

## TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ HÌNH KHÔNG GIAN

**Bài 01:** Cho lăng trụ tứ giác đều  $ABCD.A'B'C'D'$  có chiều cao bằng  $a$  và góc của hai mặt bên kề nhau phát xuất từ một đỉnh là  $\alpha$ .

- Tính diện tích xung quanh và thể tích lăng trụ.
- Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $BB'$  và  $DD'$ , tính góc của mp  $(AMN)$  và mặt đáy của lăng trụ.

**Bài 02:** Cho lăng trụ xiên  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều tâm  $O$  và hình chiếu của  $C'$  trên đáy  $(ABC)$  trùng với  $O$ . Cho khoảng cách từ  $O$  đến thẳng  $CC'$  là  $a$  và số đo nội tiếp của cung  $CC'$  là  $20^\circ$ .

- Chứng minh mặt bên  $ABB'A'$  là hình chữ nhật.
- Tính thể tích lăng trụ.
- Tính góc của mặt bên  $BCC'B'$  và mặt đáy  $ABC$ .

**Bài 03:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các mặt đều là hình thoi cạnh  $a$ . Ba cạnh xuất phát từ đỉnh  $A$  tạo với nhau các góc nhỏ bằng nhau và bằng  $\alpha$ .

- Chứng minh hình chiếu  $H$  của  $A'$  trên  $(ABCD)$  nằm trên trục đối xứng của  $AC$ .
- Tính thể tích hình hộp.
- Tính góc của trục đối xứng  $CA'$  và mặt đáy của hình hộp.

**Bài 04:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh ngoài hai trục của hai mặt bên kề nhau là  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

- Tính thể tích hình lập phương.
- Lấy điểm  $M$  trên  $BC$ . Mặt phẳng  $MB'D$  cắt  $A'D'$  tại  $N$ . Chứng minh  $MN \perp C'D$ .
- Tính góc của hai mặt phẳng  $(A'BD)$  với mặt phẳng  $(ABCD)$ .

**Bài 05:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có trục đối xứng bằng  $a$

- Đường vuông góc chung của hai trục thẳng  $AC$  và  $DC'$ .
- Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'C'D'$ . Mặt phẳng  $(GCA)$  cắt hình lập phương theo hình gì. Tính diện tích của hình này.
- Nếu  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tìm quỹ tích hình chiếu của  $A'$  lên  $DM$ .

**Bài 06:** Cho lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $N$  là trung điểm của  $BC$ .

- Tính góc vuông góc chung giữa hai trục thẳng  $AN$  và  $BC'$ .
- Nếu  $M$  là trung điểm của  $AA'$ . Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích thiết diện giữa mặt phẳng  $MBD'$  và hình lập phương.

**Bài 07:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có chiều cao  $SH = a$  và góc ở đỉnh của mặt bên là  $\alpha$ .

- Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp này theo  $a$  và  $\alpha$ .
- Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .
- Nếu  $M$  là trung điểm của  $SC$ . Tìm quỹ tích hình chiếu của  $S$  xuống mặt phẳng  $MAB$ .

**Bài 08:** Cho hình chóp tam giác đều  $SABC$  cạnh đáy  $a$  và góc giữa hai cạnh bên kề nhau là  $\alpha$ .

- Tính thể tích hình chóp.
- Tính diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp trong hình chóp.
- Tính diện tích của thiết diện giữa hình chóp và mặt phẳng qua  $AB$  và vuông góc với  $SC$ .

**Bài 09:** Đáy của hình chóp là một tam giác vuông có cạnh huyền là  $a$  và một góc nhọn  $60^\circ$ . Mặt bên qua cạnh huyền vuông góc với đáy, mặt bên kia là hình chóp với đáy góc  $\alpha$ .

- a) Tính thể tích hình chóp này .
- b) Một mặt phẳng qua cạnh đáy và các cạnh bên rồi diện tích hai phần tạo ra với 2 vạt . Tìm thể tích của hai phần của hình chóp do mặt phẳng ấy tạo ra .

**Bài 10:** Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác ABC cân tại A có trung tuyến  $AD = a$  và hai mặt bên SAB và SAC vuông góc với đáy. Cạnh bên SB hợp với đáy một góc  $\alpha$  và hợp với mặt phẳng SAD góc  $\beta$  .

- a) Tính thể tích hình chóp .
- b) Tính khoảng cách từ A đến mặt (SBC).

**Bài 11:** Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác ABC vuông tại A và góc  $C = 60^\circ$  , bán kính rỗng của nó tiếp xúc. Ba mặt bên của hình chóp đều hợp với đáy góc  $\alpha$  .

- a) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp .
- b) Tính diện tích thiết diện qua cạnh bên SA và rỗng cao của hình chóp .

**Bài 12:** Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thoi có góc nhọn  $A = \alpha$  . Hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại hợp với đáy góc  $\beta$  . Cho  $SA = a$ .

- a) Tính thể tích và diện tích xung quanh hình chóp .
- b) Tính góc của SB và mặt phẳng (SAC).

**Bài 13:** Cho tam giác đều ABC cạnh  $a$  trên rỗng thẳng vuông góc với mặt phẳng của tam giác tại B và C làm lộ một đoạn thẳng D là u rỗng và E có hình sao cho  $CE = a\sqrt{2}$  . Nếu  $BD = x$ .

- a) Tính  $x$  để tam giác DAE vuông tại D. Trong trường hợp này tính góc của hai mặt phẳng (DAE) và (ABC).
- b) Giả sử  $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  . Tính thể tích hình chóp ABCED.
- c) Kẻ CH vuông góc với AD . Tìm quỹ tích của H khi  $x$  biến thiên.

**Bài 14:** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy là  $a$ . Mặt phẳng qua AB và trung điểm M của SC hợp với đáy một góc  $\alpha$  .

- a) Tính thể tích của hình chóp.
- b) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Mặt phẳng qua IJ và vuông góc với đáy chia hình chóp thành hai phần. Tính thể tích của hai phần này .

**Bài 15:** Lấy điểm C là u rỗng trên rỗng kính  $AB = 2R$  và H là hình chiếu của C lên AB. Gọi I là trung điểm của CH. Treo n rỗng thẳng vuông góc với mặt phẳng của n rỗng treo tại I ta lấy điểm D sao cho góc ADB bằng  $90^\circ$  . Nếu  $AH = x$ .

- a) Tính thể tích của tứ diện DABC theo R và  $x$  . Tính  $x$  để thể tích này lớn nhất.
- b) Xác định tâm I và diện tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện AIBD.
- c) Chứng minh khi C là u rỗng trên rỗng kính thì tâm hình cầu ngoại tiếp của tứ diện DABC là trung điểm của CH.

**Bài 16:** Đáy của hình chóp là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng  $a$ . Mặt bên qua cạnh huyền vuông góc với đáy, mỗi mặt bên còn lại tạo với đáy góc  $45^\circ$ .

- a) Chứng minh rằng chiều cao hình chóp trùng với trung điểm cạnh huyền.
- b) Tính thể tích và diện tích toàn phần hình chóp.

**Bài 17:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là giao điểm các rỗng chéo của ABCD. Biết  $OA' = a$ .

- a) Tính thể tích hình chóp A'.ABD, từ đó suy ra khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng A'BD.

b) Chứng minh rằng  $AC'$  vuông góc với mặt phẳng  $A'BD$ .

**Bài 18:** Một hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$  và góc  $ASB = \alpha$ .

a) Tính diện tích xung quanh hình chóp.

b) Chứng minh rằng chiều cao hình chóp bằng  $\frac{a}{2} \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$ .

c) Gọi  $O$  là giao điểm các chiều cao của đáy  $ABCD$ . Xác định góc  $\alpha$  để mặt cầu tâm  $O$  đi qua năm điểm  $S, A, B, C, D$ .

