×3 hoặc 4×4 và tăng tất cả số trong bảng nhỏ lên 1. Với cách làm như vậy liệu có thể nhận được những số chia hết cho 3 trong tất cả ô vuông của bảng 8×8 sau một số hữu hạn lần thực hiện không ?*

Lời giải. Không, không bao giờ có kết quả như vậy. Thật vậy, ta tính tổng các số trong các ô được gạch chéo trong hình 1.3. Bởi vì mỗi hình vuông cỡ 4×4 chứa 12 ô gạch chéo, còn mỗi hình vuông cỡ 3×3 chứa 6 hoặc 9 ô, thì sau một thao tác tổng các số trong các ô gạch chéo chia cho 3 có số dư không đổi. Vì thế nếu ngay từ đầu tính được tổng không chia chia hết cho 3, thì trong những ô gạch chéo luôn luôn chứa những ô mà trong đó có chứa các số không phải bội của 3. ☺



Hình 1.3

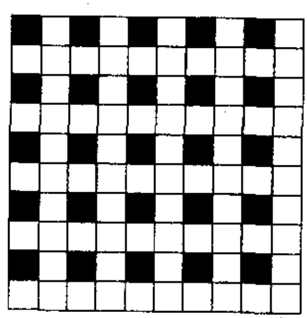
Cùng lí luận như vậy bạn đọc có thể giải bài tập 1.19.

Ví dụ 1.10. *Trên một bảng ô vuông có 8×8 ô vuông bao gồm 32 ô trắng và 32 ô đen. Nếu một người chơi có thể thay tất cả ô trắng thành đen và ô đen thành trắng cùng một lúc trong một hàng hoặc một cột bất kì, thì có thể thực hiện hữu hạn bước thay đổi như vậy để trên bảng chỉ còn đúng một ô đen hay không?*

Lời giải. Không. Nếu có đúng k ô đen trong một hàng hoặc một cột trước khi thực hiện thay đổi, thì sau khi thực hiện một lần thay đổi, số ô đen trong hàng đó hoặc cột đó sẽ là $8 - k$, sự thay đổi số ô đen là $(8 - k) - k = 8 - 2k$ ô đen trên bảng. Vì $8 - 2k$ là một số chẵn, tính chẵn lẻ của số những ô đen vẫn giữ nguyên trước cũng như sau thực hiện thay đổi. Do bắt đầu có 32 ô đen, nên không thể chỉ còn lại một ô đen trên bảng tại một bước biến đổi nào đó. ☺

Ví dụ 1.11.

Cho một bảng hình vuông có cạnh 10 cm, được chia ra thành một 100 ô vuông nhỏ với cạnh 1cm. Ngoài ra ta đặt lên đó 25 hình chữ nhật như nhau có chiều cao 4cm và chiều rộng 1cm, mỗi hình chữ nhật được chia ra thành 4 ô vuông có cạnh là 1cm. Có thể sắp đặt những hình chữ nhật trên bảng hình vuông sao cho chúng phủ toàn bộ bảng vuông hay không ? (Không chấp nhận có hình chữ nhật nào lồi ra khỏi cạnh của bảng).



Hình 1.4

Lời giải. Ta tô bảng vuông bằng màu đen trắng sao cho như hình 1.4. Ta nhận được 25 ô đen và 75 ô trắng. Ta chú ý là đặt những hình chữ nhật trên bảng vuông sao cho mỗi ô vuông của hình chữ nhật trùng với một ô vuông nào đó của bảng vuông. Hình chữ nhật này sẽ phủ lên hoặc là 2 hoặc là 0 ô vuông đen. Từ đó suy ra khi đặt tất cả 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín một số chẵn những ô vuông đen. Bởi vì số lượng của ô vuông đen đã tô là 25, nó không phải là một số chẵn. Như vậy không thể phủ bằng 25 hình chữ nhật trên hình vuông đã cho. ☺

Ví dụ 1.12. *Cho* n *là một số nguyên dương lẻ. Người ta viết các số* $1, 2, \ldots, 2n$ *lên bảng. Sau đó người ta lấy hai số bất kì* a, b *thuộc dãy trên, xóa chúng đi và viết vào đó* $|a-b|$. *Chứng minh rằng sau một số lần thực hiện như vậy, một số lẻ sẽ còn lại cuối cùng.*

Lời giải. Kí hiệu S là tổng của tất cả những số trên bảng (chưa xóa). Khởi đầu $S = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n+1)$ là một số lẻ. Sau mỗi bước S bị giảm đi $2\min(a, b) = |a+b| - |a-b|$, đây là một số chẵn. Như vậy tính chẵn lẻ của S không đổi. Trong quá trình giảm dần ta có $S \equiv 1 \pmod 2$. Khởi đầu S là một số lẻ. Như vậy kết thúc sẽ cũng là một số lẻ. ☺

Ví dụ 1.13. *Tại các đỉnh của một hình lục giác lồi, ta ghi các số:* 8, 3, 12, 1, 10 *và* 6. *Mỗi lần thực hiện thay đổi người ta có thể thêm hoặc bớt vào hai đỉnh liên tiếp tùy ý cùng một số. Sau một số lần thực hiện như vậy, ta có thể đạt được sáu số:* $5, 2, 14, 6, 13$ *và* 4 *được thay lần lượt thứ tự vào sáu số trên không?*

Lời giải. Giả sử tại một lượt đi nào đó, tại các đỉnh của lục giác có các số: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Xét tổng $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. Khi thêm vào hai số cạnh nhau cùng một số thì rõ ràng là tổng S vẫn giữ nguyên giá trị. Trong trường hợp bài toán, tổng $S = 20$ trong dãy số kết quả và dãy số khởi đầu trùng nhau. Vậy ta đi tìm một cách chuyển từ $8, 3, 12, 1, 10, 6$ thành $5, 2, 14, 6, 13, 4$. Kí hiệu $\xrightarrow{\mathrm{I}-1, \mathrm{II}-1}$ là số thứ nhất và số thứ hai trừ đi 1:

$$8, 3, 12, 1, 10, 6 \xrightarrow{\mathrm{I}-1,\mathrm{II}-1} 7, 2, 12, 1, 10, 6$$
$$\xrightarrow{\mathrm{III}+2,\mathrm{IV}+2} 7, 2, 14, 3, 10, 6 \xrightarrow{\mathrm{I}-2,\mathrm{VI}-2} 5, 2, 14, 3, 10, 4$$
$$\xrightarrow{\mathrm{IV}+3,\mathrm{V}+3} 5, 2, 14, 6, 13, 4.$$
☺

Ví dụ 1.14. *Ta sắp đặt ba máy tự động trên một dây chuyền, mỗi máy nhận đọc một tấm thẻ có ghi hai số nguyên và đưa ra một tấm thẻ mới* *theo nguyên tắc sau: Sau khi đọc thẻ có ghi cặp số* (a, b), *máy thứ nhất (I) in ra thẻ có cặp số* $(a - b, b)$, *máy thứ hai (II) in ra thẻ có cặp số* $(a + b, b)$ *và máy thứ ba (III) in ra thẻ có cặp số* (b, a). *Khởi đầu ta cho thẻ có cặp số* $(19, 87)$. *Có thể dùng ba máy tự động trên theo một thứ tự bất kì để nhận được thẻ với cặp số:*

a) $(41, 14)$? *b)* $(18, 81)$?

Lời giải. Tìm bất biến trong bài toán này bằng cách quan sát hệ thống in thẻ và những cặp số đã cho và kết quả. Ta thấy rằng cả ba máy đều thay đổi số in ra nhưng ước số chung lớn nhất của nó không thay đổi do ta nhớ đến thuật toán Euclid và cách tính số in ra của ba máy. Ta thấy rằng ước số chung lớn nhất: $(19, 87) = 1$ và $(18, 81) = 9$ là hai số khác nhau, dù kết hợp ba máy như thế nào thì kết quả b) cũng không thể xảy ra. Còn trường hợp a) tính bất biến thỏa mãn vì $(14, 41) = 1$. Vậy thẻ với các số $(14, 41)$ có thể nhận được bằng cách kết hợp các máy tự động trên. Nhưng ta phải chỉ các bước thực hiện mới là cách giải trọn vẹn bài toán. Tất nhiên có rất nhiều cách thực hiện kết hợp ba máy để in ra kết quả, ta chỉ cần chỉ ra một phương án là đủ (còn có tối ưu hay không dành cho bạn đọc). Kí hiệu số máy trên mũi tên là thực hiện in theo số máy này:

$$(19,87) \xrightarrow{III} (87,19) \xrightarrow{I^4} (11,19) \xrightarrow{III} (19,11) \xrightarrow{I} (8,11) \xrightarrow{III} (11,8) \xrightarrow{I} (3,8) \xrightarrow{III} (8,3) \xrightarrow{I^2} (2,3) \xrightarrow{III} (3,2) \xrightarrow{I} (1,2) \xrightarrow{III} (2,1) \xrightarrow{II^{11}} (13,1) \xrightarrow{III} (1,13) \xrightarrow{II} (14,13) \xrightarrow{III} (13,14) \xrightarrow{II^2} (41,14).$$ ☺

Những bài toán về thay đổi vị trí các số trong một bộ số cũng có cách giải tìm bất biến tương tự.

Ví dụ 1.15. *Những số* $1, 2, 3, \ldots, n$ *được sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Một phép biến đổi là đổi chỗ bất kì hai số cạnh nhau trong bộ số có sẵn. Chứng minh rằng nếu ta thực hiện số lẻ lần phép biến đổi như vậy, thì luôn luôn nhận được một số khác với bộ số ban đầu về các vị trí của các số* $1, 2, \ldots, n$.

Lời giải. Ta kí hiệu $a_1, a_2, ..., a_n$ là một hoán vị của bộ số $1, 2, ..., n$. Ta nói rằng hai số a_i và a_j trong hoán vị này là *nghịch đảo* nếu $i < j$ thì $a_i > a_j$. Khi ta thay đổi hai số cạnh nhau trong hoán vị, nghĩa là chúng ta tăng hoặc giảm số lượng nghịch đảo đi 1. Ta thực hiện số lẻ lần thao tác như vậy, thì ta đã biến đổi tính chẵn lẻ của những số nghịch đảo, điều đó nghĩa là ta đã thay đổi hoán vị. Bằng cách chứng minh tương tự ta có thể mở rộng bài toán này như trong bài tập 1.20 (trong phần cuối của tiết này). ☺

Ví dụ 1.16. *Tại những bến ô tô khác nhau trong một tuyến đường ô tô cùng xuất phát một lúc 25 ô tô theo cùng chiều (một tuyến đường ô tô là một con dường duy nhất và khép kín). Theo nguyên tắc, những ô tô này có thể vượt qua lẫn nhau, nhưng không được vượt quá hai xe. Những ô tô này cùng kết thúc một vòng đồng thời tại bến ô tô mình đã xuất phát. Chứng minh rằng trong toàn bộ thời gian số lần xe vượt nhau là một số chẵn.*

Lời giải. Ta kí hiệu một trong những chiếc ô tô bằng màu vàng, những chiếc còn lại được đánh số $1, 2, 3, ..., 24$ theo thứ tự xuất phát từ vị trí xe màu vàng. Khi mỗi lần có xe vượt mà nó là xe ghi số và đi sau xe màu vàng, thì dãy số thay đổi hai số liền nhau trong trường hợp lần xe vượt này không tham gia xe màu vàng.

Ta xét trường hợp một chiếc xe nào đó vượt chiếc ô tô màu vàng. Nếu trước thời điểm vượt những số trong bảng là một hoán vị $a_1, a_2, ..., a_{24}$, thì sau khi vượt chúng tạo thành hoán vị $a_2, a_3, ..., a_{24}, a_1$. Ta giả thiết rằng sự vượt nhau hoàn toàn liên tiếp 23 lần thay đổi dãy số: $a_1, a_2, ..., a_{24} \to a_2, a_3, ..., a_{24}, a_1 \to a_3, a_4, ..., a_{24}, a_1, a_2 \to ... \to \to a_2, a_3, ..., a_{24}, a_1$.

Nếu xe màu vàng thực hiện một lần vượt thì từ hoán vị $a_1, a_2, ..., a_{24}$ ta nhận được hoán vị $a_{24}, a_1, a_2, ..., a_{23}$, từ hoán vị này cũng biến đổi 23 lần thay đổi dãy số.

Như vậy dù trong trường hợp nào thì mỗi lần vượt đưa đến một số lẻ lần chuyển đổi dãy số. Nếu trường hợp tổng quát số lần vượt là lẻ, thì có số lẻ lần chuyển đổi. Do bài toán 1.15 nhận được dãy số khác với bộ số ban đầu (khác với vị trí các xe lúc ban đầu), nhưng cuối cùng các xe lại trở về vị trí ban đầu, nên ta có số chẵn lần các xe vượt nhau. ☺

Rất nhiều dạng bài toán tìm đại lượng bất biến, ví dụ sau đây tính bất biến được cho ngay trong giả thiết của đề bài:

Ví dụ 1.17. *Cho điểm* $S = (a, b)$ *trên mặt phẳng với* $0 < b < a$, *ta dựng dãy các điểm* (x_n, y_n) *theo quy tắc sau đây:*

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}.$$

Tìm giới hạn của các điểm sinh ra ở trên.

Lời giải. Bài toán này dễ tìm thấy đại lượng bất biến. Từ các công thức trên suy ra $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n$ với mọi n. Ta tiến hành giảm chỉ số đến $x_n y_n = ab$ với mọi n. Đây chính là đại lượng bất biến. Khởi đầu ta đều có $y_0 < x_0$. Mối quan hệ này cũng bất biến với mọi n: $y_n < x_n$. Thật vậy, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, giả sử $y_n < x_n$ với một n nào đó, ta phải chứng minh rằng $y_{n+1} < x_{n+1}$. Vì trung bình điều hòa thực sự nhỏ hơn trung bình cộng, nên

$$0 < x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{x_n - y_n}{2} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

với mọi n. Do dãy giảm thực sự, nên ta có $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x$. Như vậy, $x^2 = ab$, nghĩa là $x = \sqrt{ab}$. ☺

Đại lượng bất biến trong bài toán trên giúp ta rất nhiều, ta phải dùng đến hai đại lượng bất biến để giải. Những bài toán kiểu thế này có thể tìm thấy rất nhiều trong chương 2 cuốn sách [7].

BÀI TẬP

Bằng những cách làm của các ví dụ trên ta có thể áp dụng và giải các bài tập sau đây. Một số bài có đưa ra gợi ý, còn nếu không có gợi ý, các bạn xem lại những bài mẫu ở phần trước và thực hiện cách giải hoàn toàn tương tự.

▷ **1.18.** Trên bảng đen viết một số dấu cộng (+) và một số dấu trừ (−). Cho phép xóa đi hai dấu bất kì và nếu chúng cùng dấu ta viết lại dấu cộng (+), còn nếu chúng khác dấu ta viết lại dấu trừ (−). *Chứng minh rằng dấu* cuối cùng không phụ thuộc vào các bước liên tiếp thực hiện thao tác trên (Gợi ý: Xem lại bài hái khế phần trước).

▷ **1.19.** Từ bảng trong giả thiết của ví dụ 1.9 và các thao tác như vậy có nhận được bảng không chứa một số chẵn nào không? (Gợi ý: Xem lại cách giải ví dụ 1.9).

▷ **1.20.** Chứng minh rằng kết luận của ví dụ 1.15 còn đúng, nếu trong phép biến đổi ta đổi chỗ hai số bất kì trong hoán vị đã cho. (Giải như ví dụ 1.15).

▷ **1.21.** Ta xé một miếng giấy thành 10 mảnh, trong một số mảnh giấy đó, ta lại xé mỗi mảnh thành 10 mảnh nhỏ, và tiếp tục như vậy. Hỏi ta có thể nhận được theo cách làm trên 1975 mảnh giấy không?

▷ **1.22.** Trên bảng ta viết các số $1, 2, \dots, 1975$. Cho phép xóa hai số bất kì và viết vào đó số dư của phép chia tổng hai số này cho 13. Sau một số lần làm như vậy trên bảng chỉ còn lại một số, hỏi số đó có thể là những số nào?

▷ **1.23.** Trong mỗi ô trong mảng cỡ 4×4 ta viết dấu cộng hoặc dấu trừ. Ta thực hiện biến đổi đồng thời theo hàng hoặc theo cột với dấu ngược lại. Số lượng dấu trừ nhỏ nhất ta có thể tính được từ mảng ban đầu và các mảng biến đổi sau đó gọi là *số đặc trưng* của bảng này. Số đặc trưng này có thể nhận được giá trị như thế nào?

▷ **1.24.** Trên một đường tròn có 30 con kiến: 10 kiến trắng và 20 kiến đen. Cho phép đổi chỗ hai con kiến mà giữa chúng có ba con kiến khác. Hai vị trí của hai con kiến bất kì được gọi là *tương đương* nếu chúng có thể đổi chỗ cho nhau sau một số lần thực hiện phép đổi chỗ như trên. Hỏi tồn tại bao nhiêu vị trí không tương đương của những con kiến?

▷ **1.25.** Những số $1, 2, \ldots, 2003$ được viết theo thứ tự này. Một phép biến đổi là chọn bốn số bất kì trong chúng và đặt lại các vị trí chúng đã chiếm nhưng theo thứ tự các số ngược lại. Có thể bằng phép biến đổi này để thực hiện được việc sắp xếp thành $2003, 2002, \ldots, 2, 1$ không ?

▷ **1.26.** Cho bốn số $4, 5, 6, 7$. Mỗi lần thực hiện thay đổi người ta viết 4 số mới thay vào bốn số cũ: Mỗi số mới bằng trung bình cộng của ba số đã có trước. Chứng minh rằng sau một số lần thay đổi ta không bao giờ đạt được nhóm 4 số: $5, 6, 7, 3$ (Gợi ý: Chú ý rằng tổng của bốn số a, b, c, d và bốn số $\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+a}{3}, \frac{a+b+d}{3}$ luôn luôn bằng nhau).

▷ **1.27.** Trên một đường thẳng phân bố một số điểm. Giữa mọi hai điểm liên tiếp ta đánh dấu thêm một điểm. Sau đó giữa mọi hai điểm liên tiếp trong các điểm nhận được ta lại đánh dấu thêm một điểm và vân vân. Số lượng những điểm nhận được chẵn hay lẻ sau khi ta thực hiện cách thêm điểm trên 1000 lần (Trả lời: Số lẻ).

▷ **1.28.** Ta đặt hai máy tự động có thể làm được các thao tác sau đây: Máy I cho thẻ vào có số nguyên A in ra trên nó tổng $A + 10$ hoặc $A + 15$ theo sự điều khiển của ta. Máy II cho thẻ vào có số nguyên A in ra trên nó hiệu $A - 10$ hoặc $A - 15$ theo sự điều khiển của ta. Cho thẻ vào có số 0, bằng hai máy tự động trên ta có thể in ra thẻ có số: a) 125 hoặc b) 123 được không? (Trả lời: a) Có thể; b) Không thể).

▷ **1.29.** Chia một hình chữ nhật thành những ô vuông có cạnh 1cm. Nó được phủ bởi toàn bộ, không chồng lên nhau và không thòi ra mép ngoài, bằng số lượng đã biết những mảnh có hai dạng: Những mảnh hình vuông có cạnh 2cm và mảnh hình chữ nhật có chiều dài 4cm và rộng 1cm. Nếu ta thay một mảnh hình vuông bằng một mảnh hình chữ nhật và bằng cách chuyển chỗ những mảnh còn lại, thì hình chữ nhật ban đầu có được phủ kín không? (Gợi ý: Tô hình chữ nhật như bài 1.11. Chú ý một mảnh hình chữ nhật phủ số chẵn ô vuông trắng và chẵn ô vuông đen, còn mảnh hình vuông phủ 1 ô vuông đen và ba ô vuông trắng. Trả lời: Không được).

1.3. Giải toán bằng đại lượng bất biến

Bằng cách phát hiện ra những đại lượng bất biến trong bài toán ta có thể giải nhiều bài toán. Tuy nhiên nếu không luyện tập thì rất khó và không có phương pháp sáng sủa để giải. Tiết này ta tiếp tục tìm hiểu thêm những cách tìm đại lượng bất biến trong bài toán.

Ví dụ 1.30. *Có ba đống sỏi gồm những viên sỏi nhỏ có số lượng tương ứng là* $19, 8$ *và* 9 *(viên sỏi). Ta được phép chọn hai đống sỏi và chuyển một viên sỏi của những đống sỏi đã chọn sang đống sỏi thứ ba. Sau một số lần làm như vậy thì có khả năng tạo ra mọi đống sỏi đều có 12 viên sỏi không ?*

Lời giải. Không. Đặt số viên sỏi trong ba đống sỏi tương ứng là a, b và c. Ta xét số dư chia cho 3 của những số này. Khi xuất phát, những số đồng dư này là $1, 2, 0$. Sau một lần chọn thay đổi, những số dư này là $0, 1, 2$ vì hai đống sỏi có sự chuyển một viên sỏi đến đống thứ ba. Như vậy những số dư luôn luôn là $0, 1, 2$ với những thứ tự khác nhau (đại lượng bất biến). Do đó tất cả các đống sỏi đều có 12 viên sỏi là không thể được (vì khi đó số dư của ba đống sỏi là $0, 0, 0$, vô lí). ☺

Ví dụ 1.31. *Hai người chơi một trò chơi với hai đống kẹo. Đống kẹo thứ nhất có* 12 *cái và đống kẹo thứ hai có* 13 *cái. Mỗi người chơi được lấy hai cái kẹo từ một trong hai đống kẹo hoặc chuyển một cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ hai. Người chơi nào không thể làm được những thao tác trên coi như là thua. Hãy chứng minh rằng người chơi đi lượt thứ hai không thể thua. Người đó có thể thắng không?*

Lời giải. Ta kí hiệu S là giá trị tuyệt đối của số kẹo trong đống thứ hai trừ đi đống thứ nhất. Khởi đầu, $S = |13 - 12| = 1$. Sau mỗi lần chơi S sẽ giảm hoặc tăng lên 2. Như vậy, số dư của S chia cho 4 có dạng: $1, 3, 1, 3, \ldots$. Mỗi lần sau khi người thứ nhất chơi, số dư của S chia cho 4 luôn luôn là 3. Ta thấy rằng người chơi bị thua khi và chỉ khi không còn cái kẹo nào ở đống thứ nhất và chỉ còn một cái kẹo ở đống thứ hai, khi đó $S = |1 - 0| = 1$. Như vậy người chơi thứ hai luôn luôn có thể thực hiện được cách chơi, do đó người đó không thua.

Ta thấy rằng, hoặc là tổng số kẹo ở hai đống giảm đi hoặc là số kẹo ở đống thứ nhất giảm đi, như vậy trò chơi phải có kết thúc, do đó người chơi thứ hai phải thắng. ☺

Ví dụ 1.32. *Mỗi thành viên của một câu lạc bộ có nhiều nhất là ba đối thủ trong câu lạc bộ (đối thủ ở đây là tương tác lẫn nhau). Chứng minh rằng những thành viên của câu lạc bộ có thể chia thành hai nhóm sao cho mỗi thành viên trong mỗi nhóm có nhiều nhất một đối thủ trong cùng nhóm.*

Lời giải. Khi bắt đầu, ngẫu nhiên ta chia những thành viên trong câu lạc bộ thành hai nhóm. Kí hiệu S là số các cặp đối thủ trong cùng nhóm. Nếu một thành viên có ít nhất hai đối thủ trong cùng nhóm, thì thành viên này có nhiều nhất một đối thủ trong nhóm khác. Thành viên này được di chuyển sang nhóm khác, ta sẽ giảm S đi ít nhất 1. Vì S là một số nguyên không âm, nó không thể giảm mãi được. Như vậy sau một số hữu hạn lần chuyển đổi, mỗi thành viên có thể có nhiều nhất một đối thủ trong cùng một nhóm. ☺

Chú ý: Phương pháp chứng minh bài toán trên gọi là *phương pháp xuống dốc vô hạn*. Nó chỉ ra rằng ta không thể giảm mãi số lượng khi nó chỉ có hữu hạn giá trị (bạn đọc có thể xem kĩ phương pháp này trong cuốn sách [9]).

Ví dụ 1.33. *Ta bắt đầu với những số* a, b, c, d. *Ta thay chúng bởi các số* $a' = a - b, b' = b - c, c' = c - d, d' = d - a$. *Ta thực hiện quá* *trình này* 1996 *lần. Có khả năng đến số cuối cùng* A, B, C, D *sao cho* $|BC - AD|, |AC - BD|, |AB - CD|$ *là những số nguyên tố?*

Lời giải. Trả lời: Không.

Bốn bước lặp đầu tiên cho kết quả

a - b	b - c	c - d	d - a
a-2b+c	b-2c+d	c-2d+a	d-2a+b
a-3b+3c-d	b-3c+3d-a	c-3d+3a-b	d-3a+3b-c
2a-4b+6c-4d	2b-4c+6d-4a	2c-4d+6a-4b	2d-4a+6b-4c

Do đó sau 4 bước lặp tất cả các số đều là số chẵn. Như vậy sau 1996 phép lặp tất cả các số là bội của 2. Vì thế $|BC - AD|, |AC - BD|, |AB - CD|$ tất cả là bội của 4, suy ra không có số nào là số nguyên tố. ☺

Ví dụ 1.34. *Trong một bảng ô vuông có* $n \times n$ *ô với* n *là một số lẻ. Trong mỗi ô ta viết* $+1$ *hoặc* -1. *Gọi* a_i *là tích tất cả các số thuộc hàng thứ* i *và* b_j *là tích tất cả các số thuộc cột thứ* j *(*$i, j = 1, 2, ..., n$*). Chứng minh rằng*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0.$$

Lời giải. Nếu ta đổi dấu của số nằm ở hàng thứ p và cột thứ q, những số a_p và b_q cũng đổi dấu, còn những số khác vẫn giữ nguyên. Ta xem sự thay đổi của $a_p + b_q$ trước và sau khi đổi dấu:

	trước	sau	trước	sau	trước	sau	trước	sau
a_p	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
b_q	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
$a_p + b_q$	-2	+2	0	0	0	0	+2	-2

Ta thấy rằng $a_p + b_q$ biến đổi bằng cách thêm vào một số bội của 4. Ta xét bảng chỉ có số $+1$, với bảng này $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2n$ và theo điều kiện n là một số lẻ, như vậy tổng này không chia hết cho 4. Bởi vì mỗi bảng khác nhận được từ bảng toàn số $+1$ bằng cách biến đổi một số phần tử và ta thấy rằng tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ đều không chia hết cho 4 và như vậy tổng này luôn khác 0. ☺

Bài tập

▷ **1.35.** *Mọi số trong các số từ 1 đến 1 000 000 được thay bằng tổng các số chữ số của nó. Với dãy số ta nhận được, lại làm như vậy và tiếp tục.* Cuối cùng nhận được một triệu số có một chữ số. Những số 1 nhiều hơn hay những số 2 nhiều hơn? (Gợi ý: Hãy sử dụng số dư của một số chia cho 9 bằng số dư của tổng các chữ số chia cho 9. Trả lời: Những số 1 nhiều hơn.)

▷ **1.36.** (*Hungari 1989*) *Tại mỗi đỉnh của một hình vuông, ta đặt một số* que diêm. Khởi đầu chỉ có một que diêm trên một đỉnh và ba đỉnh kia không có một que diêm nào. Bước tiến hành đặt diêm: Người ta cho phép lấy một số bất kì những que tại một đỉnh và đặt vào hai đỉnh bên cạnh số que mà tổng của chúng bằng hai lần số que đã lấy đi. Sau một số hữu hạn lần đặt diêm, số diêm tại bốn đỉnh hình vuông có thể là $1, 9, 8, 9$ tính theo chiều kim đồng hồ hoặc là tính theo ngược chiều kim đồng hồ được không?

▷ **1.37.** Những số $1, 2, \ldots, n$ được sắp xếp theo một thứ tự nào đó trên một đường thẳng. Ta có thể chuyển đổi hai số bất kì cạnh nhau. Chứng minh rằng một số lẻ những chuyển đổi tạo ra dãy số luôn luôn khác với dãy được sắp xếp theo thứ tự ban đầu.

1.4. Bất biến đơn điệu

Theo định nghĩa bất biến ở phần trước thì đại lượng bất biến là một tính chất của bài toán không thay đổi qua sự tác động biến đổi của hệ thống. Nhưng khi ta thay đổi hệ thống mà có đại lượng biến đổi theo một quy luật nào đó thì sao ? Ví dụ như khi hệ thống biến đổi có một đại lượng luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm một lượng cố định. Ví dụ như cấp số cộng hoặc cấp số nhân thì những số hạng sau khác số hạng trước một đại lượng cố định là công sai hoặc công bội. Từ đó người ta tính được công thức tổng quát cho các số hạng hoặc những tổng các số hạng đầu tiên. Một đại lượng luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm khi hệ thống bị tác động được gọi là *đại lượng bất biến đơn điệu*. Trong phần này ta giải những bài toán có đại lượng bất biến đơn điệu. Cũng như phần trước ta phải tìm ra đại lượng bất biến đơn điệu dưới sự thay đổi các biến của bài toán. Chính những đại lượng bất biến đơn điệu dẫn ta đến lời giải của bài toán.

Người ta thường thấy rằng một hệ thống cần đạt tới một cấu hình cụ thể nào đó mà bất biến đơn điệu không thể thay đổi mãi mãi. Trường hợp điển hình là một đại lượng của bài toán phải giảm (hoặc luôn tăng) và không bao giờ dừng lại. Trái lại, quy trình biến đổi trong điều kiện của bài toán phải dừng lại, vì bất biến đơn điệu chỉ là hữu hạn những giá trị hoặc là một giới hạn của tất cả các khả năng thay đổi. Từ đó suy ra sự vô lí và bài toán được giải. Ta xét ví dụ:

Ví dụ 1.38. *Mỗi ô trong bảng hình chữ nhật $m \times n$ được viết một số thực. Ta thực hiện biến đổi dấu một lần các số trên một hàng hoặc một cột bất kì. Chứng minh rằng bằng thao tác như trên, ta có thể đưa đến trong mọi hàng và trong mọi cột tổng các số của nó là một số không âm.*

Lời giải. Để thuận tiện ta gọi hàng hoặc cột là *một vệt*. Ta xét tổng tất cả các số trong bảng với sự thực hiện biến đổi. Tổng này sẽ tăng nếu tổng những số trong một vệt thao tác là một số âm; tổng này sẽ giảm khi tổng các số trong vệt thao tác là một số dương và tổng không thay đổi nếu tổng của vệt thao tác bằng không. Nghĩa là nếu trong bảng có một vệt với tổng các số bằng âm, thì bằng thao tác cho phép trên ta tăng tổng tất cả các số trong bảng.

Liệu tổng của tất cả các số trong bảng bằng thao tác trên có thể tăng lên vô hạn không? Không thể như vậy được vì những thao tác làm tăng tổng các số trong bảng chỉ có hữu hạn lần, nghĩa là chỉ có hữu hạn những bảng số khác nhau. Thật vậy, *mỗi số trong một ô hoặc là trùng với số ban đầu hoặc là khác với số ban đầu bằng một dấu trừ.* Vì thế số lượng những *bảng khác nhau không thể vượt quá* 2^{mn}, nghĩa là tổng của tất cả các số trong bảng chỉ có thể nhận hữu hạn những giá trị khác nhau.

Ta xét bảng số ban đầu. Ta chọn trong nó những vệt có tổng các số là âm (nếu không có vệt nào như vậy thì bài toán đã được giải). Ta thực hiện phép biến đổi trên vệt này. Trong bảng vừa nhận được lại tìm thấy vệt có tổng các số là âm thì ta lại thực hiện phép biến đổi trên nó và nhận được bảng mới và tiếp tục như vậy. Như vậy mỗi lần thực hiện phép biến đổi thì *tổng các số trong bảng tăng lên. Tổng này chỉ* có thể nhận hữu hạn giá trị, nên hoặc là tại một bước thực hiện nào đó ta nhận được bảng cần tìm, hoặc là sớm hay muộn ta cũng nhận được bảng với khả năng tổng cực đại. Bảng với tính chất như vậy ta phải tìm vì nếu còn một vệt có tổng âm nào tồn tại trong nó thì ta lại thực hiện một lần nữa phép biến đổi, khi đó tổng các số trong bảng mới này tăng lên và lớn hơn tổng cực đại của các số trong bảng, điều này vô lí. ☺

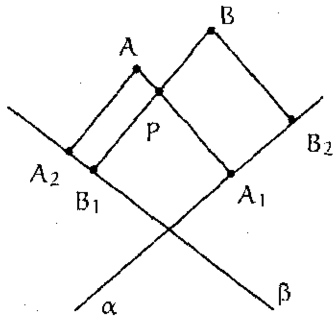
Ví dụ 1.39. *Trên mặt phẳng cho n điểm, không có ba điểm nào nằm trên một đường thẳng và n đường thẳng, không có hai đường thẳng nào song song với nhau. Chứng minh rằng từ các điểm này có thể hạ được những đường vuông góc đôi một không giao nhau lên những đường thẳng đã cho sao cho trên mỗi đường thẳng được hạ chỉ một đường vuông góc.*

Lời giải. Ta hạ các đường vuông góc từ các điểm xuống các đường thẳng đã cho một cách bất kì (mỗi điểm hạ vuông góc xuống một đường riêng). Nếu không có hai đường vuông góc nào giao nhau thì bài toán đã được giải.

Trong trường hợp ngược lại, ta xét hai đường vuông góc giao nhau AA_1 và BB_1, được hạ vuông góc từ các điểm A và B lên đường thẳng tương ứng α và β (hình 1.5). Cho P là giao điểm của hai đường thẳng vuông góc này. Bây giờ ta thay hai đường vuông góc AA_1 và BB_1 bằng AA_2 và

BB_2 là những đường vuông góc hạ xuống β và α tương ứng. Ta sẽ chứng minh rằng với sự thay đổi trên thì tổng độ dài các đường vuông góc giảm đi. Thật vậy, ta có $AA_2 < AB_1 < AP + PB_1$ và $BB_2 < BA_1 < BP + PA_1$, cộng theo vế hai bất đẳng thức trên cho kết quả $AA_2 + BB_2 < AA_1 + BB_1$.

Bây giờ ta tiến hành lí luận như bài trước, ta xét bức tranh gồm n đường thẳng và n đường vuông góc. Ta lấy hai đường vuông góc giao nhau và thực hiện biến đổi: Thay hai đường vuông góc này bằng hai đường vuông góc có tổng độ dài của chúng nhỏ hơn. Trong bức tranh nhận được, ta lại tìm hai đường vuông góc giao nhau và lại thực hiện thao tác biến đổi trên và tiếp tục như vậy. Khi đó hoặc là đến một bước nào đó ta nhận được bức tranh cần tìm với tất cả các đường vuông góc không giao nhau; hoặc là cuối cùng ta nhận được bức tranh có tổng độ dài tất cả các đường vuông góc nhỏ nhất (bởi vì tổng này chỉ có thể nhận hữu hạn các giá trị!). Đây là bức tranh mà ta cần tìm. Thật vậy nếu còn hai đường vuông góc nào đó cắt nhau thì ta lại áp dụng thao tác thay đổi một lần nữa và nhận được bức tranh với tổng độ dài các đường vuông góc nhỏ hơn nữa, vô lí!. ☺



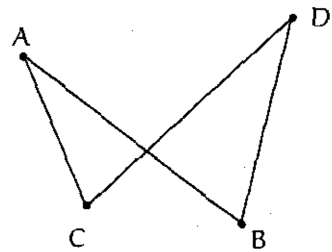
Hình 1.5

Phân tích cách giải hai bài toán trên ta thấy rằng việc giải được tiến hành theo một sơ đồ: Ta đưa vào một đại lượng nào đó (bài trước là tổng các số trong bảng, bài này là tổng độ dài các đường vuông góc) và một thao tác biến đổi mà kết quả của sự biến đổi làm đại lượng ta đưa vào được biến đổi theo một quy luật xác định (trong bài trước là tổng tăng, trong bài sau là tổng giảm). Lời giải dựa trên cơ sở đại lượng đưa vào chỉ nhận hữu hạn giá trị khác nhau. Suy ra thao tác chỉ có thể thực hiện hữu hạn lần và ta khẳng định đưa được bài toán về trạng thái cần tìm.

Như vậy, giải loại bài toán này đòi hỏi sự sáng tạo cao và nhìn bài toán dưới góc độ biến đổi với việc tìm ra những đại lượng bất biến đơn điệu (hoặc tăng, hoặc giảm hữu hạn lần). Những ví dụ sau đây là những bài toán khó nhưng được giải bằng sơ đồ ta đã vạch ra:

Ví dụ 1.40. *Chứng minh rằng* $2n$ *điểm bất kì trên mặt phẳng là đầu mút của* n *đoạn thẳng không giao nhau.*

Lời giải. Ta kẻ n đoạn thẳng với các điểm mút là các điểm đã cho (mỗi điểm chỉ được là đầu mút một đoạn thẳng). Nếu tất cả các đoạn thẳng không cắt nhau ta có lời giải của bài toán. Ngược lại, ta xét cặp đoạn thẳng cắt nhau, cho đó là AB và CD (hình 1.6). Một phép biến đổi được xác định như sau: Ta đổi hai đoạn thẳng cắt nhau AB và CD thành hai đoạn thẳng không cắt nhau AC và BD.



Hình 1.6

Ta đi tìm đại lượng bất biến đơn điệu giảm như sau: Vì tổng độ dài các đường chéo AB và CD của tứ giác lồi ABCD lớn hơn tổng độ dài hai cạnh đối diện AC và BD, như vậy ta lấy tổng độ dài n đoạn thẳng làm bất biến đơn điệu. Hiển nhiên tổng này chỉ nhận hữu hạn những giá trị (vì ta chỉ có hữu hạn cách tạo n đoạn thẳng). Lí luận hoàn toàn tương tự như các bài trước đưa đến một hệ thống n đoạn thẳng với tổng độ dài nhỏ nhất, trong hệ thống này không thể có hai đoạn thẳng giao nhau. ☺

Ví dụ 1.41. *Trên một đường tròn ta đặt* n *số. Nếu thứ tự các số* a, b, c, d *thỏa mãn* $(a-d)(b-c) > 0$*, thì hai số b và c đổi chỗ cho nhau. Chứng minh rằng sau một số bước thì trên đường tròn không còn bộ tứ nào sắp xếp như vậy.*

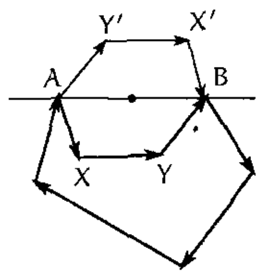
Lời giải. Phép biến đổi trong bài toán đã được cho. Thực chất là đổi chỗ hai số trên đường tròn, còn các số khác vẫn giữ nguyên. Ta phải tìm đại lượng bất biến có liên quan đến sự thay đổi hai số này. Như vậy, cho thứ tự a, b, c, d sao cho $(a - d)(b - c) > 0$, nghĩa là $ab + cd > ac + bd$. Nếu thực hiện phép biến đổi đã cho thì từ bộ tứ a, b, c, d chuyển thành bộ tứ a, c, b, d. Ta thấy rằng tổng của tích các số cạnh nhau bị giảm đi thực sự: $ab + bc + cd > ac + cb + bd$.

Hoàn toàn tự nhiên, đại lượng bất biến đơn điệu là tổng của tích các số kề nhau liên tiếp trên đường tròn. Với phép biến đổi đã cho thì đại lượng bất biến đơn điệu giảm thực sự, và vì nó chỉ có hữu hạn giá trị (tại sao?), nên phép biến đổi của ta chỉ có thể thực hiện hữu hạn lần. Tiếp tục cách giải như các bài trước dành cho bạn đọc. ☺

Những bài toán về hình học có dạng thay đổi cấu hình cũng có thể giải bằng phương pháp đại lượng bất biến.

Ví dụ 1.42. *Từ một đa giác lõm ta tiến hành thao tác như sau: Nếu đa giác nằm về một phía đối với đường thẳng* AB, *ở đây* A *và* B *hai đỉnh không liên tiếp của đa giác, thì một phần các cạnh của đa giác được chia ra bởi hai điểm* A *và* B, *được lấy đối xứng qua tâm là trung điểm của đoạn thẳng* AB. *Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần thực hiện thao tác như vậy đa giác đã cho sẽ thành đa giác lồi.*

Lời giải. Như vậy phép biến đổi đã cho đó là việc biến đổi đa giác. Đại lượng bất biến đơn điệu với phép biến đổi này là diện tích của đa giác tăng đơn điệu. Dễ thấy rằng diện tích của đa giác trong quá trình biến đổi của đa giác chỉ có thể nhận hữu hạn giá trị.



$\overrightarrow{AY'} = \overrightarrow{YB}$
$\overrightarrow{Y'X'} = \overrightarrow{XY}$
$\overrightarrow{X'B} = \overrightarrow{AX}$

Hình 1.7

Thật vậy, ta xét bộ vectơ dọc theo các cạnh của đa giác. Với một lần thao tác bộ vectơ không thay đổi, mà chỉ thay đổi thứ tự liên tiếp của các vectơ cạnh nhau (hình 1.7 minh họa một trường hợp cụ thể). Nghĩa là số lượng những đa giác nhận được thông qua thực hiện các thao trên chỉ có thể là hữu hạn. Từ đó suy ra đại lượng bất biến đơn điệu của ta chỉ nhận được hữu hạn giá trị. ☺

Ví dụ 1.43. *2000 người được chia vào các phòng của một tòa nhà 115 buồng. Mỗi phút không phải mọi người đều ở trong phòng, mà một số người đi từ phòng ít người tới phòng có nhiều người hơn. Chứng minh rằng tới một lúc nào đó tất cả mọi người đều tập trung tại một phòng.*

Lời giải. Kết luận của bài toán tưởng chừng như không tin được. Bài toán được giải nhờ tìm ra bất biến đơn điệu. Với mỗi phòng ta xét bình phương của số người trong phòng. Kí hiệu tổng các số bình phương là S. Ta chỉ ra rằng S tăng với mỗi người được chuyển đi. Thật vậy, giả sử một người đi từ phòng có n người tới phòng có m người, mà $m > n$. Khi đó những số bình phương của số người trong các phòng biến đổi từ n^2 và m^2 thành $(n-1)^2$ và $(m+1)^2$ tương ứng và các phòng khác thì không đổi. Như vậy S thay đổi như sau:

$$((n-1)^2 + (m+1)^2) - (n^2 + m^2) =$$
$$= (n^2 + m^2 - 2n + 2m + 2) - (n^2 + m^2) = 2(m - n) + 2 > 2 > 0.$$

Vậy S luôn luôn tăng.

Ta biết rằng số người là 2000 (một bất biến). Tồn tại một số hữu hạn cách chia 2000 người vào các phòng khác nhau, như vậy tồn tại hữu hạn khả năng giá trị của S. Nghĩa là S không thể tăng mãi mãi. Nhưng đến *một lúc hai phòng còn người trong đó, quy trình bài toán được thực hiện* và S sẽ tăng và quá trình này đến khi dừng lại, lúc đó tất cả mọi người đều trong một phòng. ☺

Ví dụ 1.44. *Cho bốn số* a, b, c, d *không phải tất cả bằng nhau. Khởi đầu bằng bộ* (a, b, c, d) *và lặp lại việc thay thế* (a, b, c, d) *bằng* $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. *Chứng minh rằng khi lặp lại nhiều lần việc* *thay thế trên thì ít nhất một trong bốn số sẽ trở thành vô cùng lớn.*

Lời giải. Đặt $P_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$ là bộ bốn số sau n phép lặp. Khi đó ta có $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ với $n \geq 2$. Ta không biết sử dụng bất biến này như thế nào. Nhưng ta liên tưởng tới trong hình học, hàm khoảng cách từ điểm P_n đến điểm gốc tọa độ $(0,0,0,0)$ được liên hệ với biểu thức $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$. Nếu ta chứng minh được biểu thức trên không bị chặn trên thì bài toán được giải.

Ta đi tìm mối liên hệ giữa hai bước liên tiếp P_{n+1} và P_n:

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = \\
&= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 = \\
&= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Bây giờ ta có thể dùng $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$:

$$\begin{aligned}
0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + \\
+ 2a_nb_n + 2a_nd_n + 2b_nc_n + 2c_nd_n. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Cộng (1.1) với (1.2):

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = \\
&= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \\
&\geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).
\end{aligned}$$

Từ mối quan hệ bất biến này ta đưa ra kết luận với $n \geq 2$,

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2^{n-1}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2).$$

Khoảng cách từ điểm P_n đến điểm đầu tăng vô hạn, nghĩa là ít nhất có một thành phần phải trở lên lớn bất kì. ☺

Hàm khoảng cách từ một điểm đến điểm đầu tọa độ rất quan trọng, khi nào có một dãy điểm ta phải nghĩ ngay tới hàm này.

Ví dụ 1.45. *Một thuật toán được xác định như sau:*

Bước xuất phát: (x_0, y_0) *với* $0 < x_0 < y_0$,

Bước tiếp theo: $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $\quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}$.

Tìm giới hạn của dãy (x_n, y_n).

Lời giải. Từ những giả thiết đã cho và tính chất của trung bình cộng và *trung bình nhân của hai số ta có:*

$$x_n < y_n \Longrightarrow x_{n+1} < y_{n+1}, \quad y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{y_n - x_n}{4}$$

với mọi n. Như vậy các dãy có giới hạn, vì những dãy số dương và giảm thực sự. Khi đó giới hạn của các dãy này trùng nhau và ta tìm giới hạn chung $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Tính bất biến cũng giúp ích cho việc giải bài này. Nhưng có hơi khác là không có phương pháp đối xứng giữa các biến để tìm bất biến. Tồn tại một số phương pháp xác định biểu thức biến đổi của $\dfrac{x_n}{y_n}$ hoặc $y_n - x_n$ khi biến đổi từ bước n đến $n + 1$.

a) Trường hợp xét thương:

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1} y_n}} = \sqrt{\frac{x_{n+1}}{y_n}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{x_n}{y_n}}{2}}. \tag{1.3}$$

Từ công thức này ta liên tưởng tới công thức $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$. Vì ta luôn có $0 < \dfrac{x_n}{y_n} < 1$, ta có thể đặt $\dfrac{x_n}{y_n} = \cos\alpha_n$. Khi đó (1.3) trở thành

$$\cos\alpha_{n+1} = \cos\frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_n = \frac{\alpha_0}{2^n} \Rightarrow 2^n \alpha_n = \alpha_0.$$

Điều này tương đương với

$$2^n \arccos\frac{x_n}{y_n} = \arccos\frac{x_0}{y_0}. \tag{1.4}$$

đây là đại lượng bất biến.

b) Trường hợp xét hiệu: Để tránh căn bậc hai, ta xét $y_n^2 - x_n^2$ thay vì $y_n - x_n$ và ta nhận được

$$y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 = \frac{y_n^2 - x_n^2}{4} \Rightarrow 2\sqrt{y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2} = \sqrt{y_n^2 - x_n^2}$$

nghĩa là

$$2^n\sqrt{y_n^2 - x_n^2} = \sqrt{y_0^2 - x_0^2} \tag{1.5}$$

đây là đại lượng bất biến thứ hai.

Từ (1.4) và (1.5), ta nhận được

$$\arccos\frac{x_0}{y_0} = 2^n \arccos\frac{x_n}{y_n} = 2^n \arcsin\frac{\sqrt{y_n^2 - x_n^2}}{y_n} = 2^n \arcsin\frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n y_n}.$$

Vế phải của đẳng thức trên tiến tới $\dfrac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{y}$ khi $n \to \infty$. Cuối cùng ta nhận được

$$x = y = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos\dfrac{x_0}{y_0}}.$$ ☺

Đây là một bài toán khó nếu ta giải bằng cách khác.

Ví dụ 1.46. *Mỗi số trong những số* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *là* $+1$ *hoặc* -1 *và ta có*

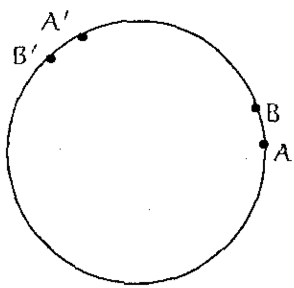
$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Chứng minh rằng n *chia hết cho* 4.

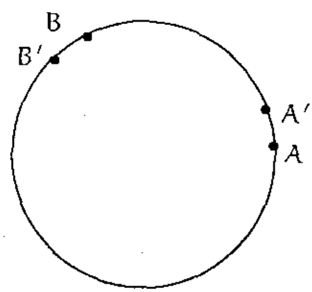
Lời giải. Đây là bài toán về lí thuyết số, nhưng ta cũng có thể giải nó bằng bất biến. Nếu ta thay a_i bằng $-a_i$, thì S không thay đổi đồng dư theo 4 vì bốn số hạng cạnh nhau theo vòng tròn thay đổi dấu của chúng (ví dụ ta thay dấu của a_1 thì bốn số hạng cạnh nhau là $a_1a_2a_3a_4$, $a_na_1a_2a_3$, $a_{n-1}a_na_1a_2$, $a_{n-2}a_{n-1}a_na_1$). Thật vậy, nếu hai trong số những số hạng là dương và hai là âm thì tổng S không thay đổi. Nếu ba số hạng trong bốn số hạng có cùng dấu thì S sẽ thay đổi bởi ± 4 (nếu có ba số hạng dương và một số hạng âm thì khi thay dấu đã mất 2 khi nó dương, mà lại còn trừ 2 khi nó âm, vậy tổng cộng mất đi 4. Tương tự, nếu ba số hạng âm và một số hạng dương thì tổng tăng lên 4). Cuối cùng tất cả bốn thừa số trong số hạng cùng dấu, thì S thay đổi ± 8 (vì mỗi lần thay dấu nếu S đã mất 4 lại mất thêm 4 khi cả bốn số hạng đều dương, trường hợp cả bốn số hạng đều âm thì ngược lại).

Khởi đầu ta có $S = 0$ điều này kéo theo $S \equiv 0 \pmod 4$. Bây giờ ta tiến hành từng bước mỗi dấu âm thay bằng dấu dương, các bước này không thay đổi $S \pmod 4$. Khi ta thay hết các dấu trừ thì vẫn còn $S \equiv 0 \pmod 4$, nhưng khi đó $S = n$, nghĩa là n chia hết cho 4. ☺

Ví dụ 1.47. *Tại một hội nghị có mời $2n$ quan khách. Mỗi vị khách được mời có nhiều nhất là $n-1$ kẻ thù. Chứng minh rằng các vị khách có thể ngồi quanh một bàn tròn sao cho không ai ngồi cạnh kẻ thù của mình.*



Hình 1.8



Hình 1.9

Lời giải. Trước tiên ta xếp các vị khách ngồi vào vị trí bất kì. Đặt H là số những đôi thù địch ngồi cạnh nhau. Ta phải tìm được thuật toán mà nó làm giảm số H khi $H > 0$. Cho (A, B) là cặp thù địch với B ngồi bên phải A (hình 1.8). Ta phải tách được cặp này ra. Điều này thực hiện được nếu có một cặp khác (A', B'), khi ta đổi chỗ B, A' (hình 1.9) và H sẽ giảm nếu (A, A') và (B, B') không là những cặp kẻ thù. Ta chỉ còn chứng minh rằng một cặp (A', B') luôn luôn tồn tại với B' ngồi bên phải của A' mà A' là bạn của A và B' là bạn của B. Ta khởi đầu từ A và đi theo chiều ngược kim đồng hồ (đi về phía phải) quanh bàn. Ta sẽ bắt gặp ít nhất n người bạn (không phải kẻ thù) của A. Về phía phải của mỗi người bạn của A có ít nhất n chỗ. Những chỗ này không thể bị chiếm hết bởi các kẻ thù của B vì B chỉ có nhiều nhất $n-1$ kẻ thù. Như vậy tồn tại người bạn A' của A mà về phía phải người này là B′, mà B′ là người bạn của B. ☺

Một số bài toán ta phải dùng đến hai bất biến đơn điệu và hai bất biến này có mối liên hệ với nhau.

Ví dụ 1.48. *Trên một mặt phẳng chia lưới vô hạn những ô vuông, một số ô vuông được tô đen. Một ô vuông trong lưới được tô màu theo nguyên tắc sau đây: Mỗi ô vuông được tô đen khi và chỉ khi ít nhất có ba ô vuông bên cạnh nó là đen trong bước tô trước đó và trường hợp khác thì tô trắng. Quy trình này được lặp lại. Chứng minh rằng cuối cùng không còn một ô đen nào trên lưới ô vuông.*

Lời giải. Ta xét tất cả hàng có chứa số ô đen. Ta xem xét *cỡ hàng* của những hàng này là khoảng cách chiều dọc giữa hàng cao nhất và hàng thấp nhất. Ta chỉ ra rằng cỡ hàng này không bao giờ tăng. Thật vậy, ta có thể chứng minh mệnh đề mạnh hơn: *Hàng bất kì không chứa ô vuông đen sẽ không thay đổi theo nguyên tắc tô màu đã cho.* Bởi vì tại mỗi bước, mỗi ô vuông trong hàng đó có nhiều nhất hai ô đen trên và dưới (vì ô bên cạnh bên phải và bên trái nó đều là trắng), như vậy nó sẽ giữ nguyên là trắng cho bước sau.

Như vậy cỡ hàng của tất cả các hàng không trắng không thể tăng được. Trường hợp gì sẽ xảy ra khi cỡ hàng của các hàng ta đang xét là một số lớn hơn 0 ? Trong trường hợp như vậy ta xét *cỡ ô đen* trong hàng phía trên nhất (nghĩa là khoảng cách từ ô vuông đen trái nhất tới ô vuông đen phải nhất). Khoảng cách này không thể tăng mà nó luôn luôn giảm: Ô vuông đen bên trái nhất sẽ có ít nhất hai ô vuông lân cận trắng (hướng phía trên và bên trái ô này) và như vậy nó phải trở thành trắng. Lí luận tương tự đúng cho ô đen bên phía phải nhất. Như vậy cỡ ô đen của hàng này giảm đến khi nó trở thành không, tại thời điểm đó hàng này toàn bộ là ô trắng, như vậy cỡ hàng của hàng tất cả không trắng cũng giảm.

Điều trên chỉ ra rằng đến một lúc tồn tại ít nhất một hàng với một vài ô đen trong đó, cỡ ô đen của những hàng như vậy sẽ giảm. Giảm cỡ hàng này không phải mãi mãi, như vậy cuối cùng ta đạt tới trạng thái không có một hàng nào chứa ô vuông đen, nghĩa là toàn bộ lưới trắng. ☺

Trong cuốn sách [9] tác giả có trình bày phương pháp giải phương trình bằng phương pháp *giảm đến vô cùng*. Người ta thường chỉ ra phương trình vô định không có nghiệm nguyên theo phương pháp sau: Người ta xây dựng một hàm của nghiệm (ví dụ như tổng các biến) mà giá trị của nó là số nguyên dương; khi đó cho một nghiệm, người ta lại xây dựng được nghiệm mới, với nghiệm này hàm số đã xây dựng nhận giá trị nguyên dương nhỏ hơn. Người ta lặp lại quá trình này, nhận được dãy *giảm vô hạn các giá trị* nguyên dương; điều này không thể được, nghĩa là đã chứng minh dãy số nguyên dương đã xây dựng không tồn tại, bài toán vô nghiệm.

Ví dụ 1.49. *Chứng minh rằng phương trình vô định sau không có nghiệm nguyên khác không*

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = u^4.$$

Lời giải. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên $(x_0, y_0, z_0, u_0) \neq (0,0,0,0)$.

Ta có $8x_0^4 + 4y_0^4 + 2z_0^4 = u_0^4$, suy ra $u_0^4 \,\vdots\, 2$, vậy $u_0 \,\vdots\, 2$. Đặt $u_0 = 2u_1$.

Ta được $4x_0^4 + 2y_0^4 + z_0^4 = 8u_1^4$, suy ra $z_0^4 \,\vdots\, 2$, vậy $z_0 \,\vdots\, 2$. Đặt $z_0 = 2z_1$.

