GV: NGUYỄN QUỐC BẢO

Zalo: 039.373.2038

Gmail:Tailieumontoan.com@Gmail.com

Website: Tailieumontoan.com

Facebook:www.facebook.com/baotoanthcs

BÍ QUYẾT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC THCS

Chuyên đề

BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

LƯU HÀNH NỘI BỘ

NGUYỄN QUỐC BẢO

BÍ QUYẾT GIẢI TOÁN

BẤT ĐẲNG THỨC & CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

- **Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 8, 9**
- **Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên toán**
- **Phân dạng và phương pháp giải rõ ràng**

Lời giới thiệu

Các em học sinh và thầy giáo, cô giáo thân mến !

Cuốn sách *Cẩm nang chứng minh bất đẳng thức THCS* được các tác giả biên soạn nhằm giúp các em học sinh học tập tốt môn Toán ở THCS hiện nay và THPT sau này.

Các tác giả cố gắng lựa chọn những bài tập thuộc các dạng điển hình, sắp xếp thành một hệ thống để bồi dưỡng học sinh khá giỏi các lớp THCS. Sách được viết theo các chủ đề tương ứng với các vấn đề quan trọng thường được ra trong các đề thi học sinh giỏi toán THCS, cũng như vào lớp 10 chuyên môn toán trên cả nước. Mỗi chủ đề được viết theo cấu trúc lý thuyết cần nhớ, các dạng toán thường gặp, bài tập rèn luyện giúp các em học sinh nắm vững kiến thức đồng thời rèn luyện được các kiến thức đã học.

Mỗi chủ đề có ba phần:

A. ***Kiến thức cần nhớ:*** Phần này tóm tắt những kiến thức cơ bản, những kiên thức bổ sung cần thiết để làm cơ sở giải các bài tập thuộc các dạng của chuyên đề.

B. ***Một số ví dụ:*** Phần này đưa ra những ví dụ chọn lọc, tiêu biểu chứa đựng những kĩ năng và phương pháp luận mà chương trình đòi hỏi.

Mỗi ví dụ thường có: Lời giải kèm theo những nhận xét, lưu ý, bình luận và phương pháp giải, về những sai lầm thường mắc nhằm giúp học sinh tích lũy thêm kinh nghiệm giải toán, học toán.

C. ***Bài tập vận dụng***:

Phần này, các tác giả đưa ra một hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán, tăng dần độ khó cho học sinh khá giỏi. Có những bài tập được trích từ các đề thi học sinh giỏi Toán và đề vào lớp 10 chuyên Toán. Các em hãy cố gắng tự giải.

Các tác giả hi vong cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em học sinh nâng cao trình độ và năng lực giải toán, góp phần đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi ở cấp THCS.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong biên soạn song cuốn sách này vẫn khó tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc.

Xin chân thành cảm ơn!

CHỦ ĐỀ 1 PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐỊNH NGHĨA

A. Kiến thức cần nhớ

● Để chứng minh A ≥ B ta xét hiệu A – B và chứng minh hiệu A – B là số không âm bằng cách dồn về các tổng bình phương.

● Lưu ý : $A^2 \geq 0$ với mọi A ; dấu " = " xảy ra khi A = 0 .

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng với mọi số thực x ta đều có:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$$

Hướng dẫn giải

Xét hiệu: $A = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - (-1)$

$$= [(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)] + 1$$
$$= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 1$$

Đặt $y = x^2 - 5x + 5$ ta được $A = (y-1)(y+1) + 1 = y^2 - 1 + 1 = y^2 \geq 0$

Vậy $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$

★**Thí dụ 2.** Cho a, b là các số thực. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Hướng dẫn giải

Xét hiệu: $A = a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = \frac{1}{2}\left[(a - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2\right] \geq 0$$

Vậy $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

★**Thí dụ 3.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta đều có: $a^6 + 1 \geq a^2(a^2 + 1)$

Hướng dẫn giải

Xét hiệu: $A = a^6 + 1 - a^2(a^2 + 1) = a^6 - a^4 - a^2 + 1$

$= a^4(a^2-1)-(a^2-1)=(a^2-1)(a^4-1)$

$=(a^2-1)^2(a^2+1)\ge 0$

Ta có $A\ge 0$ do $a^2+1>0$ và $(a^2-1)^2\ge 0$

Vậy $a^6+1\ge a^2(a^2+1)$

Dấu bằng xảy ra khi a = 1 hoặc a = -1

★**Thí dụ 4.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta đều có:

$$a^2+9b^2+c^2+\frac{19}{2}>2a+12b+4c$$

Hướng dẫn giải

Xét hiệu:

$A=\left(a^2+9b^2+c^2+\frac{19}{2}\right)-(2a+12b+4c)=(a^2-2a+1)+(9b^2-12b+4)+(c^2-4c+4)+\frac{1}{2}$

$=(a-1)^2+(3b-2)^2+(c-2)^2+\frac{1}{2}>0$

Ta có A > 0 do $(a-1)^2\ge 0,(3b-2)^2\ge 0$ và $(c-2)^2\ge 0$

Vậy $a^2+9b^2+c^2+\frac{19}{2}>2a+12b+4c$

★**Thí dụ 5.** Chứng minh bất đẳng thức sau với x, y không âm $(x+y)(x^3+y^3)\ge(x^2+y^2)^2$

Hướng dẫn giải

Xét hiệu hai vế: $(x+y)(x^3+y^3)-(x^2+y^2)^2=x^4+xy^3+x^3y+y^4-x^4-2x^2y^2-y^4$

$=xy(y^2+x^2-2xy)=xy(x-y)^2\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0,$ hoặc $y=0,$ hoặc $x=y$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) *Chứng minh rằng với mọi x ta có:* $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1\ge 0$

2) *Chứng minh rằng mới mọi a, b, c ta đều có*: $a^2+4b^2+3c^2>2a+12b+6c-14$

3) *Chứng minh với mọi x, y, z ta có:*

a) $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ *b)* $x^2+y^2+z^2\ge 2xy-2xz+2yz$

4) *Chứng minh rằng với mọi x, y ta có:* $4x^2+4xy+4y^2>6y-4$

CHỦ ĐỀ 2 PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

Để chứng minh $A \le B$ ta chứng minh $A \le B \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow C \le D$ với $C \le D$ luôn đúng.

Một số bất đẳng thức cần nhớ : Với a, b, c ta có :

+) $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ $\left(\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0\right)$

+) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$

+) $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2 \ge 0\right)$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực a, b, c. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ $\quad (1)$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \qquad (2)$

Bất đẳng thức (2) đúng. Vậy bất đẳng thức (1) đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

★**Thí dụ 2.** Chứng minh đẳng thức $(a^2-b^2)(c^2-d^2) \le (ac-bd)^2 \qquad (1)$

Hướng dẫn giải

$(1) \Leftrightarrow a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2 \le a^2c^2-2abcd+b^2d^2$

$\Leftrightarrow 0 \le a^2d^2+b^2c^2-2abcd \Leftrightarrow 0 \le (ad-bc)^2 \qquad (3)$

Bất đẳng thức (3) đúng. Vậy bất đẳng thức (1) đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$

★**Thí dụ 3.** Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e) \quad \forall a,b,c,d,e \in R$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4}-ab+b^2+\frac{a^2}{4}-ac+c^2+\frac{a^2}{4}-ad+d^2+\frac{a^2}{4}-ae+e^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi: $b=c=d=\frac{a}{2}$

★**Thí dụ 4.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có: $2\left(a^4+b^4\right) \ge ab^3+a^3b+2a^2b^2$

Hướng dẫn giải

Để ý với a = b thì có dấu bằng đẳng thức nên ta tách các số hạng để tạo ra nhân tử chung $(a-b)^2$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^4-2a^2b^2+b^4+a^4-a^3b+b^4+b^4-ab^3 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2+\left(a^3-b^3\right)(a-b) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[(a+b)^2+\left(a^2+ab+b^2\right)\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[2(a+b)^2+2a^2+2ab+2b^2\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[3(a+b)^2+a^2+b^2\right] \ge 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Chú ý: Qua hai ví dụ trên ta nhận thấy khi biến đổi tương đương bất đẳng thức bậc hai thường xuất hiện các đại lượng $(a-b)^2$; $(b-c)^2$; $(c-a)^2$ với điều kiện dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$. Do đó trước khi biến đổi bất đẳng thức ta nên dự đoán dấu đẳng thức xảy ra để từ đó có hướng đi hợp lí.

★**Thí dụ 5.** Cho 2 số thực x, y dương. Chứng minh rằng: $a+b \ge \frac{12ab}{9+ab}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$a+b \ge \frac{12ab}{9+ab}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(9+ab) \ge 12ab \ (\text{do } 9+ab>0)$$
$$\Leftrightarrow 9a+9b+a^2b+ab^2 \ge 12ab$$
$$\Leftrightarrow (a^2b-6ab+9b)+(ab^2-6ab+9a) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow b(a-3)^2+a(b-3)^2 \ge 0 \ (2)$$

Vì $a, b > 0$ nên $b(a-3)^2 \ge 0$ và $a(b-3)^2 \ge 0$ do đó (2) đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi a = b = 3.

★**Thí dụ 6.** Cho 2 số thực a, b dương. Chứng minh rằng: $\frac{a^2b}{2a^3+b^3}+\frac{2}{3} \ge \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}$.

Hướng dẫn giải

Để ý a = b thì có dấu bằng của đẳng thức, khi đó $\frac{a^2b}{2a^3+b^3}=\frac{1}{3}; \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}=1$. *Nên ta biến đổi như sau :*

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3}+\frac{2}{3} \ge \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}. \Leftrightarrow \frac{a^2b}{2a^3+b^3}-\frac{1}{3} \ge \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}.-1 \Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2(2a+b)}{3(2a^2+b^3)} \ge \frac{-(a-b)^2}{2a^2+b^2}$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{2a^2+b^2}-\frac{2a+b}{3(2a^3+b^3)}\right] \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\left[3(2a^3+b^3)-(2a+b)(2a^2+b^2)\right]$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[2a^2+2b^3-2a^2b-2ab^2\right] \ge 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^4 \ge 0$$

Ta có bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 7.** Cho các số thực a , b không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{b^2}{3a^2+2b^2} \ge \frac{3}{5}$$

Hướng dẫn giải

Dấu đẳng thức xảy ra với $a = b$, khi đó $\frac{2ab}{a^2+4b^2}=\frac{2}{5}$; $\frac{b^2}{3a^2+2b^2}=\frac{1}{5}$. Nên ta ta biến đổi bất đẳng thức thành $\frac{2}{5}-\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{1}{5}-\frac{b^2}{3a^2+2b^2} \ge 0$. Tới đây ta quy đồng hai vế và phân tích thành các bình phương.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{b^2}{3a^2+2b^2} \le \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5}-\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{1}{5}-\frac{b^2}{3a^2+2b^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2 - 10ab + 8b^2}{a^2 + 4b^2} + \frac{3a^2 - 3b^2}{3a^2 + 2b^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2(a - b)(a - 4b)}{a^2 + 4b^2} + \frac{3(a - b)(a + b)}{3a^2 + 2b^2} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a - b)\left[2(a - 4b)(3a^2 + 2b^2) + 3(a + b)(a^2 + 4b^2)\right] \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a - b)(9a^3 - 21a^2b + 16ab^2 - 4b^3) \ge 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(3a - 2b)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $3a = 2b$

★**Thí dụ 8.** Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} \ge 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Hướng dẫn giải

Đẳng thức xẩy ra khi $a = b$, do đó ta cố biến đổi bất đẳng thức làm xuất hiện đại lượng $(a - b)^2$. Bất đẳng thức cần chứng minh có chứa căn, nên để xuất hiện nhân tử chung có dạng $(a - b)^2$ ta cần chú ý đến phép biến đổi $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2$

Khi đó ta có $\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) = \dfrac{(a - b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)}$

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} \ge 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} - 2(a + b) \ge 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 2(a + b)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{a + b} \ge \frac{2(a - b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)}$$
$$\Leftrightarrow (a - b)^2\left[\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b) - 2(a + b)\right] \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a - b)^2\left[\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b)\right] \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^4}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b} \ge 0$$

Bất đẳng cuối cùng đúng do a , b dương. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 9.** Cho biểu thức : $P = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36.$

Chứng minh P luôn dương với mọi x;y thuộc R .

(Đề toán vào lớp 10 Quảng Ninh năm 2010-2011)

Hướng dẫn giải

Ta có: $P = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36.$

$= xy(x-2)(y+6) + 12x(x-2) + 3y(y+6) + 36$

$= x(x-2)\left[y(y+6)+12\right] + 3\left[y(y+6)+12\right]$

$= \left(y^2+6y+12\right)\left(x^2-2x+3\right)$

Mà $y^2+6y+12 = (y+3)^2 + 3 > 0$

$x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$

Vậy $P > 0$ với mọi x;y thuộc R

★**Thí dụ 9.** Cho các số thực dương a, b. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{16}{a+b} \ge 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{16}{a+b} \ge 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{b}{a^2} - \frac{1}{a}\right) + 4\left(\frac{4}{a+b} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{b^2} + \frac{b-a}{a^2} + 4.\frac{4ab-(a+b)^2}{(a+b)ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2} - \frac{4(a-b)^2}{(a+b)ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[(a+b)^2 - 4ab\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^4 \ge 0.$$

Bất đẳng cuối cùng nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b > 0$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có:* $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

2) *Chứng minh rằng mới mọi a, b, c ta đều có:* $a^2 + 4b^2 + 4c^2 \ge 4ab - 4ac + 8bc$

3) *Chứng minh bất đẳng thức* $x + y \le xy + 1$ *với* $x \ge 1, y \ge 1$.

4) *Chứng minh rằng với mọi x, y ta có:* $(x+y)\left(x^3+y^3\right) \ge \left(x^2+y^2\right)^2$

5) *Cho a, b là hai số thực khác không. Chứng minh rằng:* $\dfrac{4a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\ge 3$

6) *Cho các số thực dương* $a,\ b,\ m,\ n\ \left(m\ge n\right)$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{na+mb}+\frac{b}{mb+na}\ge\frac{2}{m+n}$$

7) *Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:*

$$\frac{2ab}{\left(a+b\right)}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}$$

8) *Cho x, y là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}\ge\frac{1}{1+xy}.$$

9) *Cho x, y là các số thực thỏa mãn* $x\ne y, x\ne 0, y\ne 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\left(x-y\right)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{4}{xy}.$$

10) *Cho x, y là các số thực không âm tùy ý . Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2\left(a+b\right)}.$$

Khi nào có dấu đẳng thức ?