**Bài 19:** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên tạo với đáy góc  $60^\circ$  và cạnh đáy bằng  $a$ .

a) Tính thể tích hình chóp.

b) Tính góc do mặt bên tạo với đáy.

c) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và tính bán kính mặt cầu rồi.

**Bài 20:** Một lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $BB' = a$ , chóp chiều cao vuông góc hai trục  $BB'$  xuyên đáy  $ABC$  trùng với trung điểm  $I$  của cạnh  $AC$ .

a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy và tính thể tích của lăng trụ.

b) Chứng minh rằng mặt bên  $AA'C'C$  là hình chữ nhật.

**Bài 21:** Cho hình nón có chiều cao  $h$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua trục sinh  $S$  của hình nón tạo với mặt đáy hình nón một góc  $60^\circ$ , đi qua hai trục sinh  $SA, SB$  của hình nón và cắt mặt đáy của hình nón theo dây cung  $AB$ , cung  $AB$  có số đo bằng  $60^\circ$ . Tính diện tích thiết diện  $SAB$ .

**Bài 22:** Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ .  $SA = 2a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên các cạnh thẳng  $SB$  và  $SC$ . Tính thể tích của khối chóp  $A.BCNM$ .

**Bài 22:** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình chữ nhật,  $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$  và  $SA$  vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SC$ ;  $I$  là giao điểm của  $BM$  và  $AC$ . Chứng minh rằng mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SMB)$ . Tính thể tích của khối tứ diện  $ANIB$ .

**Bài 23:** Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm  $O$  và  $O'$ , bán kính đáy bằng  $a$  và bằng  $a$ . Trên đường tròn đáy tâm  $O$  lấy điểm  $A$ , trên đường tròn đáy tâm  $O'$  lấy điểm  $B$  sao cho  $AB = 2a$ . Tính thể tích của khối tứ diện  $OO'AB$ .

**Bài 24:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy hình thang,  $\angle ABC = \angle BAD, BA = BC = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$ .  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SB$ . Chứng minh tam giác  $SCD$  vuông và tính khoảng cách từ  $H$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

**Bài 25:** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  cạnh  $a$ , có trục sinh  $SB$  và  $SC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là các trung điểm của các cạnh  $SB$  và  $SC$ . Tính theo  $a$  diện tích tam giác  $AMN$ , biết rằng mặt phẳng  $(AMN)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SBC)$ .

**Bài 26:** Cho hình tứ diện  $ABCD$  có cạnh  $AD$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABD)$ ;  $AC = AD = 4\text{cm}; AB = 3\text{cm}; BC = 5\text{cm}$ . Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(ACD)$ .

**Bài 27:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có trục sinh  $SA = a$ , góc  $SAB = \alpha$ . Tính thể tích hình chóp  $S.ABCD$  theo  $a$  và  $\alpha$ .

**Bài 28:** Hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  là trục cao và đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Cho  $\angle BSC = 45^\circ, \angle ASB = \alpha$ ; tìm góc nhị diện  $(SC)$  bằng  $60^\circ$ .

**Bài 29:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  cạnh  $a$ . Gọi  $O_1$  là tâm của hình vuông  $A_1B_1C_1D_1$ . Tính thể tích khối tứ diện  $A_1B_1OD_1$ .

**Bài 30:** Cho khối lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $2a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{3}$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $A'B'$ .

- Tính thể tích khối đa diện  $ABA'B'C'$ .
- Tính khoảng cách giữa đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(CEB')$ .

**Bài 31:** Cho khối lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = b$ , góc  $C = 60^\circ$ . Góc chéo  $BC'$  của mặt bên  $BB'C'$  tạo với mặt phẳng  $(AA'C'C)$  một góc  $30^\circ$ .

- Tính độ dài đoạn  $AC'$ .
- Tính thể tích của khối lăng trụ.

**Bài 32:** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ , cạnh  $SA$  vuông góc với đáy, góc  $ACB = 60^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Chứng minh mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SBC)$ . Tính thể tích khối tứ diện  $MABC$ .

**Bài 33:** Cho hình chóp  $S.ABC$  đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , góc  $ABC = 60^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $SB$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $SA$  tạo với đáy  $(ABC)$  một góc  $45^\circ$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $B$  trên  $SA, SC$ .

- Tính thể tích của hình chóp  $S.ABC$ .
- Chứng minh rằng  $A, B, C, E, F$  cùng thuộc một mặt phẳng, xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

**Bài 34:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Mặt  $m$  (phẳng) song song với  $AD$  và  $BC$  cắt các cạnh  $AB, AC, CD, DB$  tại các điểm  $M, N, P, Q$ .

- Chứng minh rằng tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.
- Xác định vị trí của  $m$  cho diện tích của tứ giác  $MNPQ$  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 35:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  và  $SA = SB = SD = a$ .

- Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .
- Tính cosin của góc nhị diện  $(SAB, SAD)$ .

**Bài 36:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Lấy  $M, N$  lần lượt trên các  $SB, SD$  sao

cho:  $\frac{SM}{BM} = \frac{SN}{DN} = 2$ .

- Mặt phẳng  $(AMN)$  cắt cạnh  $SC$  tại  $P$ . Tính tỉ số  $\frac{SP}{CP}$ .
- Tính thể tích hình chóp  $S.AMNP$  theo thể tích  $V$  của hình chóp  $S.ABCD$ .

**Bài 37:** Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$ ,  $SA = x$ ,  $BC = y$ , các cạnh còn lại đều bằng  $1$ .

- Tính thể tích hình chóp theo  $x, y$ .
- Với  $x, y$  là giá trị nào thì thể tích hình chóp là lớn nhất?

**Bài 38:** Cho 2 đường thẳng  $Ax$  và  $By$  vuông góc với nhau và nhận  $AB = a$ , ( $a > 0$ ) là đoạn vuông góc chung. Lấy điểm  $M$  trên  $Ax$  và điểm  $N$  trên  $By$  sao cho  $AM = BN = 2a$ . Xác định tâm  $I$  và tính theo  $a$  bán kính  $R$  của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABMN$ . Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $AM$  và  $BI$ .

**Bài 39:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ , cạnh  $SB$  vuông góc với đáy  $(ABC)$ . Qua  $B$  kẻ  $BH$  vuông góc với  $SA$ ,  $BK$  vuông góc với  $SC$ . Chứng minh  $SC$  vuông góc với  $(BHK)$  và tính diện tích tam giác  $BHK$  biết rằng  $AC = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$  và  $SB = a\sqrt{2}$ .

**Bài 40:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy  $M$  bất kỳ nằm trong mặt phẳng  $(ABD)$ . Các mặt phẳng qua  $M$  lần lượt song song với các mặt phẳng  $(BCD)$ ;  $(CDA)$ ;  $(ABC)$  lần lượt cắt các cạnh  $CA, CB, CD$  tại  $A', B', C'$ . Xác định vị trí điểm  $M$

biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất:  $P = \frac{1}{V_{CMAB}} + \frac{1}{V_{CMBD}} + \frac{1}{V_{CMAD}}$

**Bài 41:** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có chiều cao  $SO = 1$  và đáy  $ABC$  có các cạnh bằng  $2\sqrt{6}$ . Điểm  $M, N$  là trung điểm của cạnh  $AC, AB$  tương ứng. Tính thể tích và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp  $S.AMN$ .