Ta được $2x_0^4 + y_0^4 + 8z_1^4 = 4u_1^4$, suy ra $y_0^4 \,\vdots\, 2$, vậy $y_0 \,\vdots\, 2$. Đặt $y_0 = 2y_1$.

Ta được $x_0^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2u_1^4$, suy ra $x_0^4 \,\vdots\, 2$, vậy $x_0 \,\vdots\, 2$. Đặt $x_0 = 2x_1$.

Ta được $8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = u_1^4$. Vậy (x_1, y_1, z_1, u_1) cũng là nghiệm của phương trình đã cho và có dạng $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}, \frac{u_0}{2})$, quy trình này có thể lặp lại mãi đến bước k: $(\frac{x_0}{2^k}, \frac{y_0}{2^k}, \frac{z_0}{2^k}, \frac{u_0}{2^k})$.

Các số $\frac{x_0}{2^k}, \frac{y_0}{2^k}, \frac{z_0}{2^k}, \frac{u_0}{2^k}$ là các số nguyên với mọi $k \in \mathbb{N}$. Điều này chỉ xảy ra khi tất cả các biến bằng 0. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên khác 0. ☺

Ta có thể tóm tắt cách giải theo bất biến đơn điệu như sau:

1. Tìm đại lượng bất biến đơn điệu và chỉ ra nó phải thay đổi dưới tác động của một thao tác nào đó.

2. Hãy chỉ ra rằng nó chỉ có thể thay đổi hữu hạn lần; khi đó chứng minh rằng nó có thể chỉ dừng sự thay đổi tại một thời điểm nào đó.

Nếu sự chuyển đổi không được cho trước, thì ta phải xây dựng nó một cách thích hợp. Có rất nhiều bất biến đơn điệu khác nhau có thể xây dựng như: các tổng, các tích, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu và nhiều đại lượng thích hợp khác. Bạn đọc tìm tòi trong mục bài tập của tiết này với hướng dẫn ở trên.

Trước khi chuyển sang bài tập, ta xét một khía cạnh nữa của bất biến đơn điệu là dùng bất biến đơn điệu chỉ ra hệ thống ta đang xét có cấu hình như mong muốn. Trong trường hợp này bất biến đơn điệu không cần thiết điều kiện thay đổi hữu hạn lần; cũng vậy bất biến đơn điệu không cần chặt chẽ lắm, nó có thể là hằng số trong một số bước chuyển đổi. Ta chỉ cần chỉ ra bất biến đơn điệu có thể chỉ thay đổi theo một hướng nếu nó thay đổi tất cả và nó đạt tới một cấu hình từ sự thay đổi của hướng khác sinh ra.

Ví dụ 1.50. *(IMO 1986). Tại mỗi đỉnh của một ngũ giác người ta gán một số nguyên sao cho tổng của năm số là dương. Nếu ba đỉnh liên tiếp được gán các số x, y, z với $y < 0$, thì thao tác sau đây được thực hiện: Những số x, y, z được thay bởi $x + y, -y, z + y$ tương ứng. Thao tác như vậy được lặp lại tới khi ít nhất một trong năm số là số âm. Hãy xác định có một quy trình cần thiết để kết thúc trong hữu hạn bước không ?*

Lời giải. Thao tác lặp lại trong bài toán luôn luôn kết thúc. Chìa khóa của chứng minh là tìm ra một hàm giá trị nguyên dương $f(x_1, x_2, \dots, x_5)$ của những nhãn của bát giác, mà giá trị hàm này giảm khi ta thực hiện các thao tác. Bằng các dữ kiện của bài toán đã cho ta có thể lấy hàm

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - x_{i+2})^2,$$

ở đây $x_6 = x_1$, $x_7 = x_2$. Giả sử đến bước $y = x_4 < 0$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ có giá trị f_c và sau khi thao tác tại bước này $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ có giá trị f_m. Khi đó $f_m - f_c = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)x_4 < 0$, vì tổng của các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 luôn luôn là số dương. Nếu thao tác trên không dừng, ta tìm được dãy vô hạn giảm $f_0 > f_1 > f_2 > \ldots$ *những số dương không âm. Dãy số như vậy không tồn tại*, nên quá trình phải dừng lại tại một thời điểm. ☺

BÀI TẬP

▷ **1.51.** (Mỹ 1997). Cho $p_1, p_2, p_3, \ldots$ là những số nguyên tố, được sắp *theo thứ tự tăng dần và cho* x_0 *là một số thực giữa 0 và 1*. Cho số nguyên dương k, định nghĩa

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x_{k-1} = 0, \\ \left\{ \dfrac{p_k}{x_{k-1}} \right\} & \text{nếu } x_{k-1} \neq 0, \end{cases}$$

ở đây $\{x\}$ kí hiệu là phần thập phân của x. Hãy tìm và chứng minh rằng với tất cả x_0 thỏa mãn $0 < x_0 < 1$ thì dãy số $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tiến tới 0.

▷ **1.52.** (Mỹ 1993). Cho a, b là những số dương lẻ. Định nghĩa dãy (f_n) bằng cách đặt $f_1 = a, f_2 = b$ và lấy f_n với $n \geq 3$ là ước số lẻ lớn nhất của $f_{n-1} + f_{n-2}$. Chứng minh rằng f_n là hằng số với n đủ lớn và xác định giá trị này như hàm của a và b.

▷ **1.53.** Tìm tất cả nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$.

▷ **1.54.** (Paul Zeitz). Cho một đồ thị hữu hạn bất kì. Chứng minh rằng các đỉnh có thể tô mầu đen và trắng sao cho, với mỗi đỉnh, ít nhất một nửa những đỉnh lân cận của nó được tô mầu ngược lại với mầu nó có.

▷ **1.55.** Một hình tròn được chia ra làm 2000 rẻ quạt. Có 2001 con ếch trong các rẻ quạt này. Luôn luôn tồn tại hai con ếch trong cùng một rẻ quạt; cứ hai con ếch như vậy nhảy tới hai rẻ quạt bên cạnh (theo chiều ngược nhau). Chứng minh rằng tại một thời điểm nào đó ít nhất 1001 rẻ quạt đều có ếch.

1.5. Những bài toán nâng cao

Ví dụ 1.56. *Một tờ giấy được xé thành năm mảnh; một số trong số 5 mảnh nhỏ này lại được xé thành 5 mảnh nhỏ nữa, và một số trong các mảnh nhỏ này lại được xé tiếp thành 5 mảnh, ... Vậy, nếu cứ tiếp tục xé như vậy thì có khi nào ta được 2002 mảnh giấy hay không? Được 2005 mảnh giấy không?*

Lời giải. Khi ta chia tờ giấy làm 5 mảnh và sau này chia các mảnh giấy ra làm 5 mảnh nhỏ thì cứ mỗi lần số mảnh giấy tăng thêm 4. Vậy số mảnh giấy, sau mỗi lần xé thì có dạng $4k+1 (k \in \mathbb{N}^*)$, biểu thức này là bất biến trong quá trình xé giấy.

Vì $2002 \neq 4k+1$, nên không thể xé được 2002 mảnh.

$2005 = 501.4 + 1$, vậy có thể xé thành 2005 mảnh sau lần thứ 501. ☺

Ví dụ 1.57. *Trong một bảng ô vuông có 8×8 ô. Trong mỗi ô được viết một số tự nhiên. Người ta cho phép thực hiện một thao tác: Tăng một đơn vị đối với tất cả các số nằm trong những bảng ô vuông có chiều 3×3 hoặc 4×4 thuộc bảng ô vuông đã cho. Hỏi sau khi thực hiện một số thao tác như trên thì toàn bộ những số trong bảng có chia hết cho 10 không?*

Lời giải. Hiển nhiên tồn tại những bảng mà có thể thực hiện những thao tác trên. Nhưng ta chỉ ra có những bảng khi thực hiện những thao tác trên không thể cho kết quả. Vì tính chất chia hết cho 10, ta xét những số theo modulo 10. Hai bảng số ta coi như nhau khi và chỉ khi những phần tử tương ứng của nó đồng dư theo modulo 10. Với đồng nhất như vậy ta *có 10^{64} bảng khác nhau. Ta sẽ chỉ ra thao tác của chúng ta là thuận lợi* nếu một bảng nhận được từ bảng khác, thì bảng thứ hai cũng có thể nhận được từ bảng ban đầu. Điều kiện đủ là áp dụng thêm 9 lần thao tác ta đã làm. Theo phương pháp như vậy, đủ để chứng minh tồn tại bảng, mà nó không thể nhận được từ bảng toàn số không. Số lượng của những hình vuông cỡ 3×3 là 36, còn hình vuông cỡ 4×4 là 25. Vì trong mỗi hình vuông như vậy ta có thể áp dụng thao tác nhiều nhất 9 lần (sau lần thứ 9 áp dụng sẽ nhận được bảng xuất phát), số lượng chung của những bảng mà ta có thể nhận được từ bảng không, không vượt quá 10^{61}. Như vậy khẳng định đã được chứng minh. ☺

Ví dụ 1.58. *Trong một bảng ô vuông có 100×100 ô được điền dấu cộng $(+)$. Một bước thực hiện bằng cách đổi toàn bộ những dấu ở một hàng hoặc một cột nào đó sang dấu ngược lại. Có khả năng sau hữu hạn bước như trên, bảng ô vuông nhận được sẽ có đúng 1970 dấu trừ $(-)$?*

Lời giải. Giả sử có khả năng sau một số hữu hạn bước nhận được bảng có 1970 dấu trừ. Cho tại hàng thứ i ta đã đổi dấu x_i lần, còn tại cột thứ j ta đã đổi dấu y_j lần. Khi đó dấu tại ô (i, j) đã thay đổi $x_i + y_j$ lần. Suy ra tại ô này có dấu trừ $(-)$ khi và chỉ khi $x_i + y_j$ là số lẻ. Cho p là số lượng số lẻ giữa các số x_i, còn q là số lượng những số lẻ giữa các số y_j. Khi đó số lượng chung những dấu trừ trong bảng sẽ là

$$p(100 - q) + (100 - p).q = 100p + 100q - 2pq,$$

ở đây ta nhận được đẳng thức

$$100p + 100q - 2pq = 1970$$

hay là

$$(p - 50)(q - 50) = 1515 = 15.101.$$

Bởi vì 101 là một số nguyên tố, ít nhất một trong những số $p - 50$, $q - 50$ chia hết cho 101. Ta cho đó là $p - 50$ chia hết cho 101. Nhưng $-50 \le p - 50 \le 50$, nên sự chia hết $p - 50$ cho 101 chỉ xảy ra khi $p - 50 = 0$, điều này trái với bất đẳng thức $(p - 50)(q - 50) \neq 0$. ☺

Ví dụ 1.59. *Tại đỉnh* A_1 *của một đa giác đều 12 đỉnh đánh dấu trừ* $(-)$, *còn tất cả các đỉnh còn lại đánh dấu cộng* $(+)$. *Một bước thực hiện là đổi đồng thời ba dấu tại ba đỉnh liên tiếp thành dấu ngược lại. Chứng minh rằng không có khả năng sau một số hữu hạn bước thực hiện như trên sẽ nhận được* A_2 *có dấu trừ* $(-)$, *còn tất cả các đỉnh còn lại mang dấu cộng* $(+)$.

Lời giải. Ta chia các đỉnh của đa giác đều 12 cạnh ra làm 3 nhóm:

$$\{A_1, A_4, A_7, A_{10}\}, \{A_2, A_5, A_8, A_{11}\} \text{ và } \{A_3, A_6, A_9, A_{12}\}.$$

Dễ thấy khi chọn ba đỉnh liên tiếp thì mỗi đỉnh rơi vào một nhóm. Suy ra sau mỗi lần đổi dấu ở ba đỉnh liên tiếp, số lượng dấu trừ trong mỗi nhóm tăng lên hoặc giảm đi 1. Từ đây suy ra số lượng dấu trừ trong nhóm hai và nhóm ba luôn luôn cùng tính chẵn lẻ. Thật vậy, khi bắt đầu chơi thì số lượng dấu trừ bằng 0. Sau lần đổi thứ nhất có 1 dấu trừ, sau lần đổi thứ hai mỗi nhóm có 0 hoặc 2, sau lần đổi thứ ba là 1 hoặc 3, sau lần đổi thứ tư là 0, 2 hoặc 4 và vân vân.

Trường hợp riêng không thể có sự phân bổ trong nhóm hai có một dấu trừ mà các nhóm khác không có. ☺

Ví dụ 1.60. *Cho bảng số (hình 1.10) có tính chất sau: Tổng của những phần tử trong mỗi hàng, mỗi cột hoặc đường chéo chia hết cho 2. Một thao tác cho phép chuyển một đơn vị ở một ô sang ô bên cạnh (ô bên cạnh của một ô là ô có chung cạnh). Có thể từ hình 1.10 nhận được hình* ***1.11*** *sao cho tất cả phần tử ở các ô xung quanh là số chẵn không?*

a_1	a_2	a_3
a_4	2	a_5
a_6	a_7	a_8

Hình 1.10

b_1	b_2	b_3
b_4	1	b_5
b_6	b_7	b_8

Hình 1.11

Lời giải. Từ giả thiết bài toán suy ra cặp số a_2, a_7 và a_4, a_5 là cùng tính chẵn lẻ. Bởi vì $a_1 + a_4 + a_6$ và $a_6 + a_7 + a_8$ chia hết cho 2 suy ra $a_1 + a_4 + 2a_6 + a_7 + a_8$ chia hết cho 2, nghĩa là $a_1 + a_4 + a_7 + a_8$ chia hết cho 2. Cũng từ điều kiện đã cho ta có $a_1 + 2 + a_8$ chia hết cho 2, nghĩa là $a_1 + a_8$ chia hết cho 2. Khi đó $a_4 + a_7$ chia hết cho 2 và suy ra a_4 và a_7 cùng tính chẵn lẻ. Như vậy ta đi đến kết luận là a_2, a_4, a_5 và a_7 cùng tính chẵn lẻ.

Nếu a_2, a_4, a_5 và a_7 là những số chẵn, thì a_1, a_3, a_6 và a_8 hoặc tất cả đều chẵn hoặc tất cả đều lẻ. Khi đó số lượng của những số chẵn là 5 hoặc là 9.

Nếu a_2, a_4, a_5 và a_7 là những số lẻ, thì a_1, a_3, a_6 và a_8 hoặc tất cả đều chẵn hoặc tất cả đều lẻ. Khi đó số lượng của những số chẵn là 1 hoặc là 5.

Như vậy, số lượng những số chẵn trong bảng là một số lẻ (1,5, hoặc 9).

Ta xét sự biến đổi trên những ô bên cạnh một ô. Nếu x và y là những số ở hai ô bên cạnh nhau, thì ta có thao tác $x, y \to x - 1, y + 1$. Ta xét tất cả các trường hợp chẵn lẻ cho x và y: (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, lẻ). Sau khi thực hiện thao tác ta nhận được tương ứng (lẻ, lẻ), (lẻ, chẵn), (chẵn, chẵn).

Như vậy, thao tác biến đổi không thay đổi tính chẵn của số lượng số chẵn (vì thay đổi số lượng 0 hoặc 2). Trong hình 1.10 có số lẻ những số chẵn, còn trong hình 1.11 có 8 số chẵn, nghĩa là số chẵn. Suy ra bảng như vậy không nhận được khi thực hiện các thao tác trên. ☺

Ví dụ 1.61. *Cho một bảng hình vuông kẻ ô* 10×10 *và trong mỗi ô ta ghi theo thứ tự một số tự nhiên gồm từ số* 1 *đến số* 100*: Hàng thứ nhất ghi từ* 1 *đến* 10*; hàng thứ hai ghi từ* 11 *đến* 20*; ... Chứng minh rằng tổng* S *của* 10 *số bất kì của bảng, trong đó không có bất kì hai số nào thuộc cùng một hàng và không có bất kì hai số nào thuộc cùng một cột, là một số không đổi. Tìm số* S.

Lời giải. Ta kí hiệu số hạng của tổng S:

- Thuộc hàng 1 là a_1;
- Thuộc hàng 2 là $10 + a_2$;
- ...
- Thuộc hàng 10 là $90 + a_{10}$.

Trong đó, các số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_{10}$ bao gồm giữa 1 và 10, và những số này đôi một khác nhau, vì nếu ta có $a_1 = a_2$ thì hai số a_1 và $10 + a_2$ phải nằm trong cùng một cột của bảng. Ta có:

$$\begin{aligned}
S &= a_1 + (10 + a_2) + (20 + a_3) + \cdots + (90 + a_{10}) \\
&= (10 + 20 + \cdots + 90) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) \\
&= 450 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}).
\end{aligned}$$

Bởi vì các số $a_1, a_2, ..., a_{10}$ đôi một khác nhau và nhận giá trị nguyên từ 1 đến 10, mỗi một số trong các số tự nhiên từ 1 đến 10 có mặt trong tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ với tư cách là một số hạng, cũng chỉ có một lần, do đó

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.$$

Như vậy $S = 450 + 55 = 505$ là đại lượng bất biến đối với mọi cách chọn tổng các số trong bảng. ☺

Ví dụ 1.62. *Cho khối lập phương tạo bởi 27 khối lập phương nhỏ bằng nhau. Trong mỗi khối lập phương nhỏ có chứa một số $+1$ hoặc -1. (Hai khối nhỏ gọi là cạnh nhau nếu chúng có chung một mặt). Ta gọi "mặt cắt" của khối lập phương là tất cả những khối lập phương nhỏ cạnh nhau và nằm trong một "mặt phẳng". Có thể thay đổi dấu đồng thời trong hai mặt cắt có chung khối lập phương nhỏ, nhưng không thay đổi dấu những khối lập phương nhỏ chung.*

Ban đầu trong tất cả các khối nhỏ có chứa số $+1$. Có thể sau một số bước thay đổi dấu như trên thì các khối nhỏ ở đỉnh của khối lập phương mang -1, còn những khối nhỏ còn lại đều mang $+1$ được không?

Lời giải. Ta đi xác định sự thay đổi số lượng của -1 trong khối lập phương nhỏ trong khối lập phương với một bước biến đổi bất kì. Trong hai mặt cắt những dấu được thay đổi có số lượng 12 số. Nếu n trong chúng là -1, còn $12-n$ là $+1$, khi đó sau khi biến đổi ta có n số $+1$ và $(12-n)$ số -1, nghĩa là số lượng của -1 được thay đổi là $12-n-n=2(6-n)$, đây là một số chẵn. Suy ra tại mỗi bước biến đổi tính chẵn lẻ của số lượng của -1 giữ nguyên. Ban đầu số lượng số -1 là 27, còn ta muốn còn 8 (trên các đỉnh của khối lập phương). Hiển nhiên điều này không thể xảy ra. ☺

Ví dụ 1.63. *Cho khối lập phượng bao gồm 27 khối lập phương nhỏ bằng nhau. Trong những khối lập phương nhỏ của khối lập phương chứa những số $+1$. Một bước biến đổi ta có thể thêm cùng một số vào hai khối lập phương nhỏ bên cạnh nhau (hai khối nhỏ có chung mặt). Từ khối lập phương đã cho có thể nhận được khối lập phương sao cho*

a) Trong tất cả khối lập phương nhỏ có 0, còn khối nhỏ ở trọng tâm có -1;

b) Trong tất cả khối lập phương nhỏ có 0, còn khối nhỏ ở trọng tâm $+1$?

Lời giải. a) Có thể nhận được khối như vậy, bạn đọc tìm một phương án.

b) Ta cố định một khối nhỏ và gọi nó là khối trắng, những khối nhỏ cạnh nó là những khối đen, bên cạnh những khối đen sẽ là những khối nhỏ trắng và vân vân. Khi đó mỗi khối nhỏ sẽ hoặc là trắng hoặc là đen, mỗi khối trắng có khối nhỏ bên cạnh là đen và ngược lại. Cho P_t là tổng những số trong các khối nhỏ trắng, P_d là tổng các số trong các khối nhỏ đen. Biểu thức $P=P_t-P_d$ không thay đổi với thao tác thay đổi đã cho, vì ta cộng thêm cùng một số vào hai khối nhỏ cạnh nhau (nghĩa là P_t và P_d đều gia tăng như nhau). Dễ tính được giá trị ban đầu của P là 1, nếu khối nhỏ ở tâm là đen ($P=14-13$). Khối lập phương như đòi hỏi b) lại có $P=0-1=-1$. Đây là điều vô lí, nghĩa là không thể có khối lập phương như điều kiện b). ☺

Những bài toán tìm số bước thực hiện để đạt kết quả là rất khó và không có phương pháp chung nào. Ta xét một ví dụ đơn giản sau đây:

Ví dụ 1.64. *Trên bảng viết một dãy gồm* N *số theo một thứ tự bất kì, mỗi số đó hoặc là* -1 *hoặc là* $+1$. *Một phép biến đổi cho phép ta thay đổi dấu các số trong một đoạn con của dãy. Tìm số bước thực hiện ít nhất có thể để chuyển từ dãy ban đầu về dãy chỉ toàn số* $+1$.

Lời giải. Đại lượng bất biến đơn điệu của bài này là số lượng các cặp số trong dãy cạnh nhau khác dấu. Khi ta thực hiện phép biến đổi thay dấu một đoạn thì đại lượng bất biến chỉ có thể thay đổi không lớn hơn 2.

Ta sẽ chứng minh rằng từ bộ số $-1, +1, -1, +1, \ldots$ để nhận được bộ số $+1, +1, +1, \ldots$ phải thực hiện với $[\frac{N+1}{2}]$ bước (ở đây $[x]$ kí hiệu là phần nguyên của x). Ta xét hai trường hợp số N chẵn và số N lẻ.

Giả sử $N = 2k$, nghĩa là $[\frac{N+1}{2}] = k$. Khi đó đại lượng bất biến đơn điệu ban đầu là $2k - 1$, còn cuối cùng bằng không. Nhưng với $k - 1$ bước thực hiện sẽ không đạt kết quả.

Giả sử $N = 2k + 1$, nghĩa là $[\frac{N+1}{2}] = k + 1$. Trong trường hợp này đại lượng bất biến đơn điệu ban đầu là $2k$, vì thế sau $k - 1$ bước thực hiện thì từ trạng thái ban đầu không thể có dãy toàn số 1. Ta sẽ chứng minh rằng sau k bước thực hiện phải đạt được trạng thái mong muốn. Thật vậy, ta chú ý rằng sau một lần thực hiện phép biến đổi đại lượng bất biến đơn điệu thay đổi không quá một đơn vị.

Chỉ còn chứng minh rằng với $[\frac{N+1}{2}]$ bước thực hiện thì từ bộ số ban đầu sẽ nhận được bộ số chỉ có 1. Ta đưa vào trong bộ số ban đầu tất cả các nhóm có chứa -1 số lượng không lớn hơn $[\frac{N+1}{2}]$. Tiếp tục ta thay đổi dấu ở các số trong những nhóm này. ☺

BÀI TẬP

▷ **1.65.** Trên mặt phẳng cho N điểm, từ chúng có thể nối với nhau thành những đoạn thẳng. Biết rằng từ một điểm bất kì không xuất phát quá 11 đoạn thẳng. Chứng minh rằng những điểm này có thể tô bằng 4 màu sao cho những đoạn thẳng có hai đầu mút cùng màu không lớn hơn N.

▷ **1.66.** Cho một số điểm màu đỏ và một số điểm màu xanh. Một số trong chúng nối với nhau thành đoạn thẳng. Ta nói rằng một điểm là *đặc biệt*, nếu hơn một nửa các điểm còn lại nối với nó có màu khác với màu của nó. Nếu tồn tại điểm đặc biệt thì ta chọn điểm đặc biệt này và tô lên nó màu khác. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn bước không còn một điểm đặc biệt nào.

▷ **1.67.** Trên một đường tròn ta viết n số tự nhiên. Giữa hai số cạnh nhau ta viết ước số chung lớn nhất. Sau đó ta xóa những số cũ đi, những số còn lại ta lại thực hiện thao tác trên. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần thực hiện thao tác thì tất cả các số trên đường tròn đều bằng nhau.

▷ **1.68.** Trên bảng ta viết 10 số: Một số 1 và chín số khác 0. Ta thực hiện chọn hai số bất kì và thay vào vị trí của chúng bằng trung bình cộng hai số này. Số nào là số nhỏ nhất có thể đạt được tại vị trí của số 1 sau một dãy phép thực hiện trên.

▷ **1.69.** Một số em thiếu nhi đứng thành một vòng tròn và quay mặt vào trong, mỗi em đều có một số kẹo. Theo hiệu lệnh đồng thời, mỗi em đưa nửa số kẹo của mình cho bạn ở bên phải (nếu số kẹo của một em nào đó là lẻ, thì người phụ trách đưa thêm cho em đó một cái kẹo). Hiệu lệnh chơi như vậy lặp đi lặp lại nhiều lần. Chứng minh rằng đến một lúc, tất cả các em trong cuộc chơi có số kẹo bằng nhau.

▷ **1.70.** Trong một thư viện trên giá sách có N tập sách tra cứu tiếng Anh. Một người máy mỗi một phút làm những công việc sau: Chọn một tập bất kì, mà nó không ở đúng vị trí và đặt nó vào đúng vị trí (nghĩa là nếu số tập là k, thì người máy đặt tập này vào vị trí k trên giá sách). Chứng minh rằng sau một thời gian tất cả các tập sách sẽ được sắp đúng vị trí.

▷ **1.71.** Mỗi mặt của một khối lập phương có viết số trên đó và tất cả các số đều không giống nhau. Mỗi số được thay bằng trung bình cộng của những số trong bốn mặt bên cạnh. Có khả năng nhận được các số ban đầu trên mặt đối diện sau ít nhất một lần thay đổi như trên không ?

▷ **1.72.** Trên mỗi ô của bảng kẻ ô vuông 8×8 có ghi một số, số này là tích của chỉ số hàng và chỉ số cột của ô ấy. Lấy ra 8 ô bất kì và trong các ô ấy không có hai ô nào nằm trong cùng một hàng hay cùng một cột. Chứng minh rằng tích của các số nằm trong các ô này là không đổi. Tính tích đó (Đáp số: $(8!)^2 = 1625702400$).

▷ **1.73.** Cho một bộ số lượng 2^k các số $+1$ và -1. Từ đó ta nhận bộ số mới bằng cách: Mỗi số nhân với số tiếp theo, số cuối cùng nhân với số đầu tiên. Với bộ số mới lại lặp lại thao tác trên và tiếp tục. Chứng minh rằng cuối cùng ta nhận được chỉ có số $+1$.

1.6. Chuyên đề về hàm bất biến

Ta tổng quát hóa những cách giải loại bài toán này bằng cách đưa ra những khái niệm những trạng thái tương đương và những hàm bất biến.

1.6.1. Định nghĩa hàm bất biến trên trạng thái

Những phần trước ta đã xét những bài toán giải bằng các đại lượng bất biến có dạng: Cho một tập hợp M (những phần tử của nó là những trạng thái) và một quy tắc biến đổi cho phép ta chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác; câu hỏi thường đặt ra là cho một trạng thái α có thể bằng một số bước thực hiện quy tắc biến đổi đến một trạng thái đã cho β không ? Nói cách khác, cho hai trạng thái α và β, có thể biến đổi từ trạng thái α đến trạng thái β sau một số hữu hạn lần thực hiện quy tắc đã cho không?

Hiển nhiên, ta có tính chất sau đây: Nếu một trạng thái α có thể tiến tới trạng thái β và từ trạng thái β có thể tiến tới trạng thái γ, thì từ α có thể tiến tới γ, tính chất này gọi là *tính bắc cầu*.

Nếu từ một trạng thái α có thể tiến tới trạng thái β và ngược lại từ trạng thái β có thể tiến tới trạng thái α, thì tính chất này gọi là *tính đối xứng*.

Không phải mỗi cặp hai trạng thái nào cũng có tính đối xứng, vì vậy ta hạn chế chỉ xét các tập trạng thái có tính đối xứng.

Ta công nhận rằng *từ trạng thái α có thể* tiến tới chính mình, tính chất này gọi là *tính phản xạ*.

Định nghĩa 1.1. Ta nói rằng hai trạng thái α và β là *tương đương*, nếu theo quy tắc đã cho từ trạng thái α có thể tiến tới β và ngược lại. Hai trạng thái tương đương α và β, kí hiệu là : $\alpha \sim \beta$.

Dễ thấy rằng sự tương đương của những trạng thái có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Những lớp trạng thái tương đương sẽ phân chia tập hợp trạng thái M thành các tập con $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$, mà trong mỗi tập con mọi phần tử trạng thái của nó đều tương đương với nhau: Nếu $\alpha \in M_i$ và $\beta \in M_i$, thì $\alpha \sim \beta$. Nếu $\alpha \in M_i$ và $\beta \in M_j$ $(i \neq j)$ thì α và β không tương đương. Mỗi hợp con M_i ta gọi là *một quỹ đạo*. Một không gian trạng thái của bài toán là hợp những quỹ đạo khác nhau.

Định nghĩa 1.2. Một hàm số f xác định trên tập trạng thái M gọi là *hàm bất biến* hoặc đại lượng bất biến, nếu trên những trạng thái tương đương nó nhận cùng một giá trị, nghĩa là

$$\text{nếu } \alpha \sim \beta \text{ thì } f(\alpha) = f(\beta). \tag{1.6}$$

Từ $f(\alpha) = f(\beta)$ không thể nói gì về sự tương đương của hai trạng thái α và β. Ta đưa vào một loại hàm bất biến mới:

Định nghĩa 1.3. Một hàm bất biến f được gọi là *bất biến vạn năng*, nếu hai trạng thái không tương đương nhau thì nó nhận những giá trị khác nhau:

$$\textit{nếu } \alpha \not\sim \beta \textit{ thì } f(\alpha) \neq f(\beta).$$

Bất biến vạn năng trên một quỹ đạo nhận chỉ một giá trị. Vì thế với bất biến vạn năng

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta).$$

Như vậy, với bất biến vạn năng, cho một cặp trạng thái bất kì luôn cho phép ta kết luận chúng có tương đương hay là không.

Nhưng làm thế nào để kiểm tra một hàm bất biến là vạn năng? Không có phương pháp chung nhưng có một tiêu chuẩn đơn giản sau đây:

Định lí 1.1. *Nếu*

a) tồn tại ℓ trạng thái $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_\ell$ sao cho mọi trạng thái $\alpha \in M$ tương đương với một trong chúng và

b) hàm bất biến f nhận hữu hạn ℓ giá trị khác nhau,

thì f là hàm bất biến vạn năng và những trạng thái $\delta_i, \delta_j (i \neq j)$ đôi một không tương đương với nhau.

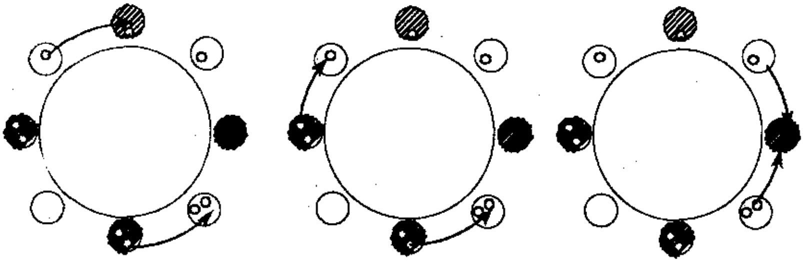
Từ điều kiện a) cho ta tồn tại không quá ℓ quỹ đạo. Từ điều kiện b) cho ta tồn tại không nhỏ hơn ℓ quỹ đạo. Suy ra tồn tại ℓ quỹ đạo. Trên cơ sở của b) lại cho ta bất biến f chỉ nhận ℓ giá trị khác nhau, nghĩa là f là bất biến vạn năng. Cuối cùng từ a) cho ta những trạng thái $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_\ell$ nằm ở các quỹ đạo khác nhau, do đó đôi một không tương đương với nhau.

Ta lấy ví dụ cụ thể:

Ví dụ 1.74. *Người ta trồng n cây xung quanh một hồ hình tròn. Lúc đầu mỗi cây đậu một con cò, nhưng người ta thấy rằng cứ như ai đó bắt nhịp: Mỗi lần có hai chú cò trên hai cây nào đó cùng bay lên và đậu sang cây bên cạnh, một con bay theo chiều kim đồng hồ của bờ hồ, còn con kia lại bay ngược chiều kim đồng hồ. Từ trạng thái ban đầu μ: Mỗi con cò ở một cây, theo nhịp thay đổi chuyển chỗ của các chú cò nói trên, đến một lúc nào đó tới trạng thái ν: Tất cả các chú cò đậu dồn trên một cây nào đó được không?*

Lời giải. Ta có thể giải bài toán bằng cách tìm các hàm bất biến theo cách khác nhau:

Cách 1: Nếu $n = 2m$. Ta tô màu một cây xanh cách một cây trắng. Khi đó mỗi lần đổi chỗ số cò trong cây trắng hoặc là không thay đổi như hình



(a) (b) (c)

Hình 1.12

1.12(a), hoặc là tăng lên 2 như hình 1.12(b), hoặc là giảm đi 2 như hình 1.12(c). Với một trạng thái bất kì α của những con cò ta kí hiệu $\delta(\alpha)$ là số con cò đậu ở những cây màu trắng. Ta xét hàm $p(\alpha)$ như sau:

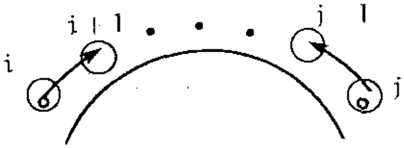
$$p(\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \delta(\alpha) \text{ là số chẵn }, \\ 1 \text{ nếu } \delta(\alpha) \text{ là số lẻ }. \end{cases}$$

Theo những nhận xét ở trên thì hàm số p có số chẵn những con cò trên cây trắng, là không đổi và $p(\nu) = 0$.

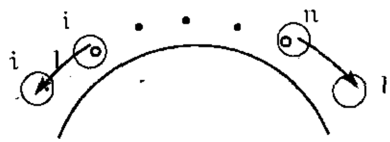
Nếu $m = 2k + 1$, thì $\frac{n}{2}$ là một số lẻ. Nghĩa là, với trạng thái ngay từ đầu μ ta có $p(\mu) = 1$. Từ $p(\mu) \neq p(\nu)$ suy ra hai trạng thái μ và ν không tương đương. Như vậy trong trường hợp ($n = 2m, m = 2k + 1$) từ trạng thái μ không thể tiến tới trạng thái ν.

Nhưng còn nếu $m = 2k$ thì sao? Khi đó $\frac{n}{2}$ là số chẵn và $p(\mu) = p(\nu) = 0$. Trong trường hợp này hàm bất biến p không đưa ra kết luận được là có tương đương giữa hai trạng thái μ và ν hay không.

Như vậy với hàm này không đưa đến kết luận. Một chú ý là nếu f là hàm bất biến thì từ $f(\alpha) = f(\beta)$ không suy ra điều gì cả: Khi đó α và β có thể tương đương và cũng có thể không tương đương. Nếu $f(\alpha) \neq f(\beta)$ thì trạng thái α và β không tương đương (điều này suy ra từ định nghĩa). Ta có thể thiết lập hàm bất biến theo kiểu khác.



Hình 1.13



Hình 1.14

Cách 2: Ta đánh số các cây từ 1 đến n. Với trạng thái α các con cò đỗ trên cây bất kì, ta kí hiệu $a_k(\alpha)$ là số cò tại cây thứ k với trạng thái này. Bây giờ ta xét hàm

$$q(\alpha) = 1.a_1(\alpha) + 2.a_2(\alpha) + 3.a_3(\alpha) + \cdots + n.a_n(\alpha). \qquad (1.7)$$

Hàm $q(\alpha)$ có phải là hàm bất biến?

Một trạng thái thay đổi bất kì được mô tả trên hình 1.13 và tổng (1.7) chỉ ảnh hưởng đến 4 thừa số sau:

$$\cdots + i.a_i(\alpha) + (i+1).a_{i+1}(\alpha) + (j-1).a_{j-1}(\alpha) + j.a_j(\alpha) + \cdots \qquad (1.8)$$

Với việc thay đổi trạng thái trong hình 1.13 thì tổng (1.8) trở thành

$$\cdots + i.[a_i(\alpha)-1] + (i+1).[a_{i+1}(\alpha)+1] + (j-1).[a_{j-1}(\alpha)+1] + j.[a_j(\alpha)-1] + \cdots$$

Dễ kiểm tra thấy rằng tổng vừa thay đổi và tổng trước khi thay đổi ở trên là trùng nhau. Phải chăng $q(\alpha)$ là hàm bất biến? Điều này không đúng, vì còn ba khả năng nữa như các hình 1.14, 1.15, 1.16. Bằng cách xét tổng như trên thì hình 1.14, $q(\alpha)$ giảm đi n, còn hình 1.15, $q(\alpha)$ tăng lên n. Trường hợp cuối cùng hình 1.16, $q(\alpha)$ không thay đổi. Như vậy, giá trị của $q(\alpha)$ có thay đổi nhưng chỉ là số n. Suy ra, định nghĩa một hàm $r(\alpha)$ giá trị của nó là các số dư của phép chia $q(\alpha)$ cho n, là một hàm bất biến. Từ trạng thái ν tất cả con cò đậu trên một cây ℓ thì

$$\begin{cases} a_1(\nu) = a_2(\nu) = \ldots = a_{\ell-1}(\nu) = a_{\ell+1}(\nu) = \ldots = a_n(\nu) = 0, \\ a_\ell(\nu) = n. \end{cases}$$

Nghĩa là $q(\nu) = \ell.n$ và $r(\nu) = 0$ (với bất kì ℓ và n). Mặt khác, $a_1(\mu)$

Hình 1.15

Hình 1.16

$a_2(\mu) = \dots = a_n(\mu) = 1$. Vậy

$$q(\mu) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nếu $n = 2m$, thì $q(\mu) = n.m + m$ và $r(\mu) = m \neq 0$. Suy ra với n là số chẵn thì ta nhận được $r(\nu) \neq r(\mu)$, do đó μ và ν không tương đương.

Nếu $n = 2m + 1$, thì $q(\mu) = n(m+1)$ và $r(\mu) = 0$. Như vậy trong trường hợp n là số lẻ ta lại có $r(\nu) = r(\mu)$. Trường hợp này ta lại không có kết luận gì về sự tương đương của hai trạng thái ν và μ.

Ta dùng định lí 1.1 để chứng minh rằng $r(\alpha)$ là bất biến vạn năng. Thật vậy, kí hiệu δ_i là trạng thái sau: Một con cò ở trên cây thứ i, còn những con còn lại đậu ở cây thứ n. Vậy δ_n được hiểu là trạng thái tất cả các chú cò đều trên cây thứ n.

Ta sẽ chỉ ra rằng một trạng thái bất kì đều tương đương với một trong những trạng thái $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Thật vậy, cho α là trạng thái bất kì của các chú cò trên cây. Ta cố gắng dồn tất cả các chú cò về cây thứ n. Theo phép biến đổi như bài đã ra ta tiến hành như sau: Con cò ở cây số 1 bay theo hướng về cây số n, đồng thời lúc đó con số 2 bay theo chiều ngược lại. Sau đó lại dồn con số hai bay về cây thứ n và con đậu trên cây số 3 bay theo chiều ngược lại, ... cứ tiếp tục như vậy cho đến con cò đậu ở cây thứ $(n-1)$. Khi dồn chú cò thứ $(n-1)$ về cây thứ n thì con cò trên cây thứ n sẽ bay ngược lại đến một cây thứ i nào đó ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Điều này có nghĩa là $\alpha \sim \delta_i$. Ta tính $r(\delta_i)$. Với $i \neq n$:

$$\begin{cases} a_1(\delta_i) = a_2(\delta_i) = \dots = a_{i-1}(\delta_i) = a_{i+1}(\delta_i) = \dots = a_{n-1}(\delta_i) = 0, \\ a_i(\delta_i) = 1, \\ a_n(\delta_i) = n-1. \end{cases}$$

Suy ra, $q(\delta_i) = i.1 + n.(n-1)$ và $r(\delta_i) = i$. Ngoài ra $q(\delta_n) = n.n$ và $r(\delta_n) = 0$. Như vậy r nhận n hữu hạn giá trị khác nhau.

Theo định lí 1.1 bất biến r là vạn năng và *các trạng thái* $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ đôi một không tương đương. Vì r là vạn năng nên

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow r(\alpha) = r(\beta).$$

Phần trước ta đã chứng minh được

$$r(\mu) = r(\nu) \Leftrightarrow n \text{ là số lẻ.}$$

Suy ra $\mu \sim \nu$ khi và chỉ khi n là số lẻ. Như vậy bài toán được giải hoàn toàn. ☺

Về những hàm bất biến, bạn đọc có thể giải những bài tập sau:

1. Chứng minh rằng nếu f là hàm bất biến và g là một hàm số bất kì, thì hàm $h(\alpha) = g(f(\alpha))$ cũng là hàm bất biến.

2. Chứng minh rằng nếu h là bất biến, f là hàm vạn năng, thì tồn tại một hàm số g sao cho đẳng thức sau đúng $h(\alpha) = g(f(\alpha))$.

3. Từ hàm vạn năng r của lời giải trong ví dụ 1.74 ta định nghĩa hai hàm bất biến nữa: $f(\alpha) = [r(\alpha)]^2$ và $g(\alpha) = [r(\alpha) - 2]^2$. Chứng minh rằng hàm bất biến f là vạn năng, còn hàm g không vạn năng.

4. Cho hàm f bất biến vạn năng. Với điều kiện gì của hàm số g để cho hàm h được xác định theo công thức $h(\alpha) = g(f(\alpha))$ là một hàm bất biến vạn năng ?

1.6.2. Hệ thống bất biến đầy đủ

Nhiều khi đáng lẽ đi tìm và sử dụng hàm bất biến vạn năng, người ta đi tìm hệ bất biến đầy đủ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.4. Một hệ những bất biến $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ được gọi là *đầy đủ*, nếu những đẳng thức

$$\begin{cases} f_1(\alpha) = f_1(\beta), \\ f_2(\alpha) = f_2(\beta), \\ \quad\quad \dots \\ f_k(\alpha) = f_k(\beta). \end{cases} \tag{1.9}$$

đồng thời đúng khi và chỉ khi trạng thái α và β tương đương.

Từ định nghĩa ta thấy ngay là hệ những bất biến đầy đủ là tổng quát hóa khái niệm bất biến vạn năng: Nếu f là bất biến vạn năng, thì hệ $\{f\}$ gồm một bất biến là hệ đầy đủ.

Ví dụ 1.75. *Trên bảng kẻ ô cỡ 2×2 ta viết những số nguyên. Được phép thay đổi:*

1. Trên một cột bất kì, một số trong nó được cộng thêm 2, những số còn trong cột trừ đi 2;

2. Trên một hàng bất kì, một số trong nó được cộng thêm 3, những số còn trong hàng trừ đi 3;

Những bảng tương đương của nó là như thế nào?

Lời giải. Ta xét ba hàm: với một bảng bất kì $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kí hiệu

$p(\alpha) = a + b + c + d,$

$q(\alpha) =$ số dư của số $a + b$ chia cho 2,

$r(\alpha) =$ số dư của số $a + c$ chia cho 3.

Những hàm p, q, r trên là hàm bất biến. Không khó kiểm tra một bảng α

bất kì tương đương với bảng sau

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & q(\alpha) \\ r(\alpha) & p(\alpha) - q(\alpha) - r(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Thật vậy, từ các đẳng thức

$$\begin{cases} p(\alpha) & = p(\beta), \\ q(\alpha) & = q(\beta), \\ r(\alpha) & = r(\beta), \end{cases} \tag{1.10}$$

khẳng định những bảng α và β cùng tương đương với một bảng, nghĩa là chúng tương đương với nhau.

Ngược lại, sự tương đương của hai bảng α và β kéo theo các đẳng thức trong (1.10), vì thế p, q, r là bất biến. Như vậy $\{p, q, r\}$ là hệ bất biến đầy đủ. ☺

Ta có thể dễ dàng giải những bài tập sau:

1. Chứng minh rằng nếu $f_1, \ldots, f_k$ là những hàm bất biến và g là một hàm số k đối số, thì hàm

$$h(\alpha) = g(f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_k(\alpha)) \tag{1.11}$$

   là một hàm bất biến.

2. Chứng minh rằng nếu h là một hàm bất biến và $\{f_1, \ldots, f_k\}$ là hệ bất biến đầy đủ, thì tồn tại một hàm g có k đối số sao cho thỏa mãn (1.11).

3. Cho M là tập hợp những cặp số thực (x, y). Xét phép chuyển đổi duy nhất $(x, y) \to (y, x)$. Đặt

$$\begin{cases} f_1(x, y) & = xy, \\ f_2(x, y) & = x + y. \end{cases}$$

   Chứng minh rằng hệ $\{f_1, f_2\}$ là một hệ bất biến đầy đủ.

4. Cho M là tập hợp những cặp số thực (x, y, z). Xét phép chuyển đổi $(x, y, z) \to (y, x, z)$ và $(x, y, z) \to (x, z, y)$. Đặt

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) & = xyz, \\ f_2(x, y, z) & = xy + yz + zx, \\ f_2(x, y, z) & = x + y + z. \end{cases}$$

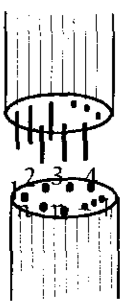
Chứng minh rằng hệ $\{f_1, f_2, f_3\}$ là một hệ bất biến đầy đủ.

Bạn đọc có thể tổng quát hóa bài tập cuối cùng này. Những bài tập này là những vấn đề sâu sắc trong đại số những đa thức. Những hàm này không những có những tính chất bất biến mà còn nhiều ích lợi khác trong những lớp đa thức, vấn đề này được đề cập trong chương tiếp theo đây.

Để kết thúc chương này các bạn thử giải những bài tập sau đây nhờ các kiến thức ta đa thu nhận được trong phần chuyên đề.

BÀI TẬP

▷ **1.76.** Một công tắc máy vi tính gồm hai phần như hình 1.17, một bên có n lỗ cắm và một bên gồm n đầu cắm. Có thể đánh số từ 1 đến n những lỗ cắm sao cho với mỗi lần nối công tắc một trong những đầu cắm rơi vào lỗ có đúng số của mình được không?



Hình 1.17

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(a)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

(b)

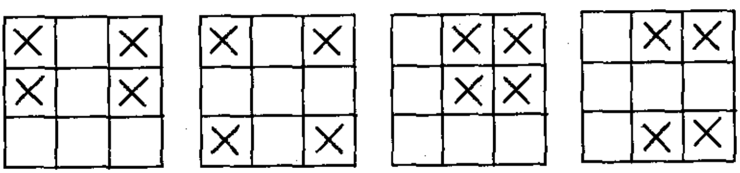
Hình 1.18

▷ **1.77.** Trò chơi đẩy các số trong bảng 16 ô với một ô trống và 15 ô có các số như hình vẽ 1.18. *Được phép một lần đẩy số của một ô sang bên cạnh ô còn trống.* Có thể thực hiện liên tiếp các phép đẩy từ trạng thái hình 1.18(a) sang trạng thái 1.18(b) được không? Hãy tìm hàm bất biến *vạn năng của trò chơi này.*

▷ **1.78.** *Một bảng có nhiều ô cỡ* 11×11 được bỏ đi 22 ô sao cho trên mỗi cột và trên mỗi hàng được bỏ đi đúng 2 ô. Hai vị trí những ô được bỏ đi tương đương nhau nếu ta chuyển đổi một số bất kì các cột giữa chúng và những hàng giữa chúng, thì từ vị trí này nhận được vị trí kia. Có bao nhiêu vị trí không tương đương của những ô được bỏ đi?

▷ **1.79.** Tất cả các số nguyên từ 1 đến $2n$ được viết thành một hàng. Ta thực hiện với mỗi số cộng vào với số là vị trí của số đó. Chứng minh rằng trong những tổng nhận được bằng cách trên có hai số chia $2n$ cho cùng một số dư.

▷ **1.80.** Với những điều kiện ở ví dụ 1.74, nhưng hai chú cò cùng bay lên để chuyển sang cây khác theo *hai chiều khác nhau hoặc cùng một chiều* đều được. Hãy tính hàm bất biến vạn năng của bài toán này.



Hình 1.19

▷ **1.81.** Trong bảng cỡ 3×3 ô, người ta đặt vào các ô các số $+1$ hoặc -1. Một *phép biến đổi là thay các dấu ở các ô theo một hàng hoặc một cột.* Chứng minh rằng

a) Số quỹ đạo là 16;

b) Mỗi quỹ đạo đều chứa 32 phần tử;

c) Tích của tất cả các số trong hình vuông bất kì cỡ 2×2 trong bảng là bất biến;

d) Tích của tất cả các số được đánh dấu trong bốn hình vuông như hình 1.19, tạo thành một hệ bất biến đầy đủ.

Hãy giải bài toán này trong các phần trên theo một thứ tự bất kì; dễ thấy các phần đều trợ giúp lẫn nhau.

▷ **1.82.** Vectơ (a, b), ở đây a, b là những số nguyên, được biến đổi thành một trong những vectơ $(a + b, b)$, $(a - b, b)$, (b, a). Hãy tìm hàm bất biến vạn năng của bài toán này.

▷ **1.83.** Cặp vectơ $(a, b), (c, d)$, ở đây a, b, c, d là những số nguyên, được phép biến đổi thành các cặp vectơ $(a + b, b), (c + d, d)$; $(a - b, b), (c - d, d)$; $(b, a), (d, c)$. Hãy tính hệ bất biến đầy đủ của bài toán này.

CHƯƠNG 2
ĐA THỨC ĐỐI XỨNG HAI BIẾN

Chương này đưa ra khái niệm về đa thức hai biến, xét một loại đa thức đặc biệt là có giá trị không đổi khi ta thay đổi các biến cho nhau. Sau đó là xét một định lí cơ bản về đa thức đối xứng. Định lí được chứng minh chi tiết và dựa trên định lí này ta ứng dụng giải hàng loạt bài tập trong đại số như: Giải hệ phương trình, phân tích đa thức ra thừa số, chứng minh bất đẳng thức, ...

2.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

Cho b là một số (có thể là số thực hoặc số phức). Một hàm số $\varphi(x, y) = ax^{\ell}y^{k}$ được gọi là *một đơn thức* hai biến x, y với ℓ, k là những số nguyên không âm. Số a được gọi là *hệ số* của đơn thức và số $\ell + k$ gọi là *bậc của đơn thức* và được kí hiệu là $\deg(ax^{\ell}y^{k}) = \ell + k$.

Hai đơn thức được gọi là *đồng dạng*, nếu chúng chỉ khác nhau về hệ số. Đơn thức $\varphi = ax^{\ell_1}y^{k_1}$ và $\psi = bx^{\ell_2}y^{k_2}$ là đồng dạng, nếu chúng phụ thuộc vào cùng số biến và $\ell_1 = \ell_2$, $k_1 = k_2$.

Dễ thấy rằng tổng của hai đơn thức đồng dạng là một đơn thức, vì khi đó $ax^{\ell}y^k + bx^{\ell}y^k = (a+b)x^{\ell}y^k$. Tích của hai đơn thức đồng dạng cũng tạo ra một đơn thức như $ax^{\ell}y^k.bx^{\ell}y^k = (a.b)x^{2\ell}y^{2k}$. Nhưng tổng hai đơn thức không đồng dạng có thể không phải là một đơn thức.

Định nghĩa 2.1. Một hàm hai biến $P(x,y)$ gọi là *đa thức hai biến*, nếu nó có thể biểu diễn như một tổng hữu hạn những đơn thức hai biến.

Như vậy một đa thức hai biến có thể sắp xếp bậc theo một biến nào đó từ lớn đến nhỏ gọi là *sắp xếp theo bậc biến*. Ví dụ $P(x,y) = x^4 + x^3y^2 + x^2y^4 + 2xy^2$ được sắp xếp theo bậc của biến x.

Ta sẽ không xét tất cả những đa thức hai biến tổng quát mà chỉ giới hạn cho một lớp đa thức có tính đối xứng theo bậc của các biến.

Định nghĩa 2.2. Một đa thức hai biến $P(x,y)$ gọi là *đối xứng*, nếu đa thức này không thay đổi khi chuyển đổi x bằng y và y bằng x, nghĩa là $P(x,y) = P(y,x)$.

Ta có thể chỉ ra hàng loạt các ví dụ về đa thức đối xứng hai biến như :

1) $P(x,y) = x^2y + xy^2$ là đa thức đối xứng vì khi ta thay x bằng y và y bằng x đa thức vẫn như cũ.

2) $P(x,y) = (x+y)^3 + x^5 + y^5$ là đa thức đối xứng.

3) $P(x,y) = x^3 - 5y^2$ không phải là đa thức đối xứng, vì thay x bằng y và y bằng x, $P(y,x) = y^3 - 5x^2 \neq P(x,y) = x^3 - 5y^2$.

Từ định nghĩa đa thức đối xứng hai biến ta suy ra phép cộng, phép trừ, tích hai đa thức đối xứng cũng là một đa thức đối xứng. Phép lấy lũy thừa của một đa thức đối xứng cũng là một đa thức đối xứng. Nghĩa là nếu $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là hai đa thức đối xứng, thì $P(x,y) \pm Q(x,y)$,

$P(x, y).Q(x, y)$ và $(P(x, y))^n$ cũng là đa thức đối xứng, ở đây n là một số tự nhiên dương.

Mệnh đề 2.1. *Một đa thức đối xứng hai biến* x *và* y *là tổng của những đơn thức dạng* ax^ky^k *và đa thức đối xứng dạng* $b(x^ny^m + x^my^n)$ *với* a, b *là những hệ số và những số tự nhiên* $0 \leq m < n$, $0 \leq k$.

Chứng minh. Cho $P(x, y)$ là đa thức đối xứng, theo định nghĩa $P(x, y) = P(y, x)$ và $P(x, y)$ bao gồm hữu hạn những đơn thức. Những đơn thức này có bậc khác nhau. Ta xét hai trường hợp:

1) Đơn thức của đa thức có các biến đồng bậc nghĩa là ax^ky^k với k là một số nguyên dương. Khi đó ta chuyển đổi biến số thì đơn thức này không đổi.

2) Đơn thức có dạng bx^ny^m với n, m là số nguyên dương và $n > m \geq 0$, b là một hệ số. Khi ta chuyển đổi hai biến số cho nhau thì đơn thức trên trở thành bx^my^n, hai đơn thức này hoàn toàn khác nhau. Để đảm bảo $P(x, y) = P(y, x)$ thì hai đơn thức này phải có mặt trong tổng của đa thức, nghĩa là đa thức $(bx^ny^m + bx^my^n)$ là một số hạng của đa thức. Nếu trái lại thì đa thức đã cho không phải là đối xứng, vô lí.

Tóm lại, một đa thức đối xứng bao gồm tổng những đơn thức với các biến cùng bậc và tổng của hai đơn thức cùng hệ số với các bậc ở biến chuyển đổi cho nhau. ☺

Ta có thể lấy ví dụ: $P(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 - x^3y^3 + 3x^2y^3 + y^5$ là đa thức đối xứng hai biến x, y, ở đây ta chú ý hai đơn thức $x^5 = x^5y^0$ và $y^5 = x^0y^5$ và tổng $3(x^3y^2 + x^2y^3)$.

Ta xét hai đa thức đối xứng hai biến đơn giản nhất $P(x, y) = x + y$ và $Q(x, y) = xy$. Những đa thức này được gọi là *những đa thức đối xứng cơ sở* hai biến và được kí hiệu đặc biệt

$$\delta_1 = x + y, \quad \delta_2 = xy.$$

Phần sau đây ta sẽ chỉ ra rằng đa thức đối xứng hai biến đều có thể biểu diễn như một đa thức hai biến với các biến là những đa thức cơ sở trên.

2.2. Định lí cơ bản cho đa thức hai biến

Như ta đã biết tổng, hiệu, tích, lũy thừa những đa thức đối xứng đều cho ta một đa thức đối xứng. Như vậy từ hai đa thức đối xứng cơ sở ta có thể tạo ra những đa thức đối xứng tùy ý. Ví dụ:

1) $Q(\delta_1, \delta_2) = \delta_1^3 - \delta_1\delta_2 = (x+y)^3 - (x+y)xy = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = P(x, y)$ là một đa thức đối xứng hai biến theo x và y.