CHỦ ĐỀ 3

PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

A. Kiến thức cần nhớ

Để chứng minh $A \ge B$.

*** Các bước giải:**

● **Bước 1:** Giả sử xảy ra mệnh đề trái với yêu cầu cần chứng minh (tức là **A < B).**

● **Bước 2:** Sau đó vận dụng các kiến thức đã biết và giả thiết của đề bài để chứng tỏ điều giả sử (**A < B)** là sai.

● **Bước 3:** kết luận yêu cầu cần chứng minh là đúng.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng: $(a+b)^2 \ge 4ab$

Hướng dẫn giải

Giả sử $(a+b)^2 < 4ab$, khi đó:

$a^2+2ab+b^2 < 4ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 < 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 < 0$ điều này là sai với mọi a, b.

Vậy giả sử trên là sai, điều phải chứng minh là đúng.Tức là: $(a+b)^2 \ge 4ab$

★**Thí dụ 2.** Cho a + b = 2. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \le 2$

Hướng dẫn giải

Đặt $\sqrt[3]{x}=a; \sqrt[3]{y}=b \Rightarrow x=a^3; y=b^3$. Ta có: $x^3+y^3=2$. Cần chứng minh $x+y \le 2$

Giả sử $x+y>2$ thì: $(x+y)^3 > 8 \Rightarrow x^3+y^3+3xy(x+y) > 8 \Rightarrow 2+3xy(x+y) > 8$

$\Rightarrow xy(x+y) > 2 \Rightarrow xy(x+y) > x^3+y^3$; (vì $x^3+y^3=2$)

Chia cả hai vế cho số dương $x+y$ ta được: $xy > x^2-xy+y^2 \Rightarrow 0 > (x-y)^2$ (vô lý)

Vậy $x+y \le 2$ tức là $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \le 2$

★**Thí dụ 3.** Cho ba số a, b, c $\in (0;1)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là sai: $a(1-b) > \frac{1}{4}$; $b(1-c) > \frac{1}{4}$; $c(1-a) > \frac{1}{4}$.

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Hướng dẫn giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng. Theo giả thiết ta có:

$a,b,c,(1-a),(1-b),(1-c)$ đều là các số dương, suy ra: $a(1-b)b(1-c)c(1-a)>\frac{1}{64}$ (1)

Mặt khác: $a(1-a)=a-a^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-a+a^2\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-a\right)^2\le\frac{1}{4}$

Tương tự ta có: $b(1-b)\le\frac{1}{4}$; $c(1-c)\le\frac{1}{4}$

Suy ra: $a(1-b)b(1-c)c(1-a)\le\frac{1}{64}$; (2)

Ta có (1) mâu thuẫn (2) nên giải sử là sai, điều cần chứng minh là đúng. Tức là với a, b, c $\in(0;1)$. Thì ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là sai:

$a(1-b)>\frac{1}{4};b(1-c)>\frac{1}{4};c(1-a)>\frac{1}{4}$ (đpcm).

★**Thí dụ 4.** Chứng minh rằng nếu: $a_1.a_2\ge2(b_1+b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2+a_1x+b_1=0,$ (1) ; $x^2+a_2x+b_2=0$ (2).

Hướng dẫn giải

Giải sử phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.

Khi đó ta có: $\Delta_1<0;\Delta_2<0\Rightarrow\Delta_1+\Delta_2<0\Rightarrow a_1{}^2-4b_1+a_2{}^2-4b_2<0$

$$\Rightarrow a_1{}^2+a_2{}^2-4(b_1+b_2)<0\Rightarrow a_1{}^2+a_2{}^2<4(b_1+b_2)\le2a_1a_2$$

$$\Rightarrow(a_1-a_2)^2<0.$$

Điều này là sai với mọi a_1,a_2.

Vậy giải sử là sai, điều cần chứng minh là đúng. Tức là nếu: $a_1.a_2\ge2(b_1+b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2+a_1x+b_1=0,$ (1) ; $x^2+a_2x+b_2=0$ (2).

★**Thí dụ 5.** Với mọi số thực x, y, z. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai: $|x|<|y-z|;|y|<|z-x|;|z|<|x-y|$

Hướng dẫn giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng

$\Rightarrow x^2<(y-z)^2\Rightarrow x^2-(y-z)^2<0\Rightarrow(x-y+z)(x+y-z)<0$ (1)..

Tương tự ta có: $\left(y-z+x\right)\left(y+z-x\right)<0$ (2)

$\left(z-x+y\right)\left(z+x-y\right)<0$ (3)

Nhân vế với vế (1); (2); (3) ta được: $\left(x-y+z\right)^2\left(y-z+x\right)^2\left(z-x+y\right)^2<0$ (vô lý)

Vậy giải sử là sai, điều cần chứng minh là đúng. Tức là: Với mọi số thực x, y, z. thì có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai: $|x|<|y-z|;|y|<|z-x|;|z|<|x-y|$

★**Thí dụ 6.** Các số thực a, b, c thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+ab+bc+ca<0$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2<c^2$.

(Trích đề toán vào 10 Chuyên Thái Bình năm 2007-2008)

Hướng dẫn giải

Giả sử $a^2+b^2\ge c^2$. Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+a^2+b^2+2\left(ab+bc+ca\right)<0$

Lại có: $a^2+b^2+a^2+b^2+2\left(ab+bc+ca\right)\ge a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=\left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)^2<0$ (vô lý)

Vậy $a^2+b^2<c^2$.

★**Thí dụ 7.** Các số dương x, y thoả mãn điều kiện $x^3+y^3=x-y$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2<1$.

(Trích đề toán vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2006-2007)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $x>y>0$. Giả sử $x^2+y^2\ge 1$, khi đó từ giả thiết ta suy ra

$x^3+y^3\le\left(x-y\right)\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow x^3+y^3\le x^3+xy^2-yx^2-y^3$

$\Leftrightarrow xy^2-yx^2-2y^3\ge 0\Leftrightarrow y\left(xy-x^2-2y^2\right)\ge 0$ (*)

Vì $x>y>0$ nên $x\left(y-x\right)<0\Rightarrow x\left(y-x\right)-2y^3<0$. Do đó (*) không thể xảy ra. Mâu thuẫn này chứng tỏ $x^2+y^2<1$.

★**Thí dụ 8.** Cho 3 số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $9ab, 9\text{bc}, 9\text{ca}$ nhỏ hơn $\left(a+b+c\right)^2$.

Hướng dẫn giải

Giả sử ngược lại $9ab\ge\left(a+b+c\right)^2, 9bc\ge\left(a+b+c\right)^2, 9ca\ge\left(a+b+c\right)^2$.

Cộng hai vế bất đẳng thức ta có: $3\left(a+b+c\right)^2\le 9\left(ab+bc+ca\right)$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \le 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \le ab+bc+ca$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \le 0 \qquad (1)$$

Theo đầu bài a,b,c đôi một khác nhau nên $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0 \qquad (2)$

Vì (1) và (2) mâu thuẫn nhau nên ta có điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 9.** Cho $a \ge 4, b \ge 5, c \ge 6$ và $a^2+b^2+c^2=90$. Chứng minh: $a+b+c \ge 16$.

(Trích đề toán vào 10 Nam Định năm 2006-2007)

Hướng dẫn giải

Đặt: $a=x+4, b=y+5, c=z+6$ thì $x,y,z \ge 0$ và điều kiện của bài toán trở thành $(x+4)^2+(y+5)^2+(z+6)^2=90$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12(x+y+z)-4x-2z=13. \qquad (1)$$

Ta cần chứng minh $a+b+c \ge 16 \Leftrightarrow x+y+z \ge 1$.

Giả sử tồn tại $x,y,z \ge 0$ thỏa mãn (1) nhưng lại có $x+y+z<1. \qquad (2)$

Khi đó hiển nhiên $x,y,z \in [0;1)$ nên $x^2 \le x, y^2 \le y, z^2 \le z$, hay $x^2+y^2+z^2 \le x+y+z. \qquad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$13 = x^2+y^2+z^2+12(x+y+z)-4x-2z \le 13(x+y+z)-4x-2z \le 13(x+y+z) < 13.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $x+y+z \ge 1$ hay $a+b+c \ge 16$.

★**Thí dụ 10.** Cho các số thực a, b, c thoả mãn $\begin{cases} a+b+c>0 \\ ab+bc+ca>0 \\ abc>0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng cả ba số đều dương.

(Trích đề toán vào 10 Chuyên Lam Sơn năm 2008-2009)

Hướng dẫn giải

Giả sử trong ba số a, b, c có một số không dương. Không mất tính tổng quát ta xem $a \le 0$. Mà $abc>0$ nên $a \ne 0$ do đó $a<0$.

Lại có $a+b+c>0$ nên $b+c>0$ suy ra $a(b+c)<0$.

Theo giả thiết thứ hai $ab+bc+ca>0$ ta có $a(b+c)+bc>0 \Rightarrow bc>0$.

Vì thế $a.bc<0$ (mâu thuẫn với giả thiết thứ ba).

Chứng tỏ bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 11.** Cho a, b, c là các số thức không âm thỏa mãn $a+b+c \ge abc$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \ge abc$

Hướng dẫn giải

Nếu một trong 3 số bằng 0 thì bất đẳng thức được chứng minh vì thế chỉ cần xét $a,b,c > 0$.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là $a^2 + b^2 + c^2 < abc$. Khi đó ta có $abc > a^2 + b^2 + c^2 > a^2$ nên $bc > a$.

Chứng minh tương tự ta được $b < ac,\ c < ab$

Từ đó suy ra $a + b + c < ab + bc + ca$.

Mặt khác ta lại có $abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow abc > ab + bc + ca$

Kết hợp hai bất đẳng thức ta được $abc > a + b + c$, bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều giả sử không thể xẩy ra, tức là bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 12.** Cho a, b là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$-1 \leq a + b \leq 1;\ -1 \leq a + b + ab \leq 1$$

Chứng minh rằng: $-2 \leq a,\ b \leq 2$

Hướng dẫn giải

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $-2 \leq a \leq 2$. Việc chứng minh $-2 \leq b \leq 2$ hoàn toàn tương tự.

Giả sử bất đẳng thức $-2 \leq a \leq 2$ là sai, khi đó ta có $a > 2$ hoặc $a < -2$.

+ Xét trường hợp $a > 2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \leq 1 - a < 1 - 2 = -1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này không xẩy ra.

+ Xét tường hợp $a < -2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \geq -1 - a > -1 + 2 = 1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này cũng không xẩy ra.

Các kết quả trên chứng tỏ điều giả sử không thể xẩy ra, tức là bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 13.** Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2\left(1 + ab\right)$.

Chứng minh rằng: $a \geq c$ và $b \geq c$

Hướng dẫn giải

+ Trước hết ta chứng minh $a \geq c$. Ta viết lại giả thiết là $a^2 - c^2 = b\left(ac^2 - b\right)$.

Giả sử $a < c$ khi đó ta được $a^2 - c^2 = b\left(ac^2 - b\right) < 0 \Leftrightarrow b > ac^2$.

Mà ta lại thấy $b\left(b - ac^2\right) \geq b > ac^2$.

Như vậy ta được $c^2 - a^2 - ac^2 > 0$.

Mà do a, c là các số nguyên dương nên ta được $c^2 - a^2 - ac^2 = c^2\left(1 - a\right) - a^2 < 0$.

Hai bất đẳng thức này mâu thuẫn với nhau. Do đó không thể xẩy ra $a < c$, tức là ta có bất đẳng thức $a \ge c$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $b \ge c$.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

★**Thí dụ 14.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c}} \ge 1$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{1}{\sqrt{1+8a}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{1+8b}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{1+8c}}$.

Suy ra $a = \frac{1-x^2}{8x^2}$; $b = \frac{1-y^2}{8y^2}$; $c = \frac{1-z^2}{8z^2}$, khi đó ta được $0 < x;\ y;\ z < 1$.

Vì $abc = 1$ nên giả thiết được viết lại là $8^3x^2.y^2.z^2 = \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)$ và bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \ge 1$.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $x + y + z < 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\begin{aligned} 1-x^2 > \left(x+y+z\right)^2 - x^2 &= \left(y+z\right)\left[\left(x+y\right)+\left(x+z\right)\right] \\ &\ge 2\left(y+z\right)\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)} > 0 \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta có
$$1-y^2 > 2\left(x+z\right)\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)} > 0;\quad 1-z^2 > 2\left(x+y\right)\sqrt{\left(x+z\right)\left(y+z\right)} > 0$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được
$$8^3x^2.y^2.z^2 = \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right) > \left(x+y\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+z\right)^2$$

Hay $8xyz > \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$, rõ ràng bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai. Vậy điều giả sử không thể xẩy ra, tức là bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 15.** Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a < b < c;\ a + b + c = 6;\ ab + bc + ca = 9$$

Chứng minh rằng: $0 < a < 1;\ 1 < b < 3;\ 3 < c < 4$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết của bài toán, ta suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 18$$

Mặt khác, vì a, b, c là các số dương cho nên

$$9 = ab + bc + ca < a(b + c) + \frac{(b + c)^2}{4} = a(6 - a) + \frac{(6 - a)^2}{2}$$

Hay $\frac{3a^3}{4} - 3a < 0$, từ đó suy ra $0 < a < 4$, do vậy $0 < a < b < c$

Khi đó $18 = a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + c^2 = c(a + b + c) = 6c$. Suy ra $c > 3$.