**Bài 42:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng  $a\sqrt{2}$ .

a) Tính thể tích của hình chóp S.ABCD.

b) Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SC, SD. Chứng minh rằng SN vuông góc với mặt phẳng (MEF).

c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

**Bài 43:** Cho tứ diện O.ABC có cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và  $OA = OB = OC = a$ . Kí hiệu K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Gọi E là điểm nằm trên trục Ox qua O và I là giao điểm của CE với mặt phẳng (OMN).

a) Chứng minh rằng: CE vuông góc với mặt phẳng (OMN).

b) Tính diện tích của tam giác OMIN theo a.

**Bài 44:** Cho tam giác vuông ABC cân tại A. Gọi D là điểm nằm trên trục Ox qua A và qua BC. Trên trục Ox vuông góc với mặt phẳng (ABC) tìm điểm S sao cho  $SD = a\sqrt{6}$ . Chứng minh mp(SAB) vuông góc với mp(SAC).

**Bài 45:** Cho tứ diện ABCD với tâm điểm O. Xác định vị trí điểm M:  $P = MA + MB + MC + MD$  để giá trị nhỏ nhất.

**Bài 46:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A,  $AA_1 = a$ . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC<sub>1</sub>) và (BCA<sub>1</sub>).

**Bài 47:** Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A,  $BA = BC = a$ ,  $SA = a$  và vuông góc với đáy. Gọi M, N là trung điểm AB và AC.

a) Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

b) Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SBC).

**Bài 48:** Cho hình thoi ABCD có tâm O, cạnh a và  $AC = a$ . Trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) với  $SH = a$ .

a) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

**Bài 49:** Cho hình lăng trụ tam giác ABCD.A'B'C'D', có chiều cao a và cạnh đáy 2a. Với M là điểm nằm trên cạnh AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của góc A'MC'

**Bài 50:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với  $AB = a$ ;  $AD = 2a$ . Tam giác SAB vuông cân tại A. M nằm trên cạnh AD (M khác A và B). Mặt phẳng ( ) qua M và song song với mặt phẳng (SAB) cắt BC; SC; SD lần lượt tại N; P; Q.

a) Chứng minh rằng MNPQ là hình thang vuông.

b) Giả sử  $AM = x$ . Tính diện tích hình thang MNPQ theo a; x

**Bài 51:** Cho tứ diện ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình tròn ngoại tiếp BCD.

a) Chứng minh rằng AO vuông góc với CD.

b) Gọi M là trung điểm CD. Tính cosin góc giữa AC và BM.

**Bài 52:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, đáy là tam giác vuông cân tại A. Cạnh  $AA_1 = a\sqrt{2}$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>.

a) Xác định thiết diện của lăng trụ với mp(P) qua MN và vuông góc với mp(BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>). Thiết diện là hình gì.

b) Tính diện tích thiết diện.

**Bài 53:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M; N lần lượt là trung điểm SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng (ABCD) là  $60^\circ$ .

a) Tính độ dài đoạn MN.

b) Tính cosin của góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

**Bài 54:** Trong mặt phẳng (P), cho mặt hình vuông ABCD có cạnh bằng a. S là mặt hình nón trên đỉnh A của hình vuông góc với mặt phẳng (P) tại A. Tính theo a thể tích hình chóp S.ABCD khi  $SA = 2a$ .

**Bài 55:** Cho tứ diện ABCD có  $AC = \sqrt{2}$ ,  $AB = BC = CD = DA = DB = 1$ .

- Chứng minh rằng các tam giác ABC và ADC là tam giác vuông.
- Tính diện tích toàn phần của tứ diện ABCD.

**Bài 56:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD);  $SC = 2a$ .

Hai điểm M, N lần lượt thuộc SB và SD sao cho  $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = 2$ . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích

hình chóp S.MANP theo a

**Bài 57:** Cho lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo góc phẳng nhị diện  $[B, A'C, D]$

**Bài 58:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là mặt hình thoi cạnh a, góc  $BAD = 60^\circ$ . G là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính dài cạnh AA' theo a để tam giác B'MDN là hình vuông.

**Bài 59:** Cho hình chóp S.ABCD có  $SA \perp (ABC)$ , tam giác ABC vuông tại B,  $SA = SB = a$ ,  $BC = 2a$ . G là M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Tính diện tích của tam giác AMN theo a.

**Bài 60:** Cho hình chóp S.ABC. Đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh SA vuông góc với đáy, góc  $ACB = 60^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ . Chứng minh mặt phẳng (SAB) vuông góc với mp (SBC). Tính thể tích khối tứ diện MABC.

**Bài 61:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AA' = c$ .

- Tính diện tích của tam giác ACD' theo a, b, c.
- Giả sử M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Hãy tính thể tích của tứ diện D'DMN theo a, b, c.

**Bài 62:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với cạnh bằng a. Giả sử M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D', D'C', C'C, AA'.

- Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng. Tính chu vi của tam giác MNPQ theo a.
- Tính diện tích của tam giác MNPQ theo a.

**Bài 63:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với cạnh bằng a.

- Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD'.
- Chứng minh rằng góc chéo BD' vuông góc với mặt phẳng (DA'C').

**Bài 64:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'; với  $AA' = a$ ,  $AB = b$ ,  $AC = c$ . Tính thể tích của tứ diện ACB'D' theo a, b, c.

**Bài 65:** Cho tam diện ba mặt vuông Oxyz. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C.

- Tính diện tích tam giác ABC theo  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$ .
- Giả sử A, B, C thay đổi nhưng luôn có:  $OA + OB + OC + AB + BC + CA = k$  không đổi.

Hãy xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện OABC.

**Bài 66:** Bên trong hình trụ tròn xoay có mặt hình vuông ABCD cạnh a nấp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thì thể tích hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thì hai cạnh hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy của hình trụ một góc  $45^\circ$ . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

**Bài 67:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a và điểm M trên cạnh AB,  $AM = x$ ,  $0 < x < a$ . Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chia góc chéo A'C' của hình vuông A'B'C'D'.

- Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P).
- Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện hãy tìm x để thể tích của một trong hai khối đa diện đó gấp đôi diện tích của khối đa diện kia.

**Bài 68:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật ABCD với  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng  $a\sqrt{2}$ .

a. Tính thể tích của hình chóp S.ABCD

b. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SC, SD. Chứng minh rằng SN vuông góc với mặt phẳng (MEF).

c. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

**Bài 69:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$  có đáy ABC là tam giác vuông  $AB = AC = a$ ,  $AA_1 = a\sqrt{2}$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn  $AA_1$  và  $BC_1$ . Chứng minh MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng  $AA_1$  và  $BC_1$ . Tính  $V_{MA,BC_1}$ .

**Bài 70:** Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc nhọn  $BAD = 60^\circ$ . Biết  $\overline{AB'} \perp \overline{BD'}$ . Tính thể tích lăng trụ trên theo a.

**Bài 71:** Trong mặt phẳng (P), cho một hình vuông ABCD có cạnh bằng a. S là một điểm bất kỳ nằm trên đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng (P) tại A. Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh CB, CD ( $M \in CB, N \in CD$ ), và  $CM = m, CN = n$ . Tìm một biểu thức liên hệ giữa m và n các mặt phẳng (SMA) và (SAN) tạo với nhau một góc  $45^\circ$ .

**Bài 72:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có  $AB = a, AD = 2a, AA' = a$ :

a. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $AD'$  và  $B'C'$ .

b. Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỉ số  $AM:MD = 3$ . Hãy tính khoảng cách từ điểm M đến mp (AB'C).

c. Tính thể tích tứ diện A.B'D'C'.