2) $Q(\delta_1, \delta_2) = 2\delta_2^2 - \delta_1^2\delta_2 = -x^3y - xy^3 = P(x, y)$ là một đa thức đối xứng hai biến theo x và y.

Như vậy ta có thể nói rằng trong một đa thức hai biến δ_1 và δ_2, khi thay $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$ vào đa thức này sẽ nhận được một đa thức đối xứng hai biến x và y.

Câu hỏi ngược lại là: Một đa thức đối xứng hai biến x và y có biểu diễn được như một đa thức của hai biến $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$ được không ? Ví dụ: Xét đa thức đối xứng bất kì như $x^4y + xy^4$, ta biến đổi

$$\begin{aligned} x^4y + xy^4 &= xy(x^3 + y^3) = xy(x + y)(x^2 - xy + y^2) = \\ &= xy(x + y)((x + y)^2 - 3xy) = \delta_2\delta_1(\delta_1^2 - 3\delta_2). \end{aligned}$$

Ví dụ khác: Với đa thức là tổng lũy thừa của từng biến $S_n = x^n + y^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Dễ thấy

$$\begin{aligned} S_1 &= x + y = \delta_1; \\ S_2 &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \delta_1^2 - 2\delta_2; \\ S_3 &= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \\ &= (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = \delta_1(\delta_1^2 - 3\delta_2); \\ S_4 &= x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\delta_1^2 - 2\delta_2)^2 - 2\delta_2^2. \end{aligned}$$

Để dẫn đến định lí cơ bản của đa thức ta xét mệnh đề.

Mệnh đề 2.2. *Mọi tổng lũy thừa hai biến* $S_n = x^n + y^n, n = 1, 2, 3, \ldots$ *có công thức truy hồi*

$$S_n = \delta_1 S_{n-1} - \delta_2 S_{n-2}, n = 3, 4, \ldots \tag{2.1}$$

và S_n *có thể biểu diễn dưới dạng đa thức của hai biến* δ_1 *và* δ_2.

Chứng minh. 1) Ta có thể tìm được công thức (2.1) như sau: Ta xét hai đẳng thức $S_{n-1} = x^{n-1} + y^{n-1}$ và $\delta_1 = x + y$. Ta nhân hai đẳng thức theo vế và nhận được

$$\begin{aligned}\delta_1 S_{n-1} &= (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + xy^{n-1} + x^{n-1}y + y^n = \\ &= x^n + y^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2}) = S_n + \delta_2 S_{n-2}.\end{aligned}$$

2) Ta chứng minh bằng quy nạp S_n biểu diễn như đa thức của δ_1 và δ_2. Thật vậy, như tính toán ở phần trước thì $S_1 = \delta_1$ và $S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2$ đều biểu diễn như đa thức qua hai biến δ_1 và δ_2. Giả sử S_{n-1} và S_{n-2} cũng biểu diễn như đa thức của hai biến δ_1 và δ_2. Ta phải chứng minh rằng S_n cũng biểu diễn như đa thức hai biến trên. Điều này là hiển nhiên vì theo công thức (2.1) và giả thiết quy nạp suy ra điều cần chứng minh. Như vậy điều khẳng định đúng với mọi số tự nhiên dương. ☺

Công thức (2.1) không những rất quan trọng trong mệnh đề trên mà còn là một công thức tính S_n biểu diễn theo δ_1 và δ_2. Từ công thức (2.1) ta có thể tính lần lượt các S_n:

$$\begin{aligned}S_3 &= \delta_1 S_2 - \delta_2 S_1 = \delta_1(\delta_1^2 - 2\delta_2) - \delta_2\delta_1 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2;\\ S_4 &= \delta_1 S_3 - \delta_2 S_2 = \delta_1(\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2) - \delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) = \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2;\\ S_5 &= \delta_1 S_4 - \delta_2 S_3 = \delta_1(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) - \delta_2(\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2) = \\ &= \delta_1^5 - 5\delta_1^3\delta_2 + 5\delta_1\delta_2^2.\end{aligned}$$

và ta có thể tiếp tục tìm được những tổng lũy thừa tiếp theo. Bạn đọc có thể tự tính lấy những biểu thức tiếp theo. Vì tính quan trọng cho ứng dụng sau này, chúng tôi liệt kê 10 tổng lũy thừa đầu tiên: Biết rằng $S_n = x^n + y^n$

và $\delta_1 = x + y$, $\delta_2 = xy$.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \delta_1;\\
S_2 &= \delta_1^2 - 2\delta_2;\\
S_3 &= \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2;\\
S_4 &= \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2;\\
S_5 &= \delta_1^5 - 5\delta_1^3\delta_2 + 5\delta_1\delta_2^2;\\
S_6 &= \delta_1^6 - 6\delta_1^4\delta_2 + 9\delta_1^2\delta_2^2 - 2\delta_2^3;\\
S_7 &= \delta_1^7 - 7\delta_1^5\delta_2 + 14\delta_1^3\delta_2^2 - 7\delta_1\delta_2^3;\\
S_8 &= \delta_1^8 - 8\delta_1^6\delta_2 + 20\delta_1^4\delta_2^2 - 16\delta_1^2\delta_2^3 + 2\delta_2^4;\\
S_9 &= \delta_1^9 - 9\delta_1^7\delta_2 + 27\delta_1^5\delta_2^2 - 30\delta_1^3\delta_2^3 + 9\delta_1\delta_2^4;\\
S_{10} &= \delta_1^{10} - 10\delta_1^8\delta_2 + 35\delta_1^6\delta_2^2 - 50\delta_1^4\delta_2^3 + 25\delta_1^2\delta_2^4 - 2\delta_2^5;
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Định lí 2.1. *Một đa thức đối xứng bất kì của các biến x và y có thể biểu diễn dưới dạng một đa thức của $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$.*

Chứng minh. Một đa thức đối xứng hai biến bất kì đều là tổng của hai dạng đơn và đa thức như mệnh đề 2.1.

1) Trường hợp những số hạng của đa thức là đơn thức đồng bậc với các biến: Đơn thức có dạng ax^ky^k. Dễ thấy

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\delta_2^k.$$

Như vậy, số hạng này biểu diễn theo δ_1 và δ_2.

2) Trường hợp những số hạng của đa thức có dạng $b(x^ny^m + x^my^n)$. Ta giả thiết rằng $n > m$, khi đó

$$b(x^ny^m + x^my^n) = bx^my^m(y^{n-m} + x^{n-m}) = b\delta_2^m S_{n-m}.$$

theo mệnh đề 2.2, S_{n-m} có thể biểu diễn như một đa thức của δ_1 và δ_2. Suy ra số hạng trên cũng biểu diễn như một đa thức của δ_1 và δ_2.

Tóm lại, mọi số hạng của đa thức đều biểu diễn như đa thức của δ_1 và δ_2, suy ra đa thức đối xứng biểu diễn như đa thức của δ_1 và δ_2. ☺

Thông qua cách chứng minh trên ta có thể chuyển đổi mọi đa thức đối xứng thành đa thức của δ_1 và δ_2 như ví dụ sau: Xét đa thức

$$P(x,y) = x^6 + 3x^3y^2 - x^5y^5 - 2xy^4 + y^6 + 3x^2y^3 - 2x^4y.$$

Ta sắp xếp lại theo tổng những một đơn thức và hai đơn thức như trong chứng minh:

$$P(x,y) = -x^5y^5 + (x^6 + y^6) + 3(x^3y^2 + x^2y^3) - 2(xy^4 + x^4y)$$

hay

$$\begin{aligned} P(x,y) &= -x^5y^5 + (x^6 + y^6) + 3x^2y^2(x + y) - 2xy(y^3 + x^3) \\ &= -\delta_2^5 + S_6 + 3\delta_2^2\delta_1 - 2\delta_2 S_3, \end{aligned}$$

và theo công thức (2.2) ta có

$$\begin{aligned} P(x,y) &= -\delta_2^5 + S_6 + 3\delta_2^2\delta_1 - 2\delta_2 S_3 \\ &= -\delta_2^5 + (\delta_1^6 - 6\delta_1^4\delta_2 + 9\delta_1^2\delta_2^2 - 2\delta_2^3) + 3\delta_2^2\delta_1 - 2\delta_2(\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2) \\ &= \delta_1^6 - 6\delta_1^4\delta_2 - 2\delta_1^3\delta_2 + 9\delta_1^2\delta_2^2 + 9\delta_1\delta_2^2 - 2\delta_2^3 - \delta_2^5. \end{aligned}$$

2.3. Giải hệ phương trình đối xứng

Ta thường gặp hệ phương trình hai ẩn mà những vế trái của phương trình là những đa thức đối xứng hai ẩn x và y. Trong trường hợp này ta chuyển hệ phương trình thành hệ những phương trình phụ thuộc vào δ_1 và δ_2 và giải hệ phương trình mới này, thường là những hệ phương trình đơn giản hơn rất nhiều. Sau đó nhờ những giá trị của δ_1 và δ_2 ta đi tìm ẩn số x và y.

Trước khi xét những ví dụ cụ thể, ta xét định lí:

Định lí 2.2. *Cho δ_1 và δ_2 là hai số bất kì. Phương trình bậc hai*

$$z^2 - \delta_1 z + \delta_2 = 0 \tag{2.3}$$

và hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \delta_1, \\ xy = \delta_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

có mối liên hệ tương đương theo nghĩa sau:

Nếu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình bậc hai (2.3), thì hệ phương trình (2.4) có hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ y_1 = z_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = z_2, \\ y_2 = z_1 \end{cases}$$

và không có nghiệm khác; ngược lại, nếu $x = a, y = b$ là nghiệm của hệ phương trình (2.4), thì những số a và b cũng là nghiệm của phương trình bậc hai (2.3).

Chứng minh. Nếu z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình bậc hai (2.3), thì theo công thức Viét

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \delta_1, \\ z_1 z_2 = \delta_2, \end{cases} \text{ nghĩa là } \begin{cases} x_1 = z_1, \\ y_1 = z_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = z_2, \\ y_2 = z_1 \end{cases}$$

là nghiệm của hệ phương trình (2.4). Còn không có nghiệm khác nữa của hệ được suy ra từ khẳng định ngược lại.

Nếu $x = a, y = b$ là nghiệm của hệ phương trình (2.4), nghĩa là

$$\begin{cases} a + b = \delta_1, \\ ab = \delta_2. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$z^2 - \delta_1 z + \delta_2 = z^2 - (a + b)z + ab = (z - a)(z - b).$$

Điều này có nghĩa là những số a, b là nghiệm của phương trình (2.3). ☺

Ví dụ 2.1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 & = 2, \\ xy(x+y) & = 2. \end{cases}$$

Lời giải. Vế trái của những phương trình đã cho là những đa thức đối xứng đối với x và y. Ta đặt $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$. Ta sử dụng những đẳng thức trong (2.2), tìm được $x^3 + y^3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2$ và hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 & = 2, \\ \delta_1\delta_2 & = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1^3 - 6 & = 2, \\ \delta_1\delta_2 & = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1^3 & = 8, \\ \delta_1\delta_2 & = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1 & = 2, \\ \delta_2 & = 1. \end{cases}$$

Như vậy hệ phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{cases} x + y & = 2, \\ xy & = 1. \end{cases}$$

Hệ phương trình dễ dàng *giải được*, vì theo *định lí* 2.2, việc giải hệ này đưa về giải phương trình bậc hai $z^2 - 2z + 1 = 0$. Phương trình bậc hai có nghiệm bội $z = 1$ nên hệ chỉ có nghiệm $x = 1$ và $y = 1$. ☺

Ví dụ 2.2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^5 + y^5 & = 33, \\ x + y & = 3. \end{cases}$$

Lời giải. Ta sử dụng công thức (2.2) để chuyển hệ phương trình trên về hệ theo các biến δ_1 và δ_2:

$$\begin{cases} \delta_1^5 - 5\delta_1^3\delta_2 + 5\delta_1\delta_2^2 & = 33, \\ \delta_1 & = 3. \end{cases}$$

Từ đó tìm δ_2 trong phương trình bậc hai

$$15\delta_2^2 - 135\delta_2 + 210 = 0, \text{ hay là } \delta_2^2 - 9\delta_2 + 14 = 0.$$

Từ phương trình này ta tìm được hai giá trị của δ_2: $\delta_2 = 2$ và $\delta_2 = 7$. Để tìm nghiệm cho hệ phương trình ban đầu ta xét hai hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y & = 3, \\ xy & = 2. \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x + y & = 3, \\ xy & = 7. \end{cases}$$

Giải những hệ này ta nhận được (không tính nghiệm là số phức)

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

☺

Ví dụ 2.3. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y). \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy đây là hệ phương trình hai biến đối xứng và ta cũng có thể giản ước được những số hạng chung, nhưng để tìm được hết các nghiệm ta xét:

1) Nếu $x = y$, thì hệ phương trình chỉ còn $2x^3 = 14x$ (vì phương trình thứ nhất luôn là đồng nhất), từ phương trình này ta tìm được ba nghiệm sau

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \sqrt{7}, \\ y_2 = \sqrt{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\sqrt{7}, \\ y_3 = -\sqrt{7}. \end{cases}$$

2) Nếu $x = -y$, thì phương trình thứ hai trong hệ đồng nhất là 0, còn phương trình thứ nhất là $2x^3 = 38x$. Từ đó ta tìm thêm được hai nghiệm nữa

$$\begin{cases} x_4 = \sqrt{19}, \\ y_4 = -\sqrt{19}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -\sqrt{19}, \\ y_5 = \sqrt{19}. \end{cases}$$

3) Nếu $x \neq \pm y$, thì ta có thể giản ước được $x - y$ ở phương trình thứ nhất, $x + y$ ở phương trình thứ hai và nhận được hệ

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Ta biến đổi về hệ phụ thuộc vào biến δ_1 và δ_2 theo công thức (2.2)

$$\begin{cases} \delta_1^2 - \delta_2 = 19, \\ \delta_1^2 - 3\delta_2 = 7. \end{cases}$$

Từ đây ta tìm được $\delta_1^2 = 25, \delta_2 = 6$, như vậy ta có hai nghiệm

$$\begin{cases} \delta_1 = 5, \\ \delta_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_1 = -5, \\ \delta_2 = 6. \end{cases}$$

Từ hai hệ trên đưa về các phương trình bậc hai $z^2 + 5z + 6 = 0$ và $z^2 - 5z + 6 = 0$. Giải các phương trình bậc hai này ta nhận được các nghiệm

$$\begin{cases} x_6 = 2, \\ y_6 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = 3, \\ y_7 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = -2, \\ y_8 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_9 = -3, \\ y_9 = -2. \end{cases}$$ ☺

Ví dụ 2.4. *Giải hệ phương trình với* $x \neq 0, y \neq 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình đã cho là đối xứng với x, y. Ta quy đồng mẫu số hai phương trình và chuyển sang hệ có hai biến δ_1 và δ_2:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 12xy, \\ 3(x+y) = xy. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = 12\delta_2, \\ 3\delta_1 = \delta_2. \end{cases}$$

Lấy δ_2 của phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ nhất, ta nhận được $\delta_1^3 - 9\delta_1^2 - 36\delta_1 = 0$, nghĩa là $\delta_1(\delta_1^2 - 9\delta_1 - 36) = 0$. Giải phương trình này đối với δ_1 cho kết quả $\delta_1 = 0, \delta_1 = -3, \delta_1 = 12$. Ta nhận được ba hệ

$$\begin{cases} \delta_1 = 0, \\ \delta_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_1 = 12, \\ \delta_2 = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_1 = -3, \\ \delta_2 = -9. \end{cases}$$

Từ hệ phương trình thứ nhất suy ra $x = y = 0$ và đây không phải là nghiệm của hệ ban đầu. Hệ thứ hai tương ứng với phương trình bậc hai $z^2 - 12z + 36 = 0$, phương trình này có nghiệm kép nên hệ đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = 6. \end{cases}$$

Còn hệ thứ ba tương tứng với $z^2 + 3z - 9 = 0$ có hai nghiệm và khi đó hệ đã cho có thêm hai nghiệm

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}, \\ y_2 = \dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}, \\ y_3 = \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$ ☺

Ví dụ 2.5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y-z &= 7, \\ x^2+y^2-z^2 &= 37, \\ x^3+y^3-z^3 &= 1. \end{cases}$$

Lời giải. Ta coi biến thứ ba z như là độc lập (cố định lại), thì những phương trình trong hệ đã cho có vế trái là những đa thức đối xứng theo biến x, y. Theo phương pháp giải các bài trên ta đưa về hệ với các biến δ_1 và δ_2:

$$\begin{cases} \delta_1 - z &= 7, \\ \delta_1^2 - 2\delta_2 - z^2 &= 37, \\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 - z^3 &= 1. \end{cases}$$

Bằng cách lấy z ở phương trình thứ nhất và δ_2 ở phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ ba. Sau khi tính toán ta được $18\delta_1 = 342$. Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ trên $\delta_1 = 19, \delta_2 = 90, z = 12$.

Từ đây đưa về giải phương trình bậc hai và tìm được các nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = 9, \\ y_1 = 10, \\ z_1 = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 10, \\ y_2 = 9, \\ z_2 = 12. \end{cases}$$ ☺

BÀI TẬP (Một số gợi ý và trả lời các bài tập sau tại trang 105)

Hãy giải những hệ phương trình sau

▷ **2.6.** $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$ ▷ **2.7.** $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=65; \end{cases}$

▷ **2.8.** $\begin{cases} 4(x+y) = 3xy, \\ x+y+x^2+y^2 = 26; \end{cases}$

▷ **2.9.** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y = 32, \\ 12(x+y) = 7xy; \end{cases}$

▷ **2.10.** $\begin{cases} xy = 15, \\ x+y+x^2+y^2 = 42; \end{cases}$

▷ **2.11.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x+y = 12; \end{cases}$

▷ **2.12.** $\begin{cases} x^2y+y^2x = 30, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

▷ **2.13.** $\begin{cases} x+y = a, \\ x^3+y^3 = b(x^2+y^2); \end{cases}$

▷ **2.14.** $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y) = 23, \\ x^2+y^2+xy = 19; \end{cases}$

▷ **2.15.** $\begin{cases} xy(x+y) = 20, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$

▷ **2.16.** $\begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1153, \\ x^2 - xy + y^2 = 33. \end{cases}$

2.4. Đưa về hệ phương trình dạng đối xứng

Ở phần trước, ta thấy việc giải một hệ phương trình đối xứng rất thuận tiện và có quy tắc chung để giải. Nhưng không phải hệ phương trình đã cho nào cũng là hệ phương trình đối xứng. Nhưng có một số những hệ phương trình không đối xứng hoặc phương trình ta có thể đưa về hệ phương trình đối xứng để giải. Tùy vào những bài toán cụ thể đã cho, ta sẽ đặt các ẩn số phụ để đưa bài toán về hệ phương trình đối xứng đối với ẩn số mới. Ta xét một số ví dụ

Ví dụ 2.17. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{5}{2}xy, \\ x - y = \dfrac{1}{4}xy. \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy phương trình thứ hai vi phạm tính đối xứng của hệ khi thay đổi x, y cho nhau. Ta đặt $z = -y$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = -\dfrac{5}{2}xz, \\ x + z = -\dfrac{1}{4}xz. \end{cases}$$

Đây là một hệ phương trình đối xứng đối với x và z. Khi đó đặt $\delta_1 = x + z$ và $\delta_2 = xz$, *ta nhận được hệ phương trình (từ công thức (2.2))*:

$$\begin{cases} \delta_1^2 - 2\delta_2 = -\dfrac{5}{2}\delta_2, \\ \delta_1 = -\dfrac{1}{4}\delta_2. \end{cases}$$ Hệ này có hai nghiệm $\begin{cases} \delta_1 = 0, \\ \delta_2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \delta_1 = 2, \\ \delta_2 = -8. \end{cases}$

Mỗi hệ phương trình trên cho ta nghiệm đối với x và z:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ z_1 = z_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4, \\ z_3 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2, \\ z_4 = 4. \end{cases}$$

Cuối cùng ta nhận đượcnghiệm của hệ phương trình ban đầu:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ y_1 = y_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4, \\ y_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -4. \end{cases}$$ ☺

Ví dụ 2.18. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt[4]{y^3 - 1} + \sqrt{x} = 3, \\ x^2 + y^3 = 82. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình đã cho không phải là hệ phương trình đối xứng đối với x và y. Ta đặt $u = \sqrt{x}$ và $v = \sqrt[4]{y^3 - 1}$. Hệ phương trình đưa về

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + (v^4 + 1) = 82; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + v^4 = 81. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên là hệ đối xứng đối với hai biến u, v. Với $\delta_1 = u + v$ và $\delta_2 = uv$, cùng với công thức (2.2) ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} \delta_1 = 3, \\ \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 = 81. \end{cases}$$

Thay $\delta_1 = 3$ vào phương trình hai, ta nhận được $\delta_2^2 - 18\delta_2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $\delta_2 = 0$ và $\delta_2 = 18$. Ta nhận được hai nghiệm

$$\begin{cases} \delta_1 = 3, \\ \delta_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = 3, \\ \delta_2 = 18. \end{cases}$$

Hệ phương trình thứ nhất đưa về việc giải phương trình bậc hai $z^2 - 3z = 0$ và theo định lí 2.2 ta có nghiệm đối với u và v:

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 0, \\ v_2 = 3. \end{cases} \quad \text{Khi đó} \begin{cases} x_1 = 9, \\ y_1 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = \sqrt[3]{82}. \end{cases}$$

Hệ phương trình thứ hai đưa về giải phương trình bậc hai $z^2 - 3z + 18 = 0$. Phương trình này không có nghiệm thực. Do đó nghiệm thực của hệ ban đầu chỉ có hai bộ số ở trên. ☺

Ví dụ 2.19. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{y^3x} = 78. \end{cases}$$

Lời giải. Từ hệ phương trình ta thấy rằng x, y phải khác không và có cùng dấu. Nếu x, y dương thì ta đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$. Nếu x, y là số âm thì ta đặt $u = \sqrt{-x}$, $v = \sqrt{-y}$. Trong mọi trường hợp hệ đã cho đưa về:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u} = \dfrac{7}{uv} + 1, \\ u^3v + v^3u = 78. \end{cases}$$

Bằng cách đặt $\delta_1 = u + v$ và $\delta_2 = uv$ và theo công thức (2.2) ta nhận được

$$\begin{cases} \delta_1^2 - 3\delta_2 = 7 \\ \delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) = 78. \end{cases}$$

Ta thay δ_1^2 từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, nhận được $\delta_2^2 + 7\delta_2 - 78 = 0$. Ta nhận được hai nghiệm $\delta_2 = 6$ và $\delta_2 = -13$. Do đó hệ phương trình hai biến δ_1 và δ_2 có nghiệm:

$$\begin{cases} \delta_1 = 5 \\ \delta_2 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = -5 \\ \delta_2 = 6. \end{cases}$$

Bởi vì u, v là những số dương, nên $\delta_1 > 0$ và $\delta_2 > 0$, nghĩa là trong những hệ nghiệm của δ_1 và δ_2 ở trên chỉ có thệ thứ nhất là thỏa mãn. Do đó ta nhận được

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 3, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Từ đây ta tìm x, y ở hệ phương trình đã cho với cách đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ hoặc $u = \sqrt{-x}$, $v = \sqrt{-y}$, ta nhận được bốn nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -4, \\ y_3 = -9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -9, \\ y_4 = -4. \end{cases}$$ ☺

Ví dụ 2.20. *Giải phương trình*

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

Lời giải. Ta đặt $u = \sqrt[4]{x}$ và $v = \sqrt[4]{97 - x}$. Khi đó phương trình đưa về dạng $u + v = 5$. Mặt khác

$$u^4 + v^4 = x + (97 - x) = 97.$$

Như vậy ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 97. \end{cases}$$

Bằng cách đặt $\delta_1 = u + v$ và $\delta_2 = uv$, ta đưa hệ phương trình trên về dạng

$$\begin{cases} \delta_1 = 5, \\ \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 = 97. \end{cases}$$

Từ đây ta tìm δ_2 trong phương trình bậc hai

$$\delta_2^2 - 50\delta_2 + 264 = 0.$$

Giải phương trình trên có nghiệm $\delta_2 = 6$ và $\delta_2 = 44$. Ta có hai hệ

$$\begin{cases} \delta_1 = 5 \\ \delta_2 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = 5 \\ \delta_2 = 44. \end{cases}$$

Từ hệ thứ nhất ta nhận được

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 3 \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Vì $u = \sqrt[4]{x}$ nên nghiệm của phương trình ban đầu là $x_1 = 16$ và $x_2 = 81$.

Hệ phương trình thứ hai không có nghiệm thực đối với u và v. ☺

Ví dụ 2.21. *Giải phương trình*

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}.$$

Lời giải. Ta thấy rằng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Ta đặt $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$. Khi đó ta có hệ phương trình đối xứng

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{35}{12}. \end{cases}$$

Bằng cách giải hệ như mục trước ta tìm được nghiệm u và v : $u_1 = \frac{4}{5}$, $u_2 = \frac{3}{5}$. Từ đây suy ra nghiệm của phương trình ban đầu là $x_1 = \frac{5}{4}$ và $x_2 = \frac{5}{3}$. ☺

BÀI TẬP (Một số gợi ý và trả lời các bài tập sau tại trang 109)

Hãy giải những hệ phương trình sau

▷ **2.22.** $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8; \end{cases}$

▷ **2.23.** $\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^6 + y^3 = 65; \end{cases}$

▷ **2.24.** $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 4; \end{cases}$

▷ **2.25.** $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20; \end{cases}$

▷ **2.26.** $\begin{cases} x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35, \\ x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5. \end{cases}$

Giải những phương trình sau:

▷ **2.27.** $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1$;

▷ **2.28.** $\sin^3 x+\cos^3 x=1$;

▷ **2.29.** $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$;

▷ **2.30.** $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$;

▷ **2.31.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}$;

▷ **2.32.** $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$;

▷ **2.33.** $x\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$;

▷ **2.34.** $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$;

▷ **2.35.** $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$.

2.5. Chứng minh bất đẳng thức đối xứng

Phương pháp dùng đa thức đối xứng rất hiệu quả để chứng minh những bất đẳng thức. Những bất đẳng thức cần chứng minh thường có dạng $P(x,y)\geq 0$, *với* $P(x,y)$ *là một đa thức đối xứng. Một bất đẳng thức không* thay đổi khi ta thay vai trò các biến cho nhau trong bất đẳng thức thì nó được gọi là *bất đẳng thức đối xứng*. Công cụ để chứng minh bất đẳng thức đối xứng là công thức (2.2) và định lí sau đây:

Định lí 2.3. *Cho hai số thực* δ_1 *và* δ_2*. Khi đó những số* x, y *xác định bằng hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y=\delta_1, \\ xy=\delta_2 \end{cases}$$

là những số thực khi và chỉ khi δ_1 *và* δ_2 *thỏa mãn bất đẳng thức* $\delta_1^2-4\delta_2\geq 0$*. Đẳng thức* $\delta_1^2=4\delta_2$ *chỉ đạt được khi* $x=y$.

Trường hợp riêng hay sử dụng: Để cho những số x, y *xác định từ hệ phương trình trên là những số thực, không âm, điều kiện cần và đủ những số* δ_1 *và* δ_2 *thỏa mãn những bất đẳng thức sau*

$$\delta_1^2 - 4\delta_2 \geq 0, \quad \delta_1 \geq 0, \quad \delta_2 \geq 0.$$

Chứng minh. Những số x, y thỏa mãn định lí 2.2 và là nghiệm của phương trình bậc hai

$$z^2 - \delta_1 z + \delta_2 = 0,$$

nghĩa là trùng với các số

$$z_{1,2} = \frac{\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 - 4\delta_2}}{2}.$$

Vì thế để x, y là những số thực, điều kiện cần và đủ là biểu thức dưới dấu căn không âm, nghĩa là phải thỏa mãn bất đẳng thức $\delta_1^2 - 4\delta_2 \geq 0$. Đẳng thức $\delta_1^2 - 4\delta_2 = 0$ nghĩa là nghiệm của phương trình bậc hai trùng nhau $x = y$.

Nếu những số x, y không âm, thì dễ thấy $\delta_1^2 - 4\delta_2 \geq 0$, ngoài ra còn có $\delta_1 \geq 0$ và $\delta_2 \geq 0$. Ngược lại, cho những bất đẳng thức $\delta_1^2 - 4\delta_2 \geq 0$, $\delta_1 \geq 0$ và $\delta_2 \geq 0$. Như chứng minh ở phần trên, từ bất đẳng thức thứ nhất suy ra x, y là những số thực. Từ $\delta_2 \geq 0$, suy ra x, y có cùng dấu; và cuối cùng $\delta_1 \geq 0$ suy ra x, y không âm. ☺

Để ứng dụng định lí trên trong chứng minh bất đẳng thức đối xứng ta tiến hành như sau:

Giả thiết rằng cho một đa thức đối xứng $P(x, y)$ và phải chứng minh rằng với những giá trị thực bất kì của x, y (hoặc là với giá trị không âm bất kì hoặc với $x + y \geq a$, ...) đa thức này nhận giá trị không âm: $P(x, y) \geq 0$. Để chứng minh, ta chuyển đa thức $P(x, y)$ thành biểu thức phụ thuộc vào δ_1 và δ_2. Trong đa thức này ta thay δ_2 bởi δ_1 và đại lượng không âm $z = \delta_1^2 - 4\delta_2$, nghĩa là thay $\delta_2 = \frac{1}{4}(\delta_1^2 - z)$. Trong kết quả, ta nhận được đa thức hai biến δ_1 và z và cần chứng minh rằng với những giá trị không âm z và những giới hạn bắt buộc đối với δ_1 đã cho, thì đa thức cần chứng minh nhận giá trị không âm. Từ đây suy ra bất đẳng thức ban đầu đúng. Ta xét một số ví dụ:

Ví dụ 2.36. *Chứng minh rằng nếu a và b là những số thực, thỏa mãn điều kiện $a+b \geq c$, thì những bất đẳng thức sau đây đúng*

$$a^2+b^2 \geq \frac{c^2}{2}; \quad a^4+b^4 \geq \frac{c^4}{8}; \quad a^8+b^8 \geq \frac{c^8}{128}.$$

Lời giải. Trong trường hợp bài này $\delta_1 = a+b$ và $\delta_2 = ab$. Ta có

$$S_2 = a^2+b^2 = \delta_1^2 - 2\delta_2 = \delta_1^2 - 2.\frac{1}{4}(\delta_1^2 - z) = \frac{1}{2}\delta_1^2 + \frac{1}{2}z.$$

Theo định lí 2.3 thì $z \geq 0$, theo giả thiết $\delta_1 \geq c$, do đó $S_2 \geq \dfrac{1}{2}c^2$.

Hoàn toàn tương tự với $S_4 = a^4+b^4$ bằng cách tra công thức (2.2) và tìm được

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\right)^2 = \frac{1}{8}c^4.$$

Bất đẳng thức còn lại cũng làm tương tự. ☺

Ví dụ 2.37. *Chứng minh rằng nếu x và y là những số thực, thì bất đẳng thức sau đây đúng*

$$x^6+y^6 \geq x^5y + xy^5.$$

Lời giải. Đa thức đối xứng cơ sở là $\delta_1 = x+y$ và $\delta_2 = xy$ và công thức (2.2) cho S_4, S_6 và $\delta_2 = \dfrac{1}{4}(\delta_1^2 - z)$. Ta có:

$$\begin{aligned}
x^6+y^6-x^5y-xy^5 &= S_6 - \delta_2 S_4 = \\
&= (\delta_1^6 - 6\delta_1^4\delta_2 + 9\delta_1^2\delta_2^2 - 2\delta_2^3) - \delta_2(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) = \\
&\delta_1^6 - 7\delta_1^4\delta_2 + 13\delta_1^2\delta_2^2 - 4\delta_2^3 = \\
&\delta_1^6 - 7\delta_1^4.\frac{1}{4}(\delta_1^2 - z) + 13\delta_1^2.\frac{1}{16}(\delta_1^2 - z)^2 - 4.\frac{1}{64}(\delta_1^2 - z)^3 = \\
&\frac{5}{16}\delta_1^4 z + \frac{5}{8}\delta_1^2 z^2 + \frac{1}{16}z^3 \geq 0.
\end{aligned}$$

☺

Ví dụ 2.38. *Chứng minh rằng nếu* x *và* y *là những số thực dương, thì bất đẳng thức sau đây đúng*

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Lời giải. Ta đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$. Khi đó bất đẳng thức được đưa về dạng

$$\frac{u^2}{v} + \frac{v^2}{u} \geq u + v, \text{ hay } u^3 + v^3 \geq uv(u+v).$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức sau cùng với $u > 0$ và $v > 0$. Dùng $S_3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2$. Ta có

$$u^3 + v^3 - uv(u+v) = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 - \delta_1\delta_2 = \delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 = \delta_1(\delta_1^2 - 4\delta_2).$$

Theo định lí 2.3 $\delta_1 \geq 0$, $\delta_1^2 - 4\delta_2 \geq 0$, nên biểu thức sau cùng không âm, suy ra kết quả cần chứng minh. ☺

Ví dụ 2.39. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $xy(x-y)^2$ *với điều kiện* $x + y = a$.

Lời giải. Với $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$ và $\delta_2 = \frac{1}{4}(\delta_1^2 - z)$, ta có

$$\begin{aligned} xy(x-y)^2 &= \delta_2(\delta_1^2 - 4\delta_2) = \delta_2 z = \frac{1}{4}(\delta_1^2 - z)z = \\ &= \frac{1}{4}(a^2 - z)z = \frac{1}{4}(-z^2 + a^2 z) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\left(z - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \frac{a^4}{4}\right). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra biểu thức trên không thể vượt quá $\frac{a^4}{16}$ và nhận $\frac{a^4}{16}$ là giá trị lớn nhất khi $z - \frac{a^2}{2} = 0$. Nghĩa là với $\delta_1 = a$ (giả thiết đã cho) và $\delta_1^2 - 4\delta_2 = \frac{a^2}{2}$, từ đây dễ tìm được x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - az + \frac{a^2}{8} = 0$. ☺

Ví dụ 2.40. *Chứng minh rằng nếu* x *và* y *là những số dương thỏa mãn* $x + y = 1$, *thì*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Lời giải. Ta biến đổi biểu thức về dạng biểu thức của δ_1 và δ_2 (trong biến đổi biểu thức ta chú ý $\delta_1 = 1$):

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{25}{2} &= x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} - \frac{17}{2} = \\ &= (\delta_1^2 - 2\delta_2) + \frac{\delta_1^2 - 2\delta_2}{\delta_2^2} - \frac{17}{2} = 1 - 2\delta_2 + \frac{1 - 2\delta_2}{\delta_2^2} - \frac{17}{2} = \\ &= \frac{1}{2\delta_2^2}(-4\delta_2^3 - 15\delta_2^2 - 4\delta_2 + 2).\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc không âm, nghĩa là

$$4\delta_2^3 + 15\delta_2^2 + 4\delta_2 \leq 2. \tag{2.5}$$

Vì $x, y > 0$, nên $\delta_2 > 0$; *ngoài ra* $z = \delta_1^2 - 4\delta_2 \geq 0$ (*nghĩa là* $1 - 4\delta_2 \geq 0$), từ đó suy ra $\delta_2 \leq \frac{1}{4}$. Như vậy $0 < \delta_2 \leq \frac{1}{4}$. Đa thức $4\delta_2^3 + 15\delta_2^2 + 4\delta_2$ có tất cả hệ số đều dương, nó nhận giá trị lớn nhất trên khoảng $0 < \delta_2 \leq \frac{1}{4}$ là 2 tại $\delta_2 = \frac{1}{4}$. Như vậy ta đã chứng minh được (2.5). ☺

Bài tập

Một số gợi ý và trả lời các bài tập sau tại trang 114.

Chứng minh rằng với những số thực bất kì x và y:

▷ **2.41.** $5x^2 - 6xy + 5y^2 \geq 0$;

▷ **2.42.** $8(x^4 + y^4) \geq (x + y)^4$;

▷ **2.43.** $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$;

▷ **2.44.** $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Chứng minh rằng với những số không âm bất kì x và y:

▷ **2.45.** $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8 \geq 64xy(x+y)^2$;

▷ **2.46.** $\dfrac{x^3+y^3}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3$;

▷ **2.47.** $x^4+2x^3y+2xy^3+y^4 \geq 6x^2y^2$.

Chứng minh rằng với những số dương bất kì

▷ **2.48.** $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geq 2$.

2.6. Bài toán về tam thức bậc hai

Rất nhiều bài toán trong đó cần phải tính toán một số biểu thức có chứa nghiệm của phương trình bậc hai đã cho. Ta có thể giải những bài toán này bằng các đa thức đối xứng.

Ví dụ 2.49. *Cho phương trình bậc hai* $x^2+6x+10=0$. *Hãy lập phương trình bậc hai mới có nghiệm bằng bình phương những nghiệm của phương trình đã cho.*

Lời giải. Kí hiệu x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình đã cho; y_1 và y_2 là nghiệm của phương trình bậc hai ta phải tìm và giả sử b và c là những hệ số của phương trình bậc hai: $y^2+by+c=0$. Theo công thức Viète[1]

$$\delta_1 = x_1+x_2 = -6, \quad \delta_2 = x_1x_2 = 10$$

và ta đã có

$$y_1+y_2 = -b, \quad y_1y_2 = c.$$

Nhưng theo giả thiết $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$, do đó

$$b = -(y_1+y_2) = -(x_1^2+x_2^2) = -S_2 = -(\delta_1^2 - 2\delta_2) = -16,$$

$$c = y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = \delta_2^2 = 100.$$

[1]Francois Viète (1540-1603): Nhà toán học Pháp

Như vậy phương trình phải tìm có dạng

$$y^2 - 16y + 100 = 0. \qquad ☺$$

Ví dụ 2.50. *Hãy lập phương trình bậc hai* $z^2 + pz + q = 0$ *sao cho nghiệm của nó là những số*

$$z_1 = x_1^6 - 2x_2^2, \quad z_2 = x_2^6 - 2x_1^2,$$

ở đây x_1, x_2 *là nghiệm của phương trình bậc hai* $x^2 - x - 3 = 0$.

Lời giải. Theo công thức Viète

$$\delta_1 = x_1 + x_2 = 1, \quad \delta_2 = x_1 x_2 = -3.$$

Mặt khác ta lại có

$$-p = z_1 + z_2 = (x_1^6 - 2x_2^2) + (x_2^6 - 2x_1^2),$$
$$q = z_1 z_2 = (x_1^6 - 2x_2^2)(x_2^6 - 2x_1^2).$$

Ta dùng công thức (2.2) dễ dàng biểu diễn p và q theo các biến δ_1 và δ_2, sau đó thay giá trị $\delta_1 = 1$ và $\delta_2 = -3$, tính được những hệ số p và q.
Ta có

$$\begin{aligned}-p &= (x_1^6 + x_2^6) - 2(x_1^2 + x_2^2) = S_6 - 2S_2 = \\ &= (\delta_1^6 - 6\delta_1^4\delta_2 + 9\delta_1^2\delta_2^2 - 2\delta_2^3) - 2(\delta_1^2 - 2\delta_2) = \\ &= (1^6 - 6.1^4(-3) + 9.1^2(-3)^2 - 2(-3)^3) - 2(1^2 - 2(-3)) = 140;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&q = (x_1^6 - 2x_2^2)(x_2^6 - 2x_1^2) = x_1^6 x_2^6 - 2(x_1^8 + x_2^8) + 4x_1^2 x_2^2 = \\ &= \delta_2^6 - 2S_8 + 4\delta_2^2 = \delta_2^6 - 2(\delta_1^8 - 8\delta_1^6\delta_2 + 20\delta_1^4\delta_2^2 - 16\delta_1^2\delta_2^3 + 2\delta_2^4) + 4\delta_2^2 \\ &= (-3)^6 - 2(1^8 - 8.1^6(-3) + 20.1^4.(-3)^2 - 16.1^2.(-3)^3 + 2(-3)^4) + 4(-3)^2 \\ &= -833.\end{aligned}$$

Như vậy $p = -140$, $q = -833$ và phương trình bậc hai phải tìm là $z^2 - 140z - 833 = 0$. ☺

Ví dụ 2.51. *Cho* x_1 *và* x_2 *là nghiệm của phương trình bậc hai* $x^2 + px + q = 0$. *Hãy tính những giá trị của biểu thức* $x_1^k + x_2^k$ *với* $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$.

Lời giải. Theo công thức Viète ta có $\delta_1 = x_1 + x_2 = -p, \delta_2 = x_1 x_2 = q$. Theo các công thức ở (2.2) có

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 = S_1 = -p;\\
&x_1^2 + x_2^2 = S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2 = p^2 - 2q;\\
&x_1^3 + x_2^3 = S_3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = -p^3 + 3pq;\\
&x_1^4 + x_2^4 = S_4 = \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2;\\
&x_1^5 + x_2^5 = S_5 = \delta_1^5 - 5\delta_1^3\delta_2 + 5\delta_1\delta_2^2 = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2.
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
&x_1^{-1} + x_2^{-1} = \frac{1}{x_1x_2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{\delta_2}S_1 = -\frac{1}{q}p;\\
&x_1^{-2} + x_2^{-2} = \frac{1}{x_1^2x_2^2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{\delta_2^2}S_2 = -\frac{1}{q^2}(p^2 - 2q);\\
&x_1^{-3} + x_2^{-3} = \frac{1}{x_1^3x_2^3}(x_1^3 + x_2^3) = \frac{1}{\delta_2^3}S_3 = \frac{1}{q^3}(-p^3 + 3pq);\\
&x_1^{-4} + x_2^{-4} = \frac{1}{x_1^4x_2^4}(x_1^4 + x_2^4) = \frac{1}{\delta_2^4}S_4 = \frac{1}{q^4}(p^4 - 4p^2q + 2q^2);\\
&x_1^{-5} + x_2^{-5} = \frac{1}{x_1^5x_2^5}(x_1^5 + x_2^5) = \frac{1}{\delta_2^5}S_5 = \frac{1}{q^5}(-p^5 + 5p^3q - 5pq^2).
\end{aligned}
$$

☺

Ví dụ 2.52. *Chứng minh rằng nếu* x_1 *và* x_2 *là những nghiệm của phương trình bậc hai* $x^2 + px + q = 0$ *với các hệ số nguyên* p *và* q, *thì với số tự nhiên khác 0 bất kì* n, *số* $x_1^n + x_2^n$ *là số nguyên.*

Lời giải. Ta có $\delta_1 = x_1 + x_2 = -p, \delta_2 = x_1x_2 = q$. Theo công thức trong mệnh đề 2.2 ta viết lại:

$$x_1^n + x_2^n = -p(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - q(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}).$$

Ta dùng công thức này để chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 1, 2$ ta có

$$x_1^1 + x_2^1 = x_1 + x_2 = \delta_1 = -p \in \mathbb{Z},$$
$$x_1^2 + x_2^2 = S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2 = p^2 - 2q \in \mathbb{Z}.$$

Giả sử S_{n-1} và S_{n-2} là những số nguyên ($n \geq 3$), thì theo công thức ở trên ta suy ra $S_n = x_1^n + x_2^n$ cũng là số nguyên. Suy ra S_n là số nguyên với mọi n. ☺

Ví dụ 2.53. *Chứng minh rằng tất cả những số x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 5$ và $xy + yz + zx = 8$, nằm trong khoảng $\left[1, \frac{7}{3}\right]$.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh số z nằm trong khoảng $\left[1, \frac{7}{3}\right]$, còn các số khác hoàn toàn tương tự. Từ hai đẳng thức ta tính được $\delta_1 = x + y = 5 - z$, $\delta_2 = xy = 8 - z(x + y) = 8 - z(5 - z) = z^2 - 5z + 8$. Suy ra x, y là nghiệm của phương trình

$$u^2 - (5 - z)u + z^2 - 5z + 8 = 0.$$

Vì x, y là những số thực nên biệt số của phương trình phải không âm:

$$(5 - z)^2 - 4(z^2 - 5z + 8) \geq 0.$$

Ta có thể viết phương trình cuối cùng dưới dạng $(z - 1)(3z - 7) \leq 0$ và tìm được $1 \leq z \leq \frac{7}{3}$. ☺

BÀI TẬP (Một số gợi ý và trả lời bài tập sau tại trang 115)

▷ **2.54.** Lập phương trình bậc hai mà các nghiệm của nó là lũy thừa bậc ba của các nghiệm của phương trình $x^2 + 6x + 10 = 0$.

▷ **2.55.** Lập phương trình bậc hai mà các nghiệm của nó là lũy thừa bậc mười của các nghiệm của phương trình $x^2 + x - 3 = 0$.

▷ **2.56.** Lập phương trình bậc hai mà các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^5 + x_2^5 = 31, x_1 + x_2 = 1$.

▷ **2.57.** Với giá trị thực nào của a thì tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 - (a-2)x - a - 1 = 0$ nhận giá trị nhỏ nhất?

▷ **2.58.** Chứng minh rằng nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 6x + 1 = 0$, thì tổng $x_1^n + x_2^n$ với n là số tự nhiên bất kì không chia hết cho 5.

▷ **2.59.** Cho $x^2 + px + q = 0$ là phương trình bậc hai, nghiệm α, β của nó là những số dương. Hãy biểu diễn $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ theo những hệ số của phương trình.

2.7. Phân tích đa thức đối xứng ra thừa số

Ta có thể phân tích ra thừa số những đa thức đối xứng bậc cao bằng cách chuyển thành các đa thức các biến δ_1 và δ_2. Các bước được tiến hành:

1. Chuyển đa thức đối xứng thành các đa thức của δ_1 và δ_2 và ta phân tích đa thức này ra thừa số.
2. Ta phân tích đa thức theo bậc của δ_2, thường là nhỏ hơn bậc của đa thức ban đầu.
3. Thay giá trị của $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$ vào biểu thức và biến đổi đưa về những tích của những đa thức bậc hai hoặc ba theo x, y và từ đây ta tính nghiệm của từng thừa số và phân tích tiếp.

Ta lấy ví dụ các đa thức bậc bốn:

Ví dụ 2.60. *Hãy phân tích đa thức ra thừa số:*

$$P(x,y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4.$$

Lời giải. Ta có

$P(x,y) = 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 110x^2y^2 = 10S_4 - 27\delta_2 S_2 - 110\delta_2^2.$

Theo công thức (2.2) ta tìm được

$$P(x,y) = 10\delta_1^4 - 67\delta_1^2\delta_2 - 36\delta_2^2.$$

Ta coi đa thức này là đa thức bậc hai theo biến δ_2, thì với kiến thức tam thức bậc hai ta dễ dàng phân tích ra thừa số. Giải phương trình đa thức đối với δ_2 ta có các nghiệm: $\delta_2 = -2\delta_1^2$ và $\delta_2 = \dfrac{5}{36}\delta_1^2$, vậy

$$P(x,y) = -36(\delta_2 + 2\delta_1^2)(\delta_2 - \frac{5}{36}\delta_1^2) = (2\delta_1^2 + \delta_2)(5\delta_1^2 - 36\delta_2).$$

Thay các giá trị của δ_1 và δ_2 ta có

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (2(x+y)^2 + xy)(5(x+y)^2 - 36xy) = \\ &= (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 26xy + 5y^2). \end{aligned}$$

Mỗi thừa số lại là tam thức bậc hai nên ta lại lần lượt phân tích các đa thức này. Ví dụ xem $2x^2 + 5xy + 2y^2$ như tam thức bậc hai của biến x, ta sẽ có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}y, x = -2y$ và vì thế

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2(x + \frac{1}{2}y)(x + 2y) = (2x + y)(x + 2y).$$

Tương tự ta cũng có

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 = (x - 5y)(5x - y).$$

Cuối cùng ta nhận được

$$P(x,y) = (2x + y)(x + 2y)(x - 5y)(5x - y).$$ ☺

Ví dụ 2.61. *Hãy phân tích đa thức ra thừa số:*

$$P(x,y) = 6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4.$$

Lời giải. Ta biểu diễn đa thức đối xứng $P(x,y)$ qua δ_1 và δ_2:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 6(x^4 + y^4) - 11xy(x^2 + y^2) - 18x^2y^2 \\ &= 6S_4 - 11\delta_2 S_2 - 18\delta_2^2 \\ &= 6\delta_1^4 - 35\delta_1^2\delta_2 + 16\delta_2^2. \end{aligned}$$

Ta coi đa thức này là tam thức bậc hai đối với biến δ_2. Giải ra ta có nghiệm $\delta_2 = 2\delta_1^2$ và $\delta_2 = \dfrac{3}{16}\delta_1^2$ và đa thức được phân tích ra thừa số như sau:

$$P(x,y) = 16(\delta_2 - 2\delta_1^2)(\delta_2 - \frac{3}{16}\delta_1^2) = (2\delta_1^2 - \delta_2)(3\delta_1^2 - 16\delta_2).$$

Từ đây trở về đa thức ban đầu

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (2(x+y)^2 - xy)(3(x+y)^2 - 16xy) = \\ &= (2x^2 + 3xy + 2y^2)(3x^2 - 10xy + 3y^2). \end{aligned}$$

Thừa số thứ nhất có nghiệm là số phức nên không phân tích được thành tích các đa thức có hệ số là thực, nên ta giữ nguyên. Thừa số thứ hai dễ dàng phân tích thành $(x - 3y)(3x - y)$. Cuối cùng ta nhận được

$$P(x,y) = (2x^2 + 3xy + 2y^2)(x - 3y)3x - y).$$ ☺

Ví dụ 2.62. *Hãy phân tích đa thức ra thừa số:*

$$P(x,y) = 2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4.$$

Lời giải. Tương tự như hai bài trên ta có

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2(x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2) + x^2y^2 = 2S_4 - \delta_2 S_2 + \delta_2^2 = \\ &= 2(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) - \delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) + \delta_2^2 = \\ &= 2\delta_1^4 - 9\delta_1^2\delta_2 + 7\delta_2^2 = (\delta_1^2 - \delta_2)(2\delta_1^2 - 7\delta_2) = \\ &= ((x+y)^2 - xy)(2(x+y)^2 - 7xy) = \\ &= (x^2 + xy + y^2)(2x^2 - 3xy + 2y^2). \end{aligned}$$

Hai thừa số trên không phân tích được ra tích những đa thức có hệ số thực. ☺

Có nhiều trường hợp khi đa thức đối xứng chuyển sang đa thức phụ thuộc vào δ_1 và δ_2, nhưng khi giải phương trình đối với ẩn δ_2 thì phương trình không có nghiệm thực. Như vậy cách phân tích theo kiểu này không cho kết quả. Với những đa thức như vậy, ta có thể phân tích ra thừa số bằng cách dùng phương pháp hệ số bất định, chẳng hạn như trường hợp bậc bốn, để có phân tích

$$P(x,y) = (ax^2 + bxy + cy^2)(cx^2 + bxy + ay^2)$$

ở đây a, b, c là những ẩn số cần phải tìm. Ta có thể làm như ví dụ sau:

Ví dụ 2.63. *Hãy phân tích đa thức ra thừa số:*

$$P(x,y) = 2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4.$$

Lời giải. Ta có thể chuyển đa thức về dạng các biến δ_1 và δ_2:

$$P(x,y) = 2\delta_1^4 - 5\delta_1^2\delta_2 + 4\delta_2^2.$$

Phương trình này đối với δ_2 không có nghiệm thực. Vậy ta phải dùng cách khác. Ta có

$$2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 = (ax^2 + bxy + cy^2)(cx^2 + bxy + ay^2).$$

Ta phải tìm a, b, c để đẳng thức đúng với mọi giá trị x, y. Vì thế ta có thể áp dụng *phương pháp giá trị riêng* của x, y, nghĩa là cho một số giá trị cụ thể để tìm các hệ số. Lấy $x = y = 1$ thì $16 = (a + b + c)^2$, từ đây có $a + b + c = \pm 4$. Tuy có hai giá trị nhưng ta chỉ cần chọn một

$$a + b + c = 4.$$

Cho $x = 1, y = -1$ ta nhận được $4 = (a - b + c)^2$, nghĩa là $a - b + c = \pm 2$, ta cũng chỉ lấy dấu cộng là đủ. Cuối cùng $x = 0, y = 1$, ta nhận được $ac = 2$.

Như vậy để xác định a, b, c ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c = 4, \\ a - b + c = 2, \\ ac = 2. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu ta tìm được $b = 1$ và $a + c = 3$. Kết hợp với phương trình thứ ba ta tìm được $a = 1, c = 2$ (hoặc $c = 1, a = 2$). Cuối cùng ta nhận được

$$2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 = (x^2 + xy + 2y^2)(2x^2 + xy + y^2).$$

Ta có thể kiểm tra lại cách phân tích này bằng cách khai triển và nhóm lại thành biểu thức ban đầu. Một chú ý là nếu lấy $a - b + c = -2$ thì hệ phương trình sẽ có nghiệm phức và như vậy không đưa đến kết luận. ☺

BÀI TẬP (Một số gợi ý và trả lời bài tập sau tại trang 118)

Phân tích những đa thức sau ra thừa số

▷ **2.64.** $2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$;

▷ **2.65.** $18x^4 - 21x^3y - 94x^2y^2 - 21xy^3 + 18y^4$;

▷ **2.66.** $3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4$;

▷ **2.67.** $2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$;

▷ **2.68.** $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.

2.8. Những bài toán khác

Các dạng bài toán liên quan đến đa thức đối xứng còn rất nhiều. Khi ra đề, người ra đề đã chọn những công thức hoặc những kết luận đẹp, phần nào có phần đối xứng của các biến trong đó. Mục này ta xét một số loại bài toán mà có khả năng áp dụng đa thức đối xứng được.

1. Rút gọn biểu thức. Ta xét ví dụ

Ví dụ 2.69. *Rút gọn biểu thức sau:*

$$P(p, q) = \frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right) + \frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Lời giải. Ta đặt $\delta_1 = p + q$ và $\delta_2 = pq$. Sử dụng công thức (2.2), ta có

$$
\begin{aligned}
P(p,q) &= \frac{1}{\delta_1^3}\frac{S_3}{\delta_2^3} + \frac{3}{\delta_1^4}\frac{S_2}{\delta_2^2} + \frac{6}{\delta_1^5}\frac{\delta_1}{\delta_2} = \\
&= \frac{\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2}{\delta_1^3\delta_2^3} + \frac{3(\delta_1^2 - 2\delta_2)}{\delta_1^4\delta_2^2} + \frac{6}{\delta_1^4\delta_2} = \\
&= \frac{\delta_1(\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2) + 3\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) + 6\delta_2^2}{\delta_1^4\delta_2^3} = \frac{\delta_1^4}{\delta_1^4\delta_2^3} = \frac{1}{\delta_2^3} = \frac{1}{p^3q^3}.
\end{aligned}
$$

☺

2. Chứng minh đẳng thức (hoặc chứng minh bất đẳng thức). Dùng đa thức đối xứng ta có thể chứng minh đẳng thức (hoặc bất đẳng thức) một cách rất tự nhiên và chỉ thông qua biến đổi.