Bây giờ ta chứng minh $c < 4$. Thật vậy, giả sử $c \ge 4$ khi đó ta được $c^2 \ge 4c$, từ đây ta suy ra

$$18 = a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a + b)^2}{2} + c^2 > \frac{(6 - c)^2}{2} + 4c$$

Hay $\frac{c^2}{2} - 2c < 0 \Leftrightarrow 0 < c < 4$. Mâu thuẫn với $c \ge 4$, do vậy $c < 4$

Từ đó ta có $3 < c < 4$

Cũng từ đây ta suy ra $a < b < c < 4$. Ta chứng minh $a < 1$. Thật vậy, giả sử $a \ge 1$

Khi đó ta được $1 \le a < b < c < 4$, suy ra

$$(a - 1)(a - 4) \le 0;\ (b - 1)(b - 4) < 0;\ (c - 1)(c - 4) < 0$$

Hay $$a^2 \le 5a - 4;\ b^2 < 5b - 4;\ c^2 < 5c - 4$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2 + b^2 + c^2 < 5(a + b + c) - 12 = 18$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 18$. Do đó $a < 1$. Vậy $0 < a < 1$.

Cuối cùng ta chứng minh $1 < b < 3$

Thật vậy, vì $a < 1$ và $c < 4$, do đó $b = 6 - a - c > 6 - 1 - 4 = 1$ hay $b > 1$

Ta cần chứng minh $b < 3$.

Giả sử $b \ge 3$, khi đó ta có $(b - 3)(c - 3) \ge 0$

Hay $$bc \ge 3(b + c) - 9 = 3(6 - a) - 9 = 9 - 3a$$

Từ đó suy ra $9 = ab + bc + ca = a\left(b + c\right) + bc \geq a\left(b + c\right) + 9 - 3a$

Hay $$a\left(b + c - 3\right) \leq 0$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai do $3 < c < 4$. Vì vậy giả sử $b \geq 3$ là sai.

Do đó $b < 3$. Vậy ta được $1 < b < 3$.

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

★**Thí dụ 16.** Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9.$$

Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó, tồn tại hai số bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử trong 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a_1 < a_2 < \ldots < a_{25}$. Khi đó ta có

$$a_1 \geq 1,\ \ a_2 \geq 2,\ \ldots,\ a_{25} \geq 25$$

Suy ra ta được $$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{25}}$$

Mặt khác ta chứng minh được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{25}} &= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{2}{2\sqrt{25}} \\
&< 1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{25} + \sqrt{24}}\right) \\
&= 1 + 2\left(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots\ldots + \sqrt{25} - \sqrt{24}\right) \\
&= 1 + 2\left(\sqrt{25} - 1\right) = 9
\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < 9$$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xẩy ra hay bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 17.** Cho a, b, c, d là bốn số thực dương bất kì. Chứng minh rằng ba bất đẳng thức sau không thể cùng xảy ra:

$$a + b < c + d \qquad (1)$$
$$(a + b)(c + d) < ab + cd \qquad (2)$$
$$(a + b)cd < (c + d)ab \qquad (3)$$

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn cả ba bất đẳng thức.

Từ bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức (2) ta có

$$(a + b)^2 < (a + b)(c + d) < ab + cd$$
$$\Leftrightarrow cd > (a + b)^2 - ab = (a - b)^2 + 3ab \ge 3ab$$
$$\Rightarrow cd > 3ab \qquad (4)$$

Mặt khác ta lại có

$$(a + b)cd < (c + d)ab$$
$$\Rightarrow (a + b)^2 cd < (c + d)(a + b)ab < (ab + cd)ab$$
$$\Rightarrow ab(ab + cd) > (a + b)^2 cd \ge 4ab.cd$$
$$\Rightarrow ab(ab + cd) > 4ab.cd$$
$$\Rightarrow ab > 3cd \qquad (5)$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (4) và (5) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xẩy ra, tức là bài toán được chứng minh.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) *Cho* $a + b = 2cd$ *. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là đúng:* $c^2 \ge a;\ d^2 \ge b$

2) *Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là đúng:* $a^2 + b^2 \ge 2bc\ ; b^2 + c^2 \ge 2ca\ ;\ c^2 + a^2 \ge 2ab.$

3) *Cho* $abc \ne 0$*. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm:* $ax^2 + 2bx + c = 0; bx^2 + 2cx + a = 0; cx^2 + 2ax + b = 0$

4) *Chứng minh rằng trong ba bất đẳng thức sau đây, có ít nhất một bất đẳng thức đúng:* $a^2+b^2>\dfrac{(b+c)^2}{2}; c^2+b^2>\dfrac{(a+c)^2}{2}; a^2+c^2>\dfrac{(b+a)^2}{2}$

5) *Chứng minh rằng không có 3 số dương a, b, c nào thoả mãn cả ba bất đẳng thức sau :* $a+\dfrac{1}{b}<2$; $b+\dfrac{1}{c}<2$; $c+\dfrac{1}{a}<2$

6) *Cho 2015 số tự nhiên* $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ *khác 0 thoả mãn điều kiện:*

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{2015}}}\ge 89$$

Chứng minh rằng trong 2015 số tự nhiên đó luôn tồn tại hai số bằng nhau.

7) *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $abc=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt{4+5a}}+\frac{1}{\sqrt{4+5b}}+\frac{1}{\sqrt{4+5c}}\le 1.$$

8) *Cho x, y là các số thực thỏa mãn* $y\ge 0$ *và* $y(y+1)\le (x+1)^2$.

Chứng minh rằng $y(y-1)\le x^2$.

9) *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn* $x+y+z\ge 5$. *Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các bất đẳng thức sau đúng :*

$2x+3y+6z\ge 14,\quad 2y+3z+6x\ge 14,\quad 2z+3x+6y\ge 14.$

10) *Cho* $x\ge 2, y\ge 3, z\ge 4$ *và* $x^2+y^2+z^2=38$. *Chứng minh :* $x+y+z\ge 10$.

11) *Cho* $a,b,c,d\in(0,1)$. *Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau sai :*

$$2a(1-b)>1,\quad 3b(1-c)>2,\quad 8c(1-d)>1,\quad 32d(1-a)>3.$$

12) *Cho* $a\ge 3, b\ge 4$ *và* $a^2+b^2=34$.. *Chứng minh :* $a+b\ge 8$.

13) *Cho các số nguyên x, y. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau sai :*

$$\frac{1}{xy}\ge\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right),\ \frac{1}{x(x+y)}\ge\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right].$$

CHỦ ĐỀ 4 PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \ (*) \quad (a \neq 0)$. Ta có biệt thức

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

1) *Điều kiện có nghiệm của tam thức bậc hai :*

- Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

2) *Hệ thức Viet :* Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Đặt $S = x_1 + x_2, P = x_1.x_2$ thì ta có bất đẳng thức : $S^2 \geq 4P$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 3x - 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 + 3x - 1 - A = 0 \qquad (1)$

Để phương trình (1) có nghiệm thì: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4(-1 - A) \geq 0 \Leftrightarrow 13 + 4A \geq 0 \Leftrightarrow A \geq -\dfrac{13}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\Delta = 0$ hay $x = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-\dfrac{13}{4}$ khi $x = -\dfrac{3}{2}$.

★**Thí dụ 2.** Cho *x, y* thỏa mãn: $x^2 + y^2 = x + 2 \qquad (6)$

Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = x + 2y$.

Hướng dẫn giải

Ta có $P = x + 2y \Rightarrow x = P - 2y$. thay vào (6) ta được:

$$(P-2y)^2 + y^2 = (P-2y) + 2 \Leftrightarrow 5y^2 + 2(1-2P) + P^2 - P - 2 = 0 \qquad (7)$$

Để phương trình (7) có nghiệm thì:

$$\Delta' = (1-2P)^2 - 5(P^2 - P - 2) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow P^2 - P - 11 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \le P \le \frac{1+3\sqrt{5}}{2}.$$

Ta có:

+) $P = \frac{1-3\sqrt{5}}{2}$ khi $y = \frac{2a-1}{5} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}, x = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}.$

+) $P = \frac{1+3\sqrt{5}}{2}$ khi $y = \frac{2a-1}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}, x = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}.$

Vậy $\min P = \frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \max P = \frac{1+3\sqrt{5}}{2}.$

★**Thí dụ 3.** Tìm cặp số (x, y) sao cho y nhỏ nhất thỏa mãn : $x^2 + 5y^2 + 2y + 4xy - 3 = 0$

(Trích đề chuyên ngoại ngữ, ĐHNN Hà Nội 2004 -2005)

Hướng dẫn giải

Viết lại điều kiện dưới dạng: $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2y - 3 = 0 \qquad (1)$

Vì x, y thỏa mãn (1) nên phương trình (1) có nghiệm x hay

$\Delta'_x \ge 0 \Leftrightarrow 4y^2 - (5y^2 + 2y - 3) \ge 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 3 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le y \le 1.$

$y = -3$ khi và chỉ khi $x = -2y = 6.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là -3 khi $x = 6.$

★**Thí dụ 4.** Tìm số thực *x, y, z* thỏa mãn: $x + y + z = 1 \;\; (1)$ và $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4 \;\; (2)$ sao cho *x* đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Từ (1) suy ra $z = 1 - x - y$, thay vào biến đổi ta được: $5y^2 + 6(x-1)y + 4x^2 - 6x - 1 = 0 \quad (3)$

Để phương trình (3) có nghiệm thì:

$\Delta' = 9(x-1)^2 - 20x^2 + 30x + 5 = -11x^2 + 12x + 14 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{190}}{11} \le x \le \frac{6+\sqrt{190}}{11}.$

Vì *x* đạt giá trị lớn nhất nên $x = \frac{6+\sqrt{190}}{11} \Rightarrow y = \frac{15-3\sqrt{190}}{55}, z = \frac{10-2\sqrt{190}}{55}.$

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=9xy+10yz+11zx$.

Hướng dẫn giải

Thay $z=1-x-y$ vào P ta có: $P=9xy+z(10y+11x)=9xy+(1-x-y)(10y+11x)$ $=-11x^2+(11-12y)x-10y^2+10y$ hay $11x^2+(12y-11)x+10y^2-10y+P=0$. Để phương trình có nghiệm điều kiện là $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow (12y-11)^2-4.11\left(10y^2-10y+P\right)\ge 0$ hay $-296y^2+176y+121-44P\ge 0 \Leftrightarrow P\le -\frac{74}{11}\left(-y^2+\frac{22}{37}y-\frac{121}{296}\right)=-\frac{74}{11}\left(y-\frac{11}{27}\right)^2+\frac{495}{148}\le\frac{495}{148}$. Do đó GTLN của P là $\frac{495}{148}$ đạt được khi $x=\frac{25}{74}; y=\frac{11}{37}; z=\frac{27}{74}$.

★**Thí dụ 6.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2+1}{x^2-x+1}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, do đó P luôn xác định với mọi x.

$P=\frac{x^2+1}{x^2-x+1} \Leftrightarrow (P-1)x^2-Px+P-1=0 \qquad (*)$

- Với $P=1$ thì $x=0$.
- Với $P\ne 1$, ta có: $\Delta=P^2-4(P-1)^2=-3P^2+8P-4$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow P\ge\frac{2}{3}$ (1) hoặc $P\le 2$ (2)

Dấu bằng ở (1) xảy ra khi $x=-1$.

Dấu bằng ở (2) xảy ra khi $x=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$ khi $x=-1.$, giá trị lớn nhất của P là 2 khi $x=1$.

★**Thí dụ 7.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

Hướng dẫn giải

Với y = 0 thì $P=1$.

Với $y\ne 0$ ta có $P=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}=\frac{a^2-a+1}{a^2+a+1}$ (đặt $\frac{x}{y}=a$)

Ta có $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, do đó P luôn xác định với mọi a.

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

$$P=\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}\Leftrightarrow Pa^2-Pa+P=a^2+a+1\Leftrightarrow (P-1)a^2-(P+1)x+(P-1)=0 \qquad (*)$$

- Với $P=1$ thì $a=0$.
- Với $P\neq 1$, ta có: $\Delta=(P+1)^2-4(P-1)^2=-3P^2+10P-3$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow 3P^2-10P+3\leq 0\Leftrightarrow (3P-1)(P-3)\leq 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq P\leq 3\ (a\neq 1)$$

Với $P=\frac{1}{3}$ thì $a=1\Leftrightarrow x=y\neq 0$

Với $P=3$ thì $a=-1\Leftrightarrow x=-y\neq 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$ khi $x=y\neq 0$, giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x=-y\neq 0$

★**Thí dụ 8.** Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.

Hướng dẫn giải

$$P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}=\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}.$$

Nếu y = 0 thì $x^2=1$. Suy ra P = 2.

Xét $y\neq 0$. Ta có:

$$P=\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}=\frac{2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+6\left(\frac{x}{y}\right)\right]}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+3}=\frac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}\qquad \left(t=\frac{x}{y}\right)$$

$\Leftrightarrow (P-2)t^2+2(P-6)t+3P=0\quad (1)$.

Với P = 2, phương trình (1) có nghiệm $t=\frac{3}{4}$.

Với $P\neq 2$, phương trình (1) có nghiệm nghi và chỉ khi

$\Delta'=-2P^2-6P+36\geq 0\Leftrightarrow -6\leq P\leq 3$.

$P=3$ khi $x=\frac{3}{\sqrt{10}},y=\frac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc $x=-\frac{3}{\sqrt{10}},y=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

$P=-6$ khi $x=\frac{3}{\sqrt{10}},y=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x=-\frac{3}{\sqrt{13}},y=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, giá trị nhỏ nhất của P là -6.