**Bài 73:** Cho hình nón nhọn S, đáy là đường tròn C bán kính a, chiều cao  $h = \frac{3}{4}a$ ; và cho hình chóp nhọn S, đáy là một tam giác lồi nội tiếp C.

a. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp (mặt cầu bên trong hình chóp, tiếp xúc với đáy và với các mặt bên của hình chóp).

b. Biết thể tích khối chóp bằng 4 lần thể tích khối nón, hãy tính diện tích toàn phần của hình chóp.

**Bài 74:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Lấy M, N lần lượt trên các cạnh SB, SD sao

cho  $\frac{SM}{BM} = \frac{SN}{DN} = 3$ .

a. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC tại P. Tính tỉ số  $\frac{SP}{CP}$ .

b. Tính thể tích hình chóp S.AMPN theo thể tích V của hình chóp S.ABCD.

**Bài 75:** Cho tam giác OABC có  $OA = OB = OC = a$  và góc  $AOB =$  góc  $AOC = 60^\circ$ , góc  $BOC = 90^\circ$ . Tính dài các cạnh còn lại của tam giác và chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

**Bài 76:** Cho hình chóp S.ABC. Đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh SA vuông góc với đáy, góc  $ACB = 60^\circ$ ,  $BC = a, SA = a\sqrt{3}$ . Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích khối tứ diện MABC.

**Bài 77:** Cho hình chóp tam giác S.ABCD có đáy là tam giác cân với  $AB = AC = a$ , góc  $BAC = \alpha$  và ba cạnh bên nghiêng đều trên đáy một góc nhọn. Hãy tính thể tích hình chóp đã cho theo a,  $\alpha$ .

**Bài 78:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông ABCD cạnh bên  $AA' = h$ . Tính thể tích tứ diện BDD'C'.

**Bài 79:** Cho hình chóp S.ABC có  $SA \perp (ABC)$ , tam giác ABC vuông tại B,  $SA = AB = a, BC = 2a$ . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Tính diện tích của tam giác AMN theo a.

**Bài 80:** Cho tứ diện ABCD có  $AB = CD = a; AC = BD = b$  và  $AD = BC = c$  ( $a, b, c > 0$ ). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp theo a, b, c.

**Bài 81:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Biết rằng góc nhô tại O bởi hai đường chéo AC và BD là  $60^\circ$ , các tam giác SAC và SBD đều có cạnh bằng a. Tính thể tích hình chóp theo a.

**Bài 82:** Tính thể tích của khối nón xoay biết khoảng cách từ tâm của đáy đến sinh bằng  $\sqrt{3}$  và thiết diện qua trục là một tam giác đều.

**Bài 83:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Biết rằng góc nhô tại O bởi hai đường chéo AC và BD là  $60^\circ$ , các tam giác SAC và SBD đều có cạnh bằng a. Tính thể tích hình chóp theo a.

**Bài 84:** Cho khối chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy a và chiều cao bằng a/2.

a/. Tính sin của góc hợp bởi cạnh bên SC và mặt bên (SAB).

b/. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối chóp đã cho.

**Bài 85:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc ABC bằng  $60^\circ$ . Chiều cao SO của hình chóp bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ , trong đó O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là trung điểm của AD,

( $\alpha$ ) là mặt phẳng đi qua BM, song song với SA, cắt SC tại K. Tính thể tích hình chóp K.BCDM.

**Bài 86:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng a. Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SC và mặt phẳng (BMN) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

a/. Tính thể tích hình chóp tam giác đều S.ABC.

b/. Tính thể tích hình chóp SBMN.

**Bài 87:** Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B,  $BC = a$ ,  $SA = a\sqrt{2}$ ,  $AS \perp mp(ABC)$ . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích của khối chóp S.AB'C'D'.

**Bài 88:** Cho hình chóp S.ABC có mặt bên (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng lợp với đáy một góc  $45^\circ$ ; đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có  $AB = a$ .

a/. Chứng minh rằng hình chiếu của S trên mặt (ABC) là trung điểm của BC.

b/. Tính thể tích của hình chóp S.ABC theo a?

**Bài 89:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là hình chữ nhật có  $AB = a$ , cạnh bên SA vuông góc với đáy; cạnh bên SC hợp với đáy góc  $\alpha$  và hợp với mặt bên (SAB) một góc  $\beta$ .

a/. Chứng minh  $SC^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$ .

b/. Tính thể tích hình chóp S.ABCD theo a,  $\alpha$  và  $\beta$ .

**Bài 90:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy là  $\alpha$ . Gọi M là trung điểm của cạnh SC, mặt phẳng (MAB) cắt SD tại N. Tính theo a và  $\alpha$  thể tích hình chóp S.ABMN.

**Bài 91:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD và cạnh  $SA \perp mp(ABCD)$ . Mặt phẳng ( $\alpha$ ) qua AB cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M, N và chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số

$$\frac{SM}{SC}$$

**Bài 92:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có  $AB = a$ ;  $AD = b$ ;  $SA = b$  là chiều cao của hình chóp. M là điểm trên cạnh SA với  $SA = x$  ( $0 < x < b$ ); mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Tính thể tích của khối đa diện ABCDMN theo a, b và x?

**Bài 93:** Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác AB vuông cân có  $AB = AC = a$ . Gọi E là trung điểm của AB, F là hình chiếu vuông góc của E trên BC. Mặt phẳng (C'EF) chia lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó?



**Bài 94:** Cho hình chóp S.ABC. M là i m trên SA, N là i m trên SB sao cho  $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$  và  $\frac{SN}{NB} = 2$ . M t

ph ng (P) qua MN và song song v i SC chia kh i chóp thành hai ph n. Tìm t s th tích c a hai ph n ó.

**Bài 95:** Kh i chóp S.ABCD có áy là hình bình hành. G i B', D' l n l t là trung i m c a SB, SD. M t ph ng (AB'D') c t SC t i C'. Tìm t s th tích c a hai kh i chóp S.AB'C'D' và S.ABCD.

**Bài 96:** Kh i chóp S.ABCD có áy là hình bình hành. G i M, N, P l n l t là tr ng i m c a AB, AD và SC. Ch ng minh m t ph ng (MNP) chia kh i chóp thành hai ph n có th tích b ng nhau.

**Bài 97:** Cho kh i chóp t giác u S.ABCD. M t m t ph ng (P) i qua A, B và trung i m M c a c nh SC. Tính t s th tích c a hai ph n kh i chóp b phân chia b i m t ph ng ó.

**Bài 98:** Cho kh i l p ph ng ABCD.A'B'C'D' c nh a. Các i m E và F l n l t là trung i m c a C'B' và C'D'.  
a/. D ng thi t đ i n c a kh i l p ph ng khi c t b i mp(AEF).

b/. Tính t s th tích hai ph n c a kh i l p ph ng b chia b i m t ph ng (AEF).

**Bài 99:** Trên n a ng tròn ng kính AB = 2R, l y m t i m C tu ý (C khác A, B). K CH  $\perp$  AB (H  $\in$  AB). g i I là trung i m c a CH. Trên n a ng th ng It vuông góc v i mp(ABC), l y i m S sao cho  $\angle ASB = 90^\circ$ .

a/. Ch ng minh r ng khi C ch y trên n a ng tròn ã cho thì :

+ M t ph ng (SAB) c nh. + i m cách u các i m S, A, B, I ch y trên m t ng th ng c nh.

b/. Cho AH = x. Tính th tích kh i chóp S.ABC theo R và x. Tìm v trí c a C th tích ó l n nh t.

**Bài 100:** Cho hình chóp t giác u S.ABCD có dài c nh áy AB = a và góc SAB =  $\alpha$ . Tính th tích hình chóp S.ABCD theo a và  $\alpha$ .

**Bài 101:** Cho hình l ng tr ABC.A'B'C' có chi u cao b ng a hai ng th ng AB' và BC' vuông góc v i nhau. Tính th tích hình l ng tr ó theo a.