Ví dụ 2.70. *Chứng minh đẳng thức sau*

$$(x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1 = (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1);$$

Lời giải. Ta biến đổi vế trái của mối liên hệ

$$(x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1 = \delta_1^3 + 3\delta_2(1 - \delta_1) - 1 = \delta_1^3 + 3\delta_2 - 3\delta_1\delta_2 - 1.$$

Ta biến đổi vế phải của đẳng thức

$$
\begin{aligned}
(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) &= (\delta_1 - 1)(\delta_1^2 - 3\delta_2 + \delta_1 + 1) \\
&= \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + \delta_1^2 + \delta_1 - \delta_1^2 + 3\delta_2 - \delta_1 - 1 = \\
&= \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_2 - 1.
\end{aligned}
$$

Hai vế đều có kết quả trùng nhau, ta có đẳng thức. ☺

3. Giải phương trình vô định.

Ví dụ 2.71. *Hãy tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau*

$$x^3 + y^3 + 1 = 3xy.$$

Lời giải. Ta chuyển các số hạng sang một vế và đưa phương trình về dạng

$$\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 1 - 3\delta_2 = 0, \text{ suy ra } (\delta_1 + 1)(\delta_1^2 - \delta_1 + 1 - 3\delta_2) = 0.$$

Từ $x > 0, y > 0$ suy ra $\delta_1 > 0$, như vậy $\delta_1 = -1$ không phải là nghiệm của phương trình trên. Ta chỉ còn giải phương trình

$$\delta_1^2 - \delta_1 + 1 - 3\delta_2 = 0.$$

Suy ra x và y được xác định từ hệ

$$\begin{cases} x + y = \delta_1 \\ xy = \delta_2 = \dfrac{1}{3}(\delta_1^2 - \delta_1 + 1). \end{cases}$$

Theo định lí 2.2, giải hệ trên tương đương với việc giải phương trình sau

$$z^2 - \delta_1 z + \frac{1}{3}(\delta_1^2 - \delta_1 + 1) = 0.$$

Nghiệm của phương trình bậc hai là

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{\delta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2}{4} - \frac{1}{3}(\delta_1^2 - \delta_1 + 1)} = \\ &= \frac{\delta_1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{12}(\delta_1^2 - 4\delta_1 + 4)} = \frac{\delta_1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{12}(\delta_1 - 2)^2}. \end{aligned}$$

Để nghiệm của phương trình là số thực, thì biểu thức dưới dấu căn phải không âm, điều này chỉ xảy ra khi $\delta_1 = 2$ hay $x + y = 2$ với x, y nguyên dương. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = 1$. Ta thử lại phương trình, thì $x = y = 1$ đích thực là nghiệm của phương trình. ☺

4. Bài toán chia hết một đa thức cho một đa thức khác với những đa thức đối xứng theo các biến được chứng minh gọn gàng hơn các phương pháp thông thường.

Ví dụ 2.72. *Chứng minh rằng một đa thức đối xứng hai biến x, y không có hệ số tự do chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ khi và chỉ khi đa thức được biểu diễn theo δ_1 và δ_2 như một đa thức hai biến có tổng các hệ số bằng không.*

Lời giải. Giả sử đa thức đối xứng $P(x, y)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$, nghĩa là $P(x, y) = (x^2 + xy + y^2)Q(x, y)$, ở đây $Q(x, y)$ là đa thức đối xứng. Ta có $x^2 + xy + y^2 = \delta_1^2 - \delta_2$. Giả sử $Q(x, y) = \varphi(\delta_1, \delta_2)$ biểu diễn qua δ_1 và

δ_2. Khi đó $P(x,y)$ có dạng

$$P(x,y) = (x^2 + xy + y^2)Q(x,y) = (\delta_1^2 - \delta_2)\varphi(\delta_1, \delta_2).$$

Thay $\delta_1 = \delta_2 = 1$ vào biểu thức trên ta nhận được $(1-1)\varphi(1,1) = 0$. Như vậy $P(x,y)$ biểu diễn qua δ_1 và δ_2 và $P(x,y) = (\delta_1^2 - \delta_2)\varphi(\delta_1,\delta_2)$ nhận giá trị 0 khi $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Điều này nghĩa là tổng hệ số của $(\delta_1^2 - \delta_2)\varphi(\delta_1,\delta_2)$ bằng không.

Ngược lại, cho

$$P(x,y) = \delta_1^n + b_1\delta_1^{n-2}\delta_2 + b_2\delta_1^{n-4}\delta_2^2 + b_3\delta_1^{n-6}\delta_2^3 + \cdots$$

là biểu diễn của $P(x,y)$ qua δ_1 và δ_2 và giả sử tổng hệ số của cách biểu diễn trên bằng không. Đưa δ_1^n ra ngoài, thì $P(x,y)$ được viết lại

$$P(x,y) = \delta_1^n\left(1 + b_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right) + b_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right)^2 + b_3\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right)^3 + \cdots\right).$$

Hơn nữa bậc của đa thức trong dấu ngoặc (theo biến $z = \dfrac{\delta_2}{\delta_1^2}$) không vượt quá $\dfrac{n}{2}$ và kí hiệu nó là k.

Tổng của những hệ số trong biểu thức trong dấu ngoặc bằng 0. Nghĩa là đa thức $1 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \cdots$ bằng 0 với $z = 1$. Suy ra theo định lí Bézout[2] đa thức này chia hết cho $1 - z$. Như vậy

$$1 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \cdots = (1-z)H(z),$$

ở đây bậc của $H(z)$ bằng $k-1$. Vì thế

$$P(x,y) = \delta_1^n\left(1 + b_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right) + b_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right)^2 + b_3\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= \delta_1^n\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right)H\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right) = (\delta_1^2 - \delta_2)\delta_1^{n-2}H\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right).$$

Nếu $n = 2m+1$, thì $k \le m$, nghĩa là bậc của đa thức $H(z)$ không vượt quá $m-1$, còn số $n-2 = 2m-1$ không nhỏ hơn hai lần bậc của đa thức $H(z)$.

[2] Etienne Bézout (1730-1783): Nhà toán học người Pháp.

Nếu $n = 2m$, thì $k \leq m$, nghĩa là bậc xủa $H(z)$ không vượt quá $m - 1$ và vì thế số $n - 2 = 2m - 2$ không nhỏ hơn hai lần bậc của $H(z)$. Như vậy, trong mọi trường hợp $n - 2$ không nhỏ hơn hai lần bậc của $H(z)$, vì thế $\delta_1^{n-2}H\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right)$ không chứa δ_1 ở mẫu, nghĩa là nó là một đa thức của $\delta_1.\delta_2$. Ta có thể viết

$$P(x,y) = (\delta_1^2 - \delta_2)\psi(\delta_1, \delta_2),$$

ở đây $\psi(\delta_1, \delta_2) = \delta_1^{n-2}H\left(\frac{\delta_2}{\delta_1^2}\right)$ là một đa thức nào đó. Suy ra đa thức $P(x,y)$ chia hết cho $\delta_1^2 - \delta_2 = x^2 + xy + y^2$. ☺

5. Tìm những điều kiện để hệ phương trình có nghĩa hoặc những thông số trong phương trình thỏa mãn điều kiện để hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 2.73. *Tìm điều kiện cho* a, b, c *để* (x, y) *là nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} x + y &= a, \\ x^2 + y^2 &= b, \\ x^3 + y^3 &= c. \end{cases}$$

Lời giải. Bài toán đưa về bài toán loại trừ x, y để chỉ còn lại sự phụ thuộc a, b, c. Với $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$ ta có thể chuyển hệ trên về dạng

$$\begin{cases} \delta_1 &= a, \\ \delta_1^2 - 2\delta_2 &= b, \\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 &= c. \end{cases}$$

Từ hai phương trình: $\delta_1 = a, \delta_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b)$, thay vào phương trình thứ ba ta có $a^3 - \frac{3}{2}a(a^2 - b) = c$, nghĩa là $a^3 - 3ab + 2c = 0$. Dễ thấy rằng nếu $a^3 - 3ab + 2c = 0$ thì hệ có nghiệm. vậy $a^3 - 3ab + 2c = 0$ chính là điều kiện đòi hỏi mối liên quan giữa a, b, c. ☺

BÀI TẬP (Một số gợi ý và trả lời các bài tập sau tại trang 120)

Rút gọn những biểu thức sau

▷ **2.74.** $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$;

▷ **2.75.** $\dfrac{1}{(a+b)^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{2}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.

Chứng minh rằng

▷ **2.76.** $(x+y)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2+xy+y^2)^2$;

▷ **2.77.** $(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

▷ **2.78.** Chứng minh rằng với $n = 6k \pm 1$, đa thức $(x+y)^n - x^n - y^n$ chia hết cho x^2+xy+y^2.

▷ **2.79.** Với những điều kiện nào thì đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho x^2+x+1?

▷ **2.80.** Với những điều kiện nào thì đa thức $(x+1)^n + x^n + 1$ chia hết cho x^2+x+1?

▷ **2.81.** Chứng minh rằng nếu những số u, v, x, y thỏa mãn $u+v = x+y, u^2+v^2 = x^2+y^2$, thì với mọi số tự nhiên n đẳng thức sau đúng

$$u^n + v^n = x^n + y^n.$$

▷ **2.82.** Giải phương trình trong tập số nguyên

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

▷ **2.83.** Chứng minh rằng nếu n là những số lẻ, là bội của 3, thì biểu thức

$$(a+b)^n - a^n - b^n - 3(ab)^{\frac{n-1}{2}}(a+b)$$

chia hết cho a^2+ab+b^2.

2.9. Chuyên đề về phương trình hệ số đối xứng

Đa thức đối xứng có thể ứng dụng giải một số phương trình bậc cao. Tất nhiên những phương trình bậc cao có dạng đặc biệt nào đó. Trong tiết này ta quan tâm tới phương trình hệ số đối xứng:

Định nghĩa 2.3. Một đa thức một biến

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0) \tag{2.6}$$

gọi là *hệ số đối xứng*, nếu những hệ số thỏa mãn $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \ldots$.

Ví dụ về loại đa thức này rất nhiều chẳng hạn như:

$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 3z + 1$; $2z^8 - 6z^5 - 6z^3 + 2$; hoặc $z^n + 1$ đều là những đa thức hệ số đối xứng.

Một phương trình $P(z) = 0$, vế trái là một đa thức hệ số đối xứng gọi là *phương trình hệ số đối xứng*. Ta có định lí

2.9.1. Định lí cơ bản của đa thức hệ số đối xứng

Định lí 2.4. *Mọi đa thức hệ số đối xứng bậc chẵn* $2k$

$$P(z) = a_0 z^{2k} + a_1 z^{2k-1} + \cdots + a_{2k}$$

có thể biểu diễn dưới dạng

$$P(z) = z^k Q(\delta),$$

ở đây $\delta = z + \dfrac{1}{z}$ *và* $Q(\delta)$ *là một đa thức bậc* k *của* δ.

Mọi đa thức hệ số đối xứng $P(z)$ *bậc lẻ đều chia hết cho* $(z+1)$ *và cho thương là một đa thức hệ số đối xứng bậc chẵn.*

Chứng minh. 1) Ta xét đa thức bậc chẵn $2k$: $P(z)$. Ta đặt số hạng chung z^k ra ngoài

$$P(z) = z^k \left(a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_{2k-1} \frac{1}{z^{k-1}} + a_{2k} \frac{1}{z^k} \right)$$

Ta chú ý rằng $a_0 = a_{2k}, a_1 = a_{2k-1}, \dots$

$$P(z) = z^k\left(a_0\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right) + a_1\left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}\right) + \cdots + a_k\right).$$

Như vậy ta chỉ còn phải chứng minh $z^i + \frac{1}{z^i}$, $i = 1, 2, \dots k$ biểu diễn thông qua $\delta = z + \frac{1}{z}$. *Nhưng bài toán này là hệ của những công thức (2.2) với* tổng $S_k = x^k + y^k$ biểu diễn thông qua $\delta_1 = x + y$ và $\delta_2 = xy$. Trong trường hợp cụ thể này $x = z, y = \frac{1}{z}$ thì $S_k = x^k + y^k$ chính là $z^k + \frac{1}{z^k}$ và $\delta_1 = z + \frac{1}{z} = \delta$, $\delta_2 = 1$. Công thức (2.2) với $\delta_1 = \delta, \delta_2 = 1$ được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
z^2 + z^{-2} &= \delta^2 - 2,\\
z^3 + z^{-3} &= \delta^3 - 3\delta,\\
z^4 + z^{-4} &= \delta^4 - 4\delta^2 + 2,\\
z^5 + z^{-5} &= \delta^5 - 5\delta^3 + 5\delta,\\
z^6 + z^{-6} &= \delta^6 - 6\delta^4 + 9\delta^2 - 2,\\
z^7 + z^{-7} &= \delta^7 - 7\delta^5 + 14\delta^3 - 7\delta,\\
z^8 + z^{-8} &= \delta^8 - 8\delta^6 + 20\delta^4 - 16\delta^2 + 2,\\
z^9 + z^{-9} &= \delta^9 - 9\delta^7 + 27\delta^5 - 30\delta^3 + 9\delta,\\
z^{10} + z^{-10} &= \delta^{10} - 10\delta^8 + 35\delta^6 - 50\delta^4 + 25\delta^2 - 2,\\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

2) *Ta xét đa thức hệ số đối xứng bậc lẻ $2k+1$:*

$$P(z) = a_0 z^{2k+1} + a_1 z^{2k} + \cdots + a_{2k} z + a_{2k+1}.$$

Ta có $a_0 = a_{2k+1}, a_1 = a_{2k}, a_2 = a_{2k-1}, \dots$ khi đó ta có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned}
P(z) &= a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1(z^{2k} + z) + a_2(z^{2k-1} + z^2) + \cdots + a_k(z^{k+1} + z^k)\\
&= a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1 z(z^{2k-1} + 1) + a_2 z^2(z^{2k-3} + 1) + \cdots + a_k z^k(z + 1
\end{aligned}$$

Trong mỗi số hạng, biểu thức trong dấu ngoặc có chung $z + 1$, bằng cách áp dụng công thức sau

$$z^{2m+1}+1=(z+1)(z^{2m}-z^{2m-1}+z^{2m-2}-\cdots+z^2-z+1).$$

Ta nhận được

$$\begin{aligned}
a_0(z^{2k+1}+1) &= a_0(z+1)(z^{2k}-z^{2k-1}+z^{2k-2}+\cdots+z^2-z+1),\\
a_1z(z^{2k-1}+1) &= a_1z(z+1)(z^{2k-2}-z^{2k-3}+\cdots-z+1)=\\
&= a_1(z+1)(z^{2k-1}-z^{2k-2}+\cdots-z^2+z),\\
a_2z^2(z^{2k-3}+1) &= a_2z^2(z+1)(z^{2k-4}-\cdots+1)=\\
&= a_2(z+1)(z^{2k-2}-\cdots+z^2),\\
&\cdots\cdots\\
a_kz^k(z+1) &= a_k(z+1)z^k.
\end{aligned}$$

Bằng cách nhóm $z+1$ ra ngoài ta được $P(z)=(z+1)Q(z)$, ở đây $Q(z)$ là đa thức tổng của những đa thức và ta có thể kiểm tra tổng của những đa thức này là một đa thức hệ số đối xứng. ☺

Mệnh đề 2.1. *Đa thức* $P(z)$ *bậc* n *là đa thức hệ số đối xứng khi và chỉ khi nó thỏa mãn*

$$z^nP\left(\frac{1}{z}\right)=P(z).$$

Chứng minh. Cho $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$. Ta có

$$\begin{aligned}
z^nP\left(\frac{1}{z}\right) &= z^n\left(a_0\left(\frac{1}{z}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{z}+a_n\right)=\\
&= a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n=\\
&= a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức $P(z)=z^nP\left(\frac{1}{z}\right)$ đúng khi và chỉ khi nếu các hệ số tương ứng của hai đa thức sau bằng nhau, nghĩa là

$$a_0=a_n, a_1=a_{n-1},\ldots.$$

Nói cách khác đẳng thức $P(z)=z^nP\left(\frac{1}{z}\right)$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi đa thức $P(z)$ là đa thức hệ số đối xứng. ☺

Mệnh đề 2.2. *Nếu* $P(z)$ *và* $Q(z)$ *là những đa thức hệ số đối xứng và* $P(z)$ *chia hết cho* $Q(z)$, *thì* $H(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *cũng là đa thức hệ số đối xứng.*

Chứng minh. Ta kí hiệu bậc của của những đa thức $P(z)$ và $Q(z)$ tương ứng là m và n thì đa thức $H(z)$ có bậc $m - n$. Bởi vì $P(z)$ và $Q(z)$ là những đa thức hệ số đối xứng nên theo kết quả mệnh đề 2.1 thì

$$P(z) = z^m P\left(\frac{1}{z}\right), \quad Q(z) = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right).$$

Chia theo vế hai đẳng thức trên, ta nhận được

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^m P\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)} = z^{m-n}\frac{P\left(\frac{1}{z}\right)}{Q\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Như vậy $H(z)$ viết được dưới dạng

$$H(z) = z^{m-n} H\left(\frac{1}{z}\right).$$

Điều này nghĩa là $H(z)$ là đa thức hệ số đối xứng. ☺

2.9.2. Những ví dụ giải phương trình bậc cao

Ta xét một số ví dụ ứng dụng định lí trên:

Ví dụ 2.84. *Giải phương trình* $6z^4 - 13z^3 + 12z^2 - 13z + 6 = 0$.

Lời giải. Phương trình bậc bốn (bậc chẵn) ở trên là phương trình hệ số đối xứng. Theo định lí 2.4 vế trái của phương trình được biến đổi là

$$6z^4 - 13z^3 + 12z^2 - 13z + 6 = z^2\left(6z^2 - 13z + 12 - 13\frac{1}{z} + 6\frac{1}{z^2}\right) =$$
$$= z^2\left(6\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 13\left(z + \frac{1}{z}\right) + 12\right) =$$
$$= z^2(6(\delta^2 - 2) - 13\delta + 12) = z^2(6\delta^2 - 13\delta)$$

Vì $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, ta chỉ còn giải phương trình

$$6\delta^2 - 13\delta = 0.$$

Dễ thấy $\delta = 0$ và $\delta = \frac{13}{6}$. Như vậy tìm nghiệm của phương trình đã cho tương đương với giải hai phương trình

$$z + \frac{1}{z} = 0, \quad z + \frac{1}{z} = \frac{13}{6}.$$

Phương trình thứ nhất không có nghiệm thực, phương trình thứ hai có hai nghiệm là $z_1 = \frac{3}{2}$ và $z_2 = \frac{2}{3}$. ☺

Ví dụ 2.85. *Giải phương trình*

$$4z^{11}+4z^{10}-21z^9-21z^8+17z^7+17z^6+17z^5+17z^4-21z^3-21z^2+4z+4=0$$

Lời giải. Đây là phương trình hệ số đối xứng bậc lẻ. Theo định lí 2.4 vế trái của phương trình chia hết cho $z+1$ và cho kết quả

$$\begin{aligned}4z^{11}+4z^{10}-21z^9-21z^8+17z^7+17z^6+17z^5+17z^4-21z^3-21z^2+4z+4 &= \\ = (z+1)(4z^{10}-21z^8+17z^6+17z^4-21z^2+4).\end{aligned}$$

Như vậy, giải phương trình ban đầu tương đương với giải hai phương trình

$$z+1=0; \quad 4z^{10}-21z^8+17z^6+17z^4-21z^2+4=0.$$

Phương trình thứ nhất cho ta nghiệm $z_1 = -1$. Vế trái của phương trình thứ hai lại là đa thức hệ số đối xứng bậc chẵn. Ta lại biến đổi

$$\begin{aligned}&4z^{10}-21z^8+17z^6+17z^4-21z^2+4 = \\ &= z^5\left(4z^5-21z^3+17z+17\frac{1}{z}-21\frac{1}{z^3}+4\frac{1}{z^5}\right) = \\ &= z^5\left(4\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)-21\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+17\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \\ &= z^5(4(\delta^5-5\delta^3+5\delta)-21(\delta^3-3\delta)+17\delta) = z^5(4\delta^5-41\delta^3+100\delta).\end{aligned}$$

Bởi vì $z=0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, nên ta chỉ còn phải giải phương trình

$$(4\delta^4-41\delta^2+100)\delta = 0.$$

Suy ra ta có nghiệm $\delta = 0$ và thêm các nghiệm trong phương trình trùng phương

$$4\delta^4 - 41\delta^2 + 100 = 0.$$

Cuối cùng ta nhận được năm nghiệm

$$\delta = 0, \quad \delta = -\frac{5}{2}, \quad \delta = \frac{5}{2}, \quad \delta = 2, \quad \delta = -2.$$

Để tìm được nghiệm của phương trình ban đầu ta phải giải năm phương trình

$$z + \frac{1}{z} = 0,\ z + \frac{1}{z} = -\frac{5}{2},\ z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2},\ z + \frac{1}{z} = 2,\ z + \frac{1}{z} = -2.$$

Cùng với một nghiệm đã tìm được trước đây $z_1 = -1$, ta tìm thêm được 6 nghiệm nữa (có 2 nghiệm kép), tổng cộng là

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -\frac{1}{2},$$
$$z_4 = 2, \quad z_5 = \frac{1}{2}, \quad z_6 = z_7 = -1, \quad z_8 = z_9 = 1.$$

☺

Ví dụ 2.86. *Giải phương trình*

$$9z^6 - 18z^5 - 73z^4 + 164z^3 - 73z^2 - 18z + 9 = 0.$$

Lời giải. Ta nhận thấy đây là phương trình hệ số đối xứng bậc chẵn, ta có

$$\begin{aligned}
&9z^6 - 18z^5 - 73z^4 + 164z^3 - 73z^2 - 18z + 9 = \\
&= z^3\left(9\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) - 18\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 73\left(z + \frac{1}{z}\right) + 164\right) = \\
&= z^3(9(\delta^3 - 3\delta) - 18(\delta^2 - 2) - 73\delta + 164) = \\
&= z^3(9\delta^3 - 18\delta^2 - 100\delta + 200).
\end{aligned}$$

Vì $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, ta chỉ còn giải phương trình bậc ba đối với δ:

$$9\delta^3 - 18\delta^2 - 100\delta + 200 = 0.$$

Vế trái của phương trình có thể phân tích thành các thừa số (có thể áp dụng định lí Bézout)

$$(\delta - 2)(9\delta^2 - 100) = 0.$$

Ta tìm được ba nghiệm

$$\delta = 2, \quad \delta = \frac{10}{3}, \quad \delta = -\frac{10}{3}.$$

Như vậy, ta tìm nghiệm phương trình ban đầu bằng cách giải ba phương trình:

$$z + \frac{1}{z} = 2, \quad z + \frac{1}{z} = \frac{10}{3}, \quad z + \frac{1}{z} = -\frac{10}{3}.$$

Giải ra ta được 6 nghiệm:

$$z_1 = z_2 = 1, \quad z_3 = 3, \quad z_4 = \frac{1}{3}, \quad z_5 = -3, \quad z_6 = -\frac{1}{3}.$$ ☺

Ví dụ 2.87. *Giải phương trình*

$$z^7 + 2z^6 - 5z^5 - 13z^4 - 13z^3 - 5z^2 + 2z + 1 = 0.$$

Lời giải. Đây là phương trình hệ số đối xứng bậc lẻ. Bằng cách chia vế trái cho $z + 1$ (có thể dùng sơ đồ Horner[3])

$$P(z) = (z + 1)(z^6 + z^5 - 6z^4 - 7z^3 - 6z^2 + z + 1).$$

Phương trình ban đầu có một nghiệm $z = -1$ và ta giải phương trình

$$Q(z) = z^6 + z^5 - 6z^4 - 7z^3 - 6z^2 + z + 1 = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^3\left(\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 6\left(z + \frac{1}{z}\right) - 7\right) = \\ &= z^3((\delta^3 - 3\delta) + (\delta^2 - 2) - 6\delta - 7) = z^3(\delta^3 + \delta^2 - 9\delta - 9). \end{aligned}$$

Vì $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta chỉ còn giải phương trình

$$\delta^3 + \delta^2 - 9\delta - 9 = 0.$$

Phương trình này có thể viết

$$\delta^3 + \delta^2 - 9\delta - 9 = \delta^2(\delta + 1) - 9(\delta + 1) = (\delta + 1)(\delta^2 - 9) = 0.$$

[3]William George Horner (1786-1837): Nhà toán học người Anh.

Ta có ba nghiệm $\delta_1 = -1, \delta_2 = 3, \delta_3 = -3$. Khi đó nghiệm của $Q(z)$ là nghiệm của ba phương trình

$$z + \frac{1}{z} = -1, \quad z + \frac{1}{z} = 3, \quad z + \frac{1}{z} = -3.$$

Giải phương trình trên cho ta nghiệm và tất cả số nghiệm của phương trình ban đầu là

$$z_1 = -1, \quad z_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad z_{4,5} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$ ☺

Ví dụ 2.88. *Giải phương trình*

$$P(z) = 12z^5 - 56z^4 + 107z^3 - 107z^2 + 56z - 12 = 0.$$

Lời giải. Đây không phải là phương trình hệ số đối xứng, nhưng ta nhận thấy các hệ số gần đối xứng và có nghiệm $z = 1$. Ta có thể phân tích ra thừa số

$$P(z) = (z - 1)(12z^4 - 44z^3 + 63z^2 - 44z + 12).$$

Phương trình ban đầu có một nghiệm là $z = 1$ và ta giải phương trình

$$Q(z) = 12z^4 - 44z^3 + 63z^2 - 44z + 12 = 0.$$

Nhưng phương trình này là phương trình hệ số đối xứng, ta có thể biến đổi

$$Q(z) = z^2\left(12\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 44\left(z + \frac{1}{z}\right) + 63\right) =$$
$$= z^2(12(\delta^2 - 2) - 44\delta + 63) = z^2(12\delta^2 - 44\delta + 39).$$

$z = 0$ không phải là nghiệm của $Q(z) = 0$. Ta chỉ còn phải giải

$$12\delta^2 - 44\delta + 39 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $\delta_1 = \frac{3}{2}$ và $\delta_2 = \frac{13}{6}$. Giải hai phương trình

$$z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}; \quad z + \frac{1}{z} = \frac{13}{6}$$

ta được 2 nghiệm. Kết hợp với nghiệm ban đầu $z = 1$, *suy ra tổng số* nghiệm của phương trình đã cho là:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{2}{3}, \quad z_3 = \frac{3}{2}.$$ ☺

Bài tập

(Một số gợi ý và trả lời bài tập sau tại trang 123).

▷ **2.89.** Giải phương trình: $10z^6 + z^5 - 47z^4 - 47z^3 + z^2 + 10z = 0$.

▷ **2.90.** Chứng minh rằng tất cả những nghiệm của phương trình hệ số đối xứng bậc bốn

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0, \quad (a \neq 0)$$

có thể tính được nhờ bốn phép tính số học và căn thức.

▷ **2.91.** Chứng minh rằng tất cả những nghiệm của phương trình hệ số đối xứng bậc năm

$$az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = 0, \quad (a \neq 0)$$

có thể tính được nhờ bốn phép tính số học và căn thức.

▷ **2.92.** Chứng minh rằng nếu biết một nghiệm của phương trình hệ số đối xứng bậc sáu, thì những nghiệm còn lại tìm được bằng bốn phép tính số học và căn thức.

▷ **2.93.** Hãy dùng định lí Bézout đưa ra cách chứng minh khác của kết luận: Những đa thức hệ số đối xứng bậc lẻ chia hết cho $z + 1$.

2.10. Gợi ý và trả lời bài tập chương 2

▷ **2.6.** Đặt $\delta_1 = x + y, \delta_2 = xy$ và biến đổi hệ phương trình đã cho thành hệ phương trình $\begin{cases} \delta_1 = 5, \\ \delta_1^2 - 3\delta_2 = 7. \end{cases}$ Hệ này có nghiệm $\delta_1 = 5, \delta_2 = 6$. Từ đó suy ra hệ đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 2, & x_2 = 3, \\ y_1 = 3; & y_2 = 2. \end{cases}$$

▷ **2.7.** Hệ phương trình trợ giúp là $\begin{cases} \delta_1 = 5, \\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = 65. \end{cases}$ Hệ phương trình này có nghiệm $\delta_1 = 5, \delta_2 = 4$. Hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

▷ **2.8.** Hệ phương trình trợ giúp là $\begin{cases} 4\delta_1 = 3\delta_2, \\ \delta_1 + \delta_1^2 - 2\delta_2 = 26. \end{cases}$

Loại δ_2 từ phương trình thứ hai, ta nhận được $3\delta_1^2 - 5\delta_1 - 78 = 0$. Giải phương trình bậc hai trên ta tìm được

$$\begin{cases} \delta_1 = 6, \\ \delta_2 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = -\frac{13}{3}, \\ \delta_2 = -\frac{52}{9}. \end{cases}$$

Từ đây cho nghiệm của hệ phương trình ban đầu

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{-13+\sqrt{377}}{6}, \\ y_3 = \frac{-13-\sqrt{377}}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{-13-\sqrt{377}}{6}, \\ y_4 = \frac{-13+\sqrt{377}}{6}. \end{cases}$$

▷ **2.9.** Hệ phương trình trợ giúp là $\begin{cases} \delta_1^2 - 2\delta_2 + \delta_1 = 32, \\ 12\delta_1 = 7\delta_2. \end{cases}$

Loại δ_2 từ phương trình thứ nhất, ta nhận được phương trình $7\delta_1^2 - 17\delta_1 - 224 = 0$. Giải phương trình bậc hai trên, ta tìm được

$$\begin{cases} \delta_1 = 7, \\ \delta_2 = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = -\frac{32}{7}, \\ \delta_2 = -\frac{384}{49}. \end{cases}$$

Từ đây cho nghiệm của hệ phương trình ban đầu

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{-16+8\sqrt{10}}{7}, \\ y_3 = \frac{-16-8\sqrt{10}}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{-16-8\sqrt{10}}{7}, \\ y_4 = \frac{-16+8\sqrt{10}}{7}. \end{cases}$$

▷ **2.10.** Hệ phương trình trợ giúp là $\begin{cases} \delta_2 = 15, \\ \delta_1 + \delta_1^2 - 2\delta_2 = 42. \end{cases}$

Loại δ_2 từ phương trình thứ hai, ta nhận được phương trình $\delta_1^2 + \delta_1 - 72 = 0$.

Giải phương trình bậc hai trên, ta tìm được

$$\begin{cases}\delta_1 = 8,\\ \delta_2 = 15;\end{cases} \qquad \begin{cases}\delta_1 = -9,\\ \delta_2 = 15.\end{cases}$$

Từ đây cho nghiệm của hệ phương trình ban đầu

$$\begin{cases}x_1 = 3,\\ y_1 = 5;\end{cases} \quad \begin{cases}x_2 = 5,\\ y_2 = 3;\end{cases} \quad \begin{cases}x_3 = \frac{-9+\sqrt{21}}{2},\\ y_3 = \frac{-9-\sqrt{21}}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}x_3 = \frac{-9-\sqrt{21}}{2},\\ y_3 = \frac{-9+\sqrt{21}}{2}.\end{cases}$$

▷ **2.11.** Quy đồng mẫu số và đưa về hệ với các ẩn δ_1, δ_2 ta nhận được:

$$\begin{cases}\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = 18\delta_2,\\ \delta_1 = 12.\end{cases}$$

Từ đây tìm được $\delta_1 = 12, \delta_2 = 32$. Từ đây cho hai nghiệm của hệ phương trình ban đầu

$$\begin{cases}x_1 = 4,\\ y_1 = 8;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2 = 8,\\ y_2 = 4.\end{cases}$$

▷ **2.12.** Quy đồng mẫu số và đưa về hệ với các ẩn δ_1, δ_2 ta nhận được:

$$\begin{cases}\delta_1\delta_2 = 30,\\ 6\delta_1 = 5\delta_2.\end{cases}$$

Hệ phương trình này có nghiệm:

$$\begin{cases}\delta_1 = 5,\\ \delta_2 = 6;\end{cases} \qquad \begin{cases}\delta_1 = -5,\\ \delta_2 = -6.\end{cases}$$

Từ đây cho bốn nghiệm của hệ phương trình ban đầu

$$\begin{cases}x_1 = 2,\\ y_1 = 3;\end{cases} \quad \begin{cases}x_2 = 3,\\ y_2 = 2;\end{cases} \quad \begin{cases}x_3 = -6,\\ y_3 = 1;\end{cases} \quad \begin{cases}x_4 = 1,\\ y_4 = -6.\end{cases}$$

▷ **2.13.** Đưa về hệ với các ẩn δ_1, δ_2 ta nhận được:

$$\begin{cases}\delta_1 = a,\\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = b(\delta_1^2 - 2\delta_2).\end{cases}$$

Biến đổi hệ phương trình này, ta được $(3a - 2b)\delta_2 = a^3 - a^2b$. Nếu số $3a - 2b \neq 0$, ta nhận được nghiệm duy nhất $\delta_2 = \dfrac{a^3 - a^2b}{3a - 2b}$. Trong trường hợp này hệ phương trình đã cho có nghiệm (nếu $\frac{a^3+2a^2b}{4(3a-2b)} \geq 0$)

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{a^3+2a^2b}{4(3a-2b)}}, \\ y_1 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{-a^3+2a^2b}{4(3a-2b)}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{-a^3+2a^2b}{4(3a-2b)}}, \\ y_1 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{-a^3+2a^2b}{4(3a-2b)}}. \end{cases}$$

Nếu $3a-2b=0$, nhưng $a^3-a^2b \neq 0$, thì hệ không có nghiệm. Cuối cùng nếu $3a-2b=0$ và $a^3-a^2b=0$, nghĩa là $a=b=0$, thì với $\delta_1=0$ và δ_2 là một số bất kì là nghiệm của hệ trợ giúp. Suy ra trong trường hợp này mọi cặp số x, y thỏa mãn $x+y=0$ đều là nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

▷ **2.14**. Hệ phương trình trợ giúp là $\begin{cases} \delta_1^2-2\delta_2+2\delta_1=23, \\ \delta_1^2-\delta_2=19. \end{cases}$

Loại δ_2 từ phương trình thứ nhất, ta nhận được phương trình $\delta_1^2-2\delta_1-15=0$. Từ đó tìm được hai hệ nghiệm của hệ trợ giúp:

$$\begin{cases} \delta_1=-3, \\ \delta_2=-10; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1=5, \\ \delta_2=6. \end{cases}$$

Từ đó hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x_1=-5, \\ y_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=2, \\ y_3=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=3, \\ y_4=2. \end{cases}$$

▷ **2.15**. Hệ phương trình trợ giúp

$$\begin{cases} \delta_1\delta_2=20, \\ 4\delta_1-5\delta_2 \end{cases} \quad \text{có nghiệm} \quad \begin{cases} \delta_1=5, \\ \delta_2=4; \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_1=-5, \\ \delta_2=-4. \end{cases}$$

Từ đó, nghiệm của hệ phương trình ban đầu là

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=\frac{-5+\sqrt{41}}{2}, \\ y_3=\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, \\ y_4=\frac{-5+\sqrt{41}}{2}. \end{cases}$$

▷ **2.16**. Hệ phương trình trợ giúp là $\begin{cases} \delta_1^4-4\delta_1^2\delta_2+\delta_2^2=1153, \\ \delta_1^2-3\delta_2=33. \end{cases}$

Loại δ_1 từ phương trình thứ nhất, ta nhận được $\delta_2^2-33\delta_2+32=0$. Từ đó tìm được hai hệ nghiệm của hệ trợ giúp:

$$\begin{cases}\delta_1 = \pm 6,\\ \delta_2 = 1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\delta_1 = \pm\sqrt{129},\\ \delta_2 = 32.\end{cases}$$

Từ đó hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases}x_1 = 3+\sqrt{8},\\ y_1 = 3-\sqrt{8};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2 = 3-\sqrt{8},\\ y_2 = 3+\sqrt{8};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_3 = -3+\sqrt{8},\\ y_3 = -3-\sqrt{8};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_4 = -3-\sqrt{8},\\ y_4 = -3+\sqrt{8};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_5 = \dfrac{\sqrt{129}+1}{2},\\[2ex] y_5 = \dfrac{\sqrt{129}-1}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_6 = \dfrac{\sqrt{129}-1}{2},\\[2ex] y_6 = \dfrac{\sqrt{129}+1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_7 = \dfrac{-\sqrt{129}+1}{2},\\[2ex] y_7 = \dfrac{-\sqrt{129}-1}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_8 = \dfrac{-\sqrt{129}-1}{2},\\[2ex] y_8 = \dfrac{-\sqrt{129}+1}{2}.\end{cases}$$

▷ **2.22.** Đặt $y = -z$ đưa hệ đã cho về hệ đối xứng $\begin{cases}x+z=2,\\ x^3+z^3=8.\end{cases}$ Đưa về hệ trợ giúp $\begin{cases}\delta_1 = 2,\\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = 8.\end{cases}$ Hệ này có nghiệm $\delta_1 = 2, \delta_2 = 0$. Từ đó ta nhận được hai nghiệm

$$\begin{cases}x_1 = 2,\\ z_1 = 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2 = 0,\\ z_2 = 2.\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ ban đầu là

$$\begin{cases}x_1 = 2,\\ y_1 = 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2 = 0,\\ y_2 = -2.\end{cases}$$

▷ **2.23.** Đặt $x^2 = z$ và biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình đối xứng $\begin{cases}y+z=5,\\ y^3+z^3=65.\end{cases}$ Giải hệ này bằng phương pháp hệ đối xứng và cuối cùng ta có nghiệm của hệ ban đầu

$$\begin{cases}x_1 = 1,\\ y_1 = 4;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2 = -1,\\ y_2 = 4.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_3 = 2,\\ y_3 = 1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_4 = -2,\\ y_4 = 1.\end{cases}$$

▷ **2.24.** Đặt $\frac{x}{a} = u, \frac{y}{b} = v$ và biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình đối xứng $\begin{cases} u + v = 1, \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 4. \end{cases}$ Đặt ẩn mới $\delta_1 = u + v, \delta_2 = uv$, ta nhận được hệ $\begin{cases} \delta_1 = 1, \\ \frac{\delta_1}{\delta_2} = 4, \end{cases}$ suy ra $\delta_1 = 1, \delta_2 = \frac{1}{4}$. Từ đây cho ta nghiệm duy nhất $u = v = \frac{1}{2}$. Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$.

▷ **2.25.** Đặt $\sqrt{x} = u, \sqrt{y} = -v$ và biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình đối xứng $\begin{cases} u + v = -2uv, \\ u^2 + v^2 = 20. \end{cases}$ Đặt ẩn mới $\delta_1 = u + v, \delta_2 = uv$, ta nhận được hệ $\begin{cases} \delta_1 = -2\delta_2, \\ \delta_1^2 - 2\delta_2 = 20, \end{cases}$ giải hệ này cho nghiệm

$$\begin{cases} \delta_1 = 4, \\ \delta_2 = -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = -5, \\ \delta_2 = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Vì $0 \le \sqrt{x} = u, 0 \ge -\sqrt{y} = v$, nên phải có $\delta_2 = uv \le 0$, vì thế nghiệm thứ hai không thỏa mãn. Nghiệm thứ nhất cho hai nghiệm của hệ đối xứng

$$\begin{cases} u_1 = 2 + \sqrt{6}, \\ v_1 = 2 - \sqrt{6}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 2 - \sqrt{6}, \\ v_2 = 2 + \sqrt{6}. \end{cases}$$

Hệ thứ hai không phải là nghiệm, vì nó không thỏa mãn $u \ge 0, v \le 0$. Chỉ còn nghiệm thứ nhất và từ đó cho ta nghiệm của hệ ban đầu:

$$\begin{cases} x = u_1^2 = (2 + \sqrt{6})^2 = 10 + 4\sqrt{6}, \\ y = u_2^2 = (2 - \sqrt{6})^2 = 10 - 4\sqrt{6}. \end{cases}$$

▷ **2.26.** Đặt $x^{\frac{1}{4}} = u, y^{\frac{1}{5}} = v$ và biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình đối xứng $\begin{cases} u^3 + v^3 = 35, \\ u + v = 5. \end{cases}$ Đây là hệ phương trình đã giải trong bài 2.7 và có nghiệm

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 3, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Từ đây suy ra nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 243; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 81, \\ y_2 = 32. \end{cases}$$

▷ **2.27.** Đặt $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x} = u$, $\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x} = v$. Khi đó $u^5 = \frac{1}{2}+x, v^5 = \frac{1}{2}-x$ và ta nhận được hệ đối xứng $\begin{cases} u+v = 1, \\ u^5+v^5 = 1. \end{cases}$ Hệ này có nghiệm

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 0, \\ v_2 = 1. \end{cases}$$

Từ $u^5 = \frac{1}{2}+x$ cho ta hai nghiệm của phương trình ban đầu

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

▷ **2.28.** Đặt $\sin x = u, \cos x = v$ ta có hệ phương trình đối xứng $\begin{cases} u^2+v^2 = 1, \\ u^3+v^3 = 1. \end{cases}$

Ta có hệ trợ giúp $\begin{cases} \delta_1^2 - 2\delta_2 = 1, \\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = 1. \end{cases}$ Loại δ_2 ta nhận được $\delta_1^3 - 3\delta_1 + 2 = 0$. Phương trình này có nghiệm $\delta_1 = 1$. Sử dụng định lí Bêzu tính được các nghiệm còn lại. Ta nhận được hai cặp nghiệm

$$\begin{cases} \delta_1 = 1, \\ \delta_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = -2, \\ \delta_2 = \frac{3}{2}; \end{cases}$$

Cặp cuối cùng không cho nghiệm (u, v) thực. Với $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$ ta có cặp nghiệm

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 0, \\ v_2 = 1. \end{cases}$$

Ta nhận được hai hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

▷ **2.29.** Đặt $\sqrt[4]{629 - x} = u$, $\sqrt[4]{77 + x} = v$. Khi đó ta có hệ đối xứng sau $\begin{cases} u + v = 8, \\ u^4 + v^4 = 706. \end{cases}$ Giải hệ phương trình này ta nhận được

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 5, \\ v_2 = 3. \end{cases}$$

Từ $\sqrt[4]{629 - x} = u$ ta nhận được hai nghiệm $x_1 = 548, x_2 = 4$.

▷ **2.30.** Đặt $\sqrt[3]{8 + x} = u$, $\sqrt[3]{8 - x} = v$. Khi đó ta có hệ đối xứng sau $\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^3 = 16. \end{cases}$ Biến đổi về hệ trợ giúp $\begin{cases} \delta_1 = 1, \\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = 16. \end{cases}$ Hệ này có nghiệm $\begin{cases} \delta_1 = 1, \\ \delta_2 = -5. \end{cases}$ Từ đó ta nhận được hai nghiệm

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \\[2ex] v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \\[2ex] v_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

Từ $\sqrt[3]{8 + x} = u$ ta nhận được nghiệm của phương trình ban đầu $x_1 = 3\sqrt{21}, x_2 = -3\sqrt{21}$.

▷ **2.31.** Đặt $\sqrt{1 - x^2} = y$. Khi đó ta có hệ đối xứng

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{35}{12}. \end{cases}$$

Biến đổi về hệ trợ giúp $\begin{cases} \delta_1^2 - 2\delta_2 = 1, \\ 12\delta_1 = 35\delta_2. \end{cases}$ Hệ này có nghiệm

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{7}{5}, \\[2ex] \delta_2 = \dfrac{12}{25}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = -\dfrac{5}{7}, \\[2ex] \delta_2 = -\dfrac{12}{49}. \end{cases}$$

Từ đây ta tìm ra bốn nghiệm, nhưng chỉ có ba nghiệm thỏa mãn $y \geq 0$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5}, \\ y_1 = \dfrac{3}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{5}, \\ y_2 = \dfrac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{5}{14} - \dfrac{\sqrt{73}}{14}, \\ y_3 = \dfrac{5}{14} + \dfrac{\sqrt{73}}{14}. \end{cases}$$

Như vậy phương trình ban đầu có nghiệm

$$x_1 = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{5}{14} - \frac{\sqrt{73}}{14}.$$

▷ **2.32.** Đặt $\sqrt[3]{10 - x} = u$, $\sqrt[3]{3 - x} = -v$. Khi đó ta có hệ đối xứng sau $\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^3 = 7. \end{cases}$ Biến đổi về hệ trợ giúp $\begin{cases} \delta_1 = 1, \\ \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = 7. \end{cases}$ Hệ này có nghiệm $\begin{cases} \delta_1 = 1, \\ \delta_2 = -2. \end{cases}$ Từ đó ta nhận được hai nghiệm

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = -1, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Từ $\sqrt[3]{10 - x} = u$ ta nhận được nghiệm của phương trình ban đầu $x_1 = 2, x_2 = 11$.

▷ **2.33.** Đặt $\dfrac{19 - x}{x + 1} = y$, nghĩa là $19 - x = xy + y$, ta nhận được hệ $\begin{cases} x + y + xy = 19, \\ xy(x + y) = 84. \end{cases}$ Biến đổi về hệ trợ giúp $\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 19, \\ \delta_1\delta_2 = 84. \end{cases}$ Hệ này có nghiệm $\begin{cases} \delta_1 = 7, \\ \delta_2 = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} \delta_1 = 12, \\ \delta_2 = 7. \end{cases}$ Mỗi hệ cho hai cặp nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 6 + \sqrt{29}, \\ y_3 = 6 - \sqrt{29}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 6 - \sqrt{29}, \\ y_4 = 6 + \sqrt{29}. \end{cases}$$

Phương trình ban đầu có bốn nghiệm

$$x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6 + \sqrt{29}, x_4 = 6 - \sqrt{29}.$$

▷ **2.34.** Đặt $y = \sqrt{17 - x^2}$. Khi đó ta có hệ đối xứng $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$

Biến đổi về hệ trợ giúp $\begin{cases}\delta_1^2 - 2\delta_2 = 17,\\ \delta_1 + \delta_2 = 9.\end{cases}$ Hệ này có nghiệm

$$\begin{cases}\delta_1 = 5,\\ \delta_2 = 4;\end{cases}\qquad \begin{cases}\delta_1 = -7,\\ \delta_2 = 16.\end{cases}$$

Hệ thứ nhất cho nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 4$. Hệ thứ hai không cho các nghiệm thực x, y.

▷ **2.35.** Đặt $y = \sqrt[3]{35 - x^3}$. Khi đó ta có hệ đối xứng $\begin{cases}x^3 + y^3 = 35,\\ (x+y)xy = 30.\end{cases}$

Giải hệ phương trình với hệ trợ giúp và sau đó tìm ra hai nghiệm $x_1 = 2, x_2 = 3$.

▷ **2.41.** Ta có

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5S_2 - 6\delta_2 = 5(\delta_1^2 - 2\delta_2) - 6\delta_2 = 5\delta_1^2 - 16\delta_2$$
$$= 5\delta_1^2 - 16.\frac{1}{4}(\delta_1^2 - z) = \delta_1^2 + 4z \geq 0.$$

▷ **2.42.** Ta có

$$8(x^4 + y^4) - (x+y)^4 = 8S_4 - \delta_1^4 = 8(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) - \delta_1^4 =$$
$$= 7\delta_1^4 - 32\delta_1^2\frac{1}{4}(\delta_1^2 - z) + 16\frac{1}{16}(\delta_1^2 - z)^2 = 6\delta_1^2 z + z^2 \geq 0.$$

▷ **2.43.** Ta có

$$x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 = x^4 + y^4 - xy(x^2 + y^2) = S_4 - \delta_2 S_2 =$$
$$= \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 - \delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) = \delta_1^4 - 5\delta_1^2\delta_2 + 4\delta_2^2 =$$
$$= \delta_1^4 - 5\delta_1^2.\frac{1}{4}(\delta_1^2 - z) + 4.\frac{1}{16}(\delta_1^2 - z)^2 = \frac{3}{4}\delta_1^2 z + \frac{1}{4}z^2 \geq 0.$$

▷ **2.44.** Ta có

$$x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = \delta_1^2 - 3\delta_2 - \delta_1 + 1 =$$
$$= \delta_1^2 - 3.\frac{1}{4}(\delta_1^2 - z) - \delta_1 + 1 =$$
$$= \frac{1}{4}\delta_1^2 - \delta_1 + 1 + \frac{3}{4}z = (\frac{1}{2}\delta_1 - 1)^2 + \frac{3}{4}z \geq 0.$$

▷ **2.45.** Đặt $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$. Khi đó bất đẳng thức có dạng

$$(u+v)^8 \geq 64u^2v^2(u^2+v^2)^2.$$

Vì u, v là những số không âm nên ta chỉ cần chứng minh

$$(u+v)^4 \geq 8uv(u^2+v^2).$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned}(u+v)^4 - 8uv(u^2+v^2) &= \\ &= \delta_1^4 - 8\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) = \delta_1^4 - 8\delta_1^2\delta_2 + 16\delta_2^2 = \\ &= \delta_1^4 - 8\delta_1^2.\frac{1}{4}(\delta_1^2 - z) + 16\frac{1}{16}(\delta_1^2 - z)^2 = z^2 \geq 0.\end{aligned}$$

▷ **2.46.** Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^3+y^3}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 &= \frac{1}{2}(\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2) - \frac{1}{8}\delta_1^3 = \\ &= \frac{3}{8}\delta_1^3 - \frac{3}{2}\delta_1\delta_2 = \frac{3}{8}\delta_1 z \geq 0.\end{aligned}$$

▷ **2.47.** Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 - 6x^2y^2 &= S_4 + 2\delta_2 S_2 - 6\delta_2^2 = \\ &= \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 + 2\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) - 6\delta_2^2 = \delta_1^4 - 2\delta_1^2\delta_2 - 8\delta_2^2 = \\ &= (z + 4\delta_2)^2 - 2(z + 4\delta_2)\delta_2 - 8\delta_2^2 = z^2 + 6\delta_2 z.\end{aligned}$$

Vì $x, y \geq 0$, nên $\delta_2 \geq 0$ và $z \geq 0$. Bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

▷ **2.48.** Bất phương trình đưa về dạng $x^2 + y^2 \geq 2xy$, nghĩa là $\delta_1^2 - 2\delta_2 \geq 2\delta_2$. Từ đây phải chứng minh $\delta_1^2 \geq 4\delta_2$, nhưng điều này đúng hiển nhiên theo công thức đã tính trong ví dụ.

▷ **2.54.** Ta có $\delta_1 = x_1 + x_2 = -6$, $\delta_2 = x_1x_2 = 10$. Phương trình muốn lập $z^2 + pz + q = 0$ có các nghiệm $z_1 = x_1^3, z_2 = x_2^3$. Vì thế

$$\begin{aligned}-p &= z_1 + z_2 = x_1^3 + x_2^3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 = (-6)^3 - 3(-6)10 = -36,\\ q &= z_1z_2 = x_1^3x_2^3 = \delta_2^3 = 1000.\end{aligned}$$

Do đó phương trình cần lập là $z^2 + 36z + 1000 = 0$.

▷ **2.55.** Ta có $\delta_1 = x_1 + x_2 = -1$, $\delta_2 = x_1x_2 = -3$. Phương trình muốn lập $z^2 + pz + q = 0$ có các nghiệm $z_1 = x_1^{10}, z_2 = x_2^{10}$. Vì thế

$$\begin{aligned} p &= z_1 + z_2 = x_1^{10} + x_2^{10} \\ &= \delta_1^{10} - 10\delta_1^8\delta_2 + 35\delta_1^6\delta_2^2 - 50\delta_1^4\delta_2^3 + 25\delta_1^2\delta_2^4 - 2\delta_2^5 = 4207, \\ q &= z_1z_2 = x_1^{10}x_2^{10} = \delta_2^{10} = 59409. \end{aligned}$$

Do đó phương trình cần lập là $z^2 - 4207z + 59049 = 0$.

▷ **2.56.** Phương trình phải tìm có dạng $x^2 + px + q = 0$. Khi đó ta có $-p = x_1 + x_2 = \delta_1$, $q = x_1x_2 = \delta_2$. Giả thiết đã cho $x_1^5 + x_2^5 = 31, x_1 + x_2 = 1$ và biến đổi chúng về dạng

$$\begin{cases} \delta_1^5 - 5\delta_1^3\delta_2 + 5\delta_1\delta_2^2 = 31, \\ \delta_1 = 1. \end{cases} \quad \text{nghĩa là} \quad \begin{cases} -p^5 + 5p^3q - 5pq^2 = 31, \\ p = -1. \end{cases}$$

Từ đó ta nhận được phương trình $5q^2 - 5q - 30 = 0$ và phương trình này có nghiệm $q_1 = 3, q_2 = -2$. Như vậy ta có hai phương trình thỏa mãn điều kiện đầu bài.

$$x^2 - x + 3 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

▷ **2.57.** Ta có $\delta_1 = x_1 + x_2 = a - 2$, $\delta_2 = x_1x_2 = -(a + 1)$. Tổng bình phương của các nghiệm có dạng

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = S_2 &= \delta_1^2 - 2\delta_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 1) = \\ &= a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5. \end{aligned}$$

Từ đây thấy rằng tổng bình phương của các nghiệm có giá trị nhỏ nhất khi $a = 1$.

▷ **2.58.** Ta chỉ ra rằng $x_1^n + x_2^n$ là một số nguyên với mọi số tự nhiên n. Thật vậy, vì

$$\delta_1 = x_1 + x_2 = 6, \delta_2 = x_1x_2 = 1,$$

thì công thức (2.1) có dạng $S_n = 6S_{n-1} - S_{n-2}$ và $S_{n-1} = 6S_{n-2} - S_{n-3}$.

Ta tính được S_n:

$$S_n = 35S_{n-2} - 6S_{n-3} = -S_{n-3} + 5(7S_{n-2} - S_{n-3}).$$

Ta thấy rằng S_n và S_{n-3} đồng thời chia hết cho 5 hoặc không chia hết cho 5. Như vậy nếu S_n chia hết cho 5 thì các số $S_{n-3}, S_{n-6}, S_{n-9}, \ldots$ đều chia hết cho 5. Cuối cùng của dãy trên là một trong ba số S_1, S_2 hoặc S_3 chia hết cho 5. Nhưng ta dễ tính được $S_1 = 6, S_2 = 34, S_3 = 198$, nghĩa là không một số nào chia hết cho 5, vô lí. Suy ra tổng $S_n = x_1^n + x_2^n$ với mọi số tự nhiên n không chia hết cho 5.

▷ **2.59.** Đặt $\sqrt[4]{\alpha} = u$, $\sqrt[4]{\beta} = v$. Khi đó theo điều kiện đã cho

$$-p = \alpha + \beta = u^4 + v^4, \quad q = \alpha\beta = u^4v^4,$$

và ta phải tính $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} = u + v$. Đặt $\delta_1 = u + v, \delta_2 = uv$, ta biến đổi mối quan hệ này về dạng

$$-p = \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2, \quad q = \delta_2^4.$$

Loại δ_2 ta tìm được phương trình trùng phương

$$\delta_1^4 - 4\sqrt[4]{q}\delta_1^2 + 2\sqrt{q} + p = 0.$$

Phương trình trùng phương này ít nhất có hai nghiệm là

$$\pm\sqrt{2\sqrt[4]{q} + \sqrt{2\sqrt{q} - p}}$$

(do $2\sqrt{q} - p \geq 0$) và nhiều nhất có bốn nghiệm là

$$\pm\sqrt{2\sqrt[4]{q} \pm \sqrt{2\sqrt{q} - p}}$$

(khi $2\sqrt[4]{q} \pm \sqrt{2\sqrt{q} - p} \geq 0$). Vì δ_1 là một số dương, nên trong bốn nghiệm trên chỉ có một số dương thỏa mãn đó là trường hợp các dấu cộng. Thật vậy, từ $\alpha > 0, \beta > 0$ suy ra $p < 0, q > 0$ và $p^2 - 4q \geq 0$. Vì thế $|p| \geq 2\sqrt{q}$ nghĩa là $-p \geq 2\sqrt{q}$ và $\sqrt{2\sqrt{q} - p} \geq \sqrt{4\sqrt{q}} = 2\sqrt[4]{q}$. Như vậy trong dấu căn phải lấy dấu (+):

$$\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} = \sqrt{2\sqrt[4]{q} + \sqrt{2\sqrt{q} - p}}.$$

▷ **2.64.** Ta có

$$
\begin{aligned}
&2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4 = \\
&\quad = 2S_4 + 7\delta_2 S_2 + 9\delta_2^2 = 2(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) + 7\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) + 9\delta_2^2 = \\
&\quad = 2\delta_1^4 - \delta_1^2\delta_2 - \delta_2^2 = (\delta_2 + 2\delta_1^2)(\delta_1^2 - \delta_2) = \\
&\quad = (xy + 2(x+y)^2)((x+y)^2 - xy) = \\
&\quad = (2x^2 + 5xy + 2y^2)(x^2 + xy + y^2) = \\
&\quad = (x + 2y)(2x + y)(x^2 + xy + y^2).
\end{aligned}
$$

(Thừa số cuối cùng không phân tích được trên tập số thực).