★**Thí dụ 9.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{3y+1}$ với x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2y^2+2y+1=0.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^2y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{-x^2y^2-1}{2}.$

$$P=\frac{2xy}{3\left(-x^2y^2-1\right)+2}=\frac{2xy}{-3x^2y^2-1} \Leftrightarrow 3P.\left(xy\right)^2+2xy+P=0 \qquad (1)$$

- Trường hợp 1: $P=0$ thì $xy=0$.
- Trường hợp 2: $P\neq 0$ ta có (1) là phương trình bậc hai với ẩn là *xy*, do đó để phương

trình có nghiệm thì: $\Delta=4-12P^2\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}\leq P\leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Vậy giá trị lớn nhất của *P* là $\frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=-\frac{2}{3}.$

Giá trị nhỏ nhất của *P* là $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, y=-\frac{2}{3}.$

★**Thí dụ 10.** Tìm a, b để biểu thức biểu thức $P=\frac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị của biểu thức $P=\frac{ax+b}{x^2+1}$, khi đó phương trình sau phải có nghiệm x:

$$m=\frac{ax+b}{x^2+1} \Leftrightarrow mx^2-ax+m-b=0. \qquad (*)$$

Vì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất đều khác 0 nên $m\neq 0$. Do đó phương trình (*) là phương trình bậc hai có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta\geq 0$, hay

$$a^2-4m\left(m-b\right)\geq 0 \Leftrightarrow 4m^2-4bm-a^2\leq 0 \qquad (**)$$

Gọi $m_1, m_2\left(m_1<m_2\right)$ là hai nghiệm của phương trình

$4m^2-4bm-a^2=0. \qquad (***)$

Khi đó (**) có nghiệm là $m_1\leq m\leq m_2$ nên P đạt giá trị nhỏ nhất tại m_1, đạt giá trị lớn nhất tại m_2. Do đó yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (***) có hai nghiệm là -1 và 4, tức là

$$\begin{cases}4+4b-a^2=0\\64-16b-a^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3\\a^2=16\end{cases} \Leftrightarrow a=\pm 4, b=3.$$

Vậy giá trị cần tìm của a, b là $a=4, b=3$ hoặc $a=-4, b=3.$

★**Thí dụ 11.** Tìm *m* để giá trị lớn nhất biểu thức biểu thức $y=\frac{2x+m}{x^2+1}$ bằng 2.

Hướng dẫn giải

Gọi a là một giá trị của biểu thức $y = \frac{2x+m}{x^2+1}$, khi đó phương trình sau phải có nghiệm x

$$a = \frac{2x+m}{x^2+1} \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a - m = 0 \qquad (*)$$

+) Rõ ràng a = 0 là một giá trị của biểu thức.
+) Nếu $a \neq 0$ thì (*) là tam thức bậc 2 có nghiệm khi và chỉ khi:

$1 - a(a-m) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ma - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2} \leq a \leq \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$.

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$ đạt tại $a = \frac{m}{2}$, nên yêu cầu của bài toán trở thành $\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4} = 4 - m$.

Do $\sqrt{m^2+4} > 0$ nên $4 - m > 0$. Bình phương hai vế ta được

$m^2 + 4 = \left(4 - m^2\right) \Leftrightarrow m^2 + 4 = 16 - 8m + m^2 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là 2 khi $m = \frac{3}{2}$.

★**Thí dụ 12.** Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right)}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$, với mọi m.
Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.
Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = m - 1$
Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2(m-1) = m^2 - 2m + 2$.

Suy ra $A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right)} = \frac{2m+1}{m^2+2}$.

Gọi a là một giá trị của biểu thức $\frac{2m+1}{m^2+2}$, khi đó phương trình sau phải có nghiệm m:

$$a = \frac{2m+1}{m^2+2} \Leftrightarrow am^2 - 2m + 2a - 1 = 0 \qquad (*)$$

Nếu a = 0 thì $m = -\frac{1}{2}$.

Nếu $a \neq 0$ để phương trình (*) có nghiệm thì:

$\Delta' = (-1)^2 - a(2a-1) \ge 0 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 \le 0 \Leftrightarrow (a-1)(2a+1) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le a \le 1.$

Nếu $a = -\frac{1}{2}$ thì $\frac{2m+1}{m^2+2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$

Nếu $a = 1$ thì $\frac{2m+1}{m^2+2} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy GTLN của A bằng 1 khi $m = 1$ và GTNN của A bằng $-\frac{1}{2}$ khi $m = -2$.

★**Thí dụ 13.** Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0;3]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{18a^2 - 9ab + b^2}{9a^2 - 3ab + ac}$

Hướng dẫn giải

Vì phương trình bậc 2 có 2 nghiệm nên $a \ne 0$. Biểu thức Q có dạng đẳng cấp bậc 2 ta chia cả tử và mẫu của Q cho a^2 thì $Q = \dfrac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Vậy : $Q = \dfrac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2}$

* Ta GTLN của Q: Ta đánh giá $(x_1 + x_2)^2$ qua x_1x_2 với điều kiện $x_1, x_2 \in [0;3]$.

Giả sử $0 \le x_1 \le x_2 \le 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \le x_1x_2 \\ x_2^2 \le 9 \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \le 9 + 3x_1x_2$

$\Rightarrow Q \le \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + 3x_1x_2 + 9}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} = 3.$

Ta cũng có thể đánh giá theo cách:

$0 \le x_1; x_2 \le 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1(x_1 - 3) \le 0 \\ x_2(x_2 - 3) \le 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 3(x_1 + x_2) \\ x_1x_2 + 9 \ge 3(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \le x_1x_2 + 9$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \le 3x_1x_2 + 9$. Suy ra $Q = \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} \le \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + 9 + 3x_1x_2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} = 3.$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{array}\right.$ hay $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 6 \\ \dfrac{c}{a} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 3 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \end{cases}$

Ta có $Q - 2 = \dfrac{3(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} \ge 0 \Rightarrow Q \ge 2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$.

Vậy GTLN của Q là 3 và GTNN của Q là 2.

★**Thí dụ 14.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x + 16y + 25$

****Phân tích***: Ta có thể giải bài toán như sau:

$$A = \frac{1}{2}(x + 2y + 5)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 3 \ge 0, \forall x, y \in R$$

Khi đó $\min A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$. Tuy nhiên ta không phải dễ dàng mà phân tích được biểu thức A như trên. Sau đây là một cách giải bài toán dựa vào định lí về dấu tam thức bậc hai và sự tồn tại nghiệm của nó.

Hướng dẫn giải

A là một giá trị của biểu thức $\Leftrightarrow \exists x, y \in R: x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x + 16y + 25 = A$

$\Leftrightarrow \exists y \in R, pt: x^2 + 2(y + 2)x + 3y^2 + 16y + 25 - A = 0$ có nghiệm x.

$\Leftrightarrow \exists y \in R: \quad \Delta_x' = (y + 2)^2 - 3y^2 - 16y - 25 + A \ge 0$

Khi đó: $A \ge 2y^2 + 12y + 21 = 2(y + 3)^2 + 3 \ge 3$

Vậy $\min A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Cách khác:

$$A = x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x + 16y + 25 = x^2 + 2(y + 2)x + (y + 2)^2 + \left[3y^2 + 16y + 25 - (y + 2)^2\right]$$

$$= (x + y + 2)^2 + (2y^2 + 12y + 21) = (x + y + 2)^2 + 2(y^2 + 6y + 9) + 3$$

$$= (x + y + 2)^2 + 2(y + 3)^2 + 3 \ge 3$$

Khi đó $\min A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

★**Thí dụ 15.** Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy vai trò của a,b,c là như nhau nên ta dự đoán dấu biểu thức P đạt giá trị lớn nhất khi $a=b=c$.

Lại do a và b trong $5a^2+2ab+2b^2$ là không đối xứng nên để khử căn thức chúng ta nghĩ tới việc đánh giá: $5a^2+2ab+2b^2\ge(\alpha a+\beta b)^2$ tức là phải phân tích $5a^2+2ab+2b^2=(\alpha a+\beta b)^2+m(a-b)^2$ $(*)$ để làm được điều này dựa trên phương pháp sử dụng ***tam thức bậc 2*** ta làm như sau:

$$5a^2+2ab+2b^2=5a^2+2ab+2b^2-m(a-b)^2+m(a-b)^2$$
$$=\left[(5-m)a^2+2(1+m)ab+(2-m)b^2\right]+m(a-b)^2$$

Để phân tích được thành dạng (*) ta cần tìm m sao cho phương trình $(5-m)a^2+2(1+m)ab+(2-m)b^2$ có $\Delta'=0$ tức là

$(1+m)^2-(5-m)(2-m)=0\Leftrightarrow m^2+2m+1-m^2+7m-10=0\Leftrightarrow 9m-9=0\Leftrightarrow m=1.$

Do đó ta có:

$$5a^2+2ab+2b^2=5a^2+2ab+2b^2-(a-b)^2+(a-b)^2$$
$$=(4a^2+4ab+b^2)+(a-b)^2=(2a+b)^2+(a-b)^2\ge(2a+b)^2$$

Do đó: $\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{(2a+b)^2+(a-b)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{(2a+b)^2}}=\frac{1}{2a+b}$

Làm tương tự ta được: $\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\le\frac{1}{2b+c}$; $\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\frac{1}{2c+a}$

Do đó: $P\le\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}$.

Với x, y, z là các số thực dương, ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM (Cauchy) ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 3\sqrt[3]{xyz}.\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=9\Rightarrow\frac{1}{x+y+z}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\quad(*)$$

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{2a+b} = \frac{1}{a+a+b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Tương tự: $\frac{1}{2b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$; $\frac{1}{2c+a} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$

Cộng lại theo vế ta được:

$$P \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{1}{3}\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\max P = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}.$

★**Thí dụ 16.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{2x+y+1}{x^2+y^2+3}$

Hướng dẫn giải

B xác định $\forall x; y \in R$

B là một giá trị của biểu thức $\Leftrightarrow$ tồn tại x,y thỏa mãn $B = \frac{2x+y+1}{x^2+y^2+3}$

$\Leftrightarrow \exists y : Bx^2 - 2x + By^2 - y + 3B - 1 = 0$ (2) có nghiệm x

+ Nếu $B = 0$ thì (2) thành $-2x - y - 1 = 0$ luôn có nghiệm x, $y \in R, y = -1-2x$

+ Nếu $B \ne 0$ (2) có nghiệm x $\Leftrightarrow \exists y : \Delta' = 1 - B^2y^2 + By - 3B^2 + B \ge 0$

$\Leftrightarrow -B^2y^2 + By - 3B^2 + B + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow -B^2\left(y^2 - \frac{1}{B}y + \frac{1}{4B^2}\right) - 3\left(B^2 - \frac{1}{3}B + \frac{1}{36}\right) + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \ge 0$

$\Leftrightarrow 3\left(B - \frac{1}{6}\right)^2 \le \frac{4}{3} - B^2\left(y - \frac{1}{2B}\right)^2 \le \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le B - \frac{1}{6} \le \frac{2}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le B \le \frac{5}{6}$

Vậy $\min B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}$; $\max A = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5} \\ x = \frac{6}{5} \end{cases}$

★**Thí dụ 17.** Chứng minh rằng nếu các số a,b,c thỏa mãn: $\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=8 \end{cases}$ thì:

$$1 \le a \le \frac{7}{3}; 1 \le b \le \frac{7}{3}; 1 \le c \le \frac{7}{3}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=5-a \\ bc=8-a(b+c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=5-a \\ bc=8-a(5-a) \end{cases}$

Các số b,c là nghiệm của phương trình: $x^2-(5-a)x+(a^2-5a+8)=0$

Để phương trình có nghiệm ta phải có $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow (5-a)^2 - 4(a^2-5a+8) \ge 0$

$$\Leftrightarrow a^2-10a+25-4a^2+20a-32 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -3a^2+10a-7 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(7-3a) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \le a \le \frac{7}{3}$$

Chứng minh tương tự ta có: $1 \le b \le \frac{7}{3}; 1 \le c \le \frac{7}{3}$.

★**Thí dụ 18.** Biết rằng các số x,y thỏa mãn điều kiện $x+y=2$. Hãy tìm GTNN của $F = x^3+y^3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ S^3-3SP=F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=\frac{8-F}{6} \end{cases}$

Vậy x,y là nghiệm của phương trình : $t^2-2t+\frac{8-F}{6}=0$ (*)

x,y tồn tại $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm tức là $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 1-\frac{8-F}{6} \ge 0 \Leftrightarrow F \ge 2$

$\Rightarrow$ Min F $=2 \Leftrightarrow x=y=1$

★**Thí dụ 19.** Cho các số $x,y,z \ne 0$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x+y+z=xyz \\ x^2=yz \end{cases}$

Chứng minh rằng $x^3 \ge 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} x+y+z=xyz \\ x^2=yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=xyz-x=x^3-x \\ yz=x^2 \end{cases}$

Vậy các số y,z là các nghiệm của phương trình: $t^2+\left(x^3-x\right)t+x^2=0$ (*)

Do tồn tại x,y,z thỏa mãn điều kiện đầu bài nên phương trình (*) phải có nghiệm

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left(x^3-x\right)^2-4x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\left[\left(1-x^2\right)^2-4\right]\ge 0 \Leftrightarrow \left(1-x^2\right)^2\ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x^2\le -2 \\ 1-x^2\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2\ge 3.$$

★**Thí dụ 20.** Giả sử phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\left(a\ne 0\right)$ có hai nghiệm khác nhau x_1,x_2. Chứng minh rằng: $x_1x_2\ge \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$.

Hướng dẫn giải

Vì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad \left(a\ne 0\right)$

nên ta có:

$$\begin{cases} a{x_1}^3+b{x_1}^2+cx_1+d=0 \\ a{x_2}^3+b{x_2}^2+cx_2+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\left({x_1}^3-{x_2}^3\right)+b\left({x_1}^2-{x_2}^2\right)+c\left(x_1-x_2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x_1+x_2\right)^2+b\left(x_1+x_2\right)+c-ax_1x_2=0 \quad \left(do \quad x_1\ne x_2\right)$$

Dễ thấy x_1+x_2 là nghiệm của phương trình $aX^2+bX+c-ax_1x_2=0$

Để phương trình $aX^2+bX+c-ax_1x_2=0$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Delta=b^2-4a\left(c-ax_1x_2\right)\ge 0 \Leftrightarrow 4a^2x_1x_2\ge 4ac-b^2 \Leftrightarrow x_1x_2\ge \frac{4ac-b^2}{4a^2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y=x^2+5x-3$
2) *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất x, y thỏa mãn* $9x^2+6y^2-12xy-24x+14y+12=0.$
3) *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $B=x+y$ *với x, y là các số thực thỏa mãn* $3x^2+y^2+2xy+4=7x+3y.$
4) *Xét các số thực dương x, y thỏa mãn* $x^2y=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=x\sqrt{x^2+y^2}+x^2.$
5) *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn* $x+y+z=6$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:* $M=xy+2yz+3zx.$
6) *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $\dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$

7) Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của $H = 6xy + 8y^2$ *, biết các số x, y thỏa mãn* $x^2 + y^2 = 1$.

8) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A = \dfrac{4xy - 3y^2}{x^2 + y^2}$

9) Cho các số thực x, y thỏa mãn $9x^2 + 6y^2 - 12xy - 24x + 14y + 12 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của x, y.

10) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của a.

11) Tìm m, n để biểu thức $P = \dfrac{20x^2 + mx + n}{3x^2 + 2x + 1}$ *đạt đượcgiá trị lớn nhất bằng 7, giá trị nhỏ nhất bằng* $\dfrac{5}{2}$.

12) Cho phương trình bậc hai $x_2 - 2(m+2)x + 1 + m^2 = 0$ *,* m *là tham số.*

Gọi hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2*. Tính giá trị của biểu thức* P *sau theo* m *:*

$P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$*. Từ đó tìm các giá trị của* m *để* P *đạt giá trị lớn nhất và tìm các giá trị của* m *để* P *đạt giá trị nhỏ nhất.*

13) Cho các số a, b, c *thỏa mãn* $a > 0, bc = 4a^2, 2a + b + c = abc$*. Chứng minh rằng* $a \geq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\left(x^2 - y^2 + 2\right)^2 + 4x^2y^2 + 6x^2 - y^2 = 0$

Hãy tìm tất cả các cặp nghiệm (x ;y) sao cho $A = x^2 + y^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

15) Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $3x^2 + xy + 2y^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + 2xy - y^2$. .

16) Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ *(* $a \neq 0$ *) có hai nghiệm* x_1, x_2 *thoả mãn điều kiện:* $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$*.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:* $Q = \dfrac{2a^2 - 3ab + b^2}{2a^2 - ab + ac}$

CHỦ ĐỀ 5

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TỶ SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

+ Với các số thực dương a, b bất kì, ta luôn có $a \ge b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$

+ Với các số thực dương a, b, c, d bất kì, ta có:

- Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$
- Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$
- Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Lưu ý: Trước khi áp dụng các bất đẳng thức về tỉ số ta phải chứng minh.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Hướng dẫn giải

1) Vì a, b, c > 0 nên a + b + c > a + b > 0. $\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$.

Tương tự $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}$ và $\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

2) Trước hết ta chứng minh với x, y, k là các số dương và $\frac{x}{y} < 1$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}$.

Thật vậy xét hiệu $\frac{x}{y} - \frac{x+k}{y+k} = \frac{k(x-y)}{y(y+k)} < 0$ do y(y + k) > 0 và x – y < 0 (do giả thiết x < y).

Do a < b + c ; b < c + a ; c < a + b nên ta có :

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a}; \quad \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b}; \quad \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Do đó: $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c, d là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

Hướng dẫn giải

1) Vì a, b, c > 0 nên $a+b+c+d>a+b+c>0 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}$.

Tương tự $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}$; $\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}$;$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}$..

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}>\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1$$

2) Trước hết ta chứng minh với x, y, k là các số dương và $\frac{x}{y}<1$ thì $\frac{x}{y}<\frac{x+k}{y+k}$.

Thật vậy xét hiệu $\frac{x}{y}-\frac{x+k}{y+k}=\frac{k(x-y)}{y(y+k)}<0$ do $y(y+k)>0$ và $x-y<0$ (do giả thiết $x<y$).

Do $a<a+b+c$; $b<b+c+d$; $c<c+d+a$; $d<d+a+b$ nên ta có :

$$\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d};\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{b+c+d+a};\frac{c}{c+d+a}<\frac{c+b}{c+d+a+b};\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{d+a+b+c}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<\frac{2\left(a+b+c+d\right)}{a+b+c+d}=2$$

Do đó: $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

★**Thí dụ 3.** Cho a, b là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{a+2b}<1$$

Hướng dẫn giải

Do a, b là các số dương nên ta có $2a+b>a+b$; $a+2b>a+b$

Từ đó suy ra $\frac{a}{2a+b}<\frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{a+2b}<\frac{b}{a+b}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{a+2b}<\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 4.** Cho ba số dương a , b ,c .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $a^3+b^3-ab\left(a+b\right)=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab\left(a+b\right)$

$$=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2-ab\right)=\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$$

$\Rightarrow a^3+b^3\ge ab\left(a+b\right)$

$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab\left(a+b\right)+abc\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab\left(a+b+c\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab\left(a+b+c\right)}=\frac{c}{abc\left(a+b+c\right)}$

Chứng minh tương tự ta có :

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{1}{bc(a+b+c)}=\frac{a}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{ac(a+b+c)}=\frac{b}{abc(a+b+c)}$$

Cộng từng vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le$$

$$\frac{c}{abc(a+b+c)}+\frac{a}{abc(a+b+c)}+\frac{b}{abc(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$$

Dấu đẳng thức sảy ra khi và chỉ khi a = b = c

★**Thí dụ 5.** Cho ba số dương $0\le a\le b\le c\le 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\le 2$

Hướng dẫn giải

Vì $0 \le a \le b \le c \le 1 => \begin{cases} a-1 \le 0 \\ b-1 \le 0 \end{cases} => (a-1)(b-1) \ge 0 \;\; => ab - a - b + 1 \ge 0$

$$=> ab+1 \ge a+b => \frac{1}{ab+1} \le \frac{1}{a+b} \;\; => \; \frac{c}{ab+1} \le \frac{c}{a+b}, (c \ge 0)$$

Mà $\frac{c}{a+b} \le \frac{2c}{a+b+c}, (c \ge 0) => \frac{c}{ab+1} \le \frac{2c}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{b}{ac+1} \le \frac{2b}{a+b+c}$ và $\frac{a}{bc+1} \le \frac{2a}{a+b+c}$

Cộng theo vế ta được: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \le \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn *a = b = 1, c = 0.*

★**Thí dụ 6.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

Vì a là số dương nên theo tính chất của tỉ số ta được $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$

Do đó ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}; \; \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) *Cho a, b, c, d > 0, Chứng minh rằng:* $2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$

2) *Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. *Chứng minh rằng:* $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

3) *Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}\right) < \frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

CHỦ ĐỀ **6**

PHƯƠNG PHÁP LÀM TRỘI, LÀM GIẢM

A. Kiến thức cần nhớ

Giả sử cần chứng minh $A \le B$, khi đó ta cần làm trội biểu thức A thành $A \le M$ rồi chứng minh $M \le B$. Cũng có thể làm giảm B thành $M \le B$ rồi chứng minh $A \le M$.

Phương pháp làm trội, làm giảm thường được áp dụng cho bất đẳng thức về tổng hoặc tích của một dãy số. Khi đó dùng các tính chất bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

+ Một số tổng phép biến đổi thường áp dụng

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};\ \frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$$

$$\frac{2a}{n(n+a)(n+2a)} = \frac{1}{n(n+a)} - \frac{1}{(n+a)(n+2a)}$$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$

Hướng dẫn giải

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + ... + \frac{1}{n.n}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1).n}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$A < \frac{1}{1} - \frac{1}{n} < 1$$

★**Thí dụ 2.** Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2^2-1}=\frac{1}{1.3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{4^2-1}=\frac{1}{3.5}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}$

....

$\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{2}$

Cộng từng vế n bất đẳng thức, ta có :

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}<\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2n+1}$

Mà $\frac{n}{2n+1}<\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{2}$.

★**Thí dụ 3.** Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+\cdots+\frac{n^2-1}{n^2}>n-2 \quad (\forall n\ge 2)$

Hướng dẫn giải

Đặt $A=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+\cdots+\frac{n^2-1}{n^2}$

$=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{16}\right)+...+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=(n-1)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$

Do đó : $A>n-2\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1$

Thật vậy :

$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

$\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}<1$

Ta suy ra được điều phải chứng minh.

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

★**Thí dụ 4.** Chứng minh rằng: $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{1}{1.2.3.....n}<2.$

Hướng dẫn giải

Bắt đầu từ phân số thư tư, giữ nguyên tử số còn giảm mẫu số thì phân số tăng lên

$$\frac{1}{1.2.3.4}<\frac{1}{3.4},\frac{1}{1.2.3.4.5}<\frac{1}{4.5},...;\frac{1}{1.2.3....n}<\frac{1}{(n-1)n}$$

Vậy ta có :

$$VT=1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{1}{1.2.3.....n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n-1).n}$$

Nhận xét :

$$1+\left(\frac{1}{1.2}\right)+\left(\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}\right)+...+\left(\frac{1}{(n-1).n}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$$

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng: $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}<2.$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có:

$$\frac{1}{2!}=\frac{2-1}{2!}=1-\frac{1}{2!}$$

$$\frac{2}{3!}=\frac{3-1}{3!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

....

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

Cộng từng vế, ta có :

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}<1+1-\frac{1}{(n+1)!}<2.$$

Ta dược điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 6.** Chứng minh rằng : $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}.$

Hướng dẫn giải

Ta có với $n\geq k\geq 1\Rightarrow\sqrt{n}\geq\sqrt{k}\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}\geq 1$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\geq\underbrace{1+1+1+...+1}_{n}=n$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq\sqrt{n}.\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

★**Thí dụ 7.** Chứng minh bất đẳng thức sau với $n \in N, n \geq 2$.

$$2\sqrt{n}-3<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $A=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Chứng minh $A>2\sqrt{n}-3$ bằng cách làm giảm mỗi số hạng của A:

$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ với mọi $k \in N^*$

Do đó $A>2\left[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\ldots+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]$

$=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2})=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}>2\sqrt{n+1}-3>2\sqrt{n}-3$

b) Chứng minh $A<2\sqrt{n}-2$ bằng cách làm trội mỗi số hạng của A:

$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$ với mọi $k \in N^*$.

Do đó $A<2\left[(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\ldots+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})\right]$

$=2(\sqrt{n}-\sqrt{1})=2\sqrt{n}-2$.

★**Thí dụ 8.** a) Cho k là số nguyên dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2010\sqrt{2009}}<\frac{88}{45}$

(Trích đề chuyên Thái Bình năm 2009-2010)

Hướng dẫn giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 2k+1-2\sqrt{k(k+1)}>0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2>0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi k nguyên dương.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Áp dụng kết quả câu a ta có

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

$$VT=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2010\sqrt{2009}}$$
$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{\sqrt{2009}}-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right)<2\left(1-\frac{1}{45}\right)=\frac{88}{45}=VP$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

★**Thí dụ 9.** Với số tự nhiên $n \geq 3$. Chúng minh rằng $S_n < \frac{1}{2}$.

Với $S_n=\frac{1}{3\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\ldots+\frac{1}{\left(2n+1\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Định năm 2009-2010)

Hướng dẫn giải

Với $n \geq 3$, ta có

$$\frac{1}{\left(2n+1\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}}$$
$$<\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}.\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Do đó ta được

$$S_n<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 10.** Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2011-2012)

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}>\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}};\ldots\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Suy ra

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Hay $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{81}-\sqrt{80}$

Nên ta được $\quad \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 11.** Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{43}{44}<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}}<\frac{44}{45}$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Hùng Vương năm 2001-2002)

Hướng dẫn giải

Đặt $S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}}$

Ta có:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},\ \forall k\ge 1.$$

Cho k = 1, 2, 3, …., n rồi cộng theo vế ta được:

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Do đó $S_{2001}=1-\frac{1}{\sqrt{2002}}$.

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44}-1<1-\frac{1}{\sqrt{2002}}<\frac{44}{45}\Leftrightarrow\frac{1}{45}<\frac{1}{\sqrt{2002}}<\frac{1}{44}\Leftrightarrow 44<\sqrt{2002}<45\Leftrightarrow 1936<2002<2025.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 12.** Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Hướng dẫn giải

Để giải bài toán này ta cần sử dụng bổ đề sau:

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Với mọi số dương x, y ta có: $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$

Thật vậy:

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+y\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0.$$

vậy bổ đề trên được chứng minh. Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$\left(n+1\right)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}>n\sqrt{n+1}+\left(n+1\right)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{n\sqrt{n+1}+\left(n+1\right)\sqrt{n}}$$

Vì thế:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<$$
$$<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}.$$

Ta có:

$$\frac{1}{\left(k+1\right)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{\left(k+1\right)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{\left(k+1\right)^2k-k^2\left(k+1\right)}=\frac{\left(k+1\right)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k\left(k+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},\ \forall k\ge 1.$$

Cho k = 1, 2, 3, …., n rồi cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 7.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{3n-2}{3n}\cdot\frac{3n+1}{3n+3}<\frac{1}{3\sqrt{n+1}}$$

Hướng dẫn giải

Gọi vế trái của bất đẳng thức là P, ta cần làm trội P thành Q với điều kiện là Q phải dễ thu gọn hơn, điều này có nghĩa là Q phải có các tử và mẫu giống nhau. Để ý rằng các phân số có tử, mẫu hơn kém nhau hai đơn vị, nên ta nghĩ đến bất đẳng thức

$$\frac{n}{n+2}<\frac{n-1}{n}\Leftrightarrow n^2<n^2+n-2\Leftrightarrow n>2.$$

Đặt $P=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{3n-2}{3n}\cdot\frac{3n+1}{3n+3}$, lúc này ta có

$$P=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{3n-2}{3n}\cdot\frac{3n+1}{3n+3}<\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{3n-3}{3n-2}\cdot\frac{3n}{3n+1}=Q$$

Nhận thấy Q không thể thu gọn được hết nên rất khó để có đánh giá tiếp theo. Để ý tiếp ta thấy các tử của biểu thức Q và các mẫu của biểu thức P là $3, 6, 9, \ldots$ và các mẫu của biểu thức Q và các tử của biểu thức P là $4, 7, 10, \ldots$ do đó thì tích PQ có thể thu gọn được. Chú ý là $P^2 < PQ$, do đó ta có thể trình bày lời giải như sau:

$$P^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{3n-2}{3n}\cdot\frac{3n+1}{3n+3}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{3n-2}{3n}\cdot\frac{3n+1}{3n+3}\right)$$
$$< \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{3n-3}{3n-2}\cdot\frac{3n}{3n+1}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{3n-2}{3n}\cdot\frac{3n+1}{3n+3}\right)$$
$$< \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdots\frac{3n-3}{3n-2}\cdot\frac{3n-2}{3n}\cdot\frac{3n}{3n+1}\cdot\frac{3n+1}{3n+3} = \frac{1}{3(3n+3)} = \frac{1}{9(n+1)}$$

Từ đây suy ra $P < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 7.** Chứng minh $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < 2$ (vế trái có 100 dấu căn).