**Bài 102:** Cho hình chóp u S.ABCD c nh áy b ng a, góc gi a m t ph ng (SAB) và (SBC) là  $\alpha$ . Tính th tích kh i chóp S.ABCD theo a và  $\alpha$ .

**Bài 103:** Cho hình chop S.ABC có áy là tam giác ABC vuông t i B, ng th ng SA vuông góc v i mp(ABC), bi t AB = a, BC =  $a\sqrt{3}$  và SA = 3a.

a) Tính th tích kh i chóp S.ABC theo a

b) G i I là trung i m c a c nh SC, tính dài o n BI theo a.

**Bài 104:** Cho hình chóp tam giác u S.ABC có c nh áy b ng a, c nh bên b ng 2a. G i I là trung i m c a BC.

a) Ch ng minh SA vuông góc v i BC.

b) Tính th tích kh i chóp S.ABI theo a.

**Bài 105:** Cho hình chóp S.ABC có áy là tam giác vuông t i B, c nh bên SA vuông góc v i áy. Bi t SA = AB = BC = a. Tính th tích kh i chóp S.ABC.

**Bài 106:** Cho hình chóp S.ABCD có áy ABCD là hình vuông c nh a, c nh bên SA vuông góc v i áy, c nh bên SA b ng  $a\sqrt{3}$ .

a) Tính th tích c a kh i chóp S.ABCD.

b) Ch ng minh trung i m c a c nh SC là tâm m t c u ngo i ti p hình chóp S.ABCD.

**Bài 107:** Cho hình chóp S.ABC có SA, AB, BC vuông góc v i nhau t ng ôi m t. Bi t SA = a, AB = BC =  $a\sqrt{3}$ . Tính th tích c a kh i chóp S.ABC.

**Bài 108:** Cho kh i chóp S.ABC có hai m t ABC và SBC là hai tam giác u n m trong hai m t ph ng vuông góc nhau. Bi t BC = 1, tính th tích c a kh i chóp S.ABC.

**Bài 109:** Cho kh i chóp S.ABC có áy ABC là tam giác vuông cân t i A và hình chi u vuông góc c a S lên (ABC) trùng v i tr ng tâm G c a tam giác ABC. Bi t SA h p v i áy góc  $\alpha = 60^\circ$ . Tính th tích c a kh i chóp S.ABC.

**Bài 110:** Cho khối chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thoi, ABC và SAC là hai tam giác vuông cân,  $SB = SD$ . Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

**Bài 111:** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, cho  $SA \perp (ABCD)$ . Biết  $SA = 2a$ ,  $AB = a$ ,  $BC = 3a$ . Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

**Bài 112:** Cho khối chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang vuông A và B. Cho SA vuông góc với mặt đáy (ABCD),  $SA = AD = 2a$  và  $AB = BC = a$ . Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

**Bài 113:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cân, SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), góc giữa SC và đáy (ABCD) là  $45^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

**Bài 114:** Cho khối chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông A,  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ . Hình S cách đều A, B, C mặt bên (SAB) hình vuông với mặt đáy (ABC) góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp S.ABC.

**Bài 115:** Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông cân bên bằng  $a\sqrt{3}$  và hình chiếu (vuông góc) của A' lên (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ, từ đó suy ra thể tích của khối chóp A'.ABC

**Bài 116:** Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông cân bên hình vuông với đáy góc  $60^\circ$ , A' cách đều A, B, C. Chứng minh BB'C'C là hình chữ nhật và tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

**Bài 117:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A,  $AC = b$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Hình chiếu của B' lên mặt bên BB'C'C tạo với mặt phẳng (AA'C'C) một góc  $30^\circ$ .

- Chứng minh tam giác  $ABC'$  vuông tại A
- Tính độ dài  $AC'$ .
- Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' từ đó suy ra thể tích của khối chóp C'.ABC

**Bài 118:** Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB'. Mặt phẳng (C'MN) chia khối lăng trụ thành hai phần.

- Tính thể tích của khối chóp C'.ABC theo V.
- Tính thể tích của khối chóp C'.ABB'A' theo V.
- Tính thể tích của khối chóp C'.MNB'A' theo V.
- Tính tổng thể tích của hai khối chóp C'.MNB'A' và ABC.MNC'.

**Bài 119:** Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AB = a$ , góc B bằng  $60^\circ$ ,  $AA' = a\sqrt{3}$ .

- Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'.
- Tính thể tích của tứ diện ABA'C'.

**Bài 120:** Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a, góc giữa B'C' và mặt đáy bằng  $45^\circ$ .

- Tính khối lượng của tam giác ABC.A'B'C'.
- M là trung điểm AA'. Mặt phẳng (B'CM) chia khối lăng trụ thành 2 khối chóp. Hãy nêu tên 2 khối chóp đó và tính tổng thể tích của chúng?

**Bài 121:** Cho khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ . Góc A'C' và mặt đáy bằng  $60^\circ$ .

- Tính thể tích của khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.
- Tính thể tích của tứ diện ACB'D'.

**Bài 122:** Cho khối lăng trụ tam giác ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng 2a.

- Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác ABCD.A'B'C'D'.
- Gọi I là trung điểm A'C'. Tính thể tích của khối chóp I.ABCD.

**Bài 123:** Cho khối lăng trụ tam giác ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh bằng a, góc A bằng  $60^\circ$ , góc giữa đường thẳng AC' và mặt đáy bằng  $60^\circ$ .

- Tính thể tích của khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D'.
- Tính thể tích của khối chóp A.BCC'B'.

**Bài 124:** Cho khối lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông cân  $ABC$ , hình chiếu vuông góc của đỉnh  $A'$  trên mặt đáy  $ABC$  là trung điểm  $M$  của  $BC$ , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$ .

a/ Tính thể tích khối lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ .

b/  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $A'A$ . Mặt phẳng (BCM) chia khối lăng trụ đã cho thành 2 khối đa diện, hãy tính thể tích của chúng

**Bài 125:** Cho khối lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông cân  $ABC$ , đỉnh  $A'$  cách đều các điểm  $A, B, C$ . Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$ .

a/ Tính thể tích khối lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$

b/ Chứng minh mặt bên  $BCC'B'$  là hình chữ nhật. Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách từ điểm  $A'$  đến mặt bên  $BCC'B'$

**Bài 126:** Cho khối chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ ,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $SC = 3a$  và cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy.

a/ Tính thể tích khối chóp tam giác  $S.ABC$ .

b/  $M$  là trung điểm  $SB$  và  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SC$ . Tính thể tích tứ diện  $SAMH$ .

**Bài 127:** Cho khối chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ , góc  $C$  bằng  $30^\circ$ , cạnh bên  $SB$  vuông góc với mặt đáy và  $SC$  tạo với mặt đáy một góc  $45^\circ$ .

a/ Tính thể tích khối chóp tam giác  $S.ABC$ .

b/ Gọi  $A'$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $SA$  và  $C'$  thuộc  $SC$  sao cho  $SC = 3SC'$ . Tính thể tích tứ diện  $SBA'C'$  và khoảng cách từ điểm  $C'$  đến mp( $SAB$ ).

**Bài 128:** Cho khối chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy  $\triangle ABC$  vuông cân  $ABC$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy, chân đường cao của khối chóp là trung điểm  $M$  của cạnh  $BC$  còn các mặt bên  $SAB, SAC$  cùng tạo với mặt đáy một góc  $60^\circ$ .

a/ Tính thể tích khối chóp tam giác  $S.ABC$ .

b/ Gọi  $O$  là tâm  $\triangle ABC$  và  $G$  là trọng tâm  $\triangle SBC$ . Tính thể tích tứ diện  $OGBC$ .