▷ **2.65.** Ta có

$$
\begin{aligned}
&18x^4 - 21x^3y - 94x^2y^2 - 21xy^3 + 18y^4 = \\
&\quad = 18S_4 - 21\delta_2S_2 - 94\delta_2^2 = \\
&\quad = 18(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) - 21\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) - 94\delta_2^2 = \\
&\quad = 18\delta_1^4 - 93\delta_1^2\delta_2 - 16\delta_2^2 = (3\delta_1^2 - 16\delta_2)(6\delta_1^2 + \delta_2) = \\
&\quad = (3(x+y)^2 - 16xy)(6(x+y)^2 + xy) = \\
&\quad = (3x^2 - 10xy + 3y^2)(6x^2 + 13xy + 6y^2) = \\
&\quad = (x - 3y)(3x - y)(2x + 3y)(3x + 2y).
\end{aligned}
$$

▷ **2.66.** Ta có

$$
\begin{aligned}
&3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4 = 3S_4 - 8\delta_2S_2 + 14\delta_2^2 = \\
&\quad = 3(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) - 8\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) + 14\delta_2^2 = 3\delta_1^4 - 20\delta_1^2\delta_2 + 36\delta_2^2.
\end{aligned}
$$

Ta nhận được tam thức bậc hai đối với δ_2 không có nghiệm thực. Vì thế ta áp dụng phương pháp thứ hai để phân tích ra thừa số (phương pháp hệ số bất định). Đặt

$$
\begin{aligned}
&3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4 = \\
&\qquad\qquad = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2).
\end{aligned}
$$

Cho giá trị $x = y = 1$, ta nhận được $(A + B + C)^2 = 4$, nghĩa là $A + B + C = \pm 2$. Theo lí luận trong phần ví dụ ta có thể cho rằng $A + B + C = 2$.

Cho $x = 0, y = 1$ ta tìm được $A.C = 3$. Cuối cùng với $x = 1, y = -1$ ta nhận được $(A - B + C)^2 = 36$ nghĩa là $A - B + C = \pm 6$. Như vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A + B + C = 2, \\ A - B + C = \pm 6, \\ A.C = 3. \end{cases}$$

Nếu trong vế phải phương trình thứ hai ta lấy dấu (+), thì từ phương trình thứ nhất $B = -2$. Từ đó dễ tính được $A = 1, C = 3$ (hoặc là $C = 1, A = 3$). Cuối cùng ta nhận được sự phân tích

$$3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4 = (x^2 - 2xy + 3y^2)(3x^2 - 2xy + y^2).$$

▷ **2.67.** Ta có

$$\begin{aligned} 2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4 &= 2S_4 - \delta_2 S_2 + 3\delta_2^2 = \\ &= 2(\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2) - \delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) + 3\delta_2^2 = \\ &= 2\delta_1^4 - 9\delta_1^2\delta_2 + 9\delta_2^2 = (\delta_1^2 - 3\delta_2)(2\delta_1^2 - 3\delta_2) = \\ &= ((x+y)^2 - 3xy)(2(x+y)^2 - 3xy) = \\ &= (x^2 - xy + y^2)(2x^2 + xy + 2y^2). \end{aligned}$$

Những tam thức sau cùng không phân tích được trong tập các số thực.

▷ **2.68.** Ta có

$$\begin{aligned} (x+y)^5 - x^5 - y^5 = \delta_1^5 - S_5 &= \delta_1^5 - \delta_1^5 + 5\delta_1^3\delta_2 - 5\delta_1\delta_2^2 = \\ &= 5\delta_1\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2) = \\ &= 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

▷ **2.74.** Ta biến đổi theo công thức đã cho

$$\frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5} = \frac{\delta_1^7 - S_7}{\delta_1^5 - S_5} = \frac{7\delta_1^5\delta_2 - 14\delta_1^3\delta_2^2 + 7\delta_1\delta_2^3}{5\delta_1^3\delta_2 - 5\delta_1\delta_2^2} =$$
$$= \frac{7\delta_1\delta_2(\delta_1^4 - 2\delta_1^2\delta_2 + \delta_2^2)}{5\delta_1\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2)} = \frac{7\delta_1\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2)^2}{5\delta_1\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2)} = \frac{7}{5}(\delta_1^2 - \delta_2) =$$
$$= \frac{7}{5}((x+y)^2 - xy) = \frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2).$$

▷ **2.75.** Ta biến đổi theo công thức đã cho

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) =$$
$$= \frac{1}{\delta_1^2}\frac{S_2}{\delta_2^2} + \frac{2}{\delta_1^3}\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta_1^2 - 2\delta_2}{\delta_1^2\delta_2^2} + \frac{2}{\delta_1^2\delta_2} =$$
$$= \frac{\delta_1^2 - 2\delta_2 + 2\delta_2}{\delta_1^2\delta_2^2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_1^2\delta_2^2} = \frac{1}{\delta_2^2} = \frac{1}{a^2b^2}.$$

▷ **2.76.** Ta biến đổi theo công thức đã cho

$$(x+y)^4 + x^4 + y^4 = \delta_1^4 + S_4 = \delta_1^4 + \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 =$$
$$= 2\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 = 2(\delta_1^4 - 2\delta_1^2\delta_2 + \delta_2^2) =$$
$$= 2(\delta_1^2 - \delta_2)^2 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

▷ **2.77.** Ta biến đổi theo công thức đã cho

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = \delta_1^7 - S_7 = \delta_1^7 - (\delta_1^7 - 7\delta_1^5\delta_2 + 14\delta_1^3\delta_2^2 - 7\delta_1\delta_2^3) =$$
$$= 7\delta_1^5\delta_2 - 14\delta_1^3\delta_2^2 + 7\delta_1\delta_2^3 = 7\delta_1\delta_2(\delta_1^4 - 2\delta_1^2\delta_2 + \delta_2^2) =$$
$$= 7\delta_1\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2)^2 = 7xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^2.$$

▷ **2.78.** Ta kí hiệu a_n là giá trị của tổng S_n với $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Theo công thức (2.1) với giá trị $\delta_1 = \delta_2 = 1$, ta nhận được

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \text{ và } a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3}.$$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên cho kết quả $a_n = -a_{n-3}$. Tương tự,

$a_{n-3} = -a_{n-6}$. Vì thế ta nhận được

$$a_n = a_{n-6} \quad (n \geq 6).$$

Để đa thức $(x+y)^n - x^n - y^n = \delta_1^n - S_n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$, với $\delta_1 = \delta_2 = 1$ thì điều kiện cần và đủ là tổng các hệ số của đa thức (theo δ_1, δ_2) phải bằng không (xem ví dụ 2.72), nghĩa là $1 - a_n = 0$, hay nói cách khác $a_n = 1$.

Vì $a_n = a_{n-6} = a_{n-12} = \ldots$ và $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
a_{6k+1} &= a_1 = S_1 = 1,\\
a_{6k+2} &= a_2 = S_2 = -1,\\
a_{6k+3} &= a_3 = S_3 = -2,\\
a_{6k+4} &= a_4 = -a_1 = -1,\\
a_{6k+5} &= -a_2 = 1,\\
a_{6k} &= a_6 = -a_3 = 2.
\end{aligned}$$

Như vậy, quan hệ trên, $a_n = 1$ có khi và chỉ khi nếu n có dạng $6k+1$ hoặc là $6k+5$ (nghĩa là $6k \pm 1$).

▷ **2.79.** Cho đa thức $P(x)$ bậc m chia hết cho $x^2 + x + 1$, nghĩa là $P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x)$, ở đây đa thức $Q(x)$ là đa thức bậc $m-2$. Khi đó

$$P\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right) Q\left(\frac{x}{y}\right).$$

Nhân hai vế với y^m, nhận được

$$y^m P\left(\frac{x}{y}\right) = (x^2 + xy + y^2) y^{m-2} Q\left(\frac{x}{y}\right)$$

Biểu thức $y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$ và $y^{m-2} Q\left(\frac{x}{y}\right)$ không chứa y ở mẫu số, nghĩa là hai đa thức. Như vậy $y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. Ngược lại nếu $y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$, thì từ đó với $y = 1$ ta nhận được $P(x)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Như vậy, đa thức $P(x)$ bậc m chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi đa thức $y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Như vậy ta cần phải tìm giá trị n để đa thức $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. Nhưng

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = S_{2n} + \delta_2^n,$$

và để đa thức này chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ thì điều kiện cần và đủ là tổng các hệ số của đa thức này (theo δ_1, δ_2) bằng 0, với $\delta_1 = \delta_2 = 1$, nghĩa là $a_{2n} + 1 = 0$, hay là $a_{2n} = -1$. Theo kết quả của bài 2.78 suy ra phải có $2n = 6k + 2$ hoặc là $2n = 6k + 4$. Nói cách khác, phải có $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$. Đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi n không phải bội số của 3.

▷ **2.80.** Ta phải tìm những giá trị của n để đa thức $(x + y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ (xem bài 2.79). Từ kết quả bài số 2.78, khẳng định của bài toán có được với $n = 6k \pm 2, n = 6k \pm 4$.

▷ **2.81.** Ta kí hiệu những đa thức cơ sở của x, y là δ_1, δ_2, của u, v là τ_1, τ_2:

$$\delta_1 = x + y, \quad \delta_2 = xy, \quad \tau_1 = u + v, \tau_2 = uv.$$

Theo điều kiện bài ra

$$\delta_1 = \tau_1 \text{ và } \delta_1^2 - 2\delta_2 = \tau_1^2 - 2\tau_2.$$

Từ đây ta nhận được $\delta_1 = \tau_1, \delta_2 = \tau_2$. Nhưng khi đó với đa thức bất kì $\varphi(z_1, z_2)$, ta có $\varphi(\delta_1, \delta_2) = \varphi(\tau_1, \tau_2)$. Theo định lí 2.1, nếu $P(x, y)$ là một đa thức đối xứng bất kì và $P(x, y) = \varphi(\delta_1, \delta_2)$ là biểu diễn của nó theo các đa thức đối xứng cơ sở, thì

$$P(x, y) = \varphi(\delta_1, \delta_2) = \varphi(\tau_1, \tau_2) = P(u, v).$$

Trường hợp riêng với mọi n

$$x^n + y^n = u^n + v^n.$$

▷ **2.82.** Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$\delta_1 = \delta_1^2 - 3\delta_2.$$

Bởi vì x, y phải là số thực, nên $4\delta_2 \leq \delta_1^2$ và vì thế

$$\delta_1^2 - \delta_1 = 3\delta_2 \leq \frac{3}{4}\delta_1^2,$$

nghĩa là

$$\frac{1}{4}\delta_1^2 - \delta_1 \leq 0 \text{ hay } \delta_1(\delta_1 - 4) \leq 0.$$

Từ đây suy ra $0 \leq \delta_1 \leq 4$. Nên nhớ rằng $3\delta_2 = \delta_1^2 - \delta_1$, ta nhận được những khả năng sau đây

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0; \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 0;$$

$$\delta_1 = 2, \quad \delta_2 = \frac{2}{3}; \quad \delta_1 = 3, \quad \delta_2 = 2; \quad \delta_1 = 4, \quad \delta_2 = 4.$$

Trường hợp thứ ba bị loại trừ do x, y phải nguyên, nghĩa là δ_1, δ_2 phải nguyên. Những trường hợp còn lại cho ta các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình cho ta các cặp nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 0, \\ y_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = 1, \\ y_5 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_6 = 2, \\ y_6 = 2. \end{cases}$$

Bằng cách kiểm tra lại, ta thấy các cặp trên thực sự là nghiệm của phương trình đã cho.

▷ **2.83.** Ta phải chứng minh rằng đa thức đối xứng

$$(a+b)^n - a^n - b^n - 3(ab)^{\frac{n-1}{2}}(a+b)$$

với $\delta_1 = \delta_2 = 1$ là đa thức (theo δ_1, δ_2) có tổng các hệ số bằng 0 (xem ví dụ đã giải), nghĩa là $1 - a_n - 3 = 0$ hay $a_n = -2$. Do đó $n = 6k + 3$ (bài tập 2.78). Từ giả thiết suy ra điều cần chứng minh.

▷ **2.89.** Ta có

$$10z^6 + z^5 - 47z^4 - 47z^3 + z^2 + 10z =$$
$$= z(10z^5 + z^4 - 47z^3 - 47z^2 + z + 10).$$

Đa thức trong ngoặc ở vế phải là đa thức bậc lẻ với hệ số tự do khác không, nên theo định lí 2.4 nó chia hết cho $z + 1$. Ta thực hiện chia đa thức (theo sơ đồ Horner) và được:

$$
\begin{aligned}
10z^6 + z^5 - 47z^4 - 47z^3 + z^2 + 10z &= \\
&= z(z+1)(10z^4 - 9z^3 - 38z^2 - 9z + 10) = \\
&= z^3(z+1)\left(10\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 9\left(z + \frac{1}{z}\right) - 38\right) = \\
&= z^3(z+1)(10(\delta^2 - 2) - 9\delta - 38) = \\
&= z^3(z+1)(10\delta^2 - 9\delta - 58).
\end{aligned}
$$

Cho đẳng thức sau cùng bằng không ta tìm được hai nghiệm $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = -1$ và phương trình bậc hai

$$10\delta^2 - 9\delta - 58 = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là $\delta = -2, \delta = \frac{29}{10}$. Từ đây dẫn đến phương trình

$$z + \frac{1}{z} = -2, \quad z + \frac{1}{z} = \frac{29}{10}.$$

Cùng với hai nghiệm đã nhận trước đó, ta nhận được tất cả 6 nghiệm cho phương trình ban đầu:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0, z_4 = z_5 = z_6 = -1, z_7 = \frac{5}{2}, z_8 = \frac{2}{5}.$$

▷ **2.90.** Ta có

$$
\begin{aligned}
az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = z^2\left(a\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c\right) &= \\
= z^2(a(\delta^2 - 2) + b\delta + c) = z^2(a\delta^2 + b\delta + (c - 2a)).
\end{aligned}
$$

Vì $a \neq 0$ nên z không là nghiệm của phương trình ban đầu và ta giải phương trình đối với δ:

$$a\delta^2 + b\delta + (c - 2a) = 0.$$

Nghiệm của phương trình đã biết thỏa mãn bốn phép tính số học và căn thức. Nghiệm của phương trình ban đầu được giải bằng hai phương trình

$$z + \frac{1}{z} = \delta,$$

ở đây δ là nghiệm thứ nhất hoặc nghiệm thứ hai của phương trình trên. Nghiệm của những phương trình này cũng tìm được nhờ bốn phép tính và căn thức.

▷ **2.91.** Vế trái của phương trình chia hết cho $z+1$ (định lí 2.4) và thương là một đa thức hệ số đối xứng bậc bốn (với hệ số của số hạng có bậc lớn nhất là a). Vì thế bài tập 2.90 được áp dụng cho đa thức này và nghiệm phương trình đã cho biểu diễn bởi bốn phép tính và căn thức.

▷ **2.92.** Ta đưa biến mới $\delta = z + \frac{1}{z}$, phương trình hệ số đối xứng có số hạng tự do khác không được đưa về phương trình bậc ba đối với δ. Nếu z_1 là một nghiệm đã biết của phương trình ban đầu ($z_1 \neq 0$), thì $\delta = z_1 + \frac{1}{z_1}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đối với δ. Sử dụng định lí Bézout ta đưa phương trình bậc ba đối với δ về phương trình bậc hai mà nó có nghiệm biểu diễn như bốn phép tính số học và căn thức.

▷ **2.93.** Đa thức hệ số đối xứng bậc lẻ (với số hạng tự do $a_0 \neq 0$) có thể viết dưới dạng

$$P(z) = a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1(z^{2k} + z) + a_2(z^{2k-1} + z^2) + \cdots$$

Tính giá trị của đa thức tại $z = -1$:

$$P(-1) = a_0(-1+1) + a_1(1-1) + a_2(-1+1) + \cdots = 0.$$

Như vậy $P(-1) = 0$. Theo định lí Bézout đa thức đã cho chiá hết cho $z+1$.

Chương 3

BẤT ĐẲNG THỨC CỦA CÁC DÃY SỐ ĐỒNG THỨ TỰ

Trong hai chương trước, ta đã sử dụng rất nhiều đại lượng bất biến *trong bài toán đã ra và dựa vào đó ta giải được những lớp bài toán đặc* trưng. Chuyên đề này ta chứng minh một số bất đẳng thức mà trong đó các biến tham gia có vai trò như nhau. Có nhiều bài toán có những biểu thức không đổi đối với sự chuyển đổi các biến cho nhau. Trong trường hợp như vậy, người ta thường cho những biến sắp xếp theo một thứ tự nào đó mà không ảnh hưởng gì tới kết luận *của bài toán. Việc giải các bài* toán bất đẳng thức có những biến số được sắp xếp theo một thứ tự nào đó là rất thuận tiện và có thể tổng quát hóa được. Trong chuyên đề này, ta nghiên cứu việc chứng minh bất đẳng thức với kĩ thuật tạo ra các bộ số được sắp thứ tự và sau đó nhờ kĩ thuật này chứng minh một số bất đẳng thức nổi tiếng như : Cauchy, Chebyshev, ...

Ta lấy một ví dụ có tính chất thực tế: *Mười người xếp hàng lấy nước vào các thùng. Mỗi thùng đòi hỏi thời gian lấy đầy nước khác nhau. Cần sắp xếp thứ tự hàng đợi như thế nào để tổ hợp thời gian chờ đợi của mười người là nhỏ nhất?*

Một trực giác cho ta lời khuyên là xếp theo thứ tự tăng của thời gian làm đầy nước các thùng nước. Để kiểm nghiệm cảm giác này ta xem xét như sau: Kí hiệu $T_1 < T_2 < \ldots < T_{10}$ các thời gian cần thiết làm đầy nước các thùng.

Nếu người lấy nước được sắp như lời khuyên trên thì tổ hợp thời gian chờ đợi phải cho là $T = 10T_1 + 9T_2 + \cdots + T_{10}$. Với những thứ tự hàng đợi khác, tổ hợp của thời gian chờ đợi sẽ là $S = 10S_1 + 9S_2 + \cdots + S_{10}$, ở đây $(S_1, S_2, \ldots, S_{10})$ là một hoán vị của $(T_1, T_2, \ldots, T_{10})$.

Hai bộ 10 số khác nhau luôn luôn tồn tại một chỉ số i sao cho $S_i \neq T_i$. Khi đó $S_j = T_i < S_i$ với số $j > i$ nào đó. Ta gán lại $S'_i = S_j, S'_j = S_i$ và $S'_k = S_k$ với $k \neq i, j$. Đặt $S' = 10S'_1 + 9S'_2 + \cdots + S'_{10}$. Khi đó

$$\begin{aligned} S - S' &= (11 - i)(S_i - S'_i) + (11 - j)(S_j - S'_j) = \\ &= (S_i - S_j)(j - i) > 0. \end{aligned}$$

Do đó sự thay đổi thứ tự theo cách trên cho kết quả thời gian chờ giảm đi thực sự.

Nếu $(S'_1, S'_2, \ldots, S'_{10}) \neq (T_1, T_2, \ldots, T_{10})$, thì quá trình thay đổi thứ tự trên được lặp lại. Ta sẽ đạt tới $(T_1, T_2, \ldots, T_{10})$ nhiều nhất là sau 9 lần. Vì tổ hợp thời gian chờ đợi đều giảm sau mỗi bước thực hiện đổi thứ tự, nên T thực sự là giá trị nhỏ nhất cho thời gian chờ đợi.

Trước khi đi vào tổng quát hóa bài toán này ta xét bài toán có số biến ít hơn và các ứng dụng của nó.

3.1. Cặp thứ tự hai hoặc ba số

Xuất phát từ một bất đẳng thức đơn giản và dễ hiểu chúng ta có thể áp dụng và giải hàng loạt bài toán.

Mệnh đề 3.1. *Cho* a_1, a_2, b_1, b_2 *là những số thực. Nếu* $a_1 \geq a_2$ *và* $b_1 \geq b_2$, *thì*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Bất đẳng thức xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $a_1 = a_2$ *hoặc* $b_1 = b_2$.

Chứng minh. Chứng minh được suy ra từ bất đẳng thức $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0$. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2$ hoặc $b_1 = b_2$. ☺

Mệnh đề trên còn đúng với $a_1 \leq a_2$ và $b_1 \leq b_2$. Để thuận tiện, hai bộ số (a_1, a_2) và (b_1, b_2) gọi là *đồng thứ tự*, nếu chúng thỏa mãn đồng thời $a_1 \geq a_2$ và $b_1 \geq b_2$ hoặc đồng thời $a_1 \leq a_2$ và $b_1 \leq b_2$.

Từ mệnh đề 3.1 cho thấy với những bộ (a_1, a_2) hoặc (b_1, b_2) đồng thứ tự, ta thay đổi những số hạng trong tổng $a_1 b_1 + a_2 b_2$ bằng cách thay đổi các phần tử cùng bộ thì tổng sẽ nhỏ đi. Chỉ từ những ý tưởng đơn giản như vậy, nhưng ta có thể áp dụng giải các bài toán.

Ví dụ 3.1. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^3 + b^3 \geq a^2 b + b^2 a,$$

ở đây a, b *là những số dương.*

Lời giải. Một trong những số a và b sẽ lớn hơn hoặc bằng số còn lại. Biểu thức ở vế trái và vế phải của bất đẳng thức đã cho đều đối xứng với biến (nghĩa là bất đẳng thức không thay đổi khi ta thay đổi chỗ của a và b cho nhau), nên ta chỉ cần xét trường hợp $a \geq b$. Khi đó $a^2 \geq b^2$ và suy ra bộ số (a, b) và (a^2, b^2) là đồng thứ tự. Sử dụng mệnh đề 3.1 và ta nhận được

$$a^3 + b^3 = a^2a + b^2b \geq a^2b + b^2a. \qquad ☺$$

Ví dụ 3.2 (IMO 1964). *Cho* a, b, c *là những số dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đối xứng theo các thông số a, b, c (nghĩa là bất đẳng thức không biến đổi khi ta thay đổi chỗ của các biến). Bởi thế ta có thể cho rằng $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = a(a^2 + bc) + b(b^2 + ac) + c(c^2 + ab).$$

Ta áp dụng mệnh đề 3.1 cho các bộ số đồng thứ tự(a, b) và $(a^2 + bc, b^2 + ac)$ cũng như (c, a) và (c, b). Vế bên phải của đẳng thức trên là

$$a(a^2+bc)+b(b^2+ac)+c(c^2+ab) \geq a^2b+ca^2+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a. \qquad ☺$$

Ví dụ 3.3 (IMO 1984). *Cho* a, b, c *là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì. Chứng minh rằng*

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0.$$

Hãy xác định trường hợp xảy ra dấu bằng.

Lời giải. Bất đẳng thức đầu bài tương đương với bất đẳng thức

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \qquad (3.1)$$

Bất đẳng thức này là vòng quanh theo các biến (nghĩa là bất đẳng thức không thay đổi khi đổi chỗ vòng tròn theo các biến). Do vậy, không mất tính tổng quát ta có thể cho rằng trong bộ ba (a, b, c) số a là lớn nhất. Từ đó dễ thấy trong bộ (bc, ac, ab) số nhỏ nhất là bc. Trong bộ $(a^2 + bc, b^2 + ac, c^2 + ab)$ số lớn nhất là $a^2 + bc$, điều này được suy ra từ những bất đẳng thức tam giác (với chú ý a, b, c là những độ dài các cạnh của một tam giác)

$$a^2 + bc \geq b^2 + ac \Leftrightarrow (a - b)(a + b - c) \geq 0,$$

$$a^2 + bc \geq c^2 + ab \Leftrightarrow (a - c)(a + c - b) \geq 0.$$

Ta xét biểu thức

$$A = bc(bc + a^2) + ac(ac + b^2) + ab(ab + c^2).$$

Nếu trong biểu thức ở số hạng thứ hai và thứ ba ta đổi chỗ của những thừa số ac và ab, thì theo mệnh đề 3.1 ta sẽ nhận được tổng lớn hơn, vì bộ số (ac, ab) và $(ab + c^2, ac + b^2)$ là đồng thứ tự (điều này dễ kiểm tra, bạn đọc tự làm). Khi đó

$$A \leq bc(bc + a^2) + ab(ac + b^2) + ac(ab + c^2).$$

Bây giờ ta lại thay đổi những thừa số trong số hạng thứ nhất và thứ hai trong đẳng thức và áp dụng mệnh đề 3.1 với những bộ số (bc, ab) và $(ac + b^2, bc + a^2)$ là đồng thứ tự:

$$A \leq ab(bc + a^2) + bc(ac + b^2) + ac(ab + c^2).$$

Ta nhận được

$$\begin{aligned} A &= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 \\ &\leq a^3b + b^3c + c^3a + a^2bc + ab^2c + abc^2. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức (3.1).

Sự đổi chỗ những số hạng đã thực hiện hai lần. Đẳng thức chỉ xảy ra trong những trường hợp: 1) $ac = ab$ hoặc là $ac + b^2 = ab + c^2$ và 2) $ab = bc$ hoặc là $bc + a^2 = ac + b^2$.

Từ đó suy ra $a = b = c$, nghĩa là đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác đã cho là đều. ☺

Ví dụ 3.4. *Nếu* a, b, c *là những độ dài các cạnh của tam giác bất kì. Hãy chứng minh bất đẳng thức*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bất đẳng thức là B và ta biến đổi thành dạng:

$$B = 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) = \frac{a^2+bc}{ab}+\frac{c^2+ab}{ac}+\frac{b^2+ac}{bc}.$$

Bất đẳng thức có tính vòng quanh theo các biến. Ta có thể cho a là cạnh lớn nhất. Với b, c ta xét hai trường hợp: $b \geq c$ và $b \leq c$.

Trường hợp $b \geq c$: Ta dễ thấy rằng những bộ $\left(\frac{1}{ac}, \frac{1}{bc}\right)$ và (c^2+ab, b^2+ac) là đồng thứ tự. Khi đó ta thay đổi những thừa số $\frac{1}{ac}$ và $\frac{1}{bc}$ trong số hạng thứ hai và thứ ba trong tổng B sẽ dẫn đến tổng nhỏ hơn.

$$B \geq \frac{a^2+bc}{ab}+\frac{c^2+ab}{bc}+\frac{b^2+ac}{ac} = \frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1+\left(\frac{bc}{ab}+\frac{b^2}{ac}\right).$$

Bây giờ lại xét những bộ $\left(\frac{1}{ab}, \frac{1}{ac}\right)$ và (bc, b^2) là đồng thứ tự và sử dụng mệnh đề 3.1 cùng với chú ý $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, ta nhận được

$$B \geq \frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1+2\frac{b}{a} \geq \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3.$$

Trường hợp $b \leq c$: Thay đổi những thừa số cần thực hiện trong số hạng thứ nhất và thứ hai của tổng B, ta cũng suy ra điều cần chứng minh.

☺

Ta thấy rằng mệnh đề 3.1 được phát biểu cho hai biến số, nhưng nó có thể áp dụng cho những bất đẳng thức có ba biến số. Bây giờ ta xét tương tự mệnh đề 3.1 cho bộ ba số.

Hai bộ ba số $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ và $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ gọi là *đồng thứ tự*, nếu chúng thỏa mãn đồng thời $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ và $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ hoặc đồng thời $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ và $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Hai bộ ba số $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ và $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ gọi là *nghịch đảo thứ tự*, nếu chúng thỏa mãn $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ và $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ hoặc $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ và $b_1 \geq b_2 \geq b_3$.

Ví dụ: Cho ba số nguyên dương a, b, c bất kì thì ta có thể sắp xếp chúng theo thứ tự $a \geq b \geq c$ (hoặc $a \leq b \leq c$). Khi đó hai bộ ba số (a, b, c) và (a^3, b^3, c^3) là đồng thứ tự, còn hai bộ ba số (a, b, c) và $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ là nghịch đảo thứ tự.

Mệnh đề 3.2. *Cho hai bộ ba số thực* (a_1, a_2, a_3) *và* (b_1, b_2, b_3). *Kí hiệu* $S_{(i_1,i_2,i_3)} = a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + a_3b_{i_3}$, *ở đây* (i_1, i_2, i_3) *là hoán vị của* $(1, 2, 3)$. *Khi đó*

(a) Nếu hai bộ ba số là đồng thứ tự thì các bất đẳng thức sau đúng

$$S_{(1,2,3)} \geq S_{(i_1,i_2,i_3)} \geq S_{(3,2,1)}.$$

(b) Nếu hai bộ ba số là nghịch đảo thứ tự thì các bất đẳng thức sau đúng

$$S_{(1,2,3)} \leq S_{(i_1,i_2,i_3)} \leq S_{(3,2,1)}.$$

Các bất đẳng thức trên xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3$ *hoặc* $(i_1, i_2, i_3) = (1,2,3)$ *(đối với bất đẳng thức vế trái) và* $(i_1, i_2, i_3) = (3, 2, 1)$ *(đối với bất đẳng thức vế phải).*

Chú ý: Ta hiểu hai bộ số $(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ khi $x_i = y_i$ với $i = 1, 2, ..., n$.

Chứng minh. (a) Giả sử hai bộ số đồng thứ tự: $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ và $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Từ mệnh đề 3.1, ta áp dụng lần lượt cho những bộ đồng thứ tự: (a_2, a_3) và (b_2, b_3); (a_1, a_2) và (b_1, b_3); (a_2, a_3) và (b_1, b_2), suy ra những bất đẳng thức

$$\begin{aligned} S_{(1,2,3)} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 \\ &\geq a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 \geq a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 = S_{(3,2,1)}, \end{aligned}$$

$$S_{(1,2,3)} \geq S_{(1,3,2)} \geq S_{(3,1,2)} \geq S_{(3,2,1)}.$$

Tương tự ta cũng nhận được những bất đẳng thức sau

$$S_{(1,2,3)} \geq S_{(2,1,3)} \geq S_{(2,3,1)} \geq S_{(3,2,1)}.$$

Như vậy với sáu tổng được tạo bằng các bộ $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ và $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ ta kết luận tổng lớn nhất là $S_{(1,2,3)} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, tổng nhỏ nhất là $S_{(3,2,1)} = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$. Suy ra

$$S_{(1,2,3)} \geq S_{(i_1,i_2,i_3)} \geq S_{(3,2,1)}.$$

Bạn đọc dễ thấy đẳng thức xảy khi và chỉ khi $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3)$ (đối với bất đẳng thức vế trái) và $(i_1, i_2, i_3) = (3, 2, 1)$ (đối với bất đẳng thức vế phải).

(b) Nếu những bộ ba số (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) là nghịch đảo thứ tự , thì (a_1, a_2, a_3) và $(b_1', b_2', b_3') = (b_3, b_2, b_1)$ là những bộ ba đồng thứ tự. Theo phần (a), tổng

$$S_{(1,2,3)} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1b_3' + a_2b_2' + a_3b_1'$$

là nhỏ nhất và tổng

$$S_{(3,2,1)} = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 = a_1b_1' + a_2b_2' + a_3b_3'$$

là lớn nhất. Tương tự phần (a) suy ra điều cần chứng minh. ☺

Từ mệnh đề 3.2 ta rút ra những chú ý sau đây: Với bộ ba đồng thứ tự (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3), tổng $S_{(1,2,3)} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ là lớn nhất. Sự chuyển đổi những thừa số là những số trong cùng một bộ ba dẫn đến tổng nhỏ hơn.

Bây giờ ta có thể áp dụng mệnh đề 3.2 cho một số ví dụ đã xét:

Cách giải thứ hai cho ví dụ 3.2: Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$$

và giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó

$$c(a+b-c)\ge b(c+a-b)\ge a(b+c-a),$$

vì $c(a+b-c)-b(c+a-b)=(b-c)(b+c-a)\ge 0$, bất đẳng thức thứ hai chứng minh tương tự. Như vậy hai bộ số (a,b,c) và $(c(a+b-c), b(c+a-b), a(b+c-a))$ đồng thứ tự. Theo mệnh đề 3.2, ta có

$$\begin{aligned}
&a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\\
&\qquad\le ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c),\\
&a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\\
&\qquad\le ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).
\end{aligned}$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên, vế phải rút gọn còn $6abc$. Từ đó, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Cách giải thứ hai cho ví dụ 3.3: Từ a, b và c là các cạnh của tam giác, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

Khi đó $a(b+c-a)\le b(c+a-b)\le c(a+b-c)$. Điều này chứng minh như phần trên. Ta cũng có $\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}\le\frac{1}{c}$. Như vậy, hai bộ số $(a(b+c-a), b(c+a-b), c(a+b-c))$ và $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ là đồng thứ tự. Theo mệnh đề 3.2, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}a(b+c-a)+\frac{1}{a}b(c+a-b)+\frac{1}{b}c(a+b-c)\\
&\qquad\le\frac{1}{a}a(b+c-a)+\frac{1}{b}b(c+a-b)+\frac{1}{c}c(a+b-c)\\
&\qquad= a+b+c.
\end{aligned}$$

Rút gọn bất đẳng thức trên thành $\frac{1}{c}a(b-a)+\frac{1}{a}b(c-b)+\frac{1}{b}c(a-c)\le 0$, bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.5. *Chứng minh rằng với mọi số dương* a, b, c *thì*

$$a^4+b^4+c^4\ge a^3b+b^3c+c^3a.$$

Lời giải. Do tính đối xứng của các biến trong bất đẳng thức, ta có thể giả thiết là $a\le b\le c$. Khi đó bộ ba (a,b,c) và (a^3,b^3,c^3) là đồng thứ tự và theo mệnh đề 3.2 sự thay đổi những thừa số trong cùng một bộ dẫn đến tổng nhỏ hơn. Suy ra

$$a^4+b^4+c^4=a^3a+b^3b+c^3c\ge a^3b+b^3c+c^3a.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ☺

Ví dụ 3.6. *Chứng minh rằng với mọi số dương* a, b, c *thì*

$$a^5b+b^5c+c^5a\ge a^4bc+ab^4c+abc^4.$$

Lời giải. Do tính đối xứng của các biến trong bất đẳng thức, ta có thể giả thiết là $a\le b\le c$. Khi đó những bộ ba (a^4,b^4,c^4) và (bc,ac,ab) là nghịch đảo thứ tự. Theo mệnh đề 3.2 có tổng $S=a^4bc+ab^4c+abc^4$ là nhỏ nhất. Suy ra

$$a^4bc+ab^4c+abc^4\le a^4ab+b^4bc+c^4ac=a^5b+b^5c+c^5a.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ☺

Ví dụ 3.7. *Chứng minh rằng với mọi số dương* x, y, z *thì*

$$xy^3+yz^3+zx^3\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2.$$

Lời giải. Do tính đối xứng của các biến trong bất đẳng thức, ta có thể giả thiết $x\le y\le z$. Khi đó những bộ ba (x^2,y^2,z^2) và (yz,xz,xy) là nghịch đảo thứ tự. Theo mệnh đề 3.2 có tổng $S = x^2yz + y^2xz + z^2xy$ là nhỏ nhất. Một trong những cách chuyển thừa số cho ta tổng $xy^3 + yz^3 + zx^3$. Suy ra

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq x^2yz + y^2xz + z^2xy.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. ☺

Ví dụ 3.8. *Chứng minh rằng với mọi số dương* a, b, c *thì*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

Lời giải. Những bộ ba (a, b, c) và $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ là nghịch đảo thứ tự. Theo mệnh đề 3.2 suy ra

$$a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},$$

nghĩa là

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3. \tag{3.2}$$

Ngoài ra

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right). \tag{3.3}$$

Bằng cách áp dụng mệnh đề 3.2 đối với những bộ đồng thứ tự $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ và $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ ta nhận được

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}. \tag{3.4}$$

Từ (3.2), (3.3) và (3.4) suy ra

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right) \leq \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right)^2 \leq 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Sau khi giản ước hai vế cho 3 ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh. ☺

BÀI TẬP

Bằng phương pháp những bộ dãy số đồng thứ tự, hãy làm những bài tập sau với a, b, c là những số dương (lời giải và gợi ý ở trang 166):

▷ **3.9.** Chứng minh rằng $a^a b^b \geq a^b b^a$.

▷ **3.10.** Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{2} \geq a^{\frac{b}{a+b}} b^{\frac{a}{a+b}}.$$

▷ **3.11.** Chứng minh rằng $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

▷ **3.12.** Chứng minh rằng $2a^{15} + 3b^{10} \geq 5a^6 b^6$.

▷ **3.13.** Chứng minh rằng $4a^{21} + 3b^{14} \geq 7a^{12} b^6$.

3.2. TỔNG QUÁT HÓA

Trong phần này ta tổng quát mệnh đề 3.1 và mệnh đề 3.2 cho hai dãy hữu hạn số thực. Trước tiên ta đưa vào định nghĩa:

Định nghĩa 3.1. Hai bộ số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ $(n \geq 2)$ gọi là *đồng thứ tự*, nếu chúng thỏa mãn đồng thời $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ hoặc đồng thời $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Hai bộ số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ $(n \geq 2)$ gọi là *nghịch đảo thứ tự*, nếu chúng thỏa mãn đồng thời $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ hoặc đồng thời $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$.

Kí hiệu $S_{(i_1, i_2, ..., i_n)} = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$, ở đây bộ số $(i_1, i_2, ..., i_n)$ là hoán vị của bộ số $(1, 2, ..., n)$.

Định lí 3.1. *(a) Cho hai bộ số thực* $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n)$ $(n \geq 2)$ *đồng thứ tự. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau*

$$S_{(1,2,...,n)} \geq S_{(i_1,i_2,...,i_n)} \geq S_{(n,n-1,...,1)},$$

với mọi $(i_1, i_2, ..., i_n)$ *là hoán vị của* $(1, 2, ..., n)$.

(b) Cho hai bộ số thực $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n)$ $(n \geq 2)$ *nghịch đảo thứ tự. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau*

$$S_{(1,2,...,n)} \leq S_{(i_1,i_2,...,i_n)} \leq S_{(n,n-1,...,1)},$$

với mọi $(i_1, i_2, ..., i_n)$ *là hoán vị của* $(1, 2, ..., n)$.

Các bất đẳng thức ở (a) và (b) xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$ *hoặc* $(i_1, i_2, ..., i_n) = (1, 2, ..., n)$ *(đối với bất đẳng thức vế trái) và* $(i_1, i_2, ..., i_n) = (n, n-1, ..., 2, 1)$ *(đối với bất đẳng thức vế phải).*

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp (a) với hai bộ số đồng thứ tự $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, còn các trường hợp khác chứng minh tương tự. Ta sẽ chứng minh định lí bằng phương pháp quy nạp theo n. Với $n = 2$, khẳng định được chứng minh trong mệnh đề 3.1. Ta giả thiết định lí đúng với $n - 1$ $(n \geq 3)$.

Ta sẽ chứng minh tổng lớn nhất là

$$S_{(1,2,...,n)} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Thật vậy, nếu trong tổng $S_{(i_1,i_2,...,i_n)} = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$ có $i_1 = 1$, thì khẳng định suy ra trực tiếp từ giả thiết quy nạp. Cho $i_1 \neq 1$ và từ mệnh đề 3.1 ta nhận được

$$a_1 b_{i_1} + a_{j_1} b_1 \leq a_1 b_1 + a_{j_1} b_{i_1} \text{ với } j_1 = 2, 3, 4, .., n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_{j_1}$ hoặc $(b_{i_1}, b_1) = (b_1, b_{i_1})$. Theo giả thiết quy nạp cho những dãy số $a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq a_n$ và $b_2 \leq ... \leq b_{n-1} \leq b_n$ ta có

$$a_2 b_{i_2} + \cdots + a_{j_1} b_{i_1} + \cdots + a_n b_{i_n} \leq a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_2 = a_3 = \ldots = a_n$ hoặc $(b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}) = (b_2, b_3, \ldots, b_n)$. Khi đó

$$\begin{aligned} a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_{j_1} b_1 + \cdots + a_n b_{i_n} &\leq \\ \leq a_1 b_1 + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_{j_1} b_{i_1} + \cdots + a_n b_{i_n} & \\ \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = S_{(1,2,\ldots,n)}. & \end{aligned}$$

Như vậy ta đã chứng minh tổng lớn nhất là $S_{(1,2,\ldots,n)}$. Kết hợp các trường hợp đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ hoặc $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được tổng nhỏ nhất là $S_{(n,n-1,\ldots,1)} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$. ☺

Hệ quả 1: *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số thực và $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ là hoán vị của $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Khi đó*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Hệ quả 2: *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số thực dương và $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ là hoán vị của $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Khi đó có*

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n.$$

Ví dụ 3.14. *Cho $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ và $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ là hai bộ số thực. Chứng minh rằng nếu $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là hoán vị bất kì của các số $y_1, y_2, \ldots, y_n$, thì*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

Lời giải. Theo giả thiết ta có

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$

và theo định lí 3.1 bất đẳng thức trên đúng. ☺

Ví dụ 3.15. *Cho $2n$ số dương $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$. Chứng minh rằng tổng*

$$S = a_1 a_{2n} + a_2 a_{2n-1} + \dots + a_n a_{n+1}$$

có giá trị nhỏ nhất trong số tổng những cặp trong những số đã cho.

Lời giải. 1) *Cách thứ nhất:* Sử dụng định lí 3.1 với hai bộ số đồng thứ tự $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(a_{n+1}, \dots, a_{2n})$ cho kết quả phải chứng minh.

2) *Cách thứ hai:* Cũng như chứng minh định lí 3.1, ta dùng phương pháp quy nạp toán học:

Với $n = 1$ khẳng định đúng là hiển nhiên vì không có hoán vị khác của các số.

Giả thiết rằng khẳng định đúng với $2n$ số. Ta sẽ chứng minh khẳng định cũng đúng với $2(n+1)$ số: $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n} < a_{2n+1}$.

Dễ chứng minh được kết hợp hai số a_0 và a_{2n+1} nhận giá trị nhỏ hơn là chúng kết hợp với các số khác. Thật vậy, $a_0 a_{2n+1} + a_k a_\ell < a_0 a_k + a_{2n+1} a_\ell$ bởi vì $(a_\ell - a_0)(a_{2n+1} - a_k) > 0$.

Vì thế tổng nhỏ nhất của những tích hai số có dạng $a_0 a_{2n+1} + \dots$. Nhưng theo giả thiết quy nạp: Với $2n$ số thì tổng của tích các cặp số có giá trị nhỏ nhất là $a_1 a_{2n} + a_2 a_{2n-1} + \dots + a_n a_{n+1}$. Như vậy khẳng định đúng với mọi n. ☺

Chú ý: Bằng cách chứng minh tương tự hoặc dùng định lí 3.1 ta chứng minh được những khẳng định: Tổng của những tích các cặp số dương có giá trị lớn nhất là

$$S = a_1 a_2 + a_3 a_4 + \dots + a_{2n-1} a_{2n}.$$

Bằng phương pháp như chứng minh bài trên cho tích của các cặp tổng hai số của dãy số.

Ví dụ 3.16. *Cho* $2n$ *số dương* $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$. *Chứng minh rằng tổng*

$$S = (a_1 + a_{2n})(a_2 + a_{2n-1})\dots(a_n + a_{n+1})$$

có giá trị lớn nhất trong số tích những cặp trong những số đã cho.

Lời giải. Dùng phương pháp quy nạp theo n. Với $n = 1$, khẳng định đúng là hiển nhiên vì không có tổ hợp khác của tổng.

Giả sử khẳng định đúng với $2n$ số. Ta sẽ chứng minh khẳng định cũng đúng với $2(n+1)$ số: $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n} < a_{2n+1}$.

Dễ chứng minh kết hợp tổng hai số a_0 và a_{2n+1} nhận giá trị lớn hơn là chúng kết hợp với các số khác. Thật vậy, với $k, \ell \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ ta có

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_{2n+1})(a_k + a_\ell) - (a_0 + a_k)(a_{2n+1} + a_\ell) \\
&\quad = (a_0a_k + a_0a_\ell + a_{2n+1}a_k + a_{2n+1}a_\ell) - \\
&\qquad\qquad (a_0a_{2n+1} + a_0a_\ell + a_ka_{2n+1} + a_ka_\ell) \\
&\quad = a_0(a_k - a_{2n+1}) + a_\ell(a_{2n+1} - a_k) = (a_{2n+1} - a_k)(a_\ell - a_0) \geq 0.
\end{aligned}$$

Vì thế tích lớn nhất của những tổng hai số có dạng $(a_0 + a_{2n+1})\dots(a_n + a_{n+1})$. Nhưng theo giả thiết quy nạp: Với $2n$ số thì tích của tổng các cặp số có giá trị lớn nhất là $(a_1 + a_{2n})(a_2 + a_{2n-1})\dots(a_n + a_{n+1})$. Như vậy khẳng định đúng với mọi n. ☺

Chú ý: Bằng cách chứng minh tương tự cho khẳng định: Tích của những tổng theo các cặp số dương có giá trị nhỏ nhất là

$$S = (a_1 + a_2)(a_3 + a_4)\dots(a_{2n-1} + a_{2n}).$$

Ví dụ 3.17 (IMO 1978). *Cho* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *là những số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng*

$$c_1 + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Lời giải. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số c_i được xếp theo thứ tự tăng dần. Vì a_i là những số nguyên dương khác nhau, ta có $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, ..., a_n \geq n$ và $1 > \frac{1}{2^2} > \cdots > \frac{1}{n^2}$. Như vậy hai bộ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $\left(1, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}\right)$ là nghịch đảo thứ tự. Theo định lí 3.1 ta có

$$c_1 + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{n^2} \geq a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$ ☺

Ví dụ 3.18 (Mỹ 1974). *Nếu a, b, c là những số dương, thì bất đẳng thức sau đúng*

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đối xứng theo các thông số a, b, c, do đó ta có thể cho rằng $a \leq b \leq c$, khi đó $\ln a \leq \ln b \leq \ln c$. Theo định lí 3.1:

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq a\ln a + b\ln b + c\ln c,$$

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq a\ln b + b\ln c + c\ln a,$$

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq a\ln c + b\ln a + c\ln b.$$

Cộng theo vế của các bất đẳng thức trên và ta nhận được:

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq \frac{(a+b+c)(\ln a + \ln b + \ln c)}{3}.$$

Từ đây biến đổi theo hàm số mũ sẽ nhận được kết quả. ☺

BÀI TẬP (Gợi ý và trả lời từ trang 167)

▷ **3.19.** Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$, thì

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

▷ **3.20.** Cho a, b, c là những số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

▷ **3.21.** Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là những số dương. Chứng minh rằng

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n}.$$

▷ **3.22.** Cho a, b, c là những số dương và n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

▷ **3.23.** (Mỹ 1999) Cho $a_1, a_2, a_3, ...$ $(n > 3)$ là những số thực sao cho

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \text{ và } a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq n^2.$$

Chứng minh rằng max$(a_1, a_1, ..., a_n) \geq 2$.

▷ **3.24.** Cho A, B, C là độ đo góc (bằng radian) của một tam giác, a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác và đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b} + \frac{C}{p-c} \geq \frac{3\pi}{p}.$$

3.3. Sử dụng các dãy số đồng thứ tự

Phương pháp dùng dãy số đồng thứ tự đã giải được rất nhiều bài tập về bất đẳng thức. Nhưng nó còn là một phương pháp chứng minh một số bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức Chebyshev và bất đẳng thức Cauchy.

Định nghĩa 3.2. Một dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ được gọi là *dãy đơn điệu tăng*, nếu $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ được gọi là *dãy đơn điệu giảm*, nếu $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$.

Định lí 3.2 (Bất đẳng thức Chebyshev). *Cho hai dãy số thực hữu hạn* $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$. *Đặt* $A = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ *và* $B = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$..

(a) Nếu hai dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *cùng đơn điệu tăng (hoặc cùng đơn điệu giảm), thì*

$$A \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)}{n} \geq B;$$

(b) Nếu dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ *là đơn điệu tăng và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *là đơn điệu giảm (hoặc* $a_1, a_2, ..., a_n$ *đơn điệu giảm và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *đơn điệu tăng), thì*

$$A \leq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)}{n} \leq B.$$

Các bất đẳng thức trong (a) và (b) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$ *hoặc* $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp (a) với hai dãy đã cho là cùng đơn điệu tăng, còn các trường hợp khác chứng minh hoàn toàn tương tự. Theo định lí 3.1 hoán vị vòng quanh theo b_i, ta nhận được n bất đẳng thức

$$A \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq B,$$

$$A \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \geq B,$$

....

$$A \geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} \geq B.$$

Cộng theo vế của những bất đẳng thức trên và biến đổi về bất đẳng thức Chebyshev.

Cũng từ định lí 3.1 bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = ... = b_n$. ☺

Định lí 3.3 (Bất đẳng thức Chauchy). *Nếu những số* $a_1, a_2, ..., a_n$ *là những số thực không âm, thì*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh. Đặt $G = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$. Nếu $G = 0$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Xét $G \neq 0$, khi đó đặt $b_1 = \dfrac{a_1}{G}$, $b_2 = \dfrac{a_1a_2}{G^2}, \dots, b_n = \dfrac{a_1a_2...a_n}{G^n} = 1$. Theo hệ quả 2 ta có

$$n \leq \frac{b_1}{b_n} + \frac{b_2}{b_1} + \cdots + \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G},$$

điều này tương đương với $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq G$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, suy ra $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ☺

Ví dụ 3.25. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương, thì*

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Lời giải. Đặt $G = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, $b_1 = \dfrac{a_1}{G}$, $b_2 = \dfrac{a_1a_2}{G^2}, \dots, b_n = \dfrac{a_1a_2...a_n}{G^n} = 1$. Theo hệ quả 2 ta có

$$n \leq \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_3} + \cdots + \frac{b_n}{b_1} = \frac{G}{a_1} + \frac{G}{a_2} + \cdots + \frac{G}{a_n},$$

điều này tương đương với

$$G \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, suy ra $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ☺

Ví dụ 3.26. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương, thì*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Lời giải. Theo hệ quả 1, ta có

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_na_2,$$
$$\cdots \geq \cdots$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_n + a_2a_1 + \cdots + a_na_{n-1}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và cộng thêm vào hai vế cùng đại lượng $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, ta nhận được

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2,$$

điều này tương đương với kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ☺

Ví dụ 3.27 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz). *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *là những số thực. Khi đó*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại một hằng số k *nào đó sao cho* $a_i = kb_i$ *hoặc* $b_i = ka_i$ *với* $i = \overline{1, n}$.

Lời giải. Nếu $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ hoặc $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ thì kết luận là hiển nhiên. Ngược lại ta đặt $S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ và $T = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$. Vì hai đại lượng trên đều khác không, ta có thể đặt $x_i = \dfrac{a_i}{S}$ và $x_{n+i} = \dfrac{b_i}{T}$ với $i = \overline{1, n}$. Theo hệ quả 1,

$$2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{S^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}{T^2} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2$$
$$\geq x_1x_{n+1} + x_2x_{n+2} + \cdots + x_nx_{2n} + x_{n+1}x_1 + x_{n+2}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n =$$
$$= \frac{2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)}{ST},$$

điều này tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = x_{n+i}$ với $i = \overline{1, n}$, hay là $a_iT = b_iS$ với $i = \overline{1, n}$. ☺

Ví dụ 3.28 (IMO 1995). *Cho* a, b, c *là những số dương và* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $x = bc = \dfrac{1}{a}, y = ca = \dfrac{1}{b}, z = ab = \dfrac{1}{c}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{3}{2}.$$

Bởi bất đẳng thức là đối xứng theo các biến, nên ta giả thiết rằng $x \leq y \leq z$, khi đó $x^2 \leq y^2 \leq z^2$ và $\dfrac{1}{z+y} \leq \dfrac{1}{x+z} \leq \dfrac{1}{y+x}$. Như vậy hai bộ (x^2, y^2, z^2) và $\left(\dfrac{1}{z+y}, \dfrac{1}{x+z}, \dfrac{1}{y+x}\right)$ là đồng thứ tự. Theo định lí 3.1 ta có

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x^2}{y+x} + \frac{y^2}{z+y} + \frac{z^2}{x+z},$$
$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x^2}{x+z} + \frac{y^2}{y+x} + \frac{z^2}{z+y}.$$

Cộng các bất đẳng thức này theo vế và chia cho 2, ta nhận được

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{z+y} + \frac{x^2+z^2}{x+z}\right).$$

Ta áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$ và bất đẳng thức Cauchy, ta nhận được

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{y+x}{2} + \frac{z+y}{2} + \frac{x+z}{2}\right) = \frac{x+y+z}{2}$$
$$\geq \frac{3 \cdot \sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}.$$

☺

Ví dụ 3.29. *Cho* $0 \leq a_k < 1$ *với* $k = 1, 2, \ldots, n$ *và* $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. *Hãy chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k} \geq \frac{nS}{n-S}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử là

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0.$$

Khi đó

$$0 < 1 - a_1 \leq 1 - a_2 \leq \cdots \leq 1 - a_n \text{ và } \frac{a_1}{1 - a_1} \geq \frac{a_2}{1 - a_2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{1 - a_n}.$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1 - a_1}(1 - a_1) + \frac{a_2}{1 - a_2}(1 - a_2) + \cdots + \frac{a_n}{1 - a_n}(1 - a_n) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k) = \frac{n - S}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k}. \end{aligned}$$ ☺

Ví dụ 3.30. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là những số dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^3 \leq n^2(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3).$$

Lời giải. Do bất đẳng thức là đối xứng theo các biến nên ta có thể giả thiết rằng

$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Theo bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

và

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2.$$

Nhân theo vế của hai đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần phải chứng minh. ☺

Ví dụ 3.31. *Chứng minh rằng nếu* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là những số dương, thì*

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \ldots x_n^{x_n}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{\lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n}{n} \leq$$
$$\leq \frac{x_1 \lg x_1 + x_2 \lg x_2 + \ldots + x_n \lg x_n}{n}.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ bất đẳng thức Chebyshev (hoặc ta chứng minh như trong chứng minh định lí Chebyshev). ☺

Ví dụ 3.32. *Cho* $a, b, c > 0, n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}}{a^n + b^n + c^n} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Lời giải. Giả sử $0 < a \leq b \leq c$, suy ra $a^n \leq b^n \leq c^n$. Theo bất đẳng thức Chebyshev

$$(a + b + c)(a^n + b^n + c^n) \leq 3(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}).$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. ☺

Ví dụ 3.33. *Cho tam giác nhọn* ABC. *Chứng minh rằng*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C.$$

Lời giải. Giả sử $A \leq B \leq C$. Ta xét hai bộ số $(\sin A, \sin B, \sin C)$ và $(\cos A, \cos B, \cos C)$, do tam giác là nhọn nên $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$, trong khoảng này hàm sin đơn điệu tăng, còn cos đơn điệu giảm, suy ra $\sin A \leq \sin B \leq \sin C$ và $\cos A \geq \cos B \geq \cos C$. Sau đó áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho kết quả. ☺

BÀI TẬP (Gợi ý và lời giải ở trang 168).

▷ **3.34.** Cho a, b, c, d là những số dương và $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{a^3 + b^3 + d^3}{a + b + d} + \frac{a^3 + c^3 + d^3}{a + c + d} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b + c + d} \geq S.$$

▷ **3.35.** Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số dương và $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2a - a_i} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

▷ **3.36.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n và với mọi $x \in \mathbb{R}$, bất đẳng thức sau đúng

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

▷ **3.37.** Cho a_i và b_i $(i = 1, 2, ..., n)$ là các số thực sao cho $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0$ và $b_1 \geq a_1, b_1 b_2 \geq a_1 a_2, ..., b_1 b_2 ... b_n \geq a_1 a_2 ... a_n$. Chứng minh rằng

$$b_1 + b_2 + ... + b_n \geq a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

▷ **3.38.** Cho *tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{1}{3}(\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C).$$

3.4. Chuyên đề về bất đẳng thức Karamata

3.4.1. Hàm lồi và bất đẳng thức Karamata

Chuyên đề này mở rộng những kết quả của phần trước, trong chuyên đề ta cũng nhắc lại khái niệm về hàm lồi và định lí xác định một hàm lồi, *đưa ra các ví dụ* một số hàm cơ sở là những hàm lồi.