Hướng dẫn giải

Kí hiệu $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $a_1 = \sqrt{2} < 2$

$$a_2 = \sqrt{2+a_1} < \sqrt{2+2} = 2$$

$$a_3 = \sqrt{2+a_2} < \sqrt{2+2} = 2$$

$$\ldots$$

$$a_{100} = \sqrt{2+a_{99}} < \sqrt{2+2} = 2.$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Chứng minh rằng: $S = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \ldots + \frac{3}{n(n+3)} < 1$

2) Chứng minh rằng: $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2000} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1999)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1999}$

3) Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$.

4) Chứng minh với mọi số nguyên dương n*:*

a) $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} < 1;$

b) $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$

5) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$*, ta luôn có:*

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+\left(n+1\right)^2}<\frac{9}{20}$$

6) Cho $a=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1+2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+3}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3+4}+...+\frac{\sqrt{25}-\sqrt{24}}{24+25}$. *Chứng minh rằng* $a<\frac{2}{5}$.

7) Cho $A=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}$ $(n\in N, n\le 2)$.

Chứng minh rằng:

a) $A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; *b*)* $A<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

8) Chứng minh $\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}>\frac{1}{4}$ *(tử có 100 dấu căn, mẫu có 99 dấu căn).*

9) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n+1}<1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}<\frac{2}{3}\left(n+1\right)\sqrt{n}.$$

10) Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $n\ge 2, n\in N$:

$$\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.4^2}+...+\frac{1}{n\left(n+1\right)^2}<\frac{1}{4}.$$

Gợi ý :

$$\frac{1}{k\left(k+1\right)^2}<\frac{k+1-k}{k\left(k+1\right)^2}=\frac{1}{k\left(k+1\right)}-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\left(k+1\right)^2}\right]-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}\right],\forall k\ge 2.$$

CHỦ ĐỀ 7

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A(n) \ge B(n)$ với $n \ge n_0$, $n \in N$, ta tiến hành các bước như sau:

- **Bước 1:** Kiểm tra bất đẳng thức đúng với $n = n_0$
- **Bước 2:** Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k\left(k \ge n_0,\ k \in N\right)$ (gọi là giả thiết quy nạp)
- **Bước 3:** Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$ và kết luận bất đẳng thức đúng với $n \ge n_0$.

Chú ý:

- Thông thường khi chứng minh bất đẳng thức có sự phụ thuộc vào số nguyên dương n, thì ta nên chú ý sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

- Trong phương pháp quy nạp toán học thì bất đẳng thức có được từ bước thứ hai chính là một giả thiết mới được dùng để chứng minh bất đẳng thức trong bước thứ ba. Do đó cần phải khai thác thật hiệu quả giả thiết quy nạp.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Hướng dẫn giải

Với $n = 2$, ta có VT > VP nên bất đẳng thức đúng với $n = 2$

Giả sử bất đẳng thức đúng với : $n = k \ge 2$, tức là :

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}.$$

Cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là :

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}.$$

Thật vậy, xét hiệu số:

$$\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

Vậy với mọi $n\geq 2$, ta có :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

★**Thí dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 2$, ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

Hướng dẫn giải

Với $n=2$, ta có $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}<2-\frac{1}{2}$ (đúng) nên bất đẳng thức đúng với $n=2$

Giả sử bất đẳng thức đúng với : $n=k\geq 2$, tức là :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \qquad (1)$$

Cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1} \qquad (2)$$

Thật vậy, từ (1) ta có: $\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$

$$=2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2}=2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}<2-\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}=2-\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}=2-\frac{1}{n+1}$$

Vậy bài toán đúng với mọi số tự nhiên $n\geq 2$.

★**Thí dụ 3.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 2$, ta có bất đẳng thức:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

Hướng dẫn giải

Với $n=2$, ta có $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ (đúng) nên bất đẳng thức đúng với $n=2$

Giả sử bất đẳng thức đúng với : $n=k\geq 2$, tức là :

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \qquad (1)$$

Cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là :

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1} \qquad (2)$$

Thật vậy, từ (1) ta có: $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$=\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}}>\frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}$$

Vậy bài toán đúng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$.

★**Thí dụ 4.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$, ta có bất đẳng thức:

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Hướng dẫn giải

Với $n=2$, ta có $\frac{4^2}{2+1}=\frac{16}{3}<6=\frac{(2.2)!}{(2!)^2}$ nên bất đẳng thức đúng với $n=2$

Giả sử bất đẳng thức đúng với : $n=k\ge 2$, tức là :

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad (1)$$

Cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là :

$$\frac{4^{n+1}}{n+2}<\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}. \qquad (2)$$

Thật vậy, ta viết vế trái của (2) có dạng:

$$\frac{4^{n+1}}{n+2}=\frac{4^n}{n+1}.\frac{4(n+1)}{n+2}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{4(n+1)}{n+2}=\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}.\frac{(n+1)^2.4(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(n+2)}=\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}.\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)}$$

Mặt khác:

$$0<\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)}=\frac{2n^2+4n+2}{2n^2+5n+2}=\frac{(2n^2+5n+2)-n}{2n^2+5n+2}=1-\frac{n}{2n^2+5n+2}<1,\ \forall n=1,2,...$$

Do đó: $\frac{4^{n+1}}{n+2}<\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}.\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)}<\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}. \qquad (2)$

Vậy bài toán đúng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$.

★**Thí dụ 5.** Chứng minh với mọi số tự nhiên n khác 0, ta có bất đẳng thức :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Khi $n=1$ ta có $1>\frac{1}{2}$, tức là khẳng định đúng khi $n=1$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là ta có :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}.$$

Ta cần phải chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, tức là :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}.$$

Ta có : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right)+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)$

Nhận thấy : $\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)$ gồm 2^k phân số, tử số bằng 1, còn mẫu số lần lượt là : $2^k, 2^k+1, 2^k+2, ..., 2^{k+1}-1;$ đều nhỏ hơn 2^{k+1}, do đó :

$\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k+1}>\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{1}{2^{k+1}}.$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)>2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$

Theo giả thiết quy nạp : $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right)>\frac{k}{2}$

Do đó : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}.$

Vậy với mọi $n\ge 1$, ta có : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}.$

★**Thí dụ 6.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Hướng dẫn giải

+ Kí hiệu bất đẳng thức đã cho là (*) , với $n=1$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3.1+1}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\ \text{(đúng)}$$

Bất đẳng thức đúng với $n=1$.

+ Giả sử (*) đúng đến $n=k\left(k\in N,\ k\ge 1\right)$, tức là ta được $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$

+ Ta cần chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, hay

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

Bất đẳng thức (*) đúng với $n=k+1$ khi

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}\Leftrightarrow\left(2k+1\right)\sqrt{3k+4}<\left(2k+2\right)\sqrt{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(2k+1\right)^2\left(3k+4\right)<\left(2k+2\right)^2\left(3k+1\right)\Leftrightarrow k>0\quad\text{(đúng)}$$

Do đó (*) đúng với $n=k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

★**Thí dụ 7.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+2n+1}>1$$

Hướng dẫn giải

+ Với $n=1$ bất đẳng thức có dạng: $\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}>1\Leftrightarrow\frac{13}{12}>1$ (đúng)

Nên bất đẳng thức đúng với $n=1$

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n=k\ \left(k\in N,\ k\geq 1\right)$, tức là

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1$$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, hay

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\ldots+\frac{1}{3k+4}>1$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=S_k+\frac{2}{3\left(k+1\right)\left(3k+2\right)\left(3k+4\right)}$$

Hay $S_{k+1}>S_k>1$. Do đó bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

★**Thí dụ 8.** Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn bất đẳng thức: $3^n>2^n+7n$

Hướng dẫn giải

Thử trực tiếp với $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ ta thấy $n=4$ thì bất đẳng thức đúng.

Ta sẽ chứng minh mọi giá trị cần tìm của n là $n\geq 4,\ n\in N$. Tức là chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $n\geq 4,\ n\in N$: $3^n>2^n+7n$

+ Với $n=4$ thì bất đẳng thức trở thành có dạng $3^4>2^4+7.4\Leftrightarrow 81>44$ (đúng)

Nên bất đẳng thức đúng với n = 4

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k \left(k \in N,\ k \ge 4\right)$ tức là: $3^k > 2^k + 7k$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, hay $3^{k+1} > 2^{k+1} + 7\left(k+1\right)$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có $3^{k+1} = 3.3^k > 3\left(2^k + 7\right)$

Nhưng với mọi $k \ge 4$ thì

$$3\left(2^k + 7k\right) = 2^{k+1} + 2^k + 21k = 2^{k+1} + 7\left(k+1\right) + 2^k + 7\left(2k-1\right) > 2^{k+1} + 7\left(k+1\right)$$

Suy ra bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được hoàn thành.

★**Thí dụ 9.** Chứng minh rằng với mọi $n \ge 1, n \in N$, ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{7}{10}$$

Hướng dẫn giải

Kiểm tra trực tiếp ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng với n = 1, 2, 3

Xét trường hợp $n \ge 4$. khi đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4n}$$

+ Với $n = 4$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4.4} \Leftrightarrow \frac{533}{840} < \frac{51}{80} \Leftrightarrow 1066 < 1071 \text{ (đúng)}$$

Nên bất đẳng thức đúng với $n = 4$.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \left(k \in N,\ k \ge 4\right)$, tức là

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4k}$$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, hay

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+2} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4\left(k+1\right)}$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta được

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+2} = S_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} \\ &= S_k + \frac{1}{2\left(k+1\right)\left(2k+1\right)} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{2\left(k+1\right)\left(2k+1\right)} \end{aligned}$$

Do vậy chỉ cần chứng minh

$$-\frac{1}{4k}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}<-\frac{1}{4(k+1)} \Leftrightarrow \frac{2}{(k+1)(2k+1)}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(k+1)(2k+1)}<\frac{1}{k(k+1)} \Leftrightarrow 2k+1>2k \Leftrightarrow 1>0$$

Đánh giá cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 4$.

Bài toán được chứng minh xong.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Chứng minh rằng với mọi $n>1$ *ta có bất đẳng thức* :$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$

2) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 5$, *ta có:* $2^n>n^2$

3) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+2n+1}>1$

4) Chứng minh với mọi số nguyên dương n : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} \leq n.\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

5) Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in N$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{79}{48}$$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

CHỦ ĐỀ 8 CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC DÃY SỐ BẰNG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

A. Kiến thức cần nhớ

Trong quá trình làm bài tập, có lúc các bạn gặp những dạng bài toán nếu giải bằng phương pháp quy nạp Toán học sẽ rất cồng kềnh. Bên cạnh đó, nếu biết sử dụng các bất đẳng thức phù hợp thì bài toán sẽ trở nên gọn gàng hơn !

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng: $1.3.5\ldots(2n-1) < n^n$, $\forall n \in Z^+$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2n = 1 + (2n-1) \ge 2\sqrt{1.(2n-1)}$

$2n = 3 + (2n-3) \ge 2\sqrt{3.(2n-3)}$

……………….

$2n = (2n-1) + 1 \ge 2\sqrt{(2n-1).1}$

Nhân các bất đẳng thức cùng chiều theo vế ta có:

$2^n.n^n \ge 2n.1.3......(2n-1)$

Suy ra: $1.3.5\ldots(2n-1) < n^n$, $\forall n \in Z^+$

★**Thí dụ 2.** Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)} - 1\right).$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức cauchy cho ba số khác nhau:

$n + (n+1) + (n+1) > 3\sqrt[3]{n(n+1)^2}$

$\Rightarrow 3n + 2 > 3\sqrt[3]{n(n+1)^2}$

$\Rightarrow 2 > 3\left[\sqrt[3]{n(n+1)^2} - n\right]$

$\Rightarrow 2 > 3\sqrt[3]{n}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}\right]$

$\Rightarrow 2 > 3\sqrt[3]{n}\left[\sqrt[3]{(n+1)} - \sqrt[3]{n}\right]\left[\sqrt[3]{(n+1)} + \sqrt[3]{n}\right]$

$\Rightarrow 2 > 3\sqrt[3]{n}\left[\sqrt[3]{(n+1)} - \sqrt[3]{n}\right]\left(do\,\sqrt[3]{(n+1)} + \sqrt[3]{n} > 1\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)} - \sqrt[3]{n}\right]$

Cho $n = 1; 2; 3...;$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{1^2}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2}\right]$$

....

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}\right]$$

Cộng từng vế ta có : $\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)} - 1\right).$

★**Thí dụ 2.** Cho n số $a_1, a_2, \ldots a_n \geq 0$ thỏa $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + ... + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{n-1}{2}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng AM-GM cho *n - 1* số không âm ,ta có:

$$\sqrt{a_1a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \quad , \quad \sqrt{a_1a_3} \leq \frac{a_1 + a_3}{2} \quad , \quad \sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{a_{n-1} + a_{n2}}{2}$$

Suy ra: $\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + ... + \sqrt{a_1a_n} + ... + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_3}{2} + ... \frac{a_1 + a_n}{2} + ... + \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$

$$= \frac{n-1}{2}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right) = \frac{n-1}{2}$$

Vậy : $\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + ... + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{n-1}{2}$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, ...u_n$ *với* $n \geq 3$. *Chứng minh rằng:*

$$\left(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_{n-1}^2\right)\left(u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2\right) \geq \left(u_1u_2 + u_2u_3 + ... + u_{n-1}u_n\right)^2$$

2) Cho $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$*.Chứng minh rằng:* $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

3) Cho $0 < x_1x_2...x_n \leq 1\left(n \geq 2\right)$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n} \geq \frac{1}{1 + n\left(1 - x_1\right)\left(1 - x_2\right)....\left(1 - x_n\right)} \qquad (1)$$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

CHỦ ĐỀ 9

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM (CAUCHY)

A. Kiến thức cần nhớ

Cho a, b, c là các số không âm. Khi đó theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad ;$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad ;.$$

Tổng quát: Trung bình cộng của n số không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$ với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số không âm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

1) Kĩ thuật đánh giá từ trung bình cộng qua trung bình nhân

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM dạng:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$ với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số không âm.