**Bài 129:** Cho khối chóp tam giác  $S.ABC$  có cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy, cạnh bên  $SB$  tạo với mặt đáy một góc  $\alpha$ .

a/ Tính thể tích khối chóp tam giác  $S.ABC$ .

b/ Mặt phẳng qua  $BC$  và vuông góc với  $SA$  tại  $D$ . Tính thể tích khối chóp  $S.BCD$ .

**Bài 130:** Cho khối tứ diện vuông  $ABCD$ .

a/ Tính thể tích khối tứ diện  $ABCD$ .

b/  $M$  là điểm tùy ý thuộc miền trong của khối tứ diện. Chứng minh rằng các khoảng cách từ điểm  $M$  đến các mặt của tứ diện không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$ .

**Bài 131:** Cho khối chóp tứ giác  $S.ABCD$  đáy hình chữ nhật có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ , cạnh bên  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = 2a$ .

a/ Tính thể tích khối chóp tứ giác  $S.ABCD$ .

b/ Gọi  $B', D'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SB, SD$ . Chứng minh mp( $AB'D'$ ) vuông góc với  $SC$ .

c/ Gọi  $C'$  là giao điểm của  $SC$  với mp( $AB'D'$ ). Tính thể tích khối chóp  $S.AB'C'D'$ .

**Bài 132:** Cho khối chóp tứ giác  $S.ABCD$  đáy hình vuông cân  $ABCD$ , cạnh bên  $SA \perp (ABCD)$ , góc giữa cạnh bên  $SC$  và mặt đáy bằng  $45^\circ$ .

a/ Tính thể tích khối chóp tứ giác  $S.ABCD$ .

b/ Mặt phẳng  $\alpha$  qua  $A$  và vuông góc với  $SC$  cắt  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $B', C', D'$ . Tính thể tích khối chóp  $S.AB'C'D'$ .

**Bài 133:** Cho khối chóp tứ giác  $S.ABCD$  có cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy, cạnh bên  $SB$ .

a/ Tính thể tích khối chóp tứ giác  $S.ABCD$ .

b/ Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$ . Mặt phẳng  $\alpha$  qua  $AM$  và song song với  $BD$  cắt  $SB, SD$  lần lượt tại  $E, F$ . Tính thể tích khối chóp  $S.AEMF$ .

**Bài 134:** Tính thể tích khối bát diện lồi có cạnh bằng  $a$ .

**Bài 135:** Cho khối chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Tính thể tích  $S$  cách đều các điểm  $A, B, C$  và cạnh bên tạo với đáy mặt góc  $60^\circ$ .

a/ Tính thể tích khối chóp tam giác  $S.ABC$ .

b/ Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle SBC$ . Mặt phẳng  $\alpha$  qua  $AG$  và song song với  $BC$  cắt  $SB, SC$  lần lượt tại  $M, N$ . Tính thể tích khối chóp  $S.AMN$ .

**Bài 136:** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có đường cao  $SO = 1$  và đáy  $ABC$  có cạnh bằng  $2\sqrt{6}$ . Điểm  $M, N$  là trung điểm của các cạnh  $AC, AB$  tương ứng. Tính thể tích hình chóp  $S.AMN$ .

**Bài 137:** Cho đường tròn đường kính  $AB = 2R$  trong mặt phẳng  $(P)$  và một điểm  $M$  nằm trên đường tròn đó. Cho  $\angle MAB = \alpha$ . Trên đường vuông góc với  $(P)$  tại  $A$  lấy  $SA = h$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SM, SB$ .

a. Chứng minh rằng  $SB \perp (KHA)$ .

b. Gọi  $I$  là giao của  $HK$  với  $(P)$ . Hãy chứng minh  $AI$  là tiếp tuyến của đường tròn đã cho.

c. Cho  $h = 2R$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Tính thể tích hình chóp  $S.KHA$ .

**Bài 138:** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$ , có các cạnh đều bằng  $a$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BB', CC'$  và  $I$  là tâm của tam giác  $ABC$ .

a. Hãy dựng đường thẳng  $d$  đi qua  $I$  cắt đồng thời cả  $MN$  và  $AB'$ .

b. Gọi giao của  $d$  với  $MN$  và  $AB'$  lần lượt là  $P, Q$ . Hãy tính độ dài của  $IP$  và  $PQ$ .

c. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

**Bài 139:** Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có  $SA = x$ ,  $BC = y$ , các cạnh còn lại đều bằng  $1$ .

a. Thể tích hình chóp theo  $x, y$ .

b. Với  $x, y$  nào thì thể tích hình chóp lớn nhất?

**Bài 140:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , tất cả các cạnh đều bằng  $a$ .

a. Tính thể tích hình chóp  $S.ABCD$ .

b. Tính khoảng cách từ tâm mặt đáy  $ABCD$  đến các mặt bên của hình chóp.

**Bài 141:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $I$ . Các nửa đường thẳng  $Ax, Cy$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  và ở về cùng một phía đối với mặt phẳng đó. Cho điểm  $M$  không trùng với  $A$  trên  $Ax$ , cho điểm  $N$  không trùng với  $C$  trên  $Cy$ . Đặt  $AM = m$ ,  $CN = n$ .

a. Tính thể tích của hình chóp  $B.AMNC$ .

b. Tính  $MN$  theo  $a, m, n$  và tìm điều kiện đối với  $a, m, n$  để góc  $\widehat{MIN}$  là góc vuông.

**Bài 142:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$  và một điểm  $M$  trên cạnh  $AB$ ,  $AM = x$ ,  $0 < x < a$ . Xét mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  và chứa đường chéo  $A'C'$  của hình vuông  $A'B'C'D'$ .

a. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

b. Mặt phẳng  $(P)$  chia hình lập phương thành hai khối đa diện, hãy tìm  $x$  để thể tích của một trong hai khối đa diện đó gấp đôi thể tích khối đa diện kia.

**Bài 143:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các mặt bên đều là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi  $E, D$  là trung điểm  $A'C'$  và  $BD$ . Mặt phẳng  $(ADE)$  chia khối lăng trụ thành hai phần tính tỉ số thể tích hai phần.

**Bài 144:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SC$ ;  $I$  là giao điểm của  $BM$  và  $AC$ . Chứng minh rằng  $(SAC) \perp (SMB)$ . Tính thể tích của khối tứ diện  $ANIB$ .

**Bài 145:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A_1B_1C_1$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông,  $AB = AC = a$ ,  $AA_1 = a\sqrt{2}$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của đoạn  $AA_1$  và  $BC_1$ . Chứng minh rằng  $MN$  là đường vuông góc chung của các đường thẳng  $AA_1$  và  $BC_1$ . Tính thể tích khối đa diện  $MA_1BC_1$ .

**Bài 146:** Khối lăng trụ tam giác  $ABC.D.A_1B_1C_1D_1$  có khoảng cách hai đường thẳng  $AB$  và  $A_1D$  bằng 2 và dài đường chéo của mặt bên bằng 5.

a) Chứng minh  $AK \perp A_1D$  ( $K \in A_1D$ ). CMR:  $AK = 2$ .

b) Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.D.A_1B_1C_1D_1$ .

**Bài 147:** Cho hình chóp đều tứ giác  $S.BACD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  thứ tự là trung điểm của  $SA$  mặt phẳng  $(BMN)$  cắt  $SD$  tại  $F$ . Tính thể tích khối chóp  $SBMFN$ .

**Bài 148:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với  $AB = a$ ;  $BC = b$ ;  $AA_1 = c$ .

a) Tính diện tích tam giác  $ACD_1$  theo  $a, b, c$ .

b) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Tính thể tích của tứ diện  $D_1DMN$  theo  $a, b, c$ .