Định nghĩa 3.3. Hàm số giá trị thực $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ được gọi là *hàm lồi* nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

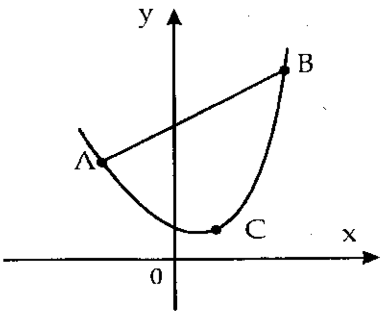
với mọi x, y thuộc $[a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là *hàm lồi chặt* nếu

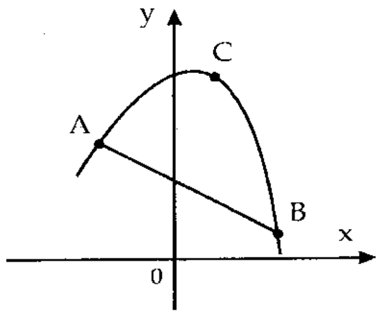
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

với mọi x, y thuộc $[a, b]$, $x \neq y$ và $\lambda \in (0, 1)$.

Chú ý: 1. Hàm số $f(x)$ gọi là *hàm lõm (hàm lõm chặt)* trên $[a, b]$ nếu $-f(x)$ là hàm lồi (hàm lồi chặt). Hình 3.1 thể hiện hàm lồi, còn hình 3.2 thể hiện hàm lõm.



Hình 3.1 Hàm lồi



Hình 3.2 Hàm lõm

2. Hàm lồi chặt có ý nghĩa hình học như sau: Hàm số $f(x)$ là lồi chặt khi và chỉ khi với mọi hai điểm $A = (x, f(x))$ và $B = (y, f(y))$ trên đồ thị của f thì điểm $C = (z, f(z))$ nằm dưới đoạn AB với mọi z nằm giữa x và y (hình 3.1).

3. Nếu hàm số $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì người ta chứng minh được rằng $f(x)$ là hàm lồi khi và chỉ khi với mọi $x, y \in [a, b]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

và nó là hàm lồi chặt khi và chỉ khi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

với tất cả $x, y \in [a, b], x \neq y$.

Có rất nhiều tài liệu nói về hàm lồi, một trong số đó là cuốn sách [11] có bàn tới và liệt kê một số tính chất của nó.

Ta không đi sâu nghiên cứu tính chất và các định lí liên quan đến hàm lồi, ta chỉ dùng một định lí có sẵn như sau:

Định lí 3.4. *Cho hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm bậc hai trên* $[a, b]$.

- *Nếu đạo hàm bậc hai* $f''(x) \geq 0$ *với mọi* $x \in [a, b]$, *thì hàm đó là hàm lồi;*
- *Nếu đạo hàm bậc hai* $f''(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$, *thì hàm đó là hàm lồi chặt.*

Chú ý: 1. Một hàm tuyến tính $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ là một hàm lồi và cũng là hàm lõm.

2. Tổng hai hàm lồi (hàm lõm) là một hàm lồi (hàm lõm).

Từ định lí trên ta có thể kiểm tra các hàm sau đây là lồi hoặc lõm:

1. Hàm số $f(x) = x^\alpha$ với $x > 0$.
   Ta có $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2}$, vậy với $0 < \alpha < 1$ hàm số này lõm, còn với $\alpha < 0$ và $\alpha > 1$ hàm số này lồi.

2. Hàm số $f(x) = a^x$ với $a > 0, a \neq 1$.
   Ta có $f''(x) = a^x \ln^2 a > 0$ với mọi x, suy ra hàm số đã cho lồi.

3. Hàm số $f(x) = \lg_a x$ với $x > 0, a > 0, a \neq 1$.
   Ta có $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2 \ln a}$, nên với $a < 1$, $f(x)$ là hàm lồi, còn với $a > 1$ nó là hàm lõm.

4. Hàm số $f(x) = x \ln x$ với $x > 0$.
   Ta có $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, nên hàm $f(x)$ là hàm lồi.

Những phần trước ta xét các bộ số đồng thứ tự và các ứng dụng của nó. Phần này ta xét các bộ số có tính chất gần như vậy:

Định nghĩa 3.4. Cho hai bộ số gồm những số thực $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sao cho $a_i \geq a_{i+1}, b_i \geq b_{i+1}$ với $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ta nói rằng bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *trội hơn* bộ số $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, nếu

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1, \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2, \\ \ldots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Kí hiệu là $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \succ (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ hoặc là $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \prec (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ta xét một số ví dụ:

1. Dễ thấy với $n \geq 2$, $\underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ số}} \succ \underbrace{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ số}} \succ \cdots \succ \underbrace{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})}_{n \text{ số}}$.

2. Bộ số $(5, 5, 0)$ và $(6, 2, 2)$ không so sánh được, nghĩa là không bộ số nào trội hơn bộ số nào.

3. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì. Ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta luôn luôn có
$$(a, b, c) \succ \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right).$$

4. Nếu $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ và $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, thì
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n \text{ số}}).$$

   Thật vậy, với $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ta chỉ cần chứng minh rằng $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq kx$. Ta có
$$(n-k)(x_1 + \cdots + x_k) \geq (n-k)kx_k \geq k(n-k)x_{k+1} \geq k(x_{k+1} + \cdots + x_n),$$
   như vậy $(n-k)(x_1 + \cdots + x_k) \geq k(x_{k+1} + \cdots + x_n)$. Cộng $k(x_1 + \cdots + x_k)$ vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta nhận được $n(x_1 + \cdots + x_k) \geq k(x_1 + \cdots + x_n) = knx$. Do đó $x_1 + \cdots + x_k \geq kx$.

Định lí 3.5. *Cho* $f(t)$ *là một hàm lồi trên* (a, b) *và* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in (a, b)$ *sao cho* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. *Khi đó*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n). \tag{3.6}$$

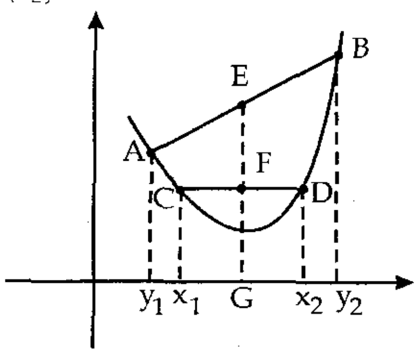
Nếu $f(x)$ *là hàm lõm thì*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

Bất đẳng thức 3.6 gọi là bất đẳng thức Karamata[1]. Chứng minh bất đẳng thức này dựa vào hai mệnh đề phụ trợ sau:

Mệnh đề 3.3. *Nếu* $f(t)$ *là hàm lồi và* $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ *với* $(y_1 \geq x_1 \geq x_2 \geq y_2)$, *thì* $f(y_1) + f(y_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

Chứng minh. Mệnh đề này là hiển nhiên, chẳng hạn ta xét trường hợp như hình 3.3. Ta thấy đoạn AB nằm trên CD, suy ra trung điểm của AB là E cũng nằm trên trung điểm của CD là F. *Tung độ của những đoạn này là*



Hình 3.3

$$EG = \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2},$$

$$FG = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Từ các đẳng thức trên suy ra điều cần chứng minh. ☺

Định nghĩa 3.5. *Phép dịch chuyển* của bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là việc thực hiện đồng thời tăng x_i và giảm x_j một đại lượng sao cho vẫn bảo toàn tổng của hai số này, khi $x_i \geq x_j$.

[1] Jovan Karamata (1902-1967): Viện sĩ toán học Serbia-Montenegro.

Ví dụ: Cho bộ số $(3, 7, 8, 9, 5, 4)$ khi đó số 7 lớn hơn số 5 và ta thực hiện phép dịch chuyển là giảm: $7 - 2$ và tăng: $5 + 2$. Sau khi dịch chuyển bộ số trở thành $(3, 5, 8, 9, 7, 4)$.

Theo mệnh đề 3.3 thì với phép dịch chuyển của bộ số $(x_1, x_2, ..., x_n)$, đại lượng $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ không tăng.

Mệnh đề 3.4. *Từ một bộ số $(b_1, b_2, ..., b_n)$ với những phép dịch chuyển liên tiếp có thể đưa tới bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ khi và chỉ khi*

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n).$$

Chứng minh. Phương pháp chứng minh của J. Karamata, G.H. Hardy, J.E. Littlewood và G. Pólya.

1. *Điều kiện cần:* Điều kiện $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$ là hiển nhiên sau những phép dịch chuyển. Thật vậy, sự dịch chuyển từ $(b_1, b_2, ..., b_n)$ tới $(a_1, a_2, ..., a_n)$, sau mỗi lần thực hiện phép dịch chuyển ta nhận được bộ số trội hơn bộ số trước đó, nghĩa là trội hơn bộ số đầu tiên $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

2. *Điều kiện đủ:*

Ta phải chứng minh rằng nếu $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$, thì từ bộ số $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ta có thể tiến tới $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học theo số lượng của bộ số.

a) Với $n = 1$, khẳng định là hiển nhiên.

b) Cho một số bất kì k, $k \leq n - 1$ đã có điều sau đúng: với điều kiện $(a_1, a_2, ..., a_k) \succ (b_1, b_2, ..., b_k)$ thỏa mãn, thì từ bộ số $(b_1, b_2, ..., b_k)$ bằng các phép dịch chuyển có thể tiến tới bộ số $(a_1, a_2, ..., a_k)$. Ta phải chứng minh khẳng định trên cũng đúng với $k = n$. Trong bộ số $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ta liên tục thực hiện phép dịch chuyển đối với b_1, b_n (b_1 là số lớn nhất trong bộ số, b_n là số nhỏ nhất trong bộ số). Khi đó vế bên phải của của tất cả bất đẳng thức trong (3.5) đều tăng, nghĩa là tiến tới một thời điểm nào đó có một bất đẳng thức trở thành đẳng thức

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell = b_1^* + b_2 + \cdots + b_\ell,$$

ở đây b_1^* là một biến mới của b_1.

Từ đẳng thức này hệ (3.5) trở thành hai phần

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1^*, \\ a_1 + a_2 \geq b_1^* + b_2, \\ \ldots \\ a_1 + \cdots + a_\ell = b_1^* + \cdots + b_\ell \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{\ell+1} \geq b_{\ell+1}, \\ a_{\ell+1} + a_{\ell+2} \geq b_{\ell+1} + b_{\ell+2}, \\ \ldots \\ a_{\ell+1} + \cdots + a_n = b_{\ell+1} + \cdots + b_n^*. \end{cases}$$

Theo giả thiết quy nạp, từ bộ số $(b_1^*, b_2, \ldots, b_\ell)$ có thể tiến tới $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ và từ $(b_{\ell+1}, b_{\ell+2}, \ldots, b_n^*)$ có thể tiến tới $(a_{\ell+1}, \ldots, a_n)$ (vì ta luôn có $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell) \succ (b_1^*, b_2, \ldots, b_\ell)$ và $(a_{\ell+1}, \ldots, a_n) \succ (b_{\ell+1}, b_{\ell+2}, \ldots, b_n^*)$). Vì những điều trên ta thấy ngay bộ số $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ có thể tiến tới $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Để chứng minh định lí 3.5, ta sử dụng hai mệnh đề trên.

Vì $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \succ (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nên ta có thể thực hiện phép chuyển dịch từ bộ số $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ tiến tới bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (mệnh đề 3.4), Với các phép chuyển dịch tổng $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ tăng (mệnh đề 3.3).

Hệ quả 3.1 (Bất đẳng thức Fuchs). *Cho* $f(x)$ *là hàm lồi,* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *là những số dương,* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ *sao cho*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i x_i \geq \sum_{i=1}^{k} p_i y_i \text{ với } 1 \leq k \leq n-1 \text{ và } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i.$$

Khi đó

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n) \geq p_1 f(y_1) + p_2 f(y_2) + \cdots + p_n f(y_n).$$

Nếu ta đặt $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ và

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n,$$

thì bất đẳng thức Fuchs[2] trở thành bất đẳng thức Jensen[3].

Hệ quả 3.2 (Bất đẳng thức Jensen). *Cho $f(x)$ là một hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số trên đoạn $[a, b]$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ là những số dương bất kì có tổng bằng 1. Khi đó*

$$f(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n) \le p_1f(x_1) + \cdots + p_nf(x_n).$$

Từ những bất đẳng thức trên suy ra hàng loạt các bất đẳng thức nổi tiếng khác như bất đẳng thức Cauchy, Chebyshev, ...

3.4.2. Sử dụng bất đẳng thức Karamata

Ví dụ 3.39. *Với những số dương bất kì a, b và c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Lời giải. Vì vai trò của a, b, c như nhau, nên ta có thể giả thiết $a \ge b \ge c$. Khi đó dễ thấy những bộ số $(2a, 2b, 2c) \succ (a+b, a+c, b+c)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata cho hàm lồi $\frac{1}{x}$ với hai bộ số trên suy ra điều cần chứng minh. ☺

Ví dụ 3.40 (Đề thi Olympic toán khu vực Thái Bình Dương 1996). *Cho a, b và c là những độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng khi đó ta có bất đẳng thức sau đúng*

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

[2] Lazarus Immanuel Fuchs (1833-1902): Nhà toán học Ba Lan.

[3] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925): Nhà toán học Đan Mạch.

Lời giải. Do vai trò a, b, c như nhau trong bất đẳng thức, nên ta có thể giả thiết $a \geq b \geq c$. Từ đó suy ra $(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a, b, c)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata cho hàm lõm $\sqrt{x}$ và hai bộ số trên sẽ cho kết quả. ☺

Ví dụ 3.41 (IMO 2000). *Với những số dương* $a, b, c > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $abc = 1$. *Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng*

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Lời giải. Từ điều kiện $abc = 1$, suy ra tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức đã cho có dạng

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz. \tag{3.7}$$

Xét trường hợp cả ba thừa số $x-y+z, y-z+x, z-x+y$ đều dương. Ta lấy lôgarit hai vế

$$\ln(x-y+z) + \ln(y-z+x) + \ln(z-x+y) \leq \ln x + \ln y + \ln z.$$

Vai trò của x, y, z như nhau trong bất đẳng thức nên ta giả thiết $x \geq y \geq z$. Khi đó ta có các bộ số $(y-z+x, x-y+z, z-x+y) \succ (x, y, z)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata với hàm lõm $\ln x$ và hai bộ số trên suy ra bất đẳng thức (3.7). Bạn đọc tự chứng minh bất đẳng thức (3.7) với các trường hợp còn lại. ☺

Ví dụ 3.42 (Bất đẳng thức Szegö). *Cho* $\varphi(x)$ *là hàm lồi và* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2n-1}$, *khi đó*

$$\varphi(a_1) - \varphi(a_2) + \varphi(a_3) - \cdots + \varphi(a_{2n-1}) \geq \varphi(a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n-1}).$$

Lời giải. Ta đặt $a = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1}$. Bất đẳng thức Szegö[4] đưa về dạng

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_3) + \cdots + \varphi(a_{2n-1}) \geq \varphi(a) + \varphi(a_2) + \cdots + \varphi(a_{2n-2}).$$

[4] Gábor Szegö (1895-1985): Nhà toán học người Hungari.

Như vậy ta chỉ còn chứng minh

$$(a_1, a_3, ..., a_{2n-3}, a_{2n-1}) \succ (a_2, a_4, ..., a_{2n-4}, a_{2n-2}, a),$$

nhưng điều đó là hiển nhiên vì tổng các số bằng nhau và $a_{2k-1} \geq a_{2k}$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$. ☺

Ví dụ 3.43 (IMO 1999). *Cho $n \geq 2$. Hãy xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức*

$$\sum_{1<i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^4$$

đúng với tất cả các số thực $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.

Lời giải. Ta xét trường hợp $n = 2$. Đặt $x_1 = m + h$ và $x_2 = m - h$ (nghĩa là $m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ và $h = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$), khi đó

$$x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = 2(m^4 - h^4) \leq 2m^4 = \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^4$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $h = 0$, nghĩa là $x_1 = x_2$.

Xét trường hợp $n > 2$, ta có $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$ (vì nếu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ thì mọi $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Khi đó bất đẳng thức là hiển nhiên). Đặt $a_i = \dfrac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ với $i = 1, 2, ..., n$, khi đó $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Thay $x_i = a_i(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ vào bất đẳng thức cần chứng minh và rút gọn thành dạng:

$$\sum_{1<i<j\leq n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \leq C.$$

Khai triển vế trái và nhóm lại trong bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 (a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + an) = \sum_{i=1}^{n} a_i^3 (1 - a_i).$$

Xét hàm $f(x) = x^3(1-x) = x^3 - x^4$ là hàm lồi (ngặt) trên $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, vì

$$f''(x) = 6x - 12x^2 = 6x(1-2x) > 0 \text{ trên } \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Vì vai trò của a_i trong bất đẳng thức như nhau, không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

Nếu $a_1 \leq \frac{1}{2}$, thì ta có $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \succ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) + \cdots + f(0) = \frac{1}{8}.$$

Nếu $a_1 > \frac{1}{2}$, thì $1 - a_1, a_2, \ldots, a_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Ta xét hai bộ số gồm $n-1$ phần tử và $(1-a_1, 0, \ldots, 0) \succ (a_2, a_3, \ldots, a_n)$, theo bất đẳng thức Karamata suy ra

$$f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leq f(1-a_1) + f(0) + \cdots + f(0).$$

Cộng vào hai vế bất đẳng thức trên với $f(a_1)$ và sử dụng trường hợp $n = 2$ ta có

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leq f(a_1) + f(1-a_1) \leq \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai biến bằng nhau và $n-2$ biến khác đều bằng 0. ☺

3.4.3. Một số bất đẳng thức khác

Ví dụ 3.44. *Tìm giá trị cực đại của biểu thức $a^{12} + b^{12} + c^{12}$, nếu $-1 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = -\frac{1}{2}$.*

Lời giải. Ta chú ý rằng hàm $f(x) = x^{12}$ là liên tục và lồi trên khoảng $[-1, 1]$, vì $f''(x) = 132x^{10} \geq 0$ trên $(-1, 1)$. Vai trò của a, b, c như nhau trong biểu thức, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $-1 \leq c \leq b \leq a \leq 1$, cùng với $a + b + c = -\frac{1}{2}$, ta sẽ chứng minh rằng $\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) \succ (a, b, c)$.

Thật vậy, dễ thấy tổng của hai bộ ba đều bằng nhau, hơn nữa

$$1 \geq a \text{ và } \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \geq -c - \frac{1}{2} = a + b.$$

Theo bất đẳng thức Karamata ta có

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} = f(a) + f(b) + f(c) \leq f(1) + f(-\frac{1}{2}) + f(-1) = 2 + \frac{1}{2^{12}}.$$

Vậy giá trị cực đại là $2 + \frac{1}{2^{12}}$ đạt được khi $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ và $c = -1$. ☺

Những ví dụ sau đây phức tạp hơn một chút khi chứng minh thỏa mãn những điều kiện của bất đẳng thức Karamata.

Ví dụ 3.45. *Cho* $x_1, x_2, ..., x_n \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. *Chứng minh rằng*

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \cdots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cdots + \cos x_n.$$

Lời giải. Vì hàm $\cos x$ lõm trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ta chỉ cần kiểm tra điều kiện (3.5) là đủ với hai bộ số $(2x_1 - x_2, ..., 2x_n - x_1)$ và $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Ta sắp xếp lại hai bộ số này thành các bộ số $(2x_{m_1} - x_{m_1+1}, ..., 2x_{m_n} - x_{m_n+1})$ và $(x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n})$ thỏa mãn những bất đẳng thức:

$$2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq ... \geq 2x_{m_n} - x_{m_n+1},$$
$$x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq ... \geq x_{k_n}$$

(với quy ước $x_{n+1} = x_1$). Điều này thực hiện được. Hơn nữa nhưng ta thấy rằng $2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq x_{k_1}$ và

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (2x_{k_2} - x_{k_2+1})$$
$$\geq x_{k_1} + x_{k_2}.$$

Tương tự tổng ℓ số đầu tiên của bộ số thứ nhất không nhỏ hơn tổng ℓ số của bộ số thứ hai. Thực tế nó không nhỏ hơn $(2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + \cdots + (2x_{k_\ell} - x_{k_\ell+1})$, nhưng tổng này không nhỏ hơn $x_{k_1} + x_{k_2} + \cdots + x_{k_\ell}$ (có thể chứng minh bằng quy nạp). Như vậy, $(2x_{m_1} - x_{m_1+1}, ..., 2x_{m_n} - x_{m_n+1}) \succ (x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n})$. ☺

Ví dụ 3.46. *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *là những số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1}\geq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

Lời giải. Thực hiện đổi biến $x_i = \ln a_i$ và viết lại bất đẳng thức cần chứng minh

$$e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+\cdots+e^{3x_n-x_1}\geq e^{2x_1}+e^{2x_2}+\cdots+e^{2x_n}.$$

Từ đây lí luận hoàn toàn tương tự như bài toán trước với hàm lồi $f(x)=e^x$ và bộ số $(3x_1-x_2,\ldots,3x_n-x_1)\succ(2x_1,2x_2,\ldots,2x_n)$. ☺

3.4.4. Những bất đẳng thức trong tam giác

Với bất đẳng thức Karamata ta có thể sáng tạo hàng loạt bất đẳng thức về các phần tử trong một tam giác với nhau, sau đây chúng ta đưa ra một số bất đẳng thức mà người ta đã tìm ra bằng cách làm như trên. Để cho thống nhất ta kí hiệu α, β, γ là những góc của tam giác; a, b, c là độ dài các cạnh tương ứng với góc trên; $p=\frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác; $x=p-a, y=p-b, z=p-c$.

Ví dụ 3.47. *Cho tam giác nhọn* ABC, *chứng minh rằng*

$$1<\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}$$

và xác định khi nào thì có đẳng thức?

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả thiết $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Khi đó $\alpha\geq\frac{\pi}{3}$ và $\gamma\leq\frac{\pi}{3}$. Từ những bất đẳng thức $\frac{\pi}{2}>\alpha\geq\frac{\pi}{3}$, $\pi>\alpha+\beta(=\pi-\gamma)\geq\frac{2\pi}{3}$, suy ra

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)\succ(\alpha,\beta,\gamma)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right).$$

Vì $f(x) = \cos x$ là hàm lõm trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, theo bất đẳng thức Karamata ta có

$$\begin{aligned}
1 &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0)\\
&\leq f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\\
&\leq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức vế trái không có dấu bằng xảy ra vì trong một tam giác không thể có hai góc vuông. Bất đẳng thức vế phải dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều. ☺

I. Những bất đẳng thức về các cạnh:

1. Vai trò của các cạnh của một tam giác như nhau, nên ta có thể giả thiết $a \geq b \geq c$. Khi đó những quan hệ sau đúng cho tam giác bất kì (bạn đọc tự kiểm tra).

$(p, p, 0) \succ (a, b, c) \succ \left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$, $(p, 0, 0) \succ (z, y, x) \succ \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{p}{3}\right)$.

Ta có các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} < \frac{1}{2}$;

b) $\frac{1}{4} < \frac{bc + ca + ab}{(a + b + c)^2} \leq \frac{1}{3}$;

c) $\sqrt{p} < \sqrt{p - a} + \sqrt{p - b} + \sqrt{p - c} < \sqrt{3p}$;

d) $\sqrt{a(p - a)} + \sqrt{b(p - b)} + \sqrt{c(p - c)} \leq \sqrt{2p}$;

e) $\frac{1}{4} < \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{(a + b + c)^3} \leq \frac{8}{27}$;

f) $\frac{9}{p} \leq \frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c}$.

2. Dễ kiểm tra thấy rằng $(a, b, c) \succ \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c + a}{2}, \frac{b + c}{2}\right)$, ta có

$$8abc \leq (b + c)(c + a)(a + b).$$

3. Với $(2x, 2y, 2z) \prec (a, b, c)$ ta có

a) $8xyz \leq abc$;

b) $\dfrac{2xyz}{xy + yz + zx} \leq \dfrac{abc}{ab + bc + ca}$;

c) $32xyz(xy + yz + zx) \leq abc(ab + bc + ca)$;

II. Những bất đẳng thức về các góc:

Ta có thể giả thiết $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Khi đó ta có quan hệ

$$(\pi, 0, 0) \succ (\alpha, \beta, \gamma) \succ \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

1. Sử dụng hàm $f(x) = \sin^k x$ là lồi với $k < 0$; là lõm với $0 < k \leq 1$ trên $[0, \pi]$ và lồi với $k \geq 2$ trên $[0, \frac{\pi}{4}]$. Những bất đẳng thức sau đúng

a) Với $k < 0$, $\sin^k \alpha + \sin^k \beta + \sin^k \gamma \geq \dfrac{3^{1+\frac{k}{2}}}{2^k}$;

b) Với $0 < k \leq 1$, $0 < \sin^k \alpha + \sin^k \beta + \sin^k \gamma \leq \dfrac{3^{1+\frac{k}{2}}}{2^k}$;

c) Với $k < 0$, $\dfrac{3}{2^k} \leq \sin^k \dfrac{\alpha}{2} + \sin^k \dfrac{\beta}{2} + \sin^k \dfrac{\gamma}{2}$;

d) Với $0 < k \leq 1$, $1 < \sin^k \dfrac{\alpha}{2} + \sin^k \dfrac{\beta}{2} + \sin^k \dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{3}{2^k}$;

2. Hàm số $f(x) = \lg \sin x$ là hàm lõm trên $(0, \pi)$, ở đây lg là kí hiệu hàm lôgarit cơ số 10. Những bất đẳng thức sau đây đúng:

$$0 < \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3. Hàm số $f(x) = \cos^k x$ là lồi với $k < 0$; là lõm với $0 < k \leq 1$ trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ và lõm với $k \geq 2$ trên $[0, \frac{\pi}{4}]$. Những bất đẳng thức sau đúng

a) Với $k < 0$, $\dfrac{3^{1+\frac{k}{2}}}{2^k} \leq \cos^k \dfrac{\alpha}{2} + \cos^k \dfrac{\beta}{2} + \cos^k \dfrac{\gamma}{2}$;

b) Với $0 < k \leq 1$, $2 < \cos^k \dfrac{\alpha}{2} + \cos^k \dfrac{\beta}{2} + \cos^k \dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{3^{1+\frac{k}{2}}}{2^k}$;

4. Hàm số $f(x) = \lg \cos x$ là hàm lõm trên $(0, \frac{\pi}{2})$. Bất đẳng thức sau đây

đúng:

$$0 < \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

BÀI TẬP

▷ **3.48.** Nếu $n \geq 2$ là một số nguyên và $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$ là những số thực, chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \cdots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} <$$
$$< \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

▷ **3.49.** Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với x, y, z là những số dương

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{zy}{x^2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z^2}} + \sqrt{\frac{xz}{y^2}} + \sqrt{\frac{zy}{x^2}}.$$

▷ **3.50.** Cho a, b, c, d là những số dương. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

▷ **3.51.** Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương. Chứng minh rằng

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

▷ **3.52.** Chứng minh bất đẳng thức Karamata có trọng số:

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \cdots + m_n f(x_n) \geq m_1 f(y_1) + m_2 f(y_2) + \cdots + m_n f(y_n),$$

ở đây f là một hàm lồi và hai bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ cùng đơn điệu giảm và thỏa mãn hệ sau

$$\begin{cases} m_1x_1 \geq m_1y_1, \\ m_1x_1 + m_2x_2 \geq m_1y_1 + m_2y_2, \\ \dots; \\ m_1x_1 + \cdots + m_{n-1}x_{n-1} \geq m_1y_1 + \cdots + m_{n-1}y_{n-1}, \\ m_1x_1 + \cdots + m_nx_n = m_1y_1 + \cdots + m_ny_n. \end{cases}$$

$(m_i \in \mathbb{R})$.

3.5. Gợi ý và trả lời bài tập chương 3

▷ **3.9.** Giả sử $a \geq b$, khi đó $\ln a \geq \ln b$. Như vậy (a, b) và $(\ln a, \ln b)$ đồng thứ tự. Từ mệnh đề 3.1, ta có $a \ln a + b \ln b \geq a \ln b + b \ln a$. Từ đó suy ra $a^a b^b \geq a^b b^a$.

▷ **3.10.** Do a, b là những số dương, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} \geq a^b b^a.$$

Mặt khác, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, nên để chứng minh bất đẳng thức trên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\left(\sqrt{ab}\right)^{a+b} \geq a^b b^a.$$

Tương đương với chứng minh bất đẳng thức $a^a b^b \geq a^b b^a$, đây là kết quả của bài 3.9.

▷ **3.11.** Giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó hai bộ số (a, b, c) và (a^2, b^2, c^2) là đồng thứ tự. Sử dụng mệnh đề 3.2 ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq aa^2 + bb^2 + cc^2,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ac^2 + ba^2 + cb^2.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta nhận được kết quả cần chứng minh.

▷ **3.12.** Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 5 số dương: $a^{15}, a^{15}, b^{10}, b^{10}, b^{10}$.

▷ **3.13.** Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 7 số dương: $a^{21}, a^{21}, a^{21}, a^{21}, b^{14}, b^{14}, b^{14}$.

▷ **3.19.** Do bất đẳng thức đối xứng theo a, b, c nên ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$. Khi đó $a + b \leq c + a \leq b + c$. Do đó $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$.

Theo định lí 3.1:

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\leq\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b},$$
$$\frac{a^3}{c+a}+\frac{b^3}{a+b}+\frac{c^3}{b+c}\leq\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên, rồi chia cho 2, ta nhận được

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{c^3+a^3}{c+a}\right)\leq\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}.$$

Do bất đẳng thức $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2\geq\dfrac{x^2+y^2}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\right)\\&\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{c^3+a^3}{c+a}\right)\\&\leq\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}.\end{aligned}$$

▷ **3.20.** Giả sử $0<a\leq b\leq c$. Khi đó $\dfrac{1}{b+c}\leq\dfrac{1}{c+a}\leq\dfrac{1}{a+b}$ và $bc\geq ca\geq ab$. Do đó hai bộ ba $\left(\dfrac{1}{b+c},\dfrac{1}{c+a},\dfrac{1}{a+b}\right)$ và (bc,ca,ab) là nghịch đảo thứ tự. Theo định lí 3.1

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\leq\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b},$$
$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\leq\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+b}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$2\left(\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\right)\leq a+b+c.$$

▷ **3.21.** Giả sử $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n>0$, suy ra $x_1^2\geq x_2^2\geq\ldots\geq x_n^2$ và $\dfrac{1}{x_1}\leq\dfrac{1}{x_2}\leq\ldots\leq\dfrac{1}{x_n}$. Do đó hai bộ số $(x_1^2,x_2^2,\ldots,x_n^2)$ và $\left(\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\ldots,\dfrac{1}{x_n}\right)$ là nghịch đảo thứ tự và áp dụng định lí 3.1 sẽ cho kết quả.

▷ **3.22.** Giả sử $a \leq b \leq c$. Khi đó hai bộ số (a^n, b^n, c^n) và $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ là đồng thứ tự.

▷ **3.23.** Bạn đọc tự giải.

▷ **3.24.** Giả sử $A \leq B \leq C$. Khi đó hai bộ số (A, B, C) và $\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$ đồng thứ tự và áp dụng một số lần định lí 3.1 sẽ cho kết quả.

▷ **3.34.** Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ và áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho mỗi bộ ba số đơn điệu giảm trong các số trên rồi cộng chúng lại.

▷ **3.35.** Ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Khi đó $\frac{1}{2a-a_1} \geq \frac{1}{2a-a_2} \geq \cdots \geq \frac{1}{2a-a_n}$. Với quy ước $a_{n+i} = a_i$. Với $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, theo định lí 3.1, ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{m+i}}{2a-a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2a-a_i}.$$

Cộng n bất đẳng thức này, ta nhận được $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2a-a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{na_i}{2a-a_i}$.

Từ $\frac{a}{2a-a_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{a_i}{2a-a_i}$, ta nhận được

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2a-a_i} \leq n\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2a-a_i}.$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

▷ **3.36.** Với $a, b \geq 0$ và n là số nguyên dương, cặp số (a, b) và (a^{n-1}, b^{n-1}) là đồng thứ tự. Do đó, theo bất đẳng thức Chebyshev, ta nhận được

$$a^n + b^n \geq \frac{1}{2}(a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

Lặp lại việc áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, cuối cùng nhận được

$$a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}(a+b)^n.$$

Bằng cách đặt $a = \sin^2 x$ và $b = \cos^2 x$ và thay vào bất đẳng thức trên sẽ cho kết quả cần chứng minh.

▷ **3.37.** Đặt $c_k = \dfrac{b_k}{a_k}$ và $d_k = (c_1 - 1) + (c_2 - 1) + \cdots + (c_k - 1)$ với $1 \le k \le n$. Theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết đã cho, ta có

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_k}{k} \ge \sqrt[k]{c_1 c_2 \ldots c_k} \ge 1,$$

từ đó suy ra $d_k \ge 0$. Cuối cùng ta có

$$\begin{aligned}
(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) &\\
= (c_1 - 1)a_1 + (c_2 - 1)a_2 + \cdots + (c_n - 1)a_n &\\
= d_1 a_1 + (d_2 - d_1)a_2 + \cdots + (d_n - d_{n-1})a_n &\\
= d_1(a_1 - a_2) + d_2(a_2 - a_3) + \cdots + d_n a_n \ge 0. &
\end{aligned}$$

▷ **3.38.** Giả sử $0 < A \le B \le C < \frac{\pi}{2}$. Xét hai bộ $(\text{tg}A, \text{tg}B, \text{tg}C)$ đơn điệu tăng, $(\cos A, \cos B, \cos C)$ là đơn điệu giảm và áp dụng bất đẳng thức Chebyshev.

Chương 4
PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Phương trình hàm là phương trình mà ẩn số là các hàm số. Giải phương trình hàm nghĩa là tìm tất cả những hàm số thỏa mãn phương trình đã cho trước. Có rất nhiều dạng phương trình khác nhau như trong cuốn sách [5] đã liệt kê.

4.1. Phương pháp thế những giá trị đối số

Phương pháp chung để giải các phương trình hàm là không có. Nhưng có phương pháp thế các giá trị biến vào phương trình để giải, thực chất đây cũng là dạng bất biến của phương trình đã cho khi ta thay giá trị biến khác nhau phương trình vẫn đúng. Cũng như chương trước, khi ta thay đổi vai trò của các biến cho nhau thì đa thức đối xứng không đổi giá trị và từ đó đã tìm ra những ứng dụng rất hay cho đa thức đối xứng và cho tính bất biến đối với đa thức đối xứng. Trong mục này ta cũng lợi dụng tính bất biến của đẳng thức khi thay các giá trị của biến khác nhau để giải.

Ví dụ 4.1. *Giải phương trình hàm*

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \quad (x \neq 0, x \neq 1). \tag{4.1}$$

Lời giải. Trong (4.1) ta thay x bằng $\frac{1}{1-x}$, ta nhận được

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}. \tag{4.2}$$

Từ (4.2) ta lại thay x bằng $\frac{1}{1-x}$, ta nhận được

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}. \tag{4.3}$$

Lấy (4.3) trừ đi (4.2), ta nhận được

$$f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)}. \tag{4.4}$$

Cộng (4.1) và (4.4) ta có

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}.$$

Bằng cách thử trực tiếp vào phương trình hàm đã cho, hàm tìm được thực sự là nghiệm của (4.1). ☺

Bằng cách thế vào phương trình hàm với các giá trị khác nhau và sau đó kết hợp các đẳng thức này sẽ tìm ra nghiệm. Xét một ví dụ điển hình:

Ví dụ 4.2. *Hãy tìm hàm* $f(x)$ *từ phương trình sau*

$$af(\alpha x + \beta) + bf(-\alpha x - \beta) = cx, \quad (\alpha \neq 0). \tag{4.5}$$

Lời giải. Ta thế $\alpha x + \beta$ bằng x thì phương trình (4.5) có dạng

$$af(x) + bf(-x) = \frac{c}{\alpha}(x - \beta). \tag{4.6}$$

Ta thế $-\alpha x - \beta$ bằng x thì phương trình (4.5) có dạng

$$af(-x) + bf(x) = -\frac{c}{\alpha}(x + \beta). \tag{4.7}$$

Nhân (4.6) và (4.7) lần lượt với a và b và sau đó trừ đi cho nhau cho ta kết quả

$$(a^2 - b^2)f(x) = \frac{c}{\alpha}[(a + b)x - (a - b)\beta].$$

Từ đây ta nhận được:

a) Nếu $a^2 \neq b^2$, thì $f(x) = \dfrac{c}{\alpha}\left[\dfrac{1}{a - b}x - \dfrac{\beta}{a + b}\right]$. Ta kiểm tra trực tiếp thấy hàm trên là nghiệm của phương trình đã cho.

b).Nếu $a^2 - b^2 = 0, c \neq 0$, phương trình đã cho không có nghiệm.

Nếu $c \neq 0, a = b = 0$, thì phương trình (4.5) có nghiệm là tất cả các hàm.

Nếu $c \neq 0, a = \pm b \neq 0$, thì phương trình (4.5) không có nghiệm.

c) Nếu $c = 0, a = b \neq 0$, thì phương trình (4.5) có nghiệm $f(x) = -f(-x)$, nghiệm là mọi hàm số lẻ.

d) Nếu $c = 0, a = -b \neq 0$, thì phương trình (4.5) có nghiệm $f(x) = f(-x)$, nghiệm là mọi hàm số chẵn.

e) Nếu $c = a = b = 0$, thì phương trình (4.5) có nghiệm là tất cả các hàm. ☺

Ta đã xét hai ví dụ điển hình dùng phương pháp thế các giá trị khác nhau đều cho đẳng thức. Làm như vậy mặc nhiên là ta đã cho rằng hàm số nghiệm đã tồn tại, nên khi tìm ra nghiệm rồi phải kiểm tra lại nó có thực sự là nghiệm hay không.

Ví dụ sau đây dựa vào tính *bất biến* của hàm số là *với mọi giá trị của* biến số, hàm số đều nhận một giá trị, giá trị đó là hằng số (bất biến) và ta tìm được hằng số này, sau đó là tìm ra nghiệm của phương trình hàm.

Ví dụ 4.3. *Hãy tìm tất cả những hàm số xác định với mọi* x *và thỏa mãn phương trình sau đây*

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2). \qquad (4.8)$$

Lời giải. Đặt $u = x + y, v = x - y$ và thay vào (4.8), ta nhận được

$$vf(u) - uf(v) = uv(u^2 - v^2). \qquad (4.9)$$

Với $u \neq 0, v \neq 0$, từ (4.9) ta nhận được $\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2$, hay

$$\frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2. \qquad (4.10)$$

Từ (4.10) suy ra hàm số $\frac{f(x)}{x} - x^2$ nhận cùng một giá trị (bất biến) với những giá trị khác nhau của đối số, nghĩa là $\frac{f(x)}{x} - x^2 = c$ và khi đó

$$f(x) = x^3 + cx, \qquad (4.11)$$

ở đây c là một hằng số bất kì.

Nếu trong (4.9) thay $v = 0, u \neq 0$ (hoặc $u = 0, v \neq 0$) ta nhận được $f(0) = 0$. Nhưng mọi hàm có dạng (4.11) đều nhận giá trị 0 với $x = 0$. Suy ra nếu hàm $f(x)$ thỏa mãn (4.8) nó cần thỏa mãn dạng (4.11). Dễ kiểm tra thấy mọi hàm có dạng (4.11) thỏa mãn phương trình (4.8). ☺

Với ý tưởng của bài trên ta có thể cho một giá trị của hàm số sau đó là giải phương trình:

Ví dụ 4.4. *Hãy giải phương trình hàm sau*

$$f(x + y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2 - 1)f(y) = 2x(xy - 1) - 5. \qquad (4.12)$$

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là nghiệm của (4.12) và ta đặt $f(0) = c$. Trong (4.12) ta cho $y = 0$, khi đó

$$2f(x) = 2cx^2 + 2x + 5 - 3c.$$

Từ đây cho $x = 0$, ta có $2c = 5 - 3c$, suy ra $c = 1$. Suy ra $f(x) = x^2 + x + 1$.

Kiểm tra trực tiếp hàm tìm được thực sự thỏa mãn (4.12). ☺

Ví dụ 4.5 (IMO 1999). *Tìm tất cả hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Đặt $f(0) = c$. Thay $x = y = 0$ vào phương trình trên và nhận được

$$f(-c) = f(c) + c - 1.$$

Như vậy $c \neq 0$. Cho A là miền giá trị của f, thì với $x = f(y) \in A$, ta có

$$c = f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1.$$

Giải phương trình trên ta tìm được $f(x) = \dfrac{c+1}{2} - \dfrac{x^2}{2}$.

Ta đi tìm c. Phương trình hàm đúng với mọi x, y, nên ta thay $x = y \neq 0$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$f(x - f(x)) = f(f(x)) + xf(x) + f(x) - 1.$$

Thay $f(x) = \dfrac{c+1}{2} - \dfrac{x^2}{2}$ vào phương trình trên cho kết quả:

$$\frac{c+1}{2} - \frac{(x - f(x))^2}{2} = \frac{c+1}{2} - \frac{(f(x))^2}{2} + x\left(\frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} - 1.$$

$$-(x - f(x))^2 = -(f(x))^2 + x(c + 1 - x^2) + c + 1 - x^2 - 2.$$

$$-x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 = -(f(x))^2 + x(c + 1 - x^2) + c + 1 - x^2 - 2.$$

$$2xf(x) = x(c + 1 - x^2) + c - 1.$$

$$2x\left(\frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = x(c + 1 - x^2) + c - 1.$$

Từ đẳng thức trên suy ra $c = 1$. Vậy với $x \in A$, $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$. Hàm tìm được xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có thể thay hàm $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ vào phương trình đã cho và thấy nó thực sự là nghiệm của phương trình. ☺

Còn phương pháp nữa để giải phương trình hàm đó là phương pháp Cauchy: Phương pháp này giải phương trình hàm trên miền xác định của nó bằng cách lần lượt xét các các biến là số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và những số thực. Trong khi giải những phương trình này ta vẫn dùng cách thế các giá trị khác nhau của đối số để tìm ra công thức hàm số.

Ví dụ 4.6. *Hãy giải phương trình hàm*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{4.13}$$

ở đây $f(x)$ *là hàm liên tục với mọi* x *(phương trình trên gọi là phương trình Cauchy).*

Lời giải. Thế $x=y=0$ vào (4.13) ta nhận được $f(0)=2f(0)$, nghĩa là $f(0)=0$.

Thế $y=-x$ vào (4.13) ta nhận được $f(x)=-f(-x)$ nghĩa là nếu $f(x)$ là nghiệm của (4.13), thì nó phải là một hàm lẻ.

Thế $y=x$ vào (4.13) ta nhận được $f(2x)=2f(x)$, còn với $y=2x$, ta nhận được

$$f(3x)=f(x)+f(2x)=f(x)+2f(x)=3f(x).$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f(nx)=nf(x)$ với mọi số tự nhiên n.

Nếu m là số nguyên âm, do các tính chất đã tìm được của hàm $f(x)$ ta có

$$f(mx)=-f(-mx)=-(-m)f(x)=mf(x).$$

Như vậy ta đã chứng minh đẳng thức

$$f(\ell x)=\ell f(x) \tag{4.14}$$

đúng với mọi số nguyên ℓ.

Nếu ta ký hiệu $f(1)=c$ với $x=1$, từ (4.14) ta nhận được đẳng thức

$$f(\ell)=c\ell \tag{4.15}$$

đúng với mọi số nguyên ℓ.

Nếu p là một số nguyên, còn q là một số tự nhiên khác 0 thì theo (4.14) và (4.15) ta nhận được

$$qf\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(q\frac{p}{q}\right)=f(p)=cp$$

nghĩa là $f\left(\frac{p}{q}\right)=c.\frac{p}{q}$. Từ đây suy ra đẳng thức

$$f(x)=cx \tag{4.16}$$

đúng với mọi giá trị hữu tỉ của x. Cho một số vô tỉ x và dãy số hữu tỉ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ sao cho $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Theo (4.16) ta có

$$f(a_n) = ca_n. \tag{4.17}$$

Khi $n \to \infty$ và vì tính liên tục của hàm $f(x)$, từ (4.17) ta nhận được

$$f(x) = cx.$$

Dễ thấy rằng hàm $f(x) = cx$, ở đây c là một hằng số bất kì, là nghiệm của phương trình (4.13). ☺

Hai ví dụ sau đây là những bài toán phương trình hàm cơ bản có thể đưa về dạng bài toán vừa giải bằng các phép thế thích hợp.

Ví dụ 4.7. *Hãy giải phương trình hàm*

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{4.18}$$

ở đây hàm $f(x)$ *là hàm liên tục với mọi* $x > 0$.

Lời giải. Ta thế $x = c^u$ và $y = c^v$ vào (4.18). Ta nhận được $f(c^{u+v}) = f(c^u) + f(c^v)$, nghĩa là

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \tag{4.19}$$

ở đây $g(u) = f(c^u)$ là một hàm liên tục theo u. Bởi vì dạng (4.19) là dạng (4.13) đã giải bài trước, nên

$$g(u) = f(c^u) = au.$$

Vì $x = c^u$, nghĩa là $u = \lg_c x$ nên ta tìm được

$$f(x) = a.\lg_c x, \tag{4.20}$$

ở đây a, c là những hằng số bất kì, $c > 0, c \neq 1$.

Dễ thấy hàm tìm được thỏa mãn (4.18). ☺

Ví dụ 4.8. *Giải phương trình hàm*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{4.21}$$

ở đây hàm $f(x)$ *là hàm liên tục với mọi* x.

Lời giải. Thế $x = u + v$ và $y = 0$ ta nhận được

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u+v)+f(0)}{2},$$

mà vế trái theo (4.21) là

$$\frac{f(u)+f(v)}{2} = \frac{f(u+v)+f(0)}{2},$$

hay

$$f(u+v) - f(0) = (f(u) - f(0)) + (f(v) - f(0)),$$

đây chính là dạng phương trình (4.13) với $g(x) = f(x) - f(0)$.

Khi đó $g(x) = ax$ và suy ra

$$f(x) = ax + f(0) = ax + b,$$

ở đây a là hằng số bất kì và và $b = f(0)$.

Kiểm tra trực tiếp ta thấy $f(x) = ax + b$ là nghiệm của (4.21). ☺

Một phương pháp khác giải phương trình hàm là tìm ra một nghiệm riêng $\varphi(x)$ của hàm phải tìm $f(x)$. Sau đó bằng cách thế $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$ vào phương trình hàm đã cho và giải phương trình hàm nhận được đối với $\psi(x)$. Khi đó phương trình hàm phải giải sẽ đơn giản rất nhiều.

Ví dụ 4.9. *Giải phương trình hàm*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \tag{4.22}$$

ở đây hàm $f(x)$ *là hàm liên tục tại điểm* $x = 0$.

Lời giải. Với $y = 0$, từ (4.22) ta nhận được $f(0) = 0$. Khi đó với mọi giá trị thực của x ta có

$$\lim_{y\to 0}[f(x)+f(y)+xy] = f(x) + \lim_{y\to 0} f(y) + 0 = f(x) + f(0) + 0 = f(x),$$

nghĩa là theo (4.22) $\lim\limits_{y\to 0} f(x+y) = f(x)$, điều này chỉ ra rằng $f(x)$ (nếu tồn tại) là hàm liên tục đối với mọi x.

Ta có thể kiểm tra hàm $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$ là nghiệm của phương trình (4.22).

Đặt $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$. Khi đó hàm $\psi(x)$ là hàm liên tục với mọi x và

$$\begin{aligned}\psi(x+y) &= f(x+y) - \varphi(x+y)\\ &= [f(x)+f(y)+xy] - [\varphi(x)+\varphi(y)+xy]\\ &= [f(x)-\varphi(x)] + [f(y)-\varphi(y)]\\ &= \psi(x)+\psi(y).\end{aligned}$$

Đây là dạng phương trình (4.13), ta tìm được nghiệm $\psi(x) = ax$. Suy ra

$$f(x) = \psi(x) + \varphi(x) = ax + \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2}x^2 + (a + \frac{1}{2})x,$$

nghĩa là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx$, ở đây b là hằng số bất kì. Dễ thấy rằng đây chính là nghiệm chung của phương trình đã cho. ☺

Ví dụ 4.10. *Hãy tìm tất cả các hàm $f(x)$ thỏa mãn tất cả các điều kiện sau đây:*

1) $f(-x) = -f(x)$, *với mọi* x;

2) $f(x+1) = f(x)+1$, *với mọi* x;

3) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}f(x)$, *với mọi* $x \neq 0$.

Lời giải. Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta thấy rằng $\varphi(x) = x$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán, suy ra là một nghiệm riêng của bài toán.

Đặt $\psi(x) = f(x) - x$. Khi đó

$$\psi(-x) = f(-x) + x = -f(x) + x = -\psi(x), \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\psi(x+1) &= f(x+1) - (x+1)\\ &= f(x)+1-(x+1) = f(x) - x = \psi(x),\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{x}\right) &= f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}f(x) - \frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x^2}[f(x) - x] = \frac{1}{x^2}\psi(x).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Với $x = 0$, từ (4.23) ta nhận được $\psi(0) = -\psi(0)$, nghĩa là $\psi(0) = 0$.

Với $x = -1$, từ (4.24) ta nhận được $\psi(-1) = \psi(0) = 0$.

Với $x \neq 0$ và $x \neq -1$, theo (4.23), (4.24) và (4.25) ta nhận được

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi(x+1) = (x+1)^2\psi\left(\frac{1}{x+1}\right) = -(x+1)^2\psi\left(\frac{-1}{x+1}\right)\\
&= -(x+1)^2\psi\left(\frac{-1}{x+1}+1\right) = -(x+1)^2\psi\left(\frac{x}{x+1}\right)\\
&= -(x+1)^2\frac{x^2}{(x+1)^2}\psi\left(\frac{x+1}{x}\right) = -x^2\psi\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= -x^2\psi\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2\frac{1}{x^2}\psi(x) = -\psi(x),
\end{aligned}$$

nghĩa là $2\psi(x) = 0$ hay là $\psi(x) = 0$.

Từ $\psi(x) = 0$ với mọi x, suy ra hàm số $f(x) = x$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ☺

Ví dụ 4.11. *Tìm các hàm xác định với mọi* x *và thỏa mãn phương trình*

$$xf(y) + yf(x) = (x+y).f(x)f(y) \tag{4.26}$$

với x, y *bất kì.*

Lời giải. Từ (4.26) thay y bằng x, ta tìm được $2xf(x) = 2x(f(x))^2$. Từ đây với $x \neq 0$ ta tìm được $f(x) = (f(x))^2$, nghĩa là $f(x) = 0$ hoặc là $f(x) = 1$.

Cho $f(a) = 1$ với $x = a \neq 0$. Khi đó từ (4.26) ta nhận được $af(y) + y = (a+y)f(y)$ hay $y = yf(y)$, nghĩa là $f(y) = 1$ với $y \neq 0$.

Ta kí hiệu $f(0) = c$. Khi đó tất cả nghiệm của phương trình (4.26) là:

a) Hàm số $f(x) = 0$;

b) Những hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \neq 0 \\ c \text{ với } x = 0. \end{cases}$$

☺

BÀI TẬP *(Gợi ý và trả lời bài tập sau tại trang 195).*

▷ **4.12.** Giải phương trình hàm sau

$$f(x) + af\left(\frac{1}{x}\right) = x, \quad a \neq \pm 1.$$

▷ **4.13.** Giải phương trình hàm

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y.$$

▷ **4.14.** Giải phương trình hàm

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

▷ **4.15.** Giải phương trình hàm

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

▷ **4.16.** Giải phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

▷ **4.17.** Giải phương trình hàm

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

▷ **4.18.** Giải phương trình hàm

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)].$$

▷ **4.19.** Giải phương trình hàm

$$f(x) + \frac{1}{\sin x} = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

▷ **4.20.** Giải phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x)f(y) + xy - xf(y) - yf(x) + x + y.$$

4.2. Phương pháp điểm bất động

Lí thuyết điểm bất động đã được ứng dụng rất nhiều trong toán cao cấp như giải tích thực, giải tích phức và giải tích hàm,... trong mục này ta lợi dụng điểm bất động như một đại lượng bất biến để giải một số phương trình hàm.

Một điểm x_0 gọi là *điểm bất động* của hàm $f(x)$ nếu $f(x_0) = x_0$.

Đặt $f^1(x) = f(x)$ và $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$, hàm số $f^n(x)$ gọi là *phép lặp thứ* n của hàm $f(x)$.

Kí hiệu S_n là tập điểm bất động của $f^n(x)$. Ta có tính chất sau đây:

1. Nếu x là một điểm bất động của $f^n(x)$, thì $f(x)$ là cũng là điểm bất động của $f^n(x)$. Thật vậy

$$f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(x).$$

Như vậy, $f(x)$ ánh xạ S_n vào chính S_n.

2. f là đơn ánh trên S_n. Vì nếu $f(a) = f(b)$ với $a, b \in S_n$, thì

$$a = f^n(a) = f^{n-1}(f(a)) = f^{n-1}(f(b)) = f^n(b) = b.$$

Từ hai tính chất trên suy ra nếu S_n là tập hữu hạn thì $f(S_n)$ là phép hoán vị trong S_n.

Vì $f(x) = x$ kéo theo $f^2(x) = f(f(x)) = f(x) = x$, như vậy điểm bất động của f cũng là điểm bất động của f^2. Ta xét dãy $f, f^2, f^4, f^8, \ldots$ tương ứng ta nhận được

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_4 \subseteq S_8 \subseteq \ldots$$

Ví dụ 4.21. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho* $f(f(x)) = x^2 - 2$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử hàm $f(x)$ tồn tại. Ta tính các tập S_2 và S_4 như sau:

Những điểm bất động của hàm f^2 là nghiệm của phương trình $x = x^2 - 2$, nghĩa là $S_2 = \{-1, 2\}$. Những điểm bất động của $f^4(x)$ là nghiệm của phương trình $x = x^4 - 4x^2 + 2$, nghĩa là $S_4 = \left\{-1, 2, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. Ta đặt $c = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $d = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Vì f là hoán vị trong S_2 và $c, d \in S_4 \setminus S_2$, nên $f(c) = c$ hoặc $f(c) = d$ (do f ánh xạ S_4 vào S_4).

Nếu $f(c) = c$, thì $f^2(c) = c$ kéo theo c là điểm bất động của f^2, điều này vô lý.

Nếu $f(c) = d$, thì $f(d) = c$. Khi đó $c = f(d) = f(f(c)) = f^2(c)$, cũng vô lý như trên. Như vậy không thể tồn tại một hàm f nào thỏa mãn bài toán.

☺

Ví dụ 4.22 (IMO 1983). *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *sao cho* $f(xf(y)) = yf(x)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *và* $f(x) \to 0$ *khi* $x \to +\infty$.

Lời giải. 1. Thay $x = y = 1$ vào đẳng thức đã cho ta nhận được $f(f(1)) = f(1)$. Thay $x = 1, y = f(1)$ vào đẳng thức đã cho ta nhận được $f(f(f(1))) = [f(1)]^2$. Khi đó

$$[f(1)]^2 = f(f(f(1))) = f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1 \quad (\text{vì } f(1) \in \mathbb{R}^+).$$

Như vậy 1 là điểm bất động của f.

2. Lấy $y = x$, nhận được $f(xf(x)) = xf(x)$. Như vậy $w = xf(x)$ cũng là điểm bất động của f với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

3. Giả sử f có điểm bất động $x > 1$. Theo bước 2, $xf(x) = x^2$ cũng là điểm bất động, $x^2 f(x^2) = x^4$ cũng là điểm bất động, ... Như vậy x^{2^n} là những điểm bất động. Vì $x > 1$ nên $x^{2^n} \to +\infty$, nhưng $f(x^{2^n}) = x^{2^n} \to \infty$ chứ không phải là 0 như giả thiết. Điều này vô lí.

4. Giả sử f có điểm bất động $x \in (0, 1)$. Khi đó

$$1 = f\left(\frac{1}{x}x\right) = f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x},$$

nghĩa là f có điểm bất động $\dfrac{1}{x} > 1$, trái với phần 3 ở trên. Như vậy f không có điểm bất động nào trong khoảng $(0, 1)$.