★**Thí dụ 1.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.* Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac} = 8abc$ (đpcm)

★**Thí dụ 2.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.* Chứng minh rằng:

$a)\quad (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4 \qquad b)\quad (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\ge 2\sqrt{xy}>0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{\frac{1}{xy}}\Rightarrow (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi x = y.

b) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z\ge 3\sqrt{xyz}>0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge 3\sqrt{\dfrac{1}{xyz}}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 3\sqrt{xyz}.3\sqrt{\frac{1}{xyz}}\Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$$

Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

★**Thí dụ 3.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.* Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$a^3+a^3+b^3\ge 3\sqrt[3]{a^3.a^3.b^3}=3a^2b$$
$$b^3+b^3+c^3\ge 3\sqrt[3]{b^3.b^3.c^3}=3b^2c$$
$$c^3+c^3+a^3\ge 3\sqrt[3]{c^3.c^3a^3}=3c^2a$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a \text{ (đpcm)}$$

2) Kĩ thuật đánh giá từ trung bình nhân qua trung bình cộng

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM theo chiều:

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \quad \text{với } a_1,a_2,...,a_n \text{ là các số không âm.}$$

Ta thường áp dụng khi gặp bài toán bất đẳng thức có dạng:

$$\sqrt[m]{A_1}+\sqrt[m]{A_2}+....+\sqrt[m]{A_n}\le B$$

Ta có hai hướng xử lý:

+ Đánh giá trực tiếp

+ Nhân thêm hằng số mục đích lược bỏ biến hoặc hằng số không thích hợp.

Một số ví dụ minh họa

★**Thí dụ 1.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le 2(a+b+c)$$

Hướng dẫn giải

Ta có ab + bc + ca = 1 nên

$$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{ab+bc+ca+a^2}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{a+b+a+c}{2}=a+\frac{b+c}{2}.$$

Từ đó:

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le\left(a+\frac{b+c}{2}\right)+\left(b+\frac{c+a}{2}\right)+\left(c+\frac{a+b}{2}\right)$$
$$=2\left(a+b+c\right)$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}$.

Hướng dẫn giải

Có: $a+b+c=1\Rightarrow c=\left(a+b+c\right).c=ac+bc+c^2$

$\Rightarrow c+ab=ac+bc+c^2+ab=a(c+b)+c(b+c)=(c+a)(c+b)$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}\le\frac{\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b}}{2}$$

Tương tự: $a+bc=\left(a+b\right)\left(a+c\right), b+ca=\left(b+c\right)\left(b+a\right)$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\le\frac{\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}\le\frac{\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+a}}{2}$$

$$\Rightarrow\text{P}\le\frac{\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+a}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{a+c}{a+c}+\frac{c+b}{c+b}+\frac{b+a}{b+a}}{2}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Từ đó giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

★**Thí dụ 3.** Chứng minh với mọi a $\ge$ 1, b $\ge$ 1. Chứng minh rằng $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Vế phải không chứa hằng số do vậy sử dụng AM-GM để triệt tiêu các số -1 trong 2 căn thức do đó nhân thêm vào mỗi căn với 1.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a\sqrt{b-1} = a\sqrt{(b-1).1} \le a.\frac{b-1+1}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$b\sqrt{a-1} = b\sqrt{(a-1).1} \le b.\frac{a-1+1}{2} = \frac{ab}{2}$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

3) Kĩ thuật tách nghịch đảo

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$, $\forall a,b > 0$

Hướng dẫn giải

Vì $a,b > 0$ nên $\frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi a = b.

★**Thí dụ 2.** Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{a-1} \ge 3$, $\forall a > 1$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a + \frac{1}{a-1} = a - 1 + \frac{1}{a-1} + 1 \ge 2\sqrt{(a-1)\frac{1}{a-1}} + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a - 1 = \frac{1}{a-1} \Leftrightarrow a = 2$

★**Thí dụ 3.** Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{b(a-b)} \ge 3$, $\forall a > b > 0$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = b + (a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \ge 3\sqrt[3]{b.(a-b).\frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = a - b = b(a-b) \Leftrightarrow a = 2, b = 1$

★**Thí dụ 4.** Chứng minh rằng: $a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \ge 3$, $\forall a > b > 0$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = (a-b) + \frac{(b+1)}{2} + \frac{(b+1)}{2} + \frac{1}{(a-b)\frac{(b+1)}{2}\frac{(b+1)}{2}} - 1$$

$$\ge 4.\sqrt[4]{(a-b).\frac{(b+1)}{2}.\frac{(b+1)}{2}.\frac{1}{(a-b)\frac{(b+1)}{2}\frac{(b+1)}{2}}}-1=3$$

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$, $\forall a\in \boldsymbol{R}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=2 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = 0.

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng: $\frac{3a^2}{1+9a^4}\le\frac{1}{2}, \forall a\ne 0$

Hướng dẫn giải

Với $\forall a\ne 0$, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{3a^2}{1+9a^4}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+\frac{9a^4}{3a^2}}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+3a^2}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3a^2}.3a^2}}=\frac{1}{2} \text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2}{a+1}+2\right)^2$, $\forall a\ne -1$

Hướng dẫn giải

$$A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2+2a+2}{a+1}\right)^2$$

$$=(a+1)^2+\left[\frac{(a+1)^2+1}{a+1}\right]^2$$

$$=(a+1)^2+\left(a+1+\frac{1}{a+1}\right)^2$$

$$=2(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2\overset{Cauchy}{\ge}2\sqrt{2(a+1)^2\frac{1}{(a+1)^2}}+2=2\sqrt{2}+2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2(a+1)^2=\frac{1}{(a+1)^2}$ hay $a=\frac{-2\pm\sqrt[4]{8}}{2}$

Vậy GTNN của $A=2\sqrt{2}+2$

4) Kĩ thuật ghép đối xứng

Trong nhiều bài toán mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng để bài toán trở nên đơn giản hơn.

ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp hai dạng sau:

Dạng 1: Chứng minh $X+Y+Z\ge A+B+C$

ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $X+Y\ge 2A$. Sau đó, tương tự hóa đẻ chỉ ra $Y+Z\ge 2B$ và $Z+X\ge 2C$ (nhờ tính đối xứng của bài toán). Sau đó cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dạng 2: Chứng minh $XYZ\ge ABC$ với $X,Y,Z\ge 0$

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $XY\ge A^2$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $YZ\ge B^2$ và $ZX=C^2$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta có:

$XYZ=\sqrt{A^2B^2C^2}=\left|ABC\right|\ge ABC$.

Trong kỹ thuật ghép đối xứng ta cần nắm một số thao tác sau:

Phép cộng: $\begin{cases} a+b+c=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{c+a}{2} \\ 2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a) \end{cases}$

Phép nhân: $\begin{cases} abc=\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}, \qquad (a,b,c\ge 0) \\ a^2b^2c^2=(ab)(bc)(ca) \end{cases}$

★**Thí dụ 1.** Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$$

$$\ge\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=a+b+c$$

★**Thí dụ 2.** Cho ba số thực $abc\ne 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\ge\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\ge\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2}.\frac{c^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}.\frac{a^2}{b^2}}=\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|+\left|\frac{a}{c}\right|\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

★**Thí dụ 3.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Hướng dẫn giải

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}}$$

$$=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$$\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Vậy $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

★**Thí dụ 4.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\frac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng:

$$(p-a)(p-b)(p-c)\le\frac{1}{8}abc$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(p-a)(p-b)(p-c)=\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}$$

$$\le\frac{(p-a)+(p-b)}{2}.\frac{(p-b)+(p-c)}{2}.\frac{(p-c)+(p-a)}{2}$$

$$\le\frac{2p-(a+b)}{2}.\frac{2p-(b+c)}{2}.\frac{2p-(c+a)}{2}=\frac{1}{8}abc$$

★**Thí dụ 5.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\frac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\right)$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}+\frac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}+\frac{1}{\sqrt{(p-c)(p-a)}}$$

$$\ge\frac{1}{\frac{(p-a)+(p-b)}{2}}+\frac{1}{\frac{(p-b)+(p-c)}{2}}+\frac{1}{\frac{(p-c)+(p-a)}{2}}$$

$$\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

5) Kĩ thuật ghép cặp nghịch đảo

Trong kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo ta ứng dụng bất đẳng thức sau

Với $n \in N^*$ và $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thì

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + .. + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$$

Chứng minh bất đẳng thức trên :

Ta có với $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thì

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + .. + \frac{1}{x_n}\right) \ge n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}.n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2...x_n}} = n^2$$

Với $n = 3$ và $x_1, x_2, x_3 > 0$ thì

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \ge 9$$

★**Thí dụ 1.** Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \ge 6$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \left(1 + \frac{b+c}{a}\right) + \left(1 + \frac{c+a}{b}\right) + \left(1 + \frac{a+b}{c}\right) - 3$$

$$= \frac{a+b+c}{a} + \frac{b+c+a}{b} + \frac{c+a+b}{c} - 3$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 \ge 9 - 3 = 6$$

★**Thí dụ 2.** Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

(Bất đẳng thức Nesbit)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) - 3$$

$$= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left[(b+c) + (c+a) + (a+b)\right]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$\ge \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

★**Thí dụ 3.** Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} \ge \frac{a+b+c}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}=\left(c+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(a+\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(b+\frac{b^2}{c+a}\right)-(a+b+c)$$

$$=c\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+a\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+b\left(1+\frac{b}{c+a}\right)-(a+b+c)$$

$$=c\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)+a\left(\frac{b+c+a}{b+c}\right)+b\left(\frac{c+a+b}{c+a}\right)-(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)-(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}-1\right)$$

Theo ***bất đẳng thức Nesbit*** đã chứng minh ở bài 2 thì:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

Do đó $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\ge(a+b+c)\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{a+b+c}{2}$ (đpcm)

★**Thí dụ 3.** Cho ba số thực dương *a, b, c* thỏa $a+b+c\le 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$

Hướng dẫn giải

Do $a+b+c\le 1$ ta có:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)$$

$$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right)\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)$$

$$=\left[\left(a^2+2bc\right)+\left(b^2+2ac\right)+\left(c^2+2ab\right)\right]\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)\ge 9$$

6) Kỹ thuật đổi biến số

Có những bài toán về mặt biểu thức toán học tương đối cồng kềnh, khó nhận biết được phương hướng giải. Bằng cách đổi biến số, ta có thể đưa bài toán về dạng đơn giản và dễ nhận biết hơn.

★**Thí dụ 1.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b.$ Chứng minh rằng:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc \qquad \textbf{(1)}$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức **(1)** tương đương với bất đẳng thức sau:

$$x.y.z \le \frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}$$

Trong tam giác, tổng độ dài của hai cạnh luôn lớn hơn độ dài cạnh còn lại nên: $x, y, z > 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2} \ge \sqrt{xy}.\sqrt{yz}\sqrt{zx} = xyz$$

Hay $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$ (đpcm)

★**Thí dụ 2.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3\ (1)$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó vế trái của bất đẳng thức **(1)** trở thành: $\dfrac{y+z}{2x}+\dfrac{z+x}{2y}+\dfrac{x+y}{2z}$

Ta có: $\dfrac{y+z}{2x}+\dfrac{z+x}{2y}+\dfrac{x+y}{2z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)$

$$\ge \frac{2}{2}\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{y}.\frac{y}{z}} = 3$$

Hay $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c} \ge 3$ (đpcm)

★**Thí dụ 3.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c} \ge a+b+c\ \mathbf{(1)}$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức **(1)** tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\geq x+y+z$$

Ta có:

$$\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\geq \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\right)$$

$$\geq \sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x}}=z+x+y$$

Hay $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c$ (đpcm)

★**Thí dụ 4.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\dfrac{a+b+c}{2}$. CMR:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \textbf{(1)}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $p-a=\dfrac{b+c-a}{2}>0$

Tương tự: $p-b>0, \quad p-c>0$

Đặt: $\begin{cases} p-a=x>0 \\ p-b=y>0 \\ p-c=z>0 \end{cases} \Rightarrow p=x+y+z$

Khi đó bất đẳng thức **(1)** tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq \frac{x+y+z}{xyz}$$

Ta có:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\geq \sqrt{\frac{1}{x^2}.\frac{1}{y^2}}+\sqrt{\frac{1}{y^2}.\frac{1}{z^2}}+\sqrt{\frac{1}{z^2}\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}$$

Hay $\dfrac{1}{(p-a)^2}+\dfrac{1}{(p-b)^2}+\dfrac{1}{(p-c)^2}\geq \dfrac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ (đpcm)

★**Thí dụ 5.** Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ **(1)**

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} b+c=x \\ c+a=y \\ a+b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z-x}{2} \\ b=\dfrac{z+x-y}{2} \\ c=\dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức **(1)** trở thành: $\dfrac{y+z-x}{2x}+\dfrac{z+x-y}{2y}+\dfrac{x+y-z}{2z}\ge\dfrac{1}{2}$

Ta có: $$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}$$

$$\ge\frac{2}{2}\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{y}.\frac{y}{z}}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Hay $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ (đpcm)

★**Thí dụ 6.** Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa $(a+c)(b+c)=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\ge 4 \quad \textbf{(1)}$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} a+c=x \\ b+c=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=1 \\ a-b=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{y} \\ y=\dfrac{1}{x} \\ a-b=x-y \end{cases}$

Khi đó vế trái của bất đẳng thức **(1)** trở thành:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge 4$$

Ta có:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{(x-y)^2}+x^2+y^2=\frac{1}{x^2-2xy+y^2}+x^2+y^2$$

$$=\frac{1}{x^2-2+y^2}+\left(x^2+y^2-2\right)+2\ge 2\sqrt{\frac{1}{x^2-2+y^2}.\left(x^2+y^2-2\right)}+2=4$$

Vậy $\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(a+c)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}\ge 4$ (đpcm)

★**Thí dụ 7.** Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.