**Bài 149:** Cho hình chóp  $SABC$  như hình, đáy là tam giác cân  $AB = AC = 3a$ ,  $BC = 2a$ . Biết rằng các mặt bên  $(SAB)$ ,  $(SBC)$ ,  $(SCA)$  vuông góc với mặt phẳng đáy  $(ABC)$  và góc  $60^\circ$ . Khoảng cách  $SH$  của hình chóp.

a) Chứng minh  $H$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  và  $SA \perp BC$ .

b) Tính thể tích của khối chóp.

**Bài 150:** Cho hình chóp  $SABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình vuông có cạnh  $2a$ . Cạnh bên  $SA = a\sqrt{5}$ . Mặt  $(P)$  đi qua  $A, B$  và vuông góc với  $SC$ ,  $(P)$  lần lượt cắt  $SC, SD$  tại  $C_1$  và  $D_1$ .

a) Tính diện tích của tam giác  $ABC_1D_1$ .

b) Tính thể tích của khối đa diện  $ABCDD_1C_1$ .

**Bài 151:** Cho hình chóp tam giác  $SABCD$  như hình, cạnh đáy  $AB = a$  và góc  $SAB = 60^\circ$ . Tính thể tích hình chóp  $SABCD$  theo  $a$ .

**Bài 152:** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Trên đường thẳng  $d$  vuông góc với  $MF(ABC)$  tại  $A$  lấy điểm  $M$ . Gọi  $H$  là trọng tâm của tam giác  $BCM$ ,  $K$  là trọng tâm của tam giác  $BCM$ .

a) CMR:  $MC \perp (BHK)$ ;  $HK \perp (BMC)$ .

b) Khi  $M$  thay đổi trên  $d$ , tìm GTLN của thể tích tứ diện  $KABC$ .

**Bài 153:** Trên nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ , lấy điểm  $C$  tùy ý. Kẻ  $CH$  vuông góc với  $AB$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $CH$ . Trên nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại  $I$ , lấy điểm  $S$  sao cho góc  $ASB = 90^\circ$ .

a) Chứng minh rằng mặt phẳng  $(SAB)$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  góc  $60^\circ$ .

b) Cho  $AH = x$ . Tính thể tích khối tứ diện  $SABC$  theo  $R$  và  $x$ . Tìm vị trí của  $C$  để thể tích đó lớn nhất.

**Bài 154:** Cho đường tròn đường kính  $AB = 2R$  trong mặt phẳng  $(P)$  và một điểm  $M$  nằm trên đường tròn đó sao cho góc  $MAB$  bằng  $30^\circ$ . Trên đường vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  tại  $A$ , lấy điểm  $S$  sao cho  $SA = 2R$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SM, SB$ .

a) Chứng minh rằng  $SB$  vuông góc với mặt phẳng  $(KHA)$ .

b) Tính thể tích khối tứ diện  $SKHA$ .

**Bài 155:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $I$  là tâm của mặt bên  $CC'D'D$ .

a) Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng  $(AIK)$ .

b) Tính thể tích của các hình đa diện do mặt phẳng  $(AIK)$  chia ra trên hình lập phương.

**Bài 156:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD, AB, SC$ .

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(MNP)$ .

b) So sánh thể tích của hai khối đa diện do mặt phẳng  $(MNP)$  chia ra trên hình chóp.

**Bài 157:** Cho hình chóp tứ giác đều có chiều cao  $h$  và cạnh đáy  $a$ . Tính thể tích của khối lập phương có một mặt nằm trên đáy của hình chóp và 4 đỉnh nằm trên 4 cạnh bên của hình chóp đó.

**Bài 158:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A_1B_1C_1$ . Trên tia  $A_1B_1$  lấy điểm  $M$  sao cho  $B_1M = \frac{1}{2}A_1B_1$ . Qua  $M$  và các trung điểm của  $A_1C_1$  và  $B_1B$  dựng một mặt phẳng. Tính tỉ số thể tích hai phần của khối lăng trụ do mặt phẳng này chia ra.

**Bài 159:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ . Qua  $A, B$  và trung điểm của  $SC$  dựng một mặt phẳng. Tính tỉ số thể tích hai phần của khối chóp do mặt phẳng này chia ra.

**Bài 160:** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Một điểm  $M$  thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại  $A$  ( $M$  không trùng với  $A$ ). Gọi  $O$  và  $H$  theo thứ tự là trực tâm của tam giác  $ABC$  và  $MBC$ . Xác định vị trí của  $M$  để thể tích khối tứ diện  $OHBC$  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 161:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Thiết diện của hình lập phương tạo bởi mặt phẳng đi qua đỉnh  $A$ , trung điểm của cạnh  $BC$  và tâm của mặt  $DCC'D'$  chia khối lập phương thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

**Bài 162:** Cho hình tứ diện  $ABCD$  có  $BC = CD = DB$ ,  $AB = AC = AD$ . Gọi  $H$  là chân của đường cao hình tứ diện xuất phát từ  $A$ ,  $K$  là chân của đường vuông góc hạ từ  $H$  xuống  $AD$ . Đặt  $AH = a$ ,  $HK = b$ . Tính thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  theo  $a$  và  $b$ .

**Bài 163:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác cân với  $AB = AC = a$  và góc  $BAC$  bằng  $120^\circ$ . Cạnh  $SA = h$  của hình chóp vuông góc với đáy. Lấy trung điểm  $P$  của  $BC$  và các điểm  $M, N$  lần lượt trên  $AB, AC$  sao cho  $AM = AN = AP$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.AMPN$ .

**Bài 164:** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  ( $AB = AC = a$ ),  $BB' = CC' = a$  là hai đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  về cùng một phía với mặt phẳng đó. Tính thể tích của khối chóp  $A.BCC'B'$ .

**Bài 165:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA = SB = SC = SD = a$ .

- Tính đường cao và thể tích khối chóp theo  $a$ .
- Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD, SC$ . Mặt phẳng  $(MNP)$  cắt  $SB, SD$  lần lượt tại  $Q, R$ . So sánh các đoạn thẳng  $QB, RD$  với  $SB$ .
- Chứng minh rằng mặt phẳng  $(MNP)$  chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

**Bài 166:** Trong mặt phẳng  $(P)$  cho hình thoi  $ABCD$  với  $AB = a$ ,  $BD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ . Trên đường thẳng vuông góc với  $(P)$

và đi qua giao điểm của hai đường chéo hình thoi, lấy điểm  $S$  sao cho  $SB = a$ .

- Chứng minh rằng tam giác  $ASC$  là tam giác vuông.
- Tính thể tích hình chóp  $SABCD$ .

**Bài 167:** Cho hình tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $A', B', C', D'$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, AC, CD, BD$ .

- Chứng minh rằng  $A'B'C'D'$  là hình vuông.
- Tính thể tích của khối đa diện  $DAA'B'C'D'$  theo  $a$ .
- Tính thể tích của khối đa diện  $DAA'B'C'D'$  theo  $a$  nếu  $A', B', C', D'$  theo thứ tự là điểm nằm trên cạnh

$AB, AC, CD, BD$  sao cho  $AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{a}{4}$

**Bài 168:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = 2a$  và vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên các đường thẳng  $SB$  và  $SC$ . Tính thể tích của khối chóp  $A.BCMN$ .

**Bài 169:** Cho khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  có chiều cao bằng  $h$  và góc  $ASB$  bằng  $2\alpha$ . Tính thể tích khối chóp.

**Bài 170:** Biết thể tích khối hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  bằng  $V$ . Tính thể tích khối tứ diện  $ACB_1D_1$ .

