

**Câu 1. (6 điểm)**

a) Giải phương trình: 
$$\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

b) Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

**Câu 2. (5 điểm)**

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên  $n$  để  $n^5 + 1$  chia hết cho  $n^3 + 1$

**Câu 3. (3 điểm)**

a) Cho 3 số dương  $a, b, c$  có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: 
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

b) Cho  $a, b$  dương và  $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$ .

Tính  $a^{2011} + b^{2011}$

**Câu 4. (6 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia  $BM$  cắt tia  $BM$  tại H, cắt tia  $BA$  tại O. Chứng minh rằng:

a)  $OA \cdot OB = OC \cdot OH$

b)  $\angle H$  có số đo không đổi

c) Tổng  $BM \cdot BH + CM \cdot CA$  không đổi



## ĐÁP ÁN

### Câu 1.

a) ĐKXD:  $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) Đặt  $b+c-a=x>0; \quad c+a-b=y>0; \quad a+b-c=z>0$

Từ đó suy ra  $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra  $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$  hay  $A \geq 3 \Leftrightarrow a=b=c$

### Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là  $a$  và  $b$ , ta có  $a+b$  chia hết cho 3

Ta có:  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b) \left[ (a+b)^2 - 3ab \right]$

Vì  $a+b$  chia hết cho 3 nên  $(a+b)^2 - 3ab$  chia hết cho 3.

Do vậy,  $(a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$  chia hết cho 9

b)

$$n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n+1) : (n+1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n-1) : n^2 - n + 1$$

$$n^2 - n : n^2 - n + 1 \Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1)$$

Hay  $\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0$ , không có giá trị của  $n$  thỏa mãn

**Câu 3.**

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

a. Từ

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

b)  $(a^{2001} + b^{2001})(a+b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$

$$\Rightarrow (a + b) - ab = 1$$

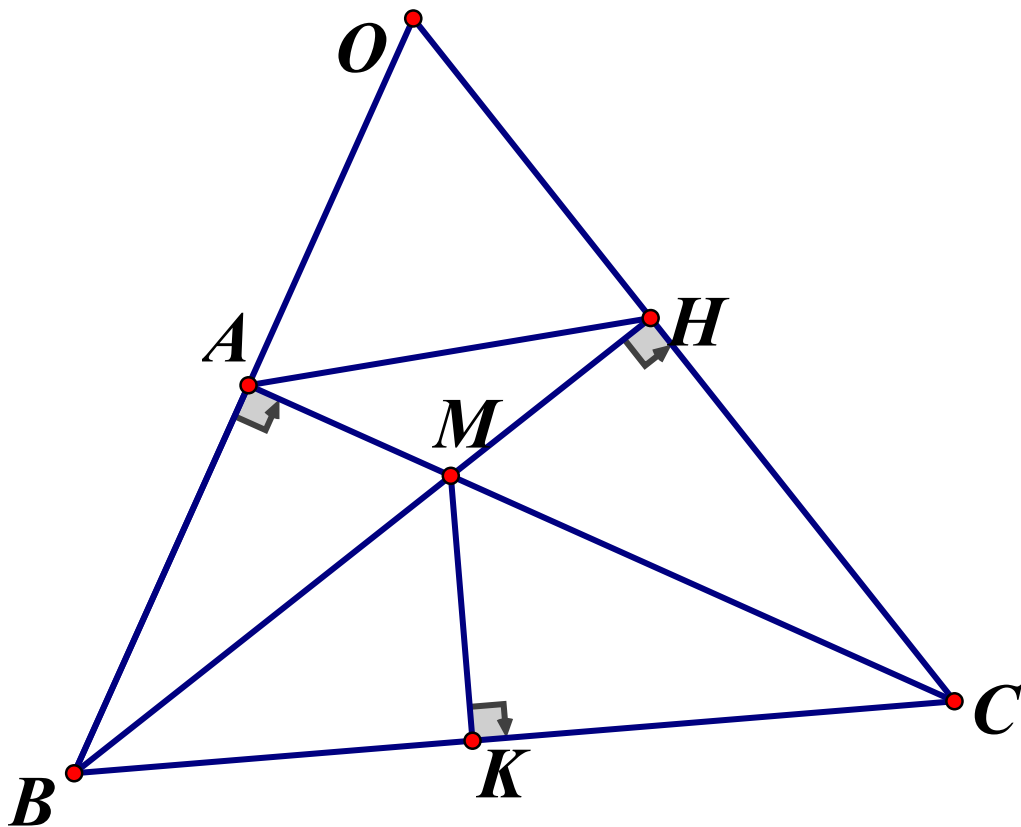
$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Với  $a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$

Với  $b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = 0(ktm) \end{cases}$

Vậy  $a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$

**Câu 4.**



a)  $\Delta BOH \sim \Delta COA (g.g) \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA \cdot OB = OH \cdot OC$

$$\text{b) } \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OB} \text{ và } \hat{O} \text{ chung} \Rightarrow \Delta OHA \sim \Delta OBC$$

$$\Rightarrow \hat{O}HA = \hat{O}BC \text{ (không đổi)}$$

$$\text{c) Vẽ } MK \perp BC; \Delta BKM \sim \Delta BHC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM \cdot BH = BK \cdot BC \quad (3)$$

$$\Delta CKM \sim \Delta CAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = BC \cdot CK \quad (4)$$

Cộng từng vế của (3) và (4) ta có:

$$BM \cdot BH + CM \cdot CA = BK \cdot BC + BC \cdot CK = BC \cdot (BK + KC) = BC^2 \text{ (Không đổi)}$$