|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI**  **ĐỀ THI ĐỀ XUẤT** | **ĐỀ THI ĐỀ XUẤT DUYÊN HẢI BẮC BỘ**  **NĂM 2023**  **Môn: Toán – Lớp 10**  ***Thời gian làm bài: 180 phút, không kể phát đề***  *(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)* |

**Câu 1 (4,0 điểm)** Xét các số thực  khác  và đôi một phân biệt sao cho các đa thức bậc ba sau đây  có một nghiệm thực chung.

a) Chứng minh rằng 

b) Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình  có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt).

**Câu 2 (4,0 điểm)** Tìm số thực  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức  đúng với mọi bộ ba số thực không âm  thỏa mãn điều kiện .

**Câu 3 (4,0 điểm)** Cho tam giác nhọn không cân   nội tiếp đường tròn , có trực tâm là . Điểm  là trung điểm cạnh ;  cắt  và đường tròn  lần lượt tại  và  khác ,  cắt lại đường tròn  tại  khác . Gọi điểm đối xứng với  lần lượt qua các đường thẳng  là . Gọi  lần lượt là trung điểm của .

a) Chứng minh rằng bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy.

**Câu 4 (4,0 điểm)** Cho  là số nguyên tố và  là số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của số  hoặc là , hoặc chia cho  dư 1.

**Câu 5 (4,0 điểm)** Cho tập hợp . Với  là số nguyên dương, ta gọi  là tập hợp tốt nếu như  có đúng  phần tử và với mọi  thuộc  thì  hoặc  cũng thuộc 

a) Với  tính số lượng tất cả các tập tốt.

b) Với  chứng minh rằng số tập tốt là số chính phương.

**----- Hết -----**

**Người ra đề: Nguyễn Bá Hoàng**

**Số điện thoại: 0977.394.437**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI** | | **HDC ĐỀ ĐỀ XUẤT DUYÊN HẢI BẮC BỘ**  **NĂM 2023**  **Môn: Toán – Lớp 10**  *(Đáp án gồm 05 trang)* | |
| **Câu** | | **Nội dung trình bày** | | **Điểm** | |
| **1** | | Xét các số thực  khác  và đôi một phân biệt sao cho các đa thức bậc ba sau đây  có một nghiệm thực chung.  a) Chứng minh rằng  b) Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình  có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt). | |  | |
| a) Gọi  là nghiệm thực chung của ba đa thức. Ta có  .  Cộng các đẳng thức trên lại, ta có | | **1,0** | |
| Giả sử rằng  thỏa mãn .  Suy ra  Chứng minh tương tự thì  và  Do  đôi một phân biệt nên nhân lại, ta có  vô lý.  Vì thế nên ta phải có | | **1,0** | |
| b) Khử  từ các đa thức, ta được .  Các đa thức này là tích của  và các tam thức bậc hai tương ứng  .  Các delta của chúng lần lượt là  Giả sử cả  thì . | | **1,0** | |
| Nếu  thì , suy ra  nên  do đó  nên  Điều này mâu thuẫn vì  Nếu  thì , suy ra  nên , do đó  và  Điều này cũng mâu thuẫn tương tự trên.  Vậy điều giả sử phản chứng là sai, tức là một trong ba đa thức đã cho có ba nghiệm thực. | | **1,0** | |
| **2** | | Tìm số thực  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức  đúng với mọi bộ ba số thực không âm  thỏa mãn điều kiện . | |  | |
| Giả sử  với mọi  và .  Cho  ta được . | | **1,0** | |
| Ta chứng minh khi  thì BĐT đúng tức là  Ta có | | **1,0** | |
|  | | **1,0** | |
| Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:    Từ đó suy ra .  Vậy số thực  bé nhất thỏa mãn yêu cầu là . | | **1,0** | |
| **3** | | Cho tam giác nhọn không cân   nội tiếp đường tròn , có trực tâm là . Điểm  là trung điểm cạnh ;  cắt  và đường tròn  lần lượt tại  và  khác ,  cắt lại đường tròn  tại  khác . Gọi điểm đối xứng với  lần lượt qua các đường thẳng  là . Gọi  lần lượt là trung điểm .  a) Chứng minh rằng bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn.  b) Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy. | |  | |
| a) Gọi  là các đường cao của tam giác . Kẻ đường kính  đường tròn  thì  là hình bình hành.  Gọi  là giao điểm thứ hai của  và đường tròn , thì  thẳng hàng và cùng thuộc đường tròn đường kính .  Từ giả thiết ta có  là hình bình hành, suy ra trung điểm  của  cũng là trung điểm đoạn .  Chứng minh tương tự  là trung điểm đoạn . | | **1,0** | |
| Ta có . Do đó // . Suy ra // .  Gọi  là giao điểm thứ hai của  với đường tròn đường kính , thì  đối xứng với  qua , suy ra là hình thang cân, do đó đi qua .  Hơn nữa từ  là hình thoi do đó // , suy ra là hình bình hành, suy ra trung điểm  của cũng là trung điểm của .  Gọi  là phép vị tự tâm , tỉ số thì  Từ  cùng thuộc đường tròn đường kính , suy ra  cùng thuộc một đường tròn. | | **1,0** | |
| b) Theo câu a) ta có  là trung điểm ,  là trung điểm , do đó yêu cầu bài toán tương đương với chứng minh  đồng quy.    Gọi  là điểm đối xứng với  qua .  Phép vị tự  tâm  tỉ số 2 biến:  do đó  suy ra | | **1,0** | |
| Tương tự, ta có  Lại có  Từ (1), (2) và (3) suy ra  (dođồng quy tại  và  là trung điểm ).  Nên theo định lí Cevasin đảo ta có  đồng quy hay  đồng quy. | | **1,0** | |
| **4** | | Cho  là số nguyên tố và  là số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của số  hoặc là , hoặc chia cho  dư 1. | |  | |
| Xét là một ước nguyên tố của số  Ta có .  Đặt thì . Suy ra hoặc . | | **1,0** | |
| +) Nếu  thì  (do  là số nguyên tố). | | **1,0** | |
| +) Nếu : Từ suy ra .  Theo định lý Fermat nhỏ ta có . | | **1,0** | |
| Suy ra hay  Vậy ước nguyên tố của  hoặc là , hoặc chia cho  dư 1. | | **1,0** | |
| **5** | | Cho tập hợp . Với  là số nguyên dương, ta gọi  là tập hợp tốt nếu như  có đúng  phần tử và với mọi  thuộc  thì  hoặc  cũng thuộc  a) Với  tính số lượng tất cả các tập tốt.  b) Với  chứng minh rằng số tập tốt là số chính phương. | |  | |
| a) Với  tập hợp tốt phải có dạng  nên có tất cả  tập.  Với  tập hợp tốt phải có dạng  nên có tất cả  tập. | | **1,0** | |
| Với  tập hợp tốt có dạng  với  Rõ ràng phải có  và  Ngoài ra,  không cần có liên hệ gì, chỉ cần thỏa mãn  Do đó,  với  nên số cách chọn cặp  là    Vậy số tập hợp thỏa mãn là | | **1,0** | |
| b) Xét tập tốt có dạng  với  Ta có  và một trong hai điều sau phải xảy ra:  hoặc  Gọi  là tập hợp các tập tốt mà , còn  là tập hợp các tập tốt mà  Các tập tốt sẽ là  nên | | **1,0** | |
| Tương tự phần a, ta tính được  và  (do ta có  phần tử liên tiếp).  Khi đó  là số chính phương. | | **1,0** | |

**----- Hết -----**