**Bài 171:** Cho tứ diện đều  $SABC$  có cạnh là  $a$ . Dựng đường cao  $SH$

- Chứng minh  $SA \perp BC$ .
- Tính thể tích của khối chóp  $SABC$ .

**Bài 172:** Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân  $AB = AC = a$ .  $mp(SBC)$  vuông góc với  $mp(ABC)$  và  $SA = SB = a$ .

- CMR tam giác SBC là tam giác vuông.
- Cho  $SC = x$ . Tính thể tích khối chóp theo  $a$  và  $x$ .

**Bài 173:** Cho một hình chóp có đáy là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng  $a$ . Mặt bên qua cạnh huyền vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại đều tạo với đáy góc  $45^\circ$

- CMR hình chiếu vuông góc của đỉnh hình chóp xuống đáy là trung điểm cạnh huyền của đáy.
- Tính thể tích của khối chóp.

**Bài 174:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên tạo với đáy một góc  $60^\circ$  và cạnh đáy bằng  $a$ . Tính thể tích của khối chóp.

**Bài 175:** Cho lăng trụ đều  $ABCA_1B_1C_1$ . Tam giác  $ABC_1$  có diện tích là  $\sqrt{3}S$  và hợp với mặt đáy góc  $\alpha$

- Tính thể tích lăng trụ.
- S không đổi, cho  $\alpha$  thay đổi. Tính  $\alpha$  để thể tích lăng trụ lớn nhất.

**Bài 176:** Cho lăng trụ đều  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  cạnh đáy  $a$ . Góc giữa đường chéo  $AC_1$  và đáy là  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ.

**Bài 177:** Cho lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$ , đáy ABC cân đỉnh A. Góc giữa  $AA_1$  và  $BC_1$  là  $30^\circ$  và khoảng cách giữa chúng là  $a$ . Góc giữa hai mặt bên qua  $AA_1$  là  $60^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ

**Bài 178:** Cho lăng trụ  $ABCA_1B_1C_1$  đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu của  $A_1$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết góc  $BAA_1 = 45^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ.

**Bài 179:** Cho hình hộp  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có đáy là hình thoi ABCD cạnh  $a$ , góc A bằng  $60^\circ$ . Chân đường vuông góc hạ từ  $B_1$  xuống đáy ABCD trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy. Biết  $BB_1 = a$

- Tính góc giữa cạnh bên và đáy.
- Tính thể tích của khối hộp.

**Bài 180:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{2}$ . Trên cạnh đáy AD lấy điểm M thay đổi, đặt góc  $ACM = \alpha$ . Hạ  $SN \perp CM$ . Chứng minh N luôn thuộc một đường tròn cố định và tính thể tích tứ diện SACN theo  $a$  và  $\alpha$

**Bài 181:** Cho lăng trụ tam giác  $ABCA_1B_1C_1$  có đáy ABC là một tam giác đều cạnh  $a$ , điểm  $A_1$  cách đều các điểm A, B, C. Cạnh  $AA_1$  tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ .

- Tính thể tích khối lăng trụ.
- Chứng minh mặt bên  $BCC_1B_1$  là một hình chữ nhật

**Bài 182:** Hình lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$  đáy ABC là một tam giác vuông tại A,  $AC = b$ , góc C =  $60^\circ$ . Đường chéo  $BC_1$  tạo với  $mp(AA_1C_1C)$  một góc  $30^\circ$ .

- Tính độ dài  $AC_1$ .
- Tính thể tích khối lăng trụ.

**Bài 183:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các mặt bên đều là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi E, D là trung điểm AC và BD. Mặt phẳng (ADE) chia khối lăng trụ thành hai phần tính tỉ số thể tích hai phần.

**Bài 184:** Cho hình chóp tam giác SABC có  $SA = x$ ;  $BC = y$ ; các cạnh còn lại đều bằng 1.

- Tính thể tích khối chóp theo  $x, y$ .
- Với  $x, y$  bằng bao nhiêu thì thể tích khối chóp lớn nhất?

**Bài 185:** Trong không gian cho  $Om \perp OO_1 = H$  và hai tia  $Om$  và  $On$  cùng vuông góc với  $OO_1$  và vuông góc với nhau. Lấy M thuộc  $Od$ , lấy N thuộc  $O_1d_1$  sao cho ta luôn có  $OM^2 + O_1N^2 = k^2$  ( $k$  cho trước)

- Chứng minh đoạn MN có độ dài không đổi.
- Xác định vị trí M trên  $Od$  và N trên  $O_1d_1$  sao cho thể tích  $OO_1MN$  có thể tích lớn nhất

**Bài 186:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = b$ ,  $\hat{C} = 60^\circ$ . Hình chiếu của đỉnh  $A'$  lên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính thể tích của khối lăng trụ.

a. Tính diện tích đáy  $ABC$ .

b. Tính thể tích của khối lăng trụ.

**Bài 187:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là một tam giác đều cạnh  $a$  và điểm  $A'$  cách đều các điểm  $A, B, C$ . Cạnh  $AA'$  tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích của khối lăng trụ.

**Bài 188:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều là bằng  $a$  ba góc ở đỉnh  $A$  đều bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối hộp theo  $a$ .

**Bài 189:** Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SA = 2a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SB, SC$ . Tính thể tích của khối chóp  $A.BCNM$ .

**Bài 190:** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ , cạnh  $SA$  vuông góc với đáy, góc  $ACB = 60^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SB$ . Chứng minh mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SBC)$ . Tính thể tích khối tứ diện  $MABC$ .

**Bài 191:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân, cạnh đáy  $BC = a$ , góc  $BAC = \alpha$ . Các cạnh bên tạo với đáy một góc  $\alpha$ . Tính thể tích hình chóp.

**Bài 192:** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình bình hành diện tích bằng  $\sqrt{3}$  và góc giữa hai đường chéo của đáy bằng  $60^\circ$ , góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng  $45^\circ$ . Tính thể tích hình chóp.

**Bài 193:** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với các cạnh  $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$ , tam giác  $SBD$  là tam giác vuông nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy có các cạnh góc vuông  $SB = 8a$ ,  $SD = 15a$ . Tính thể tích hình chóp.

**Bài 194:** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ ,  $SA$  vuông góc với hình chóp. Cho  $AB = a$ ,  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  lên  $SB, SD$ . Chứng minh  $SC \perp (AHK)$  và tính thể tích hình chóp  $OAHK$ .

**Bài 195:** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , mặt bên  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $SB, BC, CD$ . Chứng minh rằng  $AM$  vuông góc với  $BP$  và thể tích khối tứ diện  $CMNP$ .

**Bài 196:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA = a$ ,  $SB = a\sqrt{3}$  mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC$ . Tính thể tích khối chóp  $S.BMDN$  và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $SM, DN$ .

**Bài 197:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có độ dài cạnh bên bằng  $2a$ , đáy là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$  và hình chiếu vuông góc của đỉnh  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $A'ABC$  và tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $AA', B'C'$ .

**Bài 198:** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và  $SA$  vuông góc với  $(ABCD)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SC$ ,  $I$  là giao điểm của  $BM$  và  $AC$ .

a. Chứng minh rằng mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SMB)$ .

b. Tính thể tích khối tứ diện  $ANIB$ .

**Bài 199:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông,  $AB = BC = a$ ,  $AA' = a\sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM, B'C'$ .

**Bài 200:** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang  $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ .  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 2a$ , Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SD$ .

a/ Chứng minh rằng  $BCNM$  là hình chữ nhật.

b/ Tính thể tích của khối chóp  $SBCNM$ .