5. Sau các bước trên chỉ còn lại điểm bất động của f là 1. Theo phần 2 ta có $xf(x) = 1$ suy ra $f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Thử lại: Với $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} = yf(x)$ và $f(x) = \frac{1}{x} \to 0$ khi $x \to +\infty$. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$ là nghiệm của phương trình hàm đã cho. ☺

Ví dụ 4.23 (IMO 1996). *Tìm tất cả các hàm thỏa mãn* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *sao cho* $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ *với mọi* $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Lời giải. 1. Cho $m = n = 0$, nhận được $f(f(0)) = f(f(0)) + f(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Lại lấy $m = 0$, ta nhận được $f(f(n)) = f(n)$, nghĩa là $f(n)$ là điểm bất động của f với mọi $n \in \mathbb{N}_0$. Khi đó phương trình trở thành $f(m + f(n)) = f(m) + f(n)$.

2. Nếu w là một điểm bất động của f, khi đó ta chỉ ra rằng kw cũng là điểm bất động của f với mọi $k \in \mathbb{N}_0$. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học: Trường hợp $k = 0$ ta đã biết đúng. Giả sử kw là điểm bất động, khi đó $f(kw + w) = f(kw + f(w)) = f(f(kw)) + f(w) = kw + w$ và như vậy $(k + 1)w$ cũng là điểm bất động của f.

3. Nếu 0 là điểm bất động duy nhất của f, khi đó $f(n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$ theo bước 1. Hiển nhiên, hàm hằng không là nghiệm của phương *trình đã cho.*

Nếu f có ít nhất một điểm bất động $w > 0$ và giả thiết rằng w là điểm bất động dương nhỏ nhất. Ta sẽ chỉ ra rằng chỉ có những điểm bất động kw, $k \in \mathbb{N}_0$ là nghiệm. Thật vậy, Giả sử x là một điểm bất động nào đó dương. Theo thuật toán chia, $x = kw + r$, ở đây $0 \le r < w$. Ta có

$$\begin{aligned} x = f(x) &= f(r + kw) = f(r + f(kw)) \\ &= f(r) + f(kw) = f(r) + kw. \end{aligned}$$

Như vậy $f(r) = x - kw = r$. Từ w là điểm bất động dương nhỏ nhất, nên $r = 0$ và $x = kw$.

Từ $f(n)$ là điểm bất động với mọi $n \in \mathbb{N}_0$ (theo bước 1), nên $f(n) = c_n w$ với $c_n \in \mathbb{N}_0$. Ta có $c_0 = 0$.

4. Với $n \in \mathbb{N}_0$, theo thuật toán chia, ta có $n = kw + r$, $0 \le r < w$. Vậy

$$\begin{aligned} f(n) &= f(r + kw) = f(r + f(kw)) = f(r) + f(kw) \\ &= c_r w + kw = (c_r + k)w = (c_r + \left[\frac{n}{w}\right])w. \end{aligned}$$

Thử lại: với mỗi $w > 0$, lấy $c_0 = 0$ và $c_1, c_2, \dots, c_{w-1} \in \mathbb{N}_0$ bất kì. Xét hàm $f(n) = (c_r + [\frac{n}{w}])w$, ở đây r là phần dư của phép chia n cho w (và cả hàm hằng không). Ta viết $m = kw + r, n = \ell w + s$ với $0 \le r, s < w$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(m + f(n)) &= f(r + kw + (c_s + \ell)w) = \\ &= c_r w + kw + c_s w + \ell w = f(f(m)) + f(n). \end{aligned}$$

☺

Ví dụ 4.24. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *sao cho* $f(f(m) + f(n)) = m + n$ *với mọi* $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Lời giải. Dễ thấy rằng $f(x) = x$ là một nghiệm. Bằng quy nạp, ta sẽ chỉ ra rằng bài toán không có nghiệm khác.

Ta chứng minh $f(1) = 1$: Giả sử $f(1) = t > 1$. Cho $s = f(t-1) > 0$. Thấy rằng nếu $f(m) = n$, thì $f(2n) = f(f(m) + f(m)) = 2m$. Như vậy $f(2t) = 2$ và $f(2s) = 2t - 2$. Khi đó $2s + 2t = f(f(2s) + f(2t)) = f(2t) = 2$, suy ra $t < 1$, điều này vô lí. Do đó $f(1) = 1$.

Giả sử $f(n) = n$. Khi đó $f(n+1) = f(f(n) + f(1)) = n + 1$. Do đó $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$. ☺

Ví dụ 4.25 (IMO 1987). *Chứng minh rằng không tồn tại hàm* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *sao cho* $f(f(n)) = n + 1987$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f như vậy. Khi đó f là đơn ánh, nghĩa là $f(a) = f(b)$, suy ra $a + 1987 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + 1987$, kéo theo $a = b$.

Giả sử $f(n)$ khác với k giá trị khác nhau $c_1, \dots, c_k$ trong $\mathbb{N}_0$, nghĩa là $f(n) \neq c_1, \dots, c_k$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$. Khi đó $f(f(n))$ khác với 2k giá trị khác nhau $c_1, \ldots, c_k$ và $f(c_1), \ldots, f(c_k)$ trong $\mathbb{N}_0$ (những giá trị $f(c_j)$ khác nhau bởi vì f là đơn ánh). Bây giờ nếu $w \neq c_1, c_2, \ldots, c_k, f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_k)$, khi đó tồn tại $m \in \mathbb{N}_0$ sao cho $f(f(m)) = w$. Vì $w \neq f(c_j), m \neq c_j$, do đó tồn tại $n \in \mathbb{N}_0$ sao cho $f(n) = m$, khi đó $f(f(n)) = w$. Điều này chỉ ra rằng $f(f(n))$ khác chỉ có $2k$ giá trị $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $f(c_1), \ldots, f(c_k)$ và không khác giá trị nào nữa. Vì $n + 1987$ khác 1987 giá trị: $0, 1, \ldots, 1986$ và $2k \neq 1987$, điều này vô lí. ☺

Ví dụ 4.26. *Hãy tìm tất cả các đa thức* $P(x)$ *là nghiệm của phương trình*

$$P(Q(x)) = Q(P(x)), \tag{4.27}$$

ở đây $Q(x)$ *là một hàm xác định với mọi* x *và* $Q(x) > x$ *với mọi* $x \geq 0$ *và* $P(0) = 0$.

Lời giải. Cho $Q(x)$ là hàm xác định với mọi x và $Q(x) > x$ với mọi $x \geq 0$. Ta tạo dãy

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{4.28}$$

theo cách sau:

$$a_0 = 0, a_1 = Q(0), a_2 = Q(a_1), \ldots, a_k = Q(a_{k-1}), \ldots$$

Ta nhận được $Q(0) > 0$, nghĩa là $a_1 > a_0$; $Q(a_1) > a_1$ nghĩa là $a_2 > a_1$; $Q(a_2) > a_2$ nghĩa là $a_3 > a_2$; ... điều này chỉ ra rằng dãy (4.28) tăng và suy ra nó có vô hạn những số hạng khác nhau.

Đa thức $P(x)$ phải tìm phải thỏa mãn những đẳng thức:

$$\begin{aligned}
P(a_0) &= P(0) = 0 = a_0,\\
P(a_1) &= P(Q(0)) = a_1\\
P(a_2) &= P(Q(a_1)) = Q(P(a_1)) = Q(a_1) = a_2,\\
P(a_3) &= P(Q(a_2)) = Q(P(a_2)) = Q(a_2) = a_3,\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Tất cả các số hạng của dãy (4.28) thỏa mãn $P(a_n) = a_n$.

Với đa thức $H(x) = x$ cũng có $H(a_n) = a_n$.

Khi hai đa thức trùng nhau với vô hạn các giá trị khác nhau của đối số thì chúng trùng nhau.

Như vậy ta tìm được $P(x) = x$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4.27). ☺

BÀI TẬP

Một số gợi ý và trả lời bài tập sau tại trang 196.

▷ **4.27.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

a) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ và

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

▷ **4.28.** (1986 IMO). Tìm tất cả các hàm $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sao cho

a) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ với $x, y \geq 0$ và

b) $f(2) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $0 \leq x < 2$.

▷ **4.29.** Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Tìm tất cả $f(x)$ với $x \in \mathbb{Q}$ trong đó có số hạng $f(1)$.

▷ **4.30.** (1990 IMO). Cho $\mathbb{Q}^+$ là tập các số hữu tỉ dương. Hãy xây dựng hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ sao cho

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y} \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

▷ **4.31.** (1994 IMO). Cho S là tập số thực lớn hơn -1. Tìm tất cả các hàm $f : S \to S$ sao cho

a) $f(x + f(y)) = y + f(x) + yf(x)$ với mọi $x, y \in S$ và

b) $\dfrac{f(x)}{x}$ tăng ngặt với $-1 < x < 0$ và với $0 < x$.

▷ **4.32.** (1992 IMO). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

▷ **4.33.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sao cho $f(2) = 2$ và

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)} \text{ với } x \neq y.$$

4.3. Chuyên đề về các đa thức giao hoán

4.3.1. Định nghĩa

Những đa thức đã được xét trong cuốn sách của tác giả [8] có nhiều ứng dụng trong việc giải bài tập toán. Những đa thức ở chương trước là đa thức hai biến đối xứng, nghĩa là đa thức không thay đổi khi ta đổi hai biến cho nhau. Ta xét hai đa thức giao hoán như định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 4.1. Hai đa thức một biến $P(x)$ và $Q(x)$ gọi là *giao hoán*, nếu $P(Q(x)) = Q(P(x))$.

Đẳng thức trong định nghĩa đúng với mọi giá trị thực của x, nghĩa là nếu a là một số thực bất kì thì ta luôn có đẳng thức $P(Q(a)) = Q(P(a))$.

Bài toán cho một đa thức, tìm đa thức giao hoán của nó không phải đơn giản, ta đi xét lần lượt các ví dụ sau:

Ví dụ 4.34. *Cho α là số bất kì, hãy tìm tất cả đa thức giao hoán có bậc không lớn hơn 3 đối với đa thức $P(x) = x^2 - \alpha$.*

Lời giải. Tìm đa thức $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Từ điều kiện đã cho $P(Q(x)) = Q(P(x))$ ta có:

$$(x^3 + ax^2 + bx + c)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + a(x^2 - \alpha)^2 + b(x^2 - \alpha) + c.$$

Khai triển lũy thừa hai vế và nhóm lại để so sánh các hệ số: Ta thấy rằng vế phải chỉ chứa lũy thừa bậc chẵn, còn ở vế trái, hệ số trước x^5 là $2a$.

Nghĩa là $a = 0$. Sau đó cũng ở vế trái, hệ số trước x^3 bằng $2c$, nghĩa là $c = 0$. Vì thế còn $Q(x) = x^3 + bx$. Khai triển ngoặc và so sánh các hệ số còn lại ta nhận được

$$\begin{cases} 2b = -3\alpha, \\ b^2 = 3\alpha^2 + b, \\ \alpha = \alpha^3 + b\alpha. \end{cases}$$

Đặt $\alpha = 2\gamma$, khi đó $b = -3\gamma$. Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có $9\gamma^2 = 12\gamma^2 - 3\gamma$, hay là $\gamma^2 - \gamma = 0$. Nghĩa là $\gamma = 0$ hoặc là $\gamma = 1$. Suy ra $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 2$. Dễ kiểm tra hai giá trị này là nghiệm đúng.

Như vậy, tồn tại đa thức bậc ba $Q(x)$ giao hoán với đa thức $P(x) = x^2 - \alpha$ nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 2$. Với $\alpha = 0$: $P(x) = x^2, Q(x) = x^3$; với $\alpha = 2$: $P(x) = x^2 - 2, Q(x) = x^3 - 3x$.

Tương tự cũng chứng minh được nếu $Q(x)$ là đa thức bậc hai, thì $P(x) = Q(x)$, còn nếu $Q(x)$ là đa thức bậc một, thì $Q(x) = x$. ☺

Ví dụ 4.35. *Chứng minh rằng trong các đa thức bậc* k, *tồn tại không quá một đa thức giao hoán với đa thức bậc hai đã cho* $P(x)$.

Lời giải. Cho đa thức $P(x) = x^2 + px + q$, phải tìm các hệ số $a_1, \dots, a_k$ của đa thức sau:

$$Q(x) = x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k.$$

Ta có đẳng thức

$$(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k)^2 + p(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k) + q \\ - (x^2 + px + q)^k - a_1(x^2 + px + q)^{k-1} - \cdots - a_k = 0.$$

Bằng cách cho bằng 0 những hệ số trước $x^{2k}, x^{2k-1}, \dots, x, x^0$. Ta nhận được một hệ phương trình đối với $a_1, a_2, \dots, a_k, p, q$. Đi giải hệ phương trình này không phải là dễ. Ta tiến hành bằng cách khác: Giả sử những hệ số trước $x^{2k-1}, x^{2k-2}, \dots, x^k$ lần lượt là $b_1, b_2, \dots, b_k$, ta nhận được công thức sau

$$b_1 = 2a_1 + R_1(p,q) = 0,$$

$$b_2 = 2a_2 + R_2(p,q,a_1) = 0,$$

$$\dots$$

$$b_k = 2a_k + R_k(p,q,a_1,\dots,a_{k-1}) = 0,$$

ở đây R_i là một biểu thức đại số của $p, q, a_1, \dots, a_{i-1}$.

Từ đẳng thức đầu tiên của hệ trên suy ra a_1 biểu diễn qua p, q. Từ đẳng thức thứ hai suy ra a_2 biểu diễn qua p, q và a_1, nghĩa là nó cũng chỉ biểu diễn qua p, q. Từ đẳng thức thứ ba a_3 cũng biểu diễn qua p, q, a_1, a_2, nghĩa là nó cũng biểu diễn chỉ qua p, q, ..., tiếp tục như vậy sẽ nhận được các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_k$ đều biểu diễn chỉ qua p, q. Như vậy, các hệ số của đa thức $Q(x)$ giao hoán với $P(x)$ xác định tương ứng thông qua p, q. Đó là điều cần chứng minh. ☺

Ví dụ 4.36. *Hãy tìm tất cả những đa thức bậc 4 và bậc 8 mà nó giao hoán với đa thức bậc hai đã cho* $P(x)$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng đa thức $Q(x) = P(P(x))$ giao hoán với $P(x)$. Thật vậy, $Q(P(x)) = P(P(P(x))) = P(Q(x))$. Đa thức $Q(x)$ có bậc là 4 và theo ví dụ 4.35 thì nó là đa thức giao hoán duy nhất với $P(x)$. Tương tự ta chứng minh cho đa thức $R(x) = P(P(P(x)))$ duy nhất bậc 8 giao hoán với $P(x)$. ☺

Ví dụ 4.37. *Chứng minh rằng hai đa thức* $Q(x)$ *và* $R(x)$ *giao hoán với đa thức thứ ba* $P(x)$ *bậc 2, thì chúng giao hoán với nhau.*

Lời giải. Đặt $S(x) = Q(R(x))$ và $T(x) = R(Q(x))$. Vì $P(x)$ giao hoán với $Q(x)$ và $R(x)$, nên

$$P(S(x)) = P(Q(R(x))) = Q(P(R(x))) = Q(R(P(x))) = S(P(x)).$$

Nghĩa là $P(x)$ giao hoán với đa thức $S(x)$. Tương tự $P(x)$ cũng giao hoán với $T(x)$. Dễ thấy rằng $S(x)$ và $T(x)$ là những đa thức cùng bậc, (nếu $Q(x)$

và $R(x)$ có bậc là k và ℓ, thì bậc của $S(x)$ và $T(x)$ là $k\ell$). Theo ví dụ 4.35 suy ra $S(x) = T(x)$, nghĩa là $Q(R(x)) = R(Q(x))$. ☺

4.3.2. Đa thức Chebyshev

Định lí 4.1. *Chứng minh rằng tồn tại một dãy đa thức $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ giao hoán cùng nhau sao cho bậc của $P_k(x)$ là k và $P_2(x) = x^2 - 2$.*

Lời giải. Ta giải bài toán bằng một số phương pháp.

Phương pháp 1: Đặt $x = t + t^{-1}$. Khi đó dễ dàng kiểm tra x^k có dạng

$$\begin{aligned} x^k &= (t + t^{-1})^k = \\ &= (t^k + t^{-k}) + a_1(t^{k-1} + t^{-(k-1)}) + a_2(t^{k-2} + t^{-(k-2)}) + \\ &\quad + \cdots + a_{k-1}(t + t^{-1}) + a_k, \end{aligned}$$

ở đây $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là những số cố định. Bằng quy nạp toán học theo k suy ra $t^k + t^{-k}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + b_k,$$

ở đây $b_1, b_2, \ldots, b_k$ là những số cố định nào đó. Kí hiệu

$$P_k(x) = x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Theo định nghĩa thì $P_k(t + t^{-1}) = t^k + t^{-k}$ sao cho

$$P_k(P_\ell(t + t^{-1})) = P_k(t^\ell + t^{-\ell}) = t^{k\ell} + t^{-k\ell} = P_{k\ell}(t + t^{-1}).$$

Như vậy, $P_k(P_\ell(x)) = P_{k\ell}(x) = P_\ell(P_k(x))$. Do đó một cặp đa thức bất kì từ dãy $P_k(x)$ đều giao hoán. Vì $P_2(x) = x^2 - 2$, ta đã xây dựng được dãy những đa thức cần tìm.

Phương pháp 2: Có thể nhận được dãy đa thức $P_k(x)$ thông qua dãy đa thức Chebyshev $T_k(x)$ (các bạn có thể tham khảo đa thức Chebyshev trong [12]). Ta sẽ không đưa ra định nghĩa trực tiếp đa thức này, nhưng đưa đến phương trình hàm mà đa thức này thỏa mãn: $T_k(\cos t) = \cos kt$. Ta có thể chứng minh rằng T_k là đa thức bậc k. Dễ kiểm tra những đa thức Chebyshev giao hoán với nhau: $T_k(T_m(x)) = T_{km}(x) = T_m(T_k(x))$ (do *sự biến đổi của* $\cos k(mt) = \cos kmt = \cos m(kt)$). Nhưng T_k không phải là unita (một đa thức được gọi là unita, nếu hệ số ở số hạng bậc cao nhất của nó bằng 1), vì hệ số ở số hạng bậc cao nhất là 2^{k-1}. Nhưng điều này có thể khắc phục được nhờ việc đổi biến và đặt $P_k(x) = 2T_k(\frac{x}{2})$. Với cách đặt này thì tính giao hoán của các đa thức vẫn được bảo toàn. Như vậy bằng dãy đa thức Chebyshev ta cũng dựng được dãy theo yêu cầu. Một chú ý quan trọng là những đa thức Chebyshev có ứng dụng rất nhiều trong lí thuyết xấp xỉ những hàm bằng đa thức.

Chú ý: Những phương pháp trên xuất phát từ ý tưởng sau đây: Cho một hàm số f nhận vô hạn các giá trị và sao cho với mọi số tự nhiên n, $f(nt) = Q_n(f(t))$, ở đây $Q_n(x)$ là đa thức. Khi đó Q_m và Q_n giao hoán với nhau. Ví dụ, nếu cho hàm $f(t) = e^t$ thì ta nhận được dãy các đa thức giao hoán $Q_n(x) = x^n$. Nếu $f(t) = e^t + e^{-t}$, thì ta nhận được dãy đa thức P_n như trong trong ví dụ đầu tiên trong chuyên đề này (chỉ có khác là thay t bằng e^t). Nếu $f(t) = \cos t$, thì ta nhận được dãy đa thức T_n như ở trên.

Phương pháp 3: Từ ví dụ 4.35, suy ra tồn tại duy nhất đa thức P_k bậc k giao hoán với $P_2(x) = x^2 - 2$. Ta viết một số đa thức như vậy:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= x^2 - 2,\\
P_3(x) &= x^3 - 3x,\\
P_4(x) &= x^4 - 4x^2 + 2,\\
P_5(x) &= x^5 - 5x^3 + 5x,\\
P_6(x) &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2,
\end{aligned}$$

ở đây $P_4(x) = P_2(P_2(x)), P_6(x) = P_2(P_3(x))$ và $P_5(x)$ tìm bằng cách như trong ví dụ 4.34. Từ những đẳng thức trên ta có thể giả thiết dãy đa thức thỏa mãn công thức hồi quy sau:

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x).$$

Ta có thể chứng minh công thức này đúng với mọi $k > 1$. Xác định dãy đa thức $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ bằng quy nạp: $P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2$, còn với $k > 1$, $P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x)$. Ta sẽ chứng minh rằng tất cả đa thức P_k giao hoán với đa thức P_2; khi đó chúng giao hoán cùng nhau (do ví dụ 4.37).

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Dễ thấy $P_1(x)$ và $P_2(x)$ giao hoán với $P_2(x)$. Giả sử tất cả các đa thức $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ giao hoán với $P_2(x)$, ta phải chứng minh $P_{k+1}(x)$ cũng giao hoán với $P_2(x)$. Nghĩa là ta phải chứng minh công thức giao hoán giữa $P_{k+1}(x)$ và $P_2(x) = x^2 - 2$ là:

$$P_{k+1}(x^2 - 2) = (P_{k+1}(x))^2 - 2.$$

Thật vậy, ta thay phương trình hồi quy với P_{k+1} vào và biến đổi về dạng ta cần chứng minh là

$$(x^2 - 2)P_k(x^2 - 2) - P_{k-1}(x^2 - 2) = (xP_k(x) - P_{k-1}(x))^2 - 2.$$

Bằng cách khai triển và đưa về các số hạng chung ta nhận được

$$-2([P_k(x)]^2 - xP_k(x)P_{k-1}(x) + [P_{k-1}(x)]^2) = 2x^2 - 8$$

nghĩa là

$$[P_k(x)]^2 - xP_k(x)P_{k-1}(x) + [P_{k-1}(x)]^2 = 4 - x^2. \qquad (4.29)$$

Ta kí hiệu bên trái của (4.29) là $S_k(x)$. Ta chỉ còn chứng minh $S_k(x)$ không phụ thuộc vào k và bằng $4 - x^2$. Thật vậy, cho $k > 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} S_k(x) &= [P_k(x)]^2 - xP_k(x)P_{k-1}(x) + [P_{k-1}(x)]^2 \\ &= P_k(x)[P_k(x) - xP_{k-1}(x)] + [P_{k-1}(x)]^2 \\ &= -P_k(x)P_{k-2}(x) + [P_{k-1}(x)]^2 \\ &= [P_{k-2}(x)]^2 - xP_{k-1}(x)P_{k-2}(x) + [P_{k-1}(x)]^2 = S_{k-1}(x), \end{aligned}$$

nghĩa là $S_k(x) = S_{k-1}(x)$. Vì $S_2(x) = 4 - x^2$, nên $S_k(x) = 4 - x^2$ với mọi $k \geq 2$. Như vậy ta đã chứng minh được $P_k(x)$ giao hoán với $P_2(x)$ với mọi k. ☺

4.3.3. Bài toán tổng quát về các đa thức giao hoán

Khi cho đa thức $P(x)$ (không nhất thiết phải là unita) bài toán tổng quát đặt ra là tìm những đa thức $Q(x)$ (không nhất thiết phải là unita) giao hoán với nó. Trường hợp đơn giản là các đa thức có bậc là 1 thì bạn đọc hãy giải bài tập 4.38 và bài tập 4.39. Tiếp tục, ta giả thiết $P(x)$ và $Q(x)$ đều có bậc lớn hơn 1.

Cho

$$P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$$

và

$$Q(x) = b_0x^\ell + b_1x^{\ell-1} + \cdots + b_{\ell-1} + b_\ell.$$

Ta có thể đưa những đa thức trên về dạng các hệ số a_1 và b_1 bằng 0, những đa thức như vậy gọi là đa thức *tịnh tiến*. Việc tịnh tiến được tiến hành như sau: Ta cố định một số a và với nó ta xây dựng một đa thức mới $R^{(a)}$ từ đa thức đã cho $R(x)$ theo công thức: $R^{(a)}(x) = R(x-a) + a$. Để lấy lại đa thức $R(x)$ từ $R^{(a)}(x)$, ta dùng công thức $R(x) = R^{(a)}(x+a) - a$. Ví dụ $R(x) = 2x^2 + 3x + 5$ thì $R^{(a)}(x) = 2(x-a)^2 + 3(x-a) + 5 + a = 2x^2 - 4ax + 2a^2 + 3x - 3a + 5 + a$, để $a_1 = 3 - 4a = 0$ suy ra ta phải cố định $a = \frac{3}{4}$ và $R^{(a)}(x) = 2x^2 + \frac{37}{8}$.

Dễ chứng minh được rằng nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức giao hoán thì $P^{(a)}(x)$ và $Q^{(a)}(x)$ cũng giao hoán.

Phần sau đây ta cho rằng $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức tịnh tiến, ngoài ra chúng còn là unita, nghĩa là chúng có hệ số ở số hạng bậc cao nhất bằng 1. Bằng các lí luận hoàn toàn tương tự như phần trước ta tìm được dãy đa thức giao hoán với hệ số bậc cao nhất bằng ± 1. Ta liệt kê lại một số ví dụ:

A. Cho $R(x)$ là một đa thức bậc r. Xét dãy đa thức $P_0(x) = x$, $P_1(x) = R(x)$, $P_2(x) = R(R(x))$, $P_3(x) = R(R(R(x)))$, ... $P_{i+1}(x) = P_i(R(x))$.

Dễ thấy rằng các đa thức $P_i(x)$ giao hoán với nhau và bậc của $P_i(x)$ bằng r^i.

B. Cho dãy đa thức $F_k(x) = x^k$. Tất cả đa thức $F_k(x)$ giao hoán đôi một và bậc của $F_k(x)$ bằng k.

C. Dãy đa thức dạng $P_k(t + t^{-1}) = t^k + t^{-k}$ giao hoán đôi một và bậc của $P_k(t)$ bằng k.

D. Định nghĩa dãy $H_1, H_2, \ldots$. bằng công thức $H_k(t - t^{-1}) = t^k + t^{-k}$ (k là số lẻ). Dễ chứng minh được dãy đa thức trên tồn tại và xác định. Những đa thức này cũng giao hoán đôi một và bậc của $H_k(x)$ là k.

E. Trong đại số, khi nghiên cứu về đa thức người ta cũng hay nghiên cứu những đa thức có hệ số là những số phức (bạn đọc có thể tham khảo trong cuốn sách [8]). Ta cố định một số tự nhiên m và một số phức λ sao cho $\lambda^m = 1$ (theo tính chất của số phức thì với mọi m, tồn tại $m - 1$ số như vậy khác 1).

Ta xét những cặp số (u, v) sao cho $uv = \lambda$, và đặt $x = u + v$. Dễ kiểm tra được

$$u^k + v^k = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k,$$

ở đây $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là những số nào đó phụ thuộc vào λ. Đặt $P_k(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$. Đa thức $P_k(x)$ đặc trưng bằng điều kiện: $P_k(u + v) = u^k + v^k$ nếu $uv = \lambda$.

Cho số ℓ sao cho nó chia cho m còn dư 1. Khi đó $u^\ell v^\ell = (uv)^\ell = \lambda^\ell = \lambda$, vậy $P_k(u^\ell + v^\ell) = u^{kl} + v^{kl}$. Vậy thì nếu k và ℓ chia cho m dư 1 thì $P_k(P_\ell(u + v)) = u^{kl} + v^{kl} = P_\ell(P_k(u + v))$, nghĩa là $P_k(x)$ và $P_\ell(x)$ giao hoán với nhau. Ta đã xây dựng được theo số λ dãy những đa thức giao hoán $P_1(x), P_{m+1}(x), P_{2m+1}(x), \ldots$ tất cả những đa thức này là unita, tịnh tiến và bậc của $P_k(x)$ là k.

Đặc biệt với $m = 1, \lambda = 1$ ta có kết quả của phần A, với $m = 2, \lambda = -1$ ta có kết quả của phần D.

Các ví dụ từ phần A đến phần E trong phần này bao hàm tất cả những đa thức giao hoán. Ta có thể giả thiết rằng nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức giao hoán, unita, tịnh tiến, bậc lớn hơn 1 với hệ số là những số phức, thì chúng nằm ở một trong những dãy được xây dựng ở phần A, B, E ở trên.

Bài tập

▷ **4.38.** Chứng minh rằng hai đa thức bậc nhất $P(x)$ và $Q(x)$ giao hoán với nhau khi và chỉ khi hoặc là $P(x) = x + \alpha, Q(x) = x + \beta$, hoặc là tồn tại một x_0 sao cho $P(x_0) = Q(x_0) = x_0$ (điểm bất động).

▷ **4.39.** Cho $P(x)$ là đa thức bậc 1, hãy tìm tất cả các đa thức $Q(x)$ giao hoán với $P(x)$.

▷ **4.40.** Chứng minh rằng nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ giao hoán thì $P^{(a)}(x)$ và $Q^{(a)}(x)$ cũng là hai đa thức giao hoán.

4.4. Gợi ý và trả lời bài tập chương 4

▷ **4.12.** Thay x bằng $\frac{1}{x}$. Hàm kết quả là $f(x) = \frac{x^2 - a}{(1 - a^2)x}$.

▷ **4.13.** Thay lần lượt các giá trị x và y bằng: $x = 0, y = z$; $x = \frac{\pi}{2} + z, y = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + z$ và nhận được phương trình

$$f(z) = f(0)\cos z + f(\frac{\pi}{2})\sin z.$$

Giải phương trình hàm này, ta nhận được nghiệm $f(x) = a\cos x + b\sin x$, ở đây a, b là những hằng số bất kì.

▷ **4.14.** Dùng phương pháp bất biến như trong bài 4.3. Nghiệm là $f(x) = x^2 + c$.

▷ **4.15.** Thay x và y liên tiếp với: $x = 0, y = z$; $x = 0, y = -z$; $x = z, y = 0$ và phương trình nhận được đưa về $f(z) = z + 1$.

▷ **4.16.** Từ $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \left[f(\frac{x}{2})\right]^2$ suy ra $f(x) \geq 0$. Hàm $f_1(x) = 0$ là một nghiệm. Giả sử có nghiệm khác $f(x)$ khác với $f_1(x) = 0$. Khi đó

$f(x) > 0$ với mọi x. Thật vậy, nếu có một giá trị $x = x_0$ sao cho $f(x_0) = 0$, từ phương trình đã cho ta nhận được

$$f(x_0 + y) = f(x_0).f(y) = 0.f(y) = 0$$

với mọi y. Từ đẳng thức cuối cùng suy ra $f(x) = 0$ với mọi x, nghĩa là $f(x) = f_1(x)$ vô lí với điều ta đặt ra.

Lôgarit cơ số 10 hai vế phương trình hàm đã cho và hàm số $\lg f(x)$ thỏa mãn phương trình (4.13). Nghiệm của phương trình là $f(x) = 0$ và $f(x) = a^x$.

▷ **4.17.** Hàm $\lg f(x)$ thỏa mãn phương trình (4.18) và có nghiệm $f(x) = 0$ và $f(x) = x^a$.

▷ **4.18.** Dùng phương pháp Cauchy và nghiệm là $f(x) = a.x^2$.

▷ **4.19.** Một nghiệm riêng của phương trình là $\varphi(x) = \text{cotg}x$. Kết quả là $f(x) = a + \text{cotg}x$.

▷ **4.20.** Một nghiệm riêng của phương trình là $\varphi(x) = x$. Kết quả $f(x) = x + a^x$.

▷ **4.27.** Với $n \in \mathbb{R}$, xét $y = x, y = 2x, ..., y = (n - 1)x$.

▷ **4.31.** Hãy chỉ ra f chỉ có điểm bất động duy nhất tại 0.

▷ **4.32.** Giả sử $f(0) = 0$, khi đó chỉ ra $x > 0$ kéo theo $f(x) > 0$ và f tăng.

▷ **4.33.** Thử với $y = cx$ với c khác nhau thuộc $\mathbb{Q}$ và $y = x - 2$.

Chương 5
NHỮNG TRÒ CHƠI TOÁN HỌC

Có rất nhiều trò chơi toán học đòi hỏi những chiến thuật để thắng hoặc để bảo vệ bước đi trong cuộc. Những trò chơi này có thể đòi hỏi một số tính chất lí thuyết của tập hợp, lôgic mệnh đề hoặc những phép suy ra của toán tổ hợp. Một số trò chơi có thể có vô hạn bước đi, lại có những trò chơi phải dừng sau hữu hạn bước. Một chiến thuật thắng là một sơ đồ cho phép người thắng luôn luôn thực hiện được bước đi, trong thực tế là bước đi cuối cùng. Một chiến thuật chặn bước đi thắng của đối thủ có thể tìm thấy bằng kiến thức toán học. Một định nghĩa về trò chơi toán học như sau:

Định nghĩa 5.1. Một *trò chơi toán học* thường gồm một số người chơi sao cho:

1) Những người chơi thay phiên nhau thực hiện những bước đi trên hữu hạn đối tượng đếm được và theo một quy tắc cho trước;

2) Người cuối cùng thực hiện được bước đi là người thắng cuộc.

Như vậy, khi xem xét một bài toán trò chơi ta phải nghiên cứu hai khía cạnh quan trọng: Thứ nhất là quy tắc chơi như thế nào; thứ hai là chiến thuật như thế nào đối với mỗi người chơi. Có rất nhiều ví dụ, chẳng hạn như trò chơi sau:

Có ba đống sỏi gồm đống 1 viên sỏi, đống 3 viên sỏi, đống 5 viên sỏi. Hai người lần lượt lấy đi một đống sỏi hoặc một số viên sỏi của một đống nào đó. Người nào lấy viên sỏi cuối cùng là người ấy chiến thắng.

Trò chơi có thể thực hiện như sau: Kí hiệu I là người thứ nhất và II là người thứ hai.

$$(1,3,5) \xrightarrow{I} (1,3,2) \xrightarrow{II} (1,1,2) \xrightarrow{I} (1,1,0) \xrightarrow{II} (1,0,0) \xrightarrow{I} (0,0,0),$$

và người thứ nhất thắng. Đây là dạng trò chơi Nim đơn giản sẽ được nói kĩ trong chuyên đề của chương này.

Thường một bài toán đặt ra là tìm một chiến thuật cho người thứ nhất hoặc người thứ hai thắng. Phần thứ nhất ta xét những bài toán trò chơi tương đối đơn giản.

5.1. Chiến thuật bất biến

Một chiến thuật trong khi thực hiện các luật chơi là thực hiện làm sao đưa về những dữ kiện bất biến có lợi cho người chơi. Đó cũng là những lời giải của các bài toán trò chơi toán học.

Ví dụ 5.1. *A và B tiến hành trò chơi với 2001 hạt đậu. Một nước đi là lấy khỏi đống hạt đậu 1,2 hoặc 3 hạt đậu. A đi trước và thay phiên nhau. Người nào lấy được hạt đậu cuối cùng là người chiến thắng. Vậy người nào có chiến thuật để luôn thắng trong cuộc chơi và chiến thuật đó như thế nào?*

Lời giải. A luôn luôn thắng nếu A thực hiện chiến thuật sau: Khởi đầu A lấy 1 hạt đậu, nước tiếp theo A sẽ lấy đi $4 - x$ hạt, ở đây x là số hạt đậu B đã lấy ở nước đi trước đó. Thật vậy, sau khi A đi lần đầu tiên, còn lại

2000 hạt đậu. Tiếp theo, theo chiến thuật trên thì sau mỗi lần B rồi đến A đi, đống hạt đậu luôn còn lại số hạt bằng bội số của 4. Do vậy, cuối cùng đến lượt B thì còn lại 4 hạt. Dù B thực hiện cách nào thì A cũng đi được nước cuối sẽ lấy đi hết số hạt đậu và A thắng cuộc. ☺

Ví dụ 5.2 (Mỹ 1999). *Trò chơi Y2K trên dải băng có ô vuông kích cỡ* 1×2000. *Hai người chơi viết vào những ô trống hoặc là S hoặc là O. Người chơi đầu tiên tạo ra ba ô liên tiếp thành chữ SOS sẽ thắng cuộc. Nếu tất cả các ô đã điền đầy mà không tạo ra được SOS thì trò chơi gọi là hòa. Chứng minh rằng người chơi thứ hai có một chiến thuật thắng.*

Lời giải. Gọi một ô trống là *xấu* nếu khi đặt S hoặc O vào ô này sẽ tạo cho người chơi tiếp theo nhận được SOS trong lượt đi tiếp theo.

Bổ đề: *Một ô vuông là xấu khi và chỉ khi nó nằm trong khối 4 ô vuông liên tiếp có dạng* $S**S$, *ở đây* $*$ *là một ô trống.*

Thật vậy, dễ thấy những ô vuông trong $S**S$ là xấu. Ngược lại, nếu ô vuông là xấu, thì khi ta viết O sẽ tạo điều kiện viết SOS trong lần tiếp theo của người chơi khác. Như vậy ô xấu phải có một S ở bên cạnh và một ô trống ở phía bên cạnh kia. Khi ta viết S sẽ bị thua ngay ở bước tiếp theo, nghĩa là ta phải đặt kí tự S khác bên cạnh kia của ô trống, tạo ra dạng $S**S$ là những ô xấu.

Bây giờ ta quay lại bài toán, người chơi thứ hai có chiến thuật thắng như sau: Sau khi người thứ nhất đã chơi, người thứ hai viết S tại vị trí cách xa ít nhất 4 ô trống từ phía đầu của dải băng hoặc từ phía ô đầu tiên mà người thứ nhất đã chơi. Đến bước thứ hai, người thứ hai sẽ đặt S cách xa ba ô từ ô đã chơi của mình lần trước đó sao cho ở giữa là trống. (Nếu bước đi thứ hai của người thứ nhất ở bên cạnh hoặc cách một ô từ ô chơi lần đầu của người thứ hai, thì người thứ hai sẽ đặt S thứ hai ở cạnh bên kia.) Sau bước thứ hai của người thứ hai, tồn tại 2 ô xấu trên giải băng. Như vậy cuối cùng ai đó trong hai người chơi phải điền vào những ô này và trò chơi sẽ không hòa.

Tại bất kì bước chơi khác, khi người chơi thứ hai đến lượt, luôn luôn có số lẻ ô trống và số chẵn ô xấu, như vậy người chơi thứ hai có thể luôn luôn chơi vào ô không phải là ô xấu. ☺

Ví dụ 5.3. *Có một bàn vuông với số ô vuông trên các cạnh là lẻ. Hai người chơi lần lượt đặt những đồng xu vào các ô vuông của bàn. Người chơi nào không còn chỗ để đặt đồng xu coi như là thua trận. Hãy chỉ ra rằng người chơi thứ nhất có thể luôn luôn chiến thắng.*

Lời giải. Vì các cạnh có số lẻ ô vuông nên tồn tại một ô vuông tại tâm của bàn. Người chơi thứ nhất đặt đồng xu tại ô ở tâm bàn. Nếu người chơi thứ hai còn đặt được đồng xu vào một ô, thì người thứ nhất có thể đặt đồng xu tại vị trí đối xứng qua đồng xu ở tâm bàn (đối diện với vị trí người thứ hai đã đặt đồng xu). Vì diện tích của mặt bàn còn trống giảm, trò chơi phải kết thúc. Người chơi thứ nhất sẽ thắng. ☺

Ví dụ 5.4 (Trò chơi Bachet). *Khởi đầu, trên bàn có n quân cờ với $n > 0$. Hai người chơi mỗi lần chơi lấy đi ít nhất 1 quân cờ và nhiều nhất k quân cờ. Người cuối cùng có thể lấy được tất cả quân cờ còn lại trên bàn sẽ được gọi là người thắng cuộc. Với những giá trị nào của n người chơi thứ nhất có một chiến thuật thắng cuộc? Với những giá trị nào của n người chơi thứ hai có một chiến thuật thắng cuộc?*

Lời giải. Ta có thể thử với những trường hợp đơn giản của n, ta thấy rằng nếu $n \not\equiv 0 \pmod{k+1}$, khi đó người chơi thứ nhất có chiến thuật thắng, ngược lại người thứ hai sẽ có chiến thuật thắng. Để chứng minh điều này, cho n_t là số quân cờ trên bàn.

Nếu $n_t = (k+1)q_t + r_t$ với $0 < r_t < k+1$, thì người chơi thứ nhất có thể thắng bằng cách mỗi lần lấy đi r_t quân cờ. (Chú ý rằng do $r_t > 0$ nên mỗi lần người thứ nhất lấy như vậy thì người thứ hai xuất phát với bội của $k+1$ quân cờ và lần nào cũng như vậy người thứ hai chỉ có thể lấy đi từ 1 đến k quân cờ).

Nếu $n = (k+1)q$, thì người thứ nhất có lấy bao nhiêu quân cờ đi, chẳng hạn m quân cờ ($1 \leq m \leq k$) thì người thứ hai có thể thắng bằng cách lấy q quân cờ mỗi lần chơi sao cho $m + q = k + 1$. ☺

BÀI TẬP

▹ **5.5.** Trong trò chơi Bachet, nếu luật chơi thay đổi cho mỗi người chơi có thể mỗi lần lấy số quân cờ là 1 hoặc 2 hoặc 4 hoặc 8 hoặc 16 hoặc ... (một số lũy thừa của 2), thì ai có thể thắng?

▹ **5.6.** Trong trò chơi Bachet, nếu luật chơi thay đổi cho mỗi người có thể lấy đi một hoặc một số nguyên tố quân cờ mỗi lần, thì ai có thể thắng?

▹ **5.7.** Khởi đầu có một quân cờ tại một góc trên bàn cờ $n \times n$ ô vuông. Hai người chơi A và B thay nhau di chuyển quân cờ sang (một ô vuông) bên trái, bên phải, lên trên hoặc xuống dưới. Người chơi không thể di chuyển tới ô vuông đã đi qua rồi. Người thua cuộc là người cuối cùng không thể đi được nữa. Người nào sẽ thắng khi n là số chẵn? Người nào sẽ thắng khi n là số lẻ? người nào sẽ thắng nếu quân cờ khởi đầu từ một ô vuông bên cạnh ô vuông ở góc bàn cờ?

▹ **5.8.** Khởi đầu với hai đống quân cờ gồm p và q quân cờ tương ứng. A và B thay nhau thực hiện những bước đi. Người chơi thực hiện bước đi bao gồm lấy đi một đống quân cờ nào đó và chia những quân cờ của đống kia thành hai đống (không nhất thiết hai đống có số quân cờ bằng nhau). Người thua cuộc là người đến lượt không còn đống quân cờ có thể chia được. Người nào sẽ thắng? (Gợi ý: Kết quả phụ thuộc vào những tính chẵn lẻ của p và q).

5.2. KIẾN THỨC TOÁN VỚI TRÒ CHƠI

Ví dụ 5.9. *Hai người chơi thay phiên nhau viết liên tiếp các chữ số để cuối cùng ta có một con số có* 10 *chữ số, theo quy định: Người thứ nhất* *viết chữ số thứ nhất, người thứ hai viết chữ số thứ hai, lại người thứ nhất viết số thứ ba,... Người thứ hai muốn có một số chia hết cho 7, còn người thứ nhất chống lại ý muốn này. Vậy ai và chơi như thế nào để đạt được ý muốn của mình?*

Lời giải. Người thứ hai là viết số cuối cùng quyết định kết quả số ấy có chia hết cho 7 không. Khi người thứ nhất viết chữ số cuối cùng của mình, thì người thứ hai nhận được một số có 9 chữ số. Để tìm số thứ mười, người thứ hai thêm số 0 vào số đó (nghĩa là nhân số thu được với 10), sau đó đem chia cho 7. Kết quả thu được sau phép chia có số dư là r, thì số cần viết thêm vào của người thứ hai là $7 - r$. Đây cũng là chiến thuật người đi sau luôn luôn thắng. ☺

Ví dụ 5.10. *Trên bảng đã cho sẵn phương trình*

$$*x^2 + *x + * = 0.$$

Người thứ nhất trong hai người chơi được quyền chọn ra ba số tùy ý và sau đó người thứ hai đem các số đó điền vào các dấu $*$ trong phương trình trên một cách tùy ý. Người thứ nhất sẽ thắng cuộc nếu thực hiện được mong muốn là cuối cùng nhận được một phương trình bậc hai có hai nghiệm hữu tỉ phân biệt. Người thứ hai tìm cách chống lại ý định đó của người thứ nhất. Người thứ nhất sẽ phải chọn các số như thế nào để thực hiện được mong muốn của mình?

Lời giải. Gọi a, b, c là các số mà người thứ nhất chọn, thế thì anh ta phải chọn sao cho $a + b + c = 0$ với $a, b, c \neq 0$, (vì nếu một số bằng 0 thì bị người thứ hai lấy số đó gán vào hệ số thứ nhất và phương trình không còn là phương trình bậc hai nữa và người thứ nhất sẽ thua). Như vậy, người thứ hai dù có thế a, b, c vào bất cứ dấu $*$ nào thì ta vẫn nhận được một phương trình bậc hai mà theo hệ quả của định lí Viéte thì luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ (hoặc nghiệm thứ hai có thể là $x_2 = \frac{b}{a}, x_2 = \frac{c}{b}, x_2 = \frac{a}{b}, \ldots$ phụ thuộc vào người thứ hai gán a, b, c vào vị trí $*$ nào). ☺

Ví dụ 5.11. *Trong một chiếc hộp có đựng 15 quả cầu xanh, và trong một hộp khác có 12 quả cầu trắng. Hai người chơi, trong mỗi lượt đi, họ buộc lấy đi 3 quả cầu xanh hoặc 2 quả cầu trắng. Người thắng cuộc là người lấy được những quả cầu cuối cùng. Vậy người thứ nhất phải chơi theo chiến thuật nào để thắng cuộc?*

Lời giải. Người thứ nhất trong lượt chơi đầu tiên, cần lấy ra 2 quả cầu trắng từ hộp thứ hai, và sau bước này thì tỉ lệ giữa quả cầu xanh và quả cầu trắng là $15 : 10 = 3 : 2$.

Nếu lúc ấy, người thứ hai lấy 3 quả cầu xanh từ hộp thứ nhất hoặc 2 quả mầu trắng ở hộp thứ hai thì người thứ nhất phải lấy ngược lại ở bước tiếp theo, 2 quả cầu trắng ở hộp thứ hai hoặc 3 quả cầu xanh ở hộp thứ nhất để đảm bảo sự bất biến của tỉ lệ $3 : 2$ đến cuối cuộc chơi. ☺

Ví dụ 5.12. *Hai mươi cô gái ngồi quanh một chiếc bàn và chơi một trò chơi với n quân bài. Khởi đầu, một cô cầm tất cả các quân bài. Trong một lần chơi, nếu lúc đó có ít nhất một cô gái cầm ít nhất hai quân bài, một trong những cô gái này phải chuyển một quân bài cho mỗi người ngồi bên cạnh mình. Trò chơi kết thúc khi và chỉ khi mỗi cô gái cầm nhiều nhất một quân bài.*

a) Chứng minh rằng nếu $n \geq 20$ thì trò chơi không thể dừng.

b) Chứng minh rằng nếu $n < 20$ thì trò chơi phải có kết thúc.

Lời giải. a) Nếu $n > 20$ thì theo nguyên lí Dirichlet[1], tồn tại ít nhất một cô gái cầm ít nhất hai quân bài tại mọi thời điểm. Vậy trò chơi không kết thúc.

Nếu $n = 20$, thì gán nhãn cho các cô gái là $G_1, G_2, ..., G_{20}$ theo chiều kim đồng hồ và G_1 là cô gái đầu tiên giữ tất cả các quân bài. Định nghĩa giá trị hiện thời của quân bài là i nếu nó nằm trong tay cô gái G_i (giá trị

[1]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859): Nhà toán học Đức.

quân bài bằng chính số thứ tự ta gán cho các cô gái). Đặt S tổng giá trị của những quân bài. Khởi đầu $S = 20$ (vì G_1 khởi đầu cầm tất cả 20 quân bài, mỗi quân bài đều có gái trị bằng 1).

Ta xét trước và sau G_i chuyển quân bài cho mỗi người ngồi bên cạnh. Nếu $i = 1$ thì S tăng lên $-1-1+2+20 = 20$ (vì G_1 chỉ có thể chuyển cho G_2 và G_{20} mà thôi, khi đó giá trị quân bài tăng lên tương ứng với số đã gán cho các cô gái và mất đi giá trị của G_1, cô gái có quân bài có giá trị là 1). Nếu $1 < i < 20$ thì S không thay đổi gì, vì $-i-i+(i-1)+(i+1) = 0$ (cô gái G_i đã chuyển quân bài có giá trị i thành $i-1$ và $i+1$ cho hai cô ngồi cạnh G_{i-1} và G_{i+1}). Nếu $i = 20$ thì S giảm đi 20 vì $-20-20+1+19 = -20$ (tương tự như phần trên). Như vậy trước khi và sau khi chuyển quân bài, S luôn luôn là bội của 20. Giả sử trò chơi có kết thúc. Khi đó mỗi cô gái cầm một quân bài và $S = 1+2+\cdots+20 = 210$, số này không phải là số bội của 20, vô lí. Như vậy trò chơi không thể kết thúc được.

b) Để thấy được trò chơi phải kết thúc nếu $n < 20$, ta phải đòi hỏi hai cô gái đánh dấu lại quân bài khi lần đầu tiên một trong hai cô gái chuyển quân bài cho người kia. Khi mà một cô gái chuyển một quân bài cho người ngồi cạnh mình, đòi hỏi cô gái phải dùng quân bài đã đánh dấu giữa hai người nếu đã có (vì theo điều kiện bài toán khi có hai quân bài trong tay thì cô gái đó mới được chuyển). Như vậy quân bài đã đánh dấu sẽ tắc lại giữa cặp hai cô gái đã đánh dấu nó. Nếu $n < 20$, sẽ tồn tại một cặp cạnh nhau mà hai cô này không có quân bài để đánh dấu, do đó không bao giờ trao đổi một quân bài nào cho nhau.

Giả sử trò chơi tiến tới vô hạn lần, ta xét số lần mỗi cô gái chuyển những quân bài. Vì trò chơi không thể dừng, nên không có một cô gái nào chuyển quân bài một số hữu hạn lần. Nhưng ta xét bắt đầu với cặp cô gái mà không có sự chuyển đổi nào (mỗi cô gái này có nhiều nhất một quân bài, vì nếu hơn thì phải chuyển được sang hai người bên cạnh) và di chuyển theo chiều kim đồng hồ một cô gái một lần (có thể những cô gái này chỉ chuyển hữu hạn lần), cuối cùng tồn tại một cặp G_i và G_{i+1} sao cho G_i chuyển quân bài hữu hạn lần và G_{i+1} chuyển quân bài vô hạn lần (nếu không có cặp nào như vậy thì các cô gái chỉ chuyển hữu hạn lần và trò chơi kết thúc). Điều này rõ ràng không được vì G_i cuối cùng sẽ dừng chuyển quân bài và cũng dừng nhận những quân bài từ G_{i+1}. ☺

Bài tập

▷ **5.13.** Bắt đầu với một đống n quân cờ. A và B thay nhau thực hiện những bước đi. Bước đầu tiên, A lấy ít nhất một quân cờ, nhưng không hết quân cờ. Từ khi đó, một người chơi có thể lấy bất kì số quân cờ, mà số này là một ước số của số quân cờ đã lấy ở bước trước đó. Người thắng cuộc là người có thể đi được bước cuối cùng. Ai sẽ là người thắng cuộc? (Phụ thuộc vào n.)

▷ **5.14.** A và B thay nhau tô mầu từng ô vuông của bàn cờ 4×4 ô. Người thua cuộc là người tô mầu hoàn chỉnh hình vuông 2×2 ô vuông. Người nào có khả năng thắng? B có thể có một chiến thuật hòa không.

▷ **5.15.** A và B thay phiên nhau đi quân mã trên bàn cờ 1994×1994 ô vuông. A chỉ thực hiện bước đi theo chiều ngang $(x, y) \to (x \pm 2, y \pm 1)$, B chỉ đi theo chiều dọc $(x, y) \to (x \pm 1, y \pm 2)$. A bắt đầu chọn một ô vuông trên bàn cờ và thực hiện bước đi. Những ô vuông quân mã đã đi qua thì không được phép đi lại. Người thua cuộc là người không thể đi được nữa. Chứng minh rằng A có một chiến thuật thắng.

5.3. Những bài toán thi học sinh giỏi

Ta thấy rằng rất nhiều bài toán được ra trong các kì thi học sinh giỏi tại một số nước, ở đây chỉ liệt kê những bài toán điển hình nhất. Các phương pháp giải cũng rất phong phú, bạn đọc hãy tham khảo và tìm ra cách giải của mình.

Ví dụ 5.16 (Liên Xô 1984). *Cho một khung hình khối lập phương và hai loại sơn màu đỏ và màu xanh, hai người quyết định một trò chơi như sau:*

Người thứ nhất chọn ba cạnh của khối lập phương và tô chúng bằng màu đỏ. Sau đó người thứ hai chọn ba cạnh trong số những cạnh còn lại của khối lập phương và tô chúng màu xanh. Lại đến lượt người thứ nhất chọn ba cạnh trong số còn lại tô màu đỏ. Cuối cùng người thứ hai tô nốt màu xanh của ba cạnh còn lại. Người thắng cuộc là người bằng màu sơn của mình tô trọn vẹn 4 cạnh của một mặt khối lập phương. Người thứ nhất sẽ thắng với một chiến thuật đúng đắn trong cuộc chơi không?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng với một chiến thuật thích hợp người chơi thứ nhất không thể thắng được. Ta thấy rằng để không bị thua, người chơi thứ hai tô ba cạnh vắt chéo nhau (không giao nhau) là đủ, vì bằng cách này người thứ hai tô được mỗi cạnh trên mỗi mặt. Như vậy, người thứ nhất ngay từ bước tô đầu tiên phải ngăn chặn người thứ hai tô ba cạnh vắt chéo nhau. Ta sẽ chứng minh rằng điều này người thứ nhất không thể thực hiện được. Thật vậy, ta xét tất cả bộ ba những cạnh vắt chéo cùng nhau. Tổng số là 8 bộ ba như vậy, vì mỗi cạnh trong đó tham gia trong hai bộ ba như vậy (bạn đọc vẽ hình sẽ rõ). Một lần tô 3 cạnh người thứ nhất có thể tô một phần những cạnh nhiều nhất là trong 6 bộ. Suy ra người chơi thứ hai có thể tô một trong những bộ ba các cạnh vắt chéo cùng nhau còn lại và như vậy kết quả sẽ hòa. ☺

Ví dụ 5.17 (Đức 1984). *Trên một hàng được viết liên tiếp $2n$ kí hiệu x cạnh nhau. Hai người chơi thay phiên nhau thay một kí hiệu x bằng một trong những chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Người chơi thứ hai thắng khi và chỉ khi số nhận được số gồm $2n$-chữ số (trong hệ số thập phân) chia hết cho 9. Hãy tìm tất cả những giá trị của n sao cho người chơi thứ hai có chiến thuật thắng.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng người chơi thứ nhất (người chơi đầu tiên) có chiến thuật thắng với $n \not\equiv 0 \pmod 9$, còn với $n \equiv 0 \pmod 9$ người thứ hai có chiến thuật thắng.

Cho $n \equiv i \pmod 9$, ở đây $0 < i \leq 8$ người chơi thứ nhất chọn chữ số đầu tiên x_0 của mình theo bảng sau:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_0	1	2	4	6	1	1	3	5

còn sau đó người này luôn chọn chữ số $7 - y$, ở đây y là chữ số người thứ hai vừa chọn bước trước đó. Trong trường hợp như vậy, sau khi người thứ hai đi bước cuối cùng của mình ví dụ như chọn chữ số x_1, khi đó tổng S của những chữ số trong số vừa tạo ra là

$$S = x_0 + 7(n - 1) + x_1 \equiv x_0 + 7(i - 1) + x_1 \pmod 9.$$

Bằng cách kiểm tra trực tiếp đưa đến kết luận không có giá trị cho phép nào của x_1 sao cho $x_0 + 7(i - 1) + x_1$ chia hết cho 9.

Nếu $n \equiv 0 \pmod 9$, người thứ hai sẽ thắng, nếu người này luôn đặt chữ số $7 - y$, ở đây y là chữ số người thứ nhất đã chọn trong bước đi vừa xong. Khi đó đến hết cuộc chơi tổng những chữ số của số nhận được là

$$S = 7n \equiv 0 \pmod 9.$$ ☺

Ví dụ 5.18 (Ai-len 1996). *Trên một bàn cờ hình chữ nhật có những ô vuông kích thước* 5×9, *trò chơi sau đây được chơi: Khởi đầu, một số đĩa được đặt ngẫu nhiên trên một số những ô vuông, không có ô vuông nào chứa nhiều hơn một đĩa. Một lần chơi bao gồm lấy đi tất cả các đĩa theo những luật chơi sau đây:*

i) Mỗi đĩa có thể chuyển tới một hình vuông phía trên, phía dưới, phía trái hoặc phía phải;

ii) Nếu một đĩa đã chuyển lên hoặc xuống dưới một lần chơi rồi, thì nó phải chuyển về bên trái hoặc bên phải, và ngược lại;

iii) Tại thời điểm kết thúc lần chơi, không có ô vuông nào chứa hai đĩa hoặc nhiều hơn thế.

Trò chơi kết thúc nếu nó không có khả năng thực hiện đầy đủ một lần chơi tiếp. Chứng minh rằng nếu khởi đầu bằng 33 *đĩa được đặt trên bàn,* *trò chơi cuối cùng phải kết thúc. Chứng minh rằng khởi đầu ta đặt 32 đĩa trên bàn thì trò chơi sẽ kéo dài vô tận.*

Lời giải. Nếu 32 đĩa được đặt trên bàn góc dưới phía phải chiếm hình chữ nhật kích thước 4×8; chúng có thể tất cả di chuyển lên trên, sang bên trái, xuống dưới và sang bên phải một cách lặp đi lặp lại. Để chỉ ra rằng trò chơi với 33 đĩa cuối cùng phải dừng, ta đánh nhãn cho các ô vuông trên bàn như sau:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Chú ý rằng có tám số 3. Một đĩa tại 1 đi đến 3 sau khi 2 đã chuyển đi, một đĩa tại 2 đi đến 1 hoặc 3 trực tiếp và một đĩa tại 3 đi đến 2 trực tiếp. Như vậy nếu k đĩa khởi đầu trên 1 và $k > 8$, thì trò chơi dừng lại vì không đủ chỗ 3 cho những đĩa này chuyển tới. Như vậy ta giả thiết rằng số $k \leq 8$, trong trường hợp này có nhiều nhất 16 đĩa trên 1 hoặc 3 khi khởi đầu (do có 8 số 3 và $k \leq 8$ là số đĩa nhiều nhất có thể có trên 1) và như vậy có ít nhất 17 đĩa trên 2. Từ 17 đĩa này, nhiều nhất 8 đĩa được chuyển đến 3 sau một lần chuyển, như vậy có ít nhất 9 đĩa cuối cùng đến 1. Những đĩa này không thể tất cả chuyển đến 3 sau đó. Như vậy trò chơi sẽ kết thúc. ☺

Ví dụ 5.19 (Israel 1995). *Hai người chơi trên một bàn cờ rộng vô hạn bao gồm những ô vuông kích thước 1×1. Người chơi thứ nhất chọn một ô vuông và đánh dấu nó bằng O. Khi đó người chơi thứ hai chọn một ô vuông khác và đánh dấu bằng X. Họ chơi như vậy đến khi một trong những người chơi đánh dấu được một hàng hoặc một cột 5 ô vuông liền nhau và người làm được như vậy trước sẽ thắng. Nếu không người chơi nào có được kết quả mong muốn thì trò chơi được coi là hòa. Chứng minh rằng người chơi thứ hai có thể ngăn chặn được người chơi thứ nhất thắng cuộc.*

Lời giải. Ta gán nhãn cho các ô vuông như hình 5.1.

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋯	1	2	3	3	1	2	3	3	⋯
⋯	1	2	4	4	1	2	4	4	⋯
⋯	3	3	1	2	3	3	1	2	⋯
⋯	4	4	1	2	4	4	1	2	⋯
⋯	1	2	3	3	1	2	3	3	⋯
⋯	1	2	4	4	1	2	4	4	⋯
⋯	3	3	1	2	3	3	1	2	⋯
⋯	4	4	1	2	4	4	1	2	⋯
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Hình 5.1

Chú ý mỗi số đều có một cặp. Số 1 và số 2 có cặp theo chiều dọc, còn số 3 và số 4 có cặp theo chiều ngang. Mỗi khi người chơi thứ nhất đánh dấu ô vuông, người chơi thứ hai sẽ đánh dấu ô vuông kia của cặp. Vì bất kì 5 ô liên tiếp theo cột hoặc theo hàng phải chứa một cặp của cùng những số này, như vậy người chơi thứ nhất không bao giờ thắng. ☺

Ví dụ 5.20 (IMO 1993). *Trên bàn cờ vô hạn những ô vuông kích thước* 1×1. *Người ta thực hiện một trò chơi như sau: Đầu tiên xếp* n^2 *quân vào một hình vuông gồm* $n \times n$ *ô vuông cạnh liền cạnh sao cho trong mỗi ô vuông của hình vuông chứa một quân cờ. Cách đi trong trong trò chơi là quân cờ chỉ được nhảy theo hàng hoặc cột qua một ô có chứa quân cờ ở ngay sát bên cạnh, sang một ô trống tiếp ngay sau đó. Khi đó quân cờ ở ô bị nhảy qua sẽ bị loại bỏ.*

Tìm các giá trị của n *để có thể kết thúc trò chơi sao cho trên bàn cờ chỉ còn lại đúng một quân cờ.*

Lời giải. Ta xét những quân cờ đặt tại những *điểm lưới* (điểm có toạ độ nguyên): $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Với $k = 0, 1, 2$, đặt $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{Z} :$

$x + y \equiv k \pmod 3\}$. Đặt a_k là số quân cờ trên điểm lưới thuộc vào C_k với $k = 0, 1, 2$.

Bước đi theo hàng là lấy một quân cờ tại điểm (x, y) nhảy qua quân cờ tại $(x \pm 1, y)$ chuyển tới điểm trống $(x \pm 2, y)$. Sau khi di chuyển, mỗi a_k tăng lên hoặc giảm đi 1. Như vậy a_k thay đổi tính chẵn lẻ.

Nếu n chia hết cho 3, khi đó $a_0 = a_1 = a_2 = \frac{n^2}{3}$ ngay khi bắt đầu chơi. Do đó tại mọi thời điểm, a_k đều có cùng tính chẵn lẻ này. Như vậy trò chơi không thể kết thúc với một quân còn lại vì sẽ có hai a_k trên toạ độ lưới 0 và cái kia là 1 (không cùng tính chẵn lẻ).

Nếu n không chia hết cho 3, thì trò chơi có thể kết thúc với một quân còn lại. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 1$ hoặc 2, điều này dễ thấy. Với $n \geq 4$ ta xây dựng phương pháp để giảm $n \times n$ quân cờ xuống $(n - 3) \times (n - 3)$ quân cờ.

Ta xét những quân cờ tại vị trí $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)$. Những bước đi $(1,0) \to (-1,0)$, $(0,2) \to (0,0)$, $(-1,0) \to (1,0)$, bỏ đi được ba quân cờ liên tiếp trong một cột và trả lại quân cờ thứ tư về vị trí ban đầu. Ta có thể áp dụng thủ thuật này lặp lại từ đáy bên trái $3 \times (n - 3)$ quân cờ của $n \times n$ ô vuông từ trái qua phải, sau đó từ đáy dưới bên phải $(n - 3) \times 3$ quân cờ từ đáy dưới lên đỉnh và cuối cùng từ đỉnh phải 3×3 quân cờ từ phải sang trái. Như vậy sẽ còn lại $(n - 3) \times (n - 3)$ quân cờ ta cần chứng minh. ☺

Ví dụ 5.21 (Anh 2000). *Alice chơi một trò chơi một mình trên bàn cờ 20×20. Khởi đầu Alice trải trên bàn cờ trong mỗi ô một đồng xu gồm các dạng sau đây: 100 penny, 100 nickel, 100 dime, và 100 quarter. Alice chọn 59 đồng xu bất kì và lấy ra khỏi bàn cờ. Sau đó mỗi lần Alice lấy 1 đồng xu theo nguyên tắc sau đây:*

- *Một đồng peny có thể lấy đi được nếu có bốn hình vuông bên cạnh (trên, dưới, phải, trái) bỏ trống. Những ô ở ngoài bàn cờ không được tính là bốn ô trống theo quy tắc này. Ví dụ, những ô ở góc bàn cờ* *hoặc ở bên cạnh bàn cờ, những ô này thậm trí có ba ô bên cạnh trống thì đồng xu tại ô này cũng không được tính theo quy tắc này.*

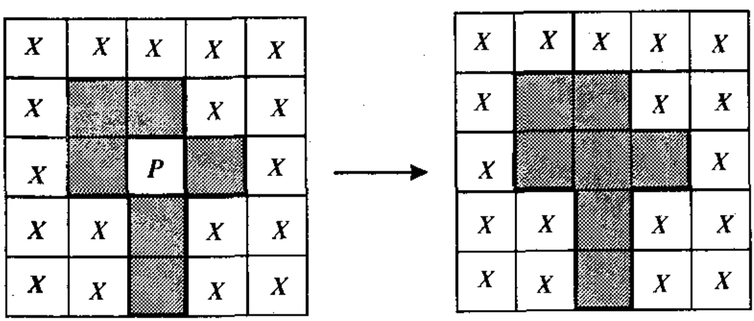
- *Một đồng Nikel có thể lấy đi nếu tồn tại ít nhất ba ô trống bên cạnh (những ô ngoài bàn cờ không tính là ô trống).*

- *Một đồng Dime có thể lấy đi chỉ khi có ít nhất hai ô bên cạnh trống (những ô ở ngoài bàn cờ cũng không tính là ô trống).*

- *Một đồng quarter có thể lấy đi chỉ khi có ít nhất một ô trống bên cạnh (những ô ở ngoài bàn cờ cũng không tính là ô trống).*

Alice thắng nếu Alice lấy được tất cả những đồng xu trên bàn cờ. Chứng minh rằng không có khả năng thắng của Alice.

Lời giải. *Phương pháp 1:* Giả sử những ô vuông bằng nhau. Ta xét tại một thời điểm của cuộc chơi, *chu vi* của vùng những ô vuông trống (vùng này có thể liên thông hoặc không liên thông). Ví dụ, giả sử rằng tại thời điểm nào đó 64 ô vuông là trống. Nếu những ô vuông trống gắn với nhau tạo ra 8×8 ô vuông, chu vi sẽ bằng $4.8 = 32$. Mặt khác, nếu không có một ô nào trong 64 ô vuông là bên cạnh nhau, thì chu vi sẽ bằng $4.64 = 256$ (mỗi ô vuông có chu vi 4).



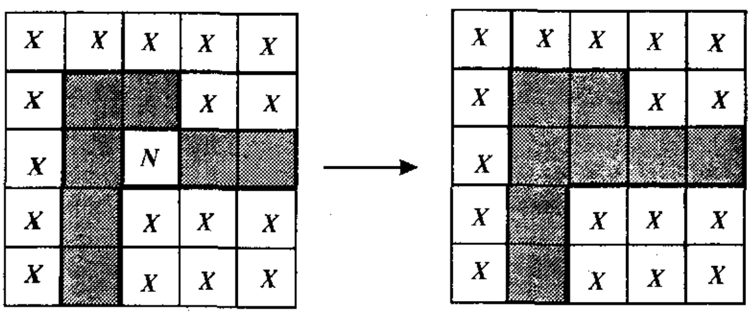
Hình 5.2

Tại thời điểm khởi đầu trò chơi có k - 59 ô vuông trống. Tại thời điểm này chu vi tối đa là 4k. Bây giờ ta xét các đồng xu khác nhau được lấy đi.

Để một đồng penny lấy đi, nó phải có xung quanh 4 cạnh với các ô vuông trống. Sơ đồ sau đây diễn tả tình trạng này: Những ô xám là các ô trống, những ô vuông có dấu X bị chiếm bởi những đồng xu bất kì, còn ô có dấu P là chứa đồng penny, đường vẽ đậm là chu vi.

Sau khi lấy đồng penny đi rồi, những cạnh ô vuông chứa đồng penny không tính nữa. Như vậy mỗi lần lấy được đồng penny đi thì chu vi được giảm đi 4.

Nếu một đồng nickel lấy đi, có khả năng nó được bao quanh bởi 4 ô vuông bên cạnh ô trống như trên, trong trường hợp như vậy chu vi sẽ giảm đi 4. Tuy nhiên đồng nickel có thể chỉ có ba ô trống bên cạnh như hình sau:



Hình 5.3

Trong trường hợp này, chu vi giảm đi 2. Như vậy, trong bất cứ hoàn cảnh nào, sau khi lấy đi đồng nickel chu vi đều giảm đi ít nhất 2.

Bằng lí luận tương tự (hãy vẽ hình) ta có kết luận là nếu một đồng dime được lấy đi, chu vi không tăng lên (nó cũng giảm đi 2 hoặc 4), và khi một đồng quarter được lấy đi, chu vi có thể tăng lên, nhưng nhiều nhất là 2 (nó có thể không thay đổi hoặc giảm đi 2 hoặc 4).

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng trên bàn cờ không thể không còn một đồng xu nào. Giả sử lấy được hết đồng xu trên bàn cờ thì chu vi sẽ là $4.20 = 80$. Giả sử tại thời điểm xuất phát có p đồng penny, n đồng nickel, d đồng dime, và q đồng quarter đã lấy đi (như vậy $p + n + d + q = k$). Đặt cho gọn $t = 10$. Nếu tất cả những đồng xu còn lại đã được lấy đi, thì $t^2 - p$ đồng penny sẽ được lấy đi, chu vi giảm đi đúng $4(t^2 - p)$. Cũng như vậy, $t^2 - n$ đồng nickel có thể được lấy đi, nhưng chu vi của nó sẽ giảm đi ít nhất $2(t^2 - n)$. $(t^2 - d)$ đồng dime được lấy đi và chu vi giảm đi ít nhất bằng 0. Cuối cùng, $(t^2 - q)$ đồng quarter được lấy đi và chu vi tăng nhiều nhất là $2(t^2 - q)$.

Ta nhắc lại là giá trị ban đầu của chu vi nhiều nhất là $4k$. Như vậy, nếu tất cả các đồng xu được lấy đi, giá trị cuối cùng của chu vi nhiều nhất là

$$4k - 4(t^2 - p) - 2(t^2 - n) + 2(t^2 - q) = 4k - 4t^2 + 4p + 2n - 2q.$$

Nhưng $4p + 2n - 2q$ là nhỏ hơn hoặc bằng $4(p + n + d + q) = 4k$, như vậy chu vi cuối cùng nhiều nhất là $4k - 4t^2 + 4k = 8k - 4t^2 = 8.59 - 4.10^2 = 72$, trái với thực tế là chu phải bằng 80.

Phương pháp 2: Định nghĩa P là chu vi những vùng trống (như định nghĩa ở cách giải trên) và cho q, d, n là số những đồng tương ứng quarter, dime, và nickel trên bàn cờ tại thời điểm xuất phát. Khi đó đại lượng $P - 4q - 2d + 2n$ là không đổi đơn điệu: Nghĩa là nó không tăng (không thay đổi khi những đồng xu được phép lấy đi). Giá trị khởi đầu của đại lượng trên nhiều nhất là 72, khi đó giá trị mà tất cả các ô trống trên bàn cờ là 80. Vô lí, điều này dẫn đến trên bàn cờ không bao giờ tất cả các ô đều trống. ☺

Ví dụ 5.22 (Anh 2002). *Một trò chơi hai người bắt đầu với một cột tiền n đồng xu ($n \geq 3$). Người chơi thứ nhất chia cột tiền đã có thành hai cột tiền tuỳ ý. Người chơi thứ hai chọn một cột tiền (trong các cột tiền đã có trên bàn) và lại chia nó ra thành hai cột tiền tùy ý. Tiếp tục như vậy, người thắng cuộc là người chơi đến bước đi làm cho tất cả cột tiền chỉ có một hoặc hai đồng tiền. Với giá trị ban đầu nào của n thì người đi bước đầu* *tiên sẽ thắng, giả sử hai người chơi đều tài giỏi như nhau?*

Lời giải. Người chơi thứ nhất thắng khi và chỉ khi $n = 3$ hoặc n chẵn; người chơi thứ hai thắng với mọi n lẻ và $n > 3$. Ta có thể kiểm tra kết luận trên đến $n = 6$ và sau đó ta chứng minh bằng quy nạp.

1) Nếu $n > 6$ là chẵn, người thứ nhất tạo ra cột cỡ 1 (có 1 đồng xu) và cột cỡ $n - 1$ (có $n - 1$ đồng xu). Vì $n - 1$ là lẻ, người thứ nhất sẽ thắng theo giả thiết quy nạp (vì người chơi thứ nhất trở thành người thứ hai và ở vị trí xuất phát có số lẻ đồng xu).

2) Nếu $n \geq 7$ là số lẻ, người chơi thứ nhất tạo ra một cột có số chẵn đồng xu và một cột có số lẻ đồng xu. Người chơi thứ hai lại chia cột số chẵn đồng xu ra hai cột đều có số lẻ đồng xu. Tiếp tục cách như vậy, người chơi thứ hai luôn luôn đáp lại các bước đi của người chơi thứ nhất và đưa người chơi thứ nhất vào tình thế chỉ có số cột với những số lẻ đồng xu. Khi các cột tiến tới cỡ 1 (chỉ còn 1 đồng xu), chúng không còn liên quan đến bước chơi. Vấn đề nguy kịch cho người chơi là có cỡ 3 ở một cột tiền: Chỉ có một cách duy nhất mà người chơi thứ hai có thể thua là nếu người chơi thứ hai tạo cho người chơi thứ nhất một cột duy nhất cỡ 3 (và rất nhiều cột 1 đồng xu). Nhưng trong trường hợp như vậy người chơi thứ nhất phải tạo ra hoặc là một cột duy nhất hai đồng xu và một cột 3 đồng xu, hoặc là một cột duy nhất 4 đồng xu. Dù trong trường hợp nào, người chơi thứ hai thắng ở ngay bước đi tiếp theo bằng cách làm giảm đi: Trong trường hợp thứ nhất, cột ba đồng xu được chia ra cột 1 đồng xu và cột hai đồng xu, và trong trường hợp thứ hai, người thứ hai chia cột 4 đồng xu thành hai cột mỗi cột hai đồng xu. Tóm lại, chiến thuật thắng của người chơi thứ hai là luôn luôn tạo ra toàn là những cột tiền lẻ trừ khi dẫn đến tình thế tất cả các cột chỉ một đồng xu và một cột duy nhất có 3 đồng xu; trong trường hợp như vậy thì chiến thuật chiến thắng được thực hiện như mô tả trên. ☺

Ví dụ 5.23. *Hai người chơi một trò chơi bằng những đồng xu tròn bán* *kính 1, trên mặt bàn hình chữ nhật có kích thước* $m \times n$. *Mỗi người chơi có quyền đặt một đồng xu trên bàn sao cho không đè lên đồng xu khác. Khi bắt đầu mặt bàn không có một đồng xu nào trên đó. Giả sử mọi đòi hỏi vô hạn về đồng xu đều được đáp ứng, với những giá trị nào của* m *và* n *người chơi thứ nhất có chiến thuật thắng?*

Lời giải. Nếu $m < 2$ hoặc $n < 2$, thì không thể đặt một đồng xu nào trên bàn như vậy, vậy người thứ nhất thua ngay. Mặt khác, nếu $n \geq 2$ và $m \geq 2$, ta sẽ chỉ ra rằng người chơi thứ nhất có thể thắng. Gọi O là tâm của bàn, và cho người thứ nhất đặt đồng xu thứ nhất của nó sao cho tâm đồng xu chính là O. Cấu hình còn lại là đối xứng qua tâm (nghĩa là phần còn lại là như nhau dưới phép quay 180° đối với O). Bây giờ người chơi thứ hai đặt đồng xu với tâm A nào đó. Người chơi thứ nhất đáp lại bằng bước đi là đặt đồng xu có tâm tại B, là phép quay 180° của A đối với O. Người chơi thứ nhất sẽ luôn luôn thực hiện được bước đi của mình bằng cách đặt đối xứng qua tâm. Ta phải chỉ ra rằng bước đi như vậy là luôn luôn thực hiện được (đúng luật cho phép).

Vì việc đặt đồng xu tại tâm A là đúng luật, do tính đối xứng nên bước đi đặt đồng xu tại tâm B cũng đúng luật. Như vậy sau khi người thứ hai đặt đồng xu tại A, người chơi thứ nhất đi được bước hợp lệ tại B mà đồng xu có tâm tại B không thể giao với đồng xu có tâm tại A. Thật vậy, nếu P là một điểm giao, thì $AP \leq 1$ và $BP \leq 1$, vậy $AB \leq 2$. Nhưng O là trung điểm của AB, nên $AO = \frac{AB}{2} \leq 1$. Điều này nghĩa là A nằm trên mặt đồng xu có tâm O, vô lí. Do đó bước đi đặt đồng xu có tâm tại B là thực hiện được. ☺

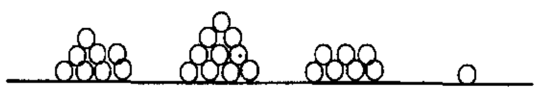
BÀI TẬP

▷ **5.24.** (Đức 1974) Peter và Paul chơi một trò chơi như sau: Hai người lần lượt xác định ước số chung lẻ lớn nhất của mỗi số tự nhiên của : 1, 2, 3, ... Nếu ước số này chia cho 4 còn dư 1, thì Peter mất một điểm và Paul được một điểm. Nếu ước số này chia cho 4 dư 3, thì Paul mất một điểm và Peter được một điểm. Sau một thời gian họ dừng cuộc chơi. Chứng minh rằng Paul đã chiến thắng.

5.4. Chuyên đề chiến thuật trò chơi Nim

5.4.1. Định nghĩa và ví dụ

Trò chơi Nim là trò chơi giữa hai người trên một số đống sỏi (ở đây ta xét cuộc chơi có bốn đống sỏi như hình vẽ 5.4) theo quy tắc: *Lần lượt mỗi người được phép lấy đi một số bất kì viên sỏi trong một đống sỏi nào đó hoặc lấy đi tất cả một đống nào đó.* Người thua cuộc là người đến lượt mà không còn viên sỏi nào để lấy.



8 10 7 1

Hình 5.4

Trò chơi Nim là trò chơi dân gian của người Trung Quốc, trong những thế kỉ trước đã được truyền bá sang châu Âu và một thời là trò chơi phổ biến ở các nước này. Từ trò chơi này đã có hàng loạt kiểu trò chơi tương tự ra đời, không những vậy, có hẳn những lí thuyết để giải thích và tìm ra chiến lược, chiến thuật cho loại trò chơi Nim. Trong phần này chúng tôi chỉ biên soạn một phần dễ hiểu và cách thức ứng dụng biểu diễn dãy số nhị phân để tạo ra chiến thuật thắng trong trò chơi này.

Để cụ thể ta chỉ đề cập tới trò chơi có 4 đống sỏi và số lượng như trong hình vẽ và *người đi đầu tiên* là *người thứ nhất* và *người đi tiếp đó là người thứ hai.* Số lượng sỏi và các đống sỏi trên mặt bàn lúc bắt đầu chơi hoặc là sau một bước đi của người chơi ta gọi là *một trạng thái.* Có thể một phương án trò chơi được ghi lại với các trạng thái như bảng 5.1. Sau mỗi bước đi của từng người chơi số viên sỏi và các đống sỏi còn lại tương

Lần đi	Người thứ nhất đi	Người thứ hai đi
1	[8, 10, 3, 1]	[8, 7, 3, 1]
2	[7, 7, 3, 1]	[7, 5, 3, 1]
3	[6, 5, 3, 1]	[6, 4, 3, 1]
4	[5, 4, 3, 1]	[5, 4, 0, 1]
5	[5, 3, 0, 1]	[2, 3, 0, 1]
6	[0, 3, 0, 1]	[0, 1, 0, 1]
7	[0, 0, 0, 1]	[0, 0, 0, 0]

Bảng 5.1 Các bước đi trong trò chơi Nim

ứng như trong bảng trạng thái. Trò chơi không thể chơi vô hạn bước vì số lượng trong đống sỏi là hữu hạn, đến một lúc không còn viên sỏi nào, người nào đến lượt là thua.

Để có những bước đi thành chiến thuật thắng đối phương trong trò chơi này ta nghiên cứu lí thuyết sau đây để có thể chiến thắng đối thủ bằng cách theo dõi thay đổi các trạng thái sau mỗi bước đi. Ta đi định nghĩa tổng các số trong trò chơi Nim:

Định nghĩa 5.2. *Tổng-Nim* của hai số trong trò chơi Nim được kí hiệu là $\uplus$ theo hai nguyên tắc sau:

(A) Tổng-Nim hai số có lũy thừa khác nhau của 2 giống như tổng bình thường trong số học. Ví dụ $4 \uplus 8 = 12$.

(B) Tổng-Nim hai số có cùng lũy thừa của 2 bằng 0. Ví dụ $4 \uplus 4 = 0$.

Chú ý: Ta biết rằng mọi số nguyên dương đều biểu diễn theo hệ nhị phân (có dạng $a = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \cdots + a_n$, ở đây $n \geq 0$, $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_i < 2$ với $i = 1, 2, ..., n$). Do đó Tổng-Nim của hai số không phải lũy thừa của 2 cũng thực hiện được bằng cách chuyển qua biểu diễn cơ số 2 rồi cộng theo nguyên tắc trên. Dễ thấy từ định nghĩa trên ta có những tính chất sau:

(C) $0 \uplus a = a \uplus 0 = a$ (phần tử 0).

(D) $a \uplus b = b \uplus a$ (tính giao hoán).

(E) $(a \uplus b) \uplus c = a \uplus (b \uplus c)$ (tính kết hợp).

Bằng quy tắc trên ta có thể tính được bất cứ Tổng-Nim của hai số bất kì. Ví dụ tính Tổng-Nim $5 \uplus 3$ bằng cách áp dụng các quy tắc trên như sau:

$$5 \uplus 3 = (4 + 1) \uplus (2 + 1)$$

$$= (4 \uplus 1) \uplus (2 \uplus 1) \quad \text{theo quy tắc (A)}$$

$$= 4 \uplus \cancel{1} \uplus 2 \uplus \cancel{1} \quad \text{theo quy tắc (B)}$$

$$= 4 \uplus 2 \quad \text{theo quy tắc (B)}$$

$$= 6 \quad \text{theo quy tắc (A).}$$

Ta liệt kê Tổng-Nim của 11 số tự nhiên đầu tiên (bảng 5.2, trang sau).

$\uplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	6	8	9	10
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0

Bảng 5.2 Tổng-Nim của 11 số tự nhiên đầu tiên

Không cần bảng 5.2 ta có thể tính Tổng-Nim các số nguyên:

Ví dụ 5.25. *Tính Tổng-Nim:*

a) $8 \uplus 10 \uplus 7 \uplus 1$;

b) $5 \uplus 1 \uplus 3 \uplus 7$.

Lời giải. a) $8 \uplus 10 \uplus 7 \uplus 1 = \cancel{8} \uplus (\cancel{8} \uplus \cancel{2}) \uplus (4 \uplus \cancel{2} \uplus \cancel{1}) \uplus \cancel{1} = 4$.

b) $5 \uplus 1 \uplus 3 \uplus 7 = (\cancel{4} \uplus \cancel{1}) \uplus \cancel{1} \uplus (\cancel{2} \uplus \cancel{1}) \uplus (\cancel{4} \uplus \cancel{2} \uplus \cancel{1}) = 0$. ☺

Ta nghiên cứu kĩ định nghĩa Tổng-Nim thì thấy rằng nó tương tự như việc tính tổng các số biểu diễn dưới dạng nhị phân. Chúng tôi không nhắc lại ở đây cách biểu diễn một số cơ số 10 sang dạng nhị phân và cách cộng các số nhị phân. Ta dùng cách cộng các số ở dạng nhị phân nhưng *không có nhớ*. Ví dụ

$\uplus$		2^3	2^2	2^1	2^0	← lũy thừa cơ số 2
8	=	1	0	0	0	
3	=			1	1	
6	=		1	1	0	
4	=		1	0	0	
9	=	1	0	0	1	← Tổng-Nim.

Bạn đọc có thể kiểm tra lại Tổng-Nim $8 \uplus 3 \uplus 6 \uplus 4 = 9$ bằng cách tính của ví dụ trên. Trong khi thực hiện phép tính dưới dạng nhị phân ở trên ta không dùng phép nhớ sang hàng khác, chỉ đơn giản là đếm số 1 trên một cột nếu là số chẵn thì cho kết quả 0 và nếu là số lẻ cho kết quả 1 (thực chất đây là phép toán XOR trong tin học người ta hay dùng). Ta kiểm tra lại hai kết quả ở ví dụ trên xem còn đúng không:

$\uplus$		2^3	2^2	2^1	2^0
8	=	1	0	0	0
10	=	1	0	1	0
7	=	0	1	1	1
1	=	0	0	0	1
4	=	0	1	0	0

$\uplus$		2^2	2^1	2^0
5	=	1	0	1
1	=	0	0	1
3	=	0	1	1
7	=	1	1	1
0	=	0	0	0

Người ta đã chỉ ra rằng cách tính tổng các số theo dạng nhị phân cho kết quả trùng với cách tính Tổng-Nim.

5.4.2. Chiến thuật trong trò chơi Nim

Ta sẽ dùng Tổng-Nim để dự đoán bước tiếp theo của ta. Phần còn lại của chuyên đề ta đi xét những trạng thái ở đó Tổng-Nim của các hạt sỏi *còn lại sau lần đi* là bằng 0 hoặc khác 0. Ta sẽ chứng minh nếu Tổng-Nim tại bước đi khác 0 thì có chiến thuật bước đi thắng cho người thứ nhất; nhưng nếu Tổng-Nim bằng 0 thì người thứ hai có thể thắng. Tại trạng thái với Tổng-Nim khác 0 người ta gọi là *trạng thái mờ* và tại trạng thái với Tổng-Nim bằng 0 người ta gọi là *trạng thái rõ*. Như vậy ta có bảng chiến thuật cho hai người chơi như sau:

Tổng-Nim	Tên gọi trạng thái	Người thắng
$\neq 0$	Mờ	*Người thứ nhất*
0	Rõ	Người thứ hai

Bảng 5.3 Bảng chiến thuật trong trò chơi Nim

Nhìn vào bảng chiến thuật trên trong khi chơi sẽ đưa ra những bước đi thích hợp để cho Tổng-Nim bằng 0 hoặc khác 0. Trước khi đi vào giải thích tại sao lại có bảng 5.3, ta hãy xét một số trạng thái đặc biệt xảy ra khi hai người cùng chơi.

- $[0,0,0,...,0]$ Trạng thái không có một viên sỏi nào trên bàn, khi đó người thứ nhất đến lượt và không thể đi được nữa, vậy là thua ngay. Trường hợp này Tổng-Nim bằng 0, người thứ hai thắng, đúng như bảng 5.3. Trạng thái như thế này người ta gọi là *trạng thái kết thúc trò chơi*.

- $[1,0,0,...,0]$ Trên bàn chỉ còn một viên sỏi, người thứ nhất sẽ lấy viên sỏi duy nhất này và là người chiến thắng. Tổng-Nim của trạng thái này là 1, trạng thái mờ và đúng như bảng 5.3, người thứ nhất thắng.

- $[n,0,0,...,0]$ Chỉ có n viên sỏi tại một đống. Theo luật chơi người thứ nhất lấy hết viên sỏi và là người thắng. Tổng-Nim trong trường hợp này là n, trạng thái này cũng mở và như bảng 5.3 đúng là người thứ nhất thắng.

- $[n, n, 0, 0, \ldots, 0]$ Trên bàn có hai đống sỏi bằng nhau, Tổng-Nim bằng 0 (cộng theo biểu diễn nhị phân thấy ngay) và theo bảng 5.3 người thứ hai sẽ thắng. Người thứ hai muốn chiến thắng thì cứ đi đúng số viên sỏi như người thứ nhất đi, nhưng ở đống sỏi khác và như vậy tổng Nim luôn luôn bằng 0, người thứ hai sẽ thắng.
- $[1, 1, 1, \ldots, 1]$ Trên bàn có n viên sỏi và mỗi đống sỏi chỉ có một viên. Trong trường hợp này hai người chơi thay phiên nhau đi đến khi không còn viên sỏi nào nữa, vậy thì nếu n lẻ, người thứ nhất thắng vì Tổng-Nim bằng 1; nếu n chẵn người thứ hai sẽ thắng vì Tổng-Nim bằng 0. Điều này cũng đúng với bảng 5.3.

Những ví dụ trên không phải chứng minh bảng 5.3 là đúng, phần sau với những mệnh đề cụ thể ta sẽ chứng minh điều đó chi tiết. Ta để ý rằng để chơi dành chiến thắng, ta phải lường trước những khả năng trạng thái xảy ra cùng với Tổng-Nim của nó. Nghĩa là ta phải đi tính Tổng-Nim và các trạng thái với Tổng-Nim như ví dụ sau:

Ví dụ 5.26. *Với những trạng thái sau đây hãy tính các Tổng-Nim cho các bước đi hợp lệ: a)* $[2, 2, 3]$ *b)* $[5, 1]$.

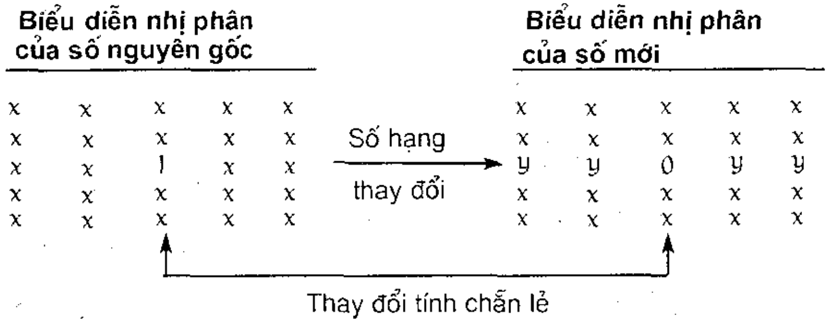
Lời giải. a) Tổng-Nim $2 \uplus 2 \uplus 3 = 3$. Những bước đi hợp lệ như sau: $[1, 2, 3]$, $[0, 2, 3]$, $[2, 1, 3]$, $[2, 0, 3]$, $[2, 2, 2]$, $[2, 2, 1]$, $[2, 2, 0]$ và tương ứng với Tổng-Nim $0, 1, 0, 1, 2, 1$ và 0.

b) Tổng-Nim $5 \uplus 1 = 4$. Các bước đi hợp lệ $[4, 1]$, $[3, 1]$, $[2, 1]$, $[1, 1]$, $[0, 1]$, $[5, 0]$ và có Tổng-Nim tương ứng là $5, 2, 3, 0, 1$ và 5. ☺

Định nghĩa 5.3. *Tổng-Nim nguyên gốc* là Tổng-Nim của trạng thái ban đầu trước khi chơi. *Tổng-Nim mới* là Tổng-Nim của trạng thái sau một bước đi nào đó.

Từ ví dụ trên ta có mệnh đề rất hay sau đây:

Mệnh đề 5.1. *Tổng-Nim nguyên gốc không bao giờ xuất hiện giữa những Tổng-Nim mới.*



Hình 5.5

Chứng minh. Với việc biểu diễn Tổng-Nim theo tổng các số nhị phân ta thấy rằng một bước đi hợp lệ bất kì làm thay đổi đúng một số hạng trong tổng như hình 5.5. Số hạng này sẽ thay đổi một số hoặc tất cả số của nó trong cách biểu diễn nhị phân (trong hình 5.5 kí tự số thứ ba của biểu diễn cũ là 1 chuyển thành 0). Mọi cột có sự thay đổi của số hạng sẽ xuất hiện thay đổi tính chẵn lẻ, nghĩa là số 1 trong cột này thay đổi từ số lượng chẵn sang lẻ hoặc từ số lượng lẻ sang chẵn, như vậy Tổng-Nim mới khác với Tổng-Nim nguyên gốc ít nhất là tại vị trí cột này (trong hình 5.5 chữ số trong cột thứ ba trong Tổng-Nim nguyên gốc sẽ thay đổi). ☺

Chú ý trong lí luận chứng minh trên ta chỉ dùng một số hạng thay đổi chứ không quan tâm đến tăng hoặc giảm Tổng-Nim.

Mệnh đề 5.2. *Tất cả những giá trị nhỏ hơn Tổng-Nim nguyên gốc đều nằm trong số các Tổng-Nim mới.*

Chứng minh. Ta kiểm tra khẳng định qua ví dụ 5.26 quả là đúng. Chứng minh mệnh đề này hơi khó một chút. Để dễ hiểu ta đi qua ba bước sau:

1. *Ví dụ về giảm Tổng-Nim của một trạng thái đã cho sang một trạng thái có Tổng-Nim nhỏ hơn bằng cách thay đổi một số hạng:* Ví dụ trạng thái $[8, 7, 5, 12]$ có Tổng-Nim bằng 6, muốn tìm trạng thái có Tổng-Nim bằng 3 bằng cách thay đổi một số hạng thì làm thế nào? Hình 5.6 chỉ cho ta thấy biểu diễn của các số $8, 7, 5, 12$, Tổng-Nim 6 và Tổng-Nim mong muốn 3 dưới dạng nhị phân. Tổng-Nim mong muốn khác với Tổng-Nim hiện thời

$$
\begin{array}{lc|cccc|l}
\oplus & & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & \\
\hline
8 & = & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
5 & = & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
12 & = & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
6 & = & 0 & 1 & 1 & 0 & \leftarrow \text{Tổng-Nim hiện thời} \\
3 & = & 0 & 0 & 1 & 1 & \leftarrow \text{Tổng-Nim muốn có} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{vị trí thay}}} &
\end{array}
$$

Hình 5.6 Giảm Tổng-Nim từ 6 xuống 3 đòi hỏi thay đổi ở cột 2^2 và 2^0

tại hai vị trí cột 2^2 và 2^0. Để đạt được Tổng-Nim mong muốn thì ta phải chọn một số hạng và đổi giá trị tại những cột này. Nhưng ta chọn số hạng nào trong số các số hạng đã có? Để trả lời câu hỏi này ta xét hình 5.7 với sự biến đổi các số $8, 7, 5, 12$ tại các cột 2^2 và 2^0. Ta chú ý là số hạng

$$
\begin{array}{lcccccccccccl}
8 & = & 1 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow & 1 & 1 & 0 & 1 & = & 13 \ \text{(tăng)} \\
7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 & \rightarrow & 0 & 0 & 1 & 0 & = & 2 \ \text{(giảm)} \\
5 & = & 0 & 1 & 0 & 1 & \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \ \text{(giảm)} \\
12 & = & 1 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 1 & = & 9 \ \text{(giảm)} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & \\
 & & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{vị trí thay}}} & & & & & & &
\end{array}
$$

Hình 5.7 Kết quả thay đổi tại cột 2^2 và 2^0

8 tăng, còn lại các số hạng khác giảm. Như vậy tồn tại ba bước đi hợp lệ từ trạng thái $[8, 7, 5, 12]$ đến trạng thái có Tổng-Nim bằng 3 là $[8, 2, 5, 12]$

hoặc [8, 7, 0, 12] hoặc [8, 7, 5, 9], (thêm vào đó một bước đi không hợp lệ [13, 5, 7, 12]).

2. *Quy tắc nhận biết số lớn hơn dưới dạng biểu diễn nhị phân:* Để nhận biết số nào lớn hơn trong dạng nhị phân theo nguyên tắc sau: *Tìm về bên trái nhất vị trí ở đó hai số khác nhau trong dạng biểu diễn nhị phân; số có số 1 tại vị trí này là lớn hơn.* Ví dụ 1000(8) lớn hơn 0111(7), 11011(27) nhỏ hơn số 11101(29).

3. *Chứng minh mệnh đề:* Để đổi từ một Tổng-Nim sang một Tổng-Nim khác nhỏ hơn, trước tiên ta so sánh biểu diễn nhị phân của hai Tổng-Nim và xác định những vị trí mà chúng khác nhau, ta gọi những vị trí đó là *D-vị trí*. Nếu bất kì một số hạng được thay đổi giá trị tại mỗi D-vị trí, thì Tổng-Nim mong muốn sẽ cho kết quả. Nếu số hạng có 0 tại D-vị trí trái nhất, thì sẽ thay thành 1 và khi đó số hạng sẽ tăng; nhưng với những số hạng có 1 tại D-vị trí trái nhất, nó sẽ thay bằng 0 và như vậy số hạng sẽ giảm. Do đó để tìm bước đi hợp lệ cho phép thay đổi trong Tổng-Nim, người ta chọn một số hạng với số 1 tại D-vị trí trái nhất, và thay đổi nó tại mỗi D-vị trí. (Trong phần 1 ví dụ hình 5.6 thì D-vị trí là cột 2^2 và 2^0. Số hạng 12 có 1 tại D-vị trí (cột 2^2) và thay đổi nó tại những D-vị trí sẽ sinh ra số nhỏ hơn). Để thấy rằng luôn luôn tồn tại một số hạng có 1 tại D-vị trí, ta nhớ lại là Tổng-Nim mong muốn nhỏ hơn Tổng-Nim hiện thời, theo bước 2 *ở trên*, Tổng-Nim hiện thời phải có 1 và Tổng-Nim mong muốn phải có 0 tại D-vị trí trái nhất (trong ví dụ trên tại 2^2 vị trí, Tổng-Nim hiện thời có 1 và Tổng-Nim mong muốn có 0). Vì Tổng-Nim hiện thời có 1 tại D-vị trí trái nhất, nên phải tồn tại một số lẻ những số hạng với 1 tại D-vị trí trái nhất này. Vì 0 không phải là số lẻ, nên phải tồn tại ít nhất một số hạng với 1 tại D-vị trí trái nhất này, và như vậy thay đổi nó tại D-vị trí này là một bước đi hợp lệ cho ra Tổng-Nim mong muốn. ☺

Ví dụ sau chỉ ra kĩ năng sử dụng mệnh đề trên để thực hiện tính toán sự biến đổi một số hạng.

Ví dụ 5.27. *Bắt đầu từ trạng thái trò chơi Nim* $\{11, 22, 33\}$ *có Tổng-Nim là* 60. *Hãy chỉ ra làm thế nào để có bước đi hợp lệ để chuyển đổi Tổng-Nim đến a)* 55; *b)* 0.

Lời giải. Ta kiểm tra lại Tổng-Nim:

$\uplus$		2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
11	=	0	0	1	0	1	1
22	=	0	1	0	1	1	0
33	=	1	0	0	0	0	1
60	=	1	1	1	1	0	0

a) Ta so sánh hai biểu diễn nhị phân của Tổng-Nim hiện có và Tổng-Nim muốn có:

		2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
60	=	1	1	1	1	0	0
55	=	1	1	0	1	1	1
				↑		↑	↑

cột số khác nhau

Vị trí cột khác nhau bên trái nhất là 2^3. Trong các số hạng $11, 22, 33$ chỉ có số 11 có 1 ở vị trí này và như vậy để có bước đi hợp lệ cho Tổng-Nim bằng 55 là thay đổi 11 tại vị trí 2^3, 2^1 và 2^0, nghĩa là đổi từ $11(001011)_2$ thành $0(000000)_2$.

b) Ta so sánh hai số biểu diễn dưới dạng nhị phân của 60 và 0:

		2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
60	=	1	1	1	1	0	0
0	=	0	0	0	0	0	0
		↑	↑	↑	↑		

cột số khác nhau

Cột sai khác trái nhất ở vị trí 2^5. Trong các số hạng $11, 22, 33$ chỉ có 33 có 1 tại vị trí này và nếu ta thay đổi tại vị trí 2^5, 2^4, 2^3 và 2^2 của 33, ta nhận được $(011101)_2 = 29$. Do đó bước đi hợp lệ chuyển Tổng-Nim về 0 là giảm từ 33 xuống còn 29. ☺

Chứng minh bảng chiến thuật trò chơi Nim đúng thông qua mệnh đề:

Mệnh đề 5.3. *Trong trò chơi Nim, những mệnh đề sau đúng:*

(N_1) *Bước đi bất kì từ một* **trạng thái rõ** *đều đưa đến một* **trạng thái mờ**.

(N_2) *Từ một* **trạng thái mờ** *bất kì đều có thể chọn được bước đi đến* **trạng thái rõ**.

(N_3) **Trạng thái kết thúc** *(từ đó không thể có bước đi được nữa) là một* **trạng thái rõ**.

Chứng minh. Mệnh đề (N_3) đã được nói đến trong phần những trạng thái đặc biệt trong trò chơi Nim ở trên. Còn (N_1) và (N_2) dễ dàng suy ra từ mệnh đề 5.1 và mệnh đề 5.2 về Tổng-Nim.

Nếu ta có một trạng thái rõ thì Tổng-Nim bằng 0 và như vậy theo mệnh đề 5.1 sau bước đi hợp lệ, Tổng-Nim không thể là 0, nghĩa là trạng thái mới sẽ là mờ.

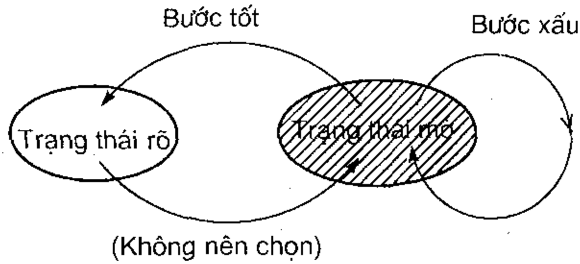
Nếu một trạng thái là mờ thì Tổng-Nim sẽ là một số lớn hơn 0 và theo mệnh đề 5.2, nó có khả năng tìm được một một bước đi hợp lệ tới trạng thái rõ. ☺

5.4.3. Chứng minh bảng chiến thuật và ứng dụng nó

Bây giờ ta đi chứng minh bảng chiến thuật 5.3 đúng:

a) Giả sử trạng thái nguyên gốc là mờ: Khi đó theo (N_2) *người thứ nhất* có thể có bước đi đến trạng thái rõ; người này gọi những bước đi như vậy là *bước đi tốt*. Sau đó nếu *người thứ hai* có thể còn đi được (nếu trạng thái không phải là kết thúc trò chơi), người này theo (N_1) chỉ có thể đưa về *trạng thái mờ*. Tiếp tục *người thứ nhất* lại thực hiện bước đi tốt, *người thứ hai* sẽ lại có bước đi tới trạng thái mờ, ... Nếu *người thứ nhất* cứ chơi theo cách này (bước đi tốt), thì *người thứ hai* luôn luôn đến lượt với dãy trạng thái rõ, mỗi bước đi kéo theo giảm số viên sỏi hơn trước. Đến một lúc nào đó *người thứ hai* sẽ phải đối mặt với trạng thái kết thúc và bị thua.

b) Tương tự, nếu trạng thái nguyên gốc là rõ: *người thứ nhất* sẽ có bước đi đến trạng thái mờ và *người thứ hai* có thể dồn *người thứ nhất* với dãy bước đi cho trạng thái rõ; tất nhiên *người thứ nhất* đến một lúc nào đó phải đối mặt với trạng thái kết thúc và khi đó *người thứ hai* sẽ thắng.



Hình 5.8 Sơ đồ bí quyết của trò chơi Nim

Tóm lại, để chơi tốt trò chơi Nim, thì trạng thái sẽ phải thay nhau chuyển đổi giữa rõ và mờ cho tới khi đạt tới trạng thái kết thúc. Nếu không có gì sai lầm thì nếu trạng thái nguyên gốc là mờ thì người thứ nhất phải thắng, nếu trạng thái nguyên gốc là rõ thì người thứ hai phải thắng như bảng chiến thuật 5.3 và thực hiện theo sơ đồ 5.8.

Ví dụ 5.28. *Từ những trạng thái mờ sau đây hãy tìm tất cả bước đi tốt từ chúng:*

a) $\{3, 4, 8, 9\}$ *b)* $\{8, 10, 7, 1\}$ *c)* $\{9, 25, 49\}$ *d)* $\{6, 5, 3, 1\}$.

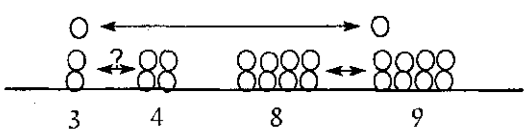
Lời giải. a) Tổng-Nim $3 \uplus 4 \uplus 8 \uplus 9 = 6$, ta kiểm tra lại:

$\oplus$		2^3	2^2	2^1	2^0
3	=	0	0	1	1
4	=	0	1	0	0
8	=	1	0	0	0
9	=	1	0	0	1
6	=	0	1	1	0

Để có bước đi tốt nghĩa là ta phải đổi Tổng-Nim bằng 0, nhìn vào bảng trên ta phải thay đổi tại vị trí cột 2^2 và 2^1 một trong các số hạng. Tại vị trí cột 2^2 chỉ có số 4 là có biểu diễn nhị phân 1 tại đó. Do đó bước đi tốt là đổi $4(= 0100)$ thành $2(= 0010)$. Nghĩa là lấy ở đống thứ hai đi hai viên sỏi.

Mẹo trong trò chơi Nim: Trong khi chơi trò này không thể kẻ bảng hoặc biến đổi nhị phân các số rồi tính tổng rất phiền hà. Có một cách là sử dụng phép Tổng-Nim được tiến hành như sau (hình 5.9):

1. Chia mỗi đống sỏi lấy phần lũy thừa của 2 gần nhất, ví dụ $[3, 4, 8, 9]$ chia thành dãy $1, 2, 4, 8, 8, 1$.
2. Theo Tổng-Nim trong dãy có hai $8, 8$ và $1, 1$ đều bị trượt tiêu, chỉ còn lại đống $2, 4$ để làm Tổng-Nim bằng 0 thì tổng hai số này phải bằng 0 nghĩa là phải lấy đi 2 viên ở đống 4 viên.



Hình 5.9

b) Tổng-Nim bằng 4:

$\oplus$		2^3	2^2	2^1	2^0
8	=	1	0	0	0
10	=	1	0	1	0
7	=	0	1	1	1
1	=	0	0	0	1
4	=	0	1	0	0

Để Tổng-Nim bằng 0, ta phải thay đổi một số hạng ở cột 2^2. Trong cột này chỉ có 7 có số 1, vậy bước đi tốt nhất là chuyển 7(= 0111) thành 3(= 0011), nghĩa là lấy ở đống thứ ba đi 4 viên sỏi.

c) Tổng-Nim bằng 33:

$\oplus$		2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
9	=	0	0	1	0	0	1
25	=	0	1	1	0	0	1
49	=	1	1	0	0	0	1
33	=	1	0	0	0	0	1

Để Tổng-Nim bằng 0, ta phải thay đổi một số hạng ở cột 2^5 và một số hạng ở cột 2^0. Trong cột 2^5 chỉ có 49 có số 1, vậy bước đi tốt nhất là chuyển 49(= 110001) thành 16(= 010000), nghĩa là lấy ở đống thứ ba đi 33 viên sỏi.

d) Tổng-Nim bằng 1:

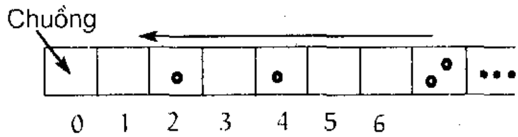
$\oplus$		2^2	2^1	2^0
6	=	1	1	0
5	=	1	0	1
3	=	0	1	1
1	=	0	0	1
1	=	0	0	1

Để Tổng-Nim bằng 0, ta phải thay đổi một số hạng ở cột 2^0. Trong cột này có ba số 5, 3, 1 có số 1, vậy bước đi tốt nhất có ba khả năng là lấy đi 1 viên ở một trong ba đống đó. ☺

BÀI TẬP

▷ **5.29.** (Trò chơi Nim giải ô) Một băng giấy dài được chia thành những ô vuông và gán nhãn 0, 1, 2, 3, ...(hình 5.10).

Trên mỗi ô vuông có thể đặt một hoặc một vài quân cờ. Hai người lần lượt thực hiện các bước đi: Một bước đi hợp lệ là chuyển đúng 1 quân về

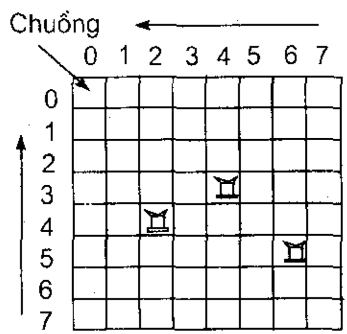


Hình 5.10

phía trái (về số 0). Người thắng cuộc là người đi bước cuối cùng về chuồng (ô nhãn số 0). Hãy tìm mối quan hệ giữa trò chơi này với trò chơi Nim và *tìm bước đi tốt từ một trạng thái cho trước.*

▷ **5.30.** (Trò chơi Nim quân cờ)

Trò chơi được thực hiện trên bàn cờ vua. Trên mỗi ô được đặt một hoặc vài *quân cờ*. Hai người chơi thay phiên nhau thực hiện bước đi: Một bước đi hợp lệ là chuyển đúng một quân cờ từ một ô sang bất kì ô vuông nào về phía trên hoặc về phía trái (nhưng không đồng thời). Mục đích là dồn hết tất cả quân cờ về ô vuông được đánh dấu là chuồng (hình 5.11) và người đưa quân cờ cuối cùng về chuồng là người thắng cuộc. Hãy giải thích mối liên quan trò chơi này với trò chơi Nim và tìm bước đi tốt từ một trạng thái đã cho (ví dụ như hình 5.11).



Hình 5.11

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Kvant* (Tạp chí toán học cho nhà trường phổ thông của Liên Xô cũ và ngày nay là Liên bang Nga, năm 1970-2002)

[2] G. Polya, *Toán học và những suy luận có lí*, NXBGD, 1995.

[3] R. j. McEliece, R. B. Ash, C. Ash, *Introduction to Discrete Mathematics*, McGraw-Hill Book Co., 1989.

[4] G. H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya *Bất đẳng thức*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2002.

[5] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, NXB GD, 1998.

[6] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Đirichle và ứng dụng*, NXB KHKT, 1999.

[7] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Quy nạp toán học*, NXB GD, 2000.

[8] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Số phức với hình học phẳng*, NXB ĐHQG, 2000.

[9] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp điển hình trong giải toán phổ thông*, NXB GD, 2001.

[10] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp giải bài toán cực trị trong hình học*, NXB KHKT, 2001.

[11] Nguyễn Hữu Điển, *Sáng tạo trong giải toán phổ thông*, NXB GD, 2002.

[12] Nguyễn Hữu Điển, *Đa thức và ứng dụng*, NXB GD, 2003.

NHỮNG KÍ HIỆU

Trong cuốn sách này ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{N}$	tập hợp số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	tập hợp số nguyên
$\mathbb{Q}$	tập hợp số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$\mathbb{C}$	tập hợp số phức
$\equiv$	dấu đồng dư
C_m^k	tổ hợp chập k của m phần tử
$\vdots$	phép chia hết
$\not\vdots$	không chia hết
USCLN	ước số chung lớn nhất
BSCNN	bội số chung nhỏ nhất
deg	bậc của đa thức
☺	Kết thúc chứng minh
IMO	International Mathematics Olympiad
APMO	Asian Pacific Mathematics Olympiad

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập lần đầu và tái bản:
TRẦN HỮU NAM
Trình bày bìa:
TRẦN THỊ THÚY HẠNH
Chế bản:
NGUYỄN HỮU ĐIỂN
Sửa bản in:
NGUYỄN HỒNG SƠN

GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN

Mã số: 8I004T5- TTS

In 3.000 bản (10TK), khổ 14,3 x 20,3cm, tại Xí nghiệp in Hà Tây.

Số in: 29/TK; Số xuất bản: 21/727-05

In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2005