Tìm GTNN của biểu thức: $A=\dfrac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\dfrac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\dfrac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

(Đề thi Đại học khối A năm 2007)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$A\ge\frac{x^2.2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2.2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2.2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}\ge\frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}\sqrt{yzx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}\sqrt{zxy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

$$\ge\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đặt: $\begin{cases}a=y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}\\ b=z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}\\ c=x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\sqrt{x}=\dfrac{1}{9}(-2a+4b+c)\\ y\sqrt{y}=\dfrac{1}{9}(a-2b+4c)\\ z\sqrt{z}=\dfrac{1}{9}(4a+b-2c)\end{cases}$

Khi đó

$$A\ge\frac{2}{9}\left(\frac{-2a+4b+c}{a}+\frac{a-2b+4c}{b}+\frac{4a+b-2c}{c}\right)$$

$$\ge\frac{2}{9}\left[-6+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]$$

$$\ge\frac{2}{9}\left(-6+4.3.\sqrt[3]{\frac{b}{a}.\frac{a}{c}.\frac{c}{b}}+3.\sqrt[3]{\frac{c}{a}.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}}\right)=\frac{2}{9}(-6+12+3)=2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy GTNN của A là 2

7) Kỹ thuật chọn điểm rơi

Điểm rơi trong các bất đẳng thức là giá trị đạt được của biến khi dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra.

Trong các bất đẳng thức dấu "=" thường xảy ra ở các trường hợp sau:

- Các biến có giá trị bằng nhau. Khi đó ta gọi bài toán có ***cực trị đạt được tại tâm***
- Khi các biến có giá trị tại biên. Khi đó ta gọi bài toán có ***cực trị đạt được tại biên***

Căn cứ vào điều kiện xảy ra của dấu "=" trong bất đẳng thức ta xét các kỹ thuật chọn điểm rơi trong các trường hợp trên

1. **Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị xảy ra ở biên**

Xét các bài toán sau:

Bài toán 1: Cho số thực $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $A=a+\dfrac{1}{a}$

Sai lầm thường gặp là: $A = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2$. Vậy GTNN của A là 2.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 2 $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow$ a $= 1$ vô lý vì theo giả thuyết thì $a \geq 2$.

Phân tích tìm tòi lời giải : Xét bảng biến thiên của $a, \frac{1}{a}$ và S để dự đoán Min A.

a	2	3	4	5	6	7	8	……..	20
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	……..	$\frac{1}{20}$
A	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{7}$	$8\frac{1}{8}$	……..	$20\frac{1}{20}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy khi a tăng thì A càng lớn và từ đó dẫn đến dự đoán khi $a = 2$ thì A nhận giá trị nhỏ nhất. Để dễ hiểu và tạo sự ấn tượng ta sẽ nói rằng $MinA = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ đạt tại ***"Điểm rơi* a = 2"**

Do bất đẳng thức AM-GM xảy ra dấu bằng tại điều kiện các số tham gia phải bằng nhau, nên tại ***"Điểm rơi* a = 2"** ta không thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM trực tiếp cho 2 số a và $\frac{1}{a}$ vì $2 \neq \frac{1}{2}$. Lúc này ta sẽ giả định sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{a}\right)$ sao cho tại ***"Điểm rơi* a = 2"** thì $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{a}$ tức là ta có lược đồ ***"Điểm rơi* a = 2"** sau đây:

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 4 \text{ : \textbf{\textit{Hệ số điểm rơi.}}}$$

Từ đó ta biến đổi A theo sơ đồ ***"Điểm rơi"*** được nêu ở trên.

Lời giải đúng: $A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \geq 1 + \frac{3.2}{4} = \frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{a}$ hay $a = 2$

Vậy GTNN của A là $\frac{5}{2}$ đạt được khi $a = 2$.

<u>Lưu ý:</u> *Để giải bài toán trên, ngoài cách chọn cặp số* $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{a}\right)$ *ta có thể chọn các các cặp số sau:* $\left(\alpha a, \frac{1}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a, \frac{\alpha}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a, \frac{1}{\alpha a}\right)$.

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Khi đã quen thì các bạn có thể suy luận đơn giản với điều kiện $a \geq 2$ thì điểm rơi sẽ thường nằm ở điểm nút tức là a = 2 khi đó $\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{a}$ nên ta sẽ tách $a = \frac{a}{4} + \frac{3}{4}a$ và ghép cặp $\left(\frac{a}{4} + \frac{1}{a}\right)$ để sử dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \geq 1 + \frac{3.2}{4} = \frac{5}{2}$$

Bài toán 2: Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a + \frac{1}{a^2}$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 8$$

Sai lầm thường gặp là: $A = \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \sqrt{\frac{1}{2a}} + \frac{7a}{8} \geq \sqrt{\frac{1}{2.2}} + \frac{7.2}{8} = \frac{9}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$.

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Nguyên nhân sai lầm: Mặc dù GTNN của A là $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên mắc sai lầm trong đánh giá mẫu số: " $a \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2a}} \geq \sqrt{\frac{1}{2.2}}$ là sai".

Lời giải đúng:

$$A = \frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{6a}{8} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{6a}{8} \geq \frac{3}{4} + \frac{6.2}{8} = \frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$.

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Bài toán 3: Cho số thực $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2a + \frac{1}{a^2}$

Sai lầm thường gặp là: $A = 2a + \frac{1}{a^2} = a + a + \frac{1}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{a.a.\frac{1}{a}} = 3 \Rightarrow Min\,A = 3$.

Nguyên nhân sai lầm: $Min\,A = 3 \Leftrightarrow a = a = \frac{1}{a^2} = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

Phân tích tìm tòi lời giải : Xét bảng biến thiên để dự đoán Min A.

a	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$2a$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{a^2}$	100	81	64	49	36	25	16	9	4
A	$100\frac{1}{5}$	$81\frac{2}{9}$	$64\frac{1}{4}$	$49\frac{2}{7}$	$36\frac{1}{3}$	$25\frac{2}{5}$	$16\frac{1}{2}$	$9\frac{2}{3}$	5

Nhìn bảng biến thiên ta thấy khi a tăng thì A càng nhỏ và từ đó dẫn đến dự đoán khi $a=\frac{1}{2}$ thì A nhận giá trị nhỏ nhất. Để dễ hiểu và tạo sự ấn tượng ta sẽ nói rằng $MinA=5$ đạt tại ***"Điểm rơi** $a=\frac{1}{2}$"*

Sơ đồ điểm rơi 1:

$$a=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\alpha a^2}=\frac{4}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow\alpha=8\ :\quad \textbf{\textit{Hệ số điểm rơi}}$$

Cách 1: $A=2a+\frac{1}{a^2}=\left(a+a+\frac{1}{8a^2}\right)+\frac{7}{8a^2}\ge 3\sqrt[3]{a.a.\frac{1}{8a^2}}+\frac{7}{8a^2}=\frac{3}{2}+\frac{7.4}{8}=5.$

Với $a=\frac{1}{2}$ thì $Min S=5$.

Sơ đồ điểm rơi 2:

$$a=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha a=\frac{\alpha}{2}\\ \frac{1}{a^2}=4\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow\alpha=8\ :\quad \textbf{\textit{Hệ số điểm rơi}}$$

Cách 2: $A=2a+\frac{1}{a^2}=\left(8a+8a+\frac{1}{a^2}\right)-14a\ge 3\sqrt[3]{8a.8a.\frac{1}{a^2}}-14a=12-14a\ge 12-14.\frac{1}{2}=5$

Với $a=\frac{1}{2}$ thì $Min S=5$.

★Thí dụ 1. Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của $A=ab+\frac{1}{ab}$

Sai lầm thường gặp: $A=ab+\frac{1}{ab}\ge 2\sqrt{ab.\frac{1}{ab}}=2$

$Min\,A = 2 \Leftrightarrow ab = \frac{1}{ab} = 1 \Leftrightarrow 1 = \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \le \frac{1}{2}$: Vô lý

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Biểu thức A chứa hai biến số a, b nhưng nếu đặt $t = ab$ hoặc $t = \frac{1}{ab}$ thì $S = t + \frac{1}{t}$ là biểu thức chứa 1 biến số. Khi đổi biến số ta cần phải tìm miền xác định cho biến mới, cụ thể là:

Đặt $t = \frac{1}{ab} \Rightarrow ab = \frac{1}{t}$ và $t = \frac{1}{ab} \ge \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \ge \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

Bài toán trở thành: Cho $t \ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = t + \frac{1}{t}$

Sơ đồ điểm rơi:

$t = 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \\ \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 16$ ***: Hệ số điểm rơi***

Lời giải đúng:

$$A = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{16} + \frac{1}{t}\right) + \frac{15t}{16} \ge 2.\sqrt{\frac{t}{16}.\frac{1}{t}} + \frac{15t}{6} = \frac{2}{4} + \frac{15t}{6} \ge \frac{2}{4} + \frac{15.4}{16} = \frac{17}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{17}{4}$ khi $t = 4$ hay $a = b = \frac{1}{2}$.

★**Thí dụ 2.** Cho số thực $a \ge 6$. Tìm GTNN của $A = a^2 + \frac{18}{a}$

Phân tích:

Ta có: $A = a^2 + \frac{18}{a} = a^2 + \frac{9}{a} + \frac{9}{a}$

Dễ thấy *a* càng tăng thì *A* càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a = 6$.

Ta có sơ đồ điểm rơi: $a = 6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{\alpha} = \frac{36}{\alpha} \\ \frac{9}{a} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{36}{\alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 24$

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \frac{a^2}{24} + \frac{9}{a} + \frac{9}{a} + \frac{23a^2}{24} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{24}.\frac{9}{a}.\frac{9}{a}} + \frac{23a^2}{24} \ge \frac{9}{2} + \frac{23.36}{24} = 39$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{24}=\dfrac{9}{a}\Leftrightarrow a=6$

Vậy GTNN của A là 39

★**Thí dụ 3.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+2b+3c\geq 20$. Tìm GTNN của

$$A=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

Phân tích:

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $a+2b+3c=20$, tại điểm rơi $a=2, b=3, c=4$.

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}\\ \dfrac{3}{a}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{4}{3}$$

$$b=3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{\beta}=\dfrac{3}{\beta}\\ \dfrac{9}{2b}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{\beta}=\frac{3}{2}\Rightarrow\beta=2$$

$$c=4\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{c}{\gamma}=\dfrac{4}{\gamma}\\ \dfrac{4}{c}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{\gamma}=1\Rightarrow\gamma=4$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}\\&\geq 2\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}}+2\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{4}{c}}+\frac{a+2b+3c}{4}\\&\geq 3+3+2+5=13\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2, b=3, c=4$

Vậy GTNN của A là 13

★**Thí dụ 4.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $\begin{cases}ab\geq 12\\ bc\geq 8\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\geq\frac{121}{12}$$

Phân tích: Dự đoán GTNN của A đạt được khi $\begin{cases}ab=12\\ bc=8\end{cases}$, tại điểm rơi $a=3, b=4, c=2$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a}{18}+\frac{b}{24}+\frac{2}{ab}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{18}.\frac{b}{24}.\frac{2}{ab}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{2}{ca}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{2}{ca}}=1$$

$$\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{2}{bc}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{16}.\frac{c}{8}.\frac{2}{bc}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{b}{12}+\frac{8}{abc}\geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{b}{12}.\frac{8}{abc}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\geq 2\sqrt{\frac{13a}{18}.\frac{13b}{24}}\geq 2\sqrt{\frac{13}{18}.\frac{13}{24}.12}=\frac{13}{3}$$

$$\frac{13b}{48}+\frac{13c}{24}\geq 2\sqrt{\frac{13b}{48}.\frac{13c}{24}}\geq 2\sqrt{\frac{13}{48}.\frac{13}{24}.8}=\frac{13}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(a+b+c)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\geq\frac{121}{12}\qquad \text{(đpcm)}$$

2) Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị đạt được tại tâm

Xét bài toán sau:

Bài toán: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$.Tìm GTNN của

$$A=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Sai lầm thường gặp là: $A=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4\sqrt[4]{a.b.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=4$

Vậy GTNN của A là 4.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 4 $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\Leftrightarrow$ a $=b=1$. Khi đó $a+b=2\geq 1$ trái giả thuyết .

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\alpha}=\frac{1}{2\alpha}\\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2\alpha}=2\Rightarrow\alpha=\frac{1}{4}$

Lời giải đúng: $A=\left(4a+4b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-3a-3b\geq 4\sqrt[4]{4a..4b.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}-3(a+b)\geq 8-3=5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 5

★**Thí dụ 1.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c \le \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của

$$A = a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{2\alpha} \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\alpha}=2 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{4}$$

Hướng dẫn giải

$$A=\left(4a+4b+4c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3a-3b-3c$$

$$\ge 6\sqrt[6]{4a.4b.4c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}-3(a+b+c)$$

$$\ge 12-\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{13}{2}$

★**Thí dụ 2.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c \le \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của

$$A = a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a^2=b^2=c^2=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{\alpha a}=\dfrac{1}{\alpha b}=\dfrac{1}{\alpha c}=\dfrac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha=8$$

Hướng dẫn giải

$$A=\left(a^2+b^2+c^2+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8c}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8c}\right)+\frac{3}{4a}+\frac{3}{4b}+\frac{3}{4c}$$

$$\ge 9\sqrt[9]{a^2.b^2.c^2.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8c}.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8c}}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\ge \frac{9}{4}+9.\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{9}{4}+\frac{9}{4}.\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\ge\frac{9}{4}+\frac{9}{4}.2=\frac{27}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{27}{4}$

★**Thí dụ 3.** Cho 2 số thực dương a, b. Tìm GTNN của $A=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}}=\frac{2a}{\alpha a}=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=4$$

Hướng dẫn giải

$$A=\left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)+\frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}.\frac{\sqrt{ab}}{a+b}}+\frac{3.2\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

Vậy GTNN của A là $\frac{5}{2}$

★**Thí dụ 4.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=c$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\\ \frac{b+c}{\alpha a}=\frac{c+a}{\alpha b}=\frac{a+b}{\alpha c}=\frac{2}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha=4$$

Hướng dẫn giải

$$A=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{4a}+\frac{c+a}{4b}+\frac{a+b}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$

$$\geq 6\sqrt[6]{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}.\frac{b+c}{4a}.\frac{c+a}{4b}.\frac{a+b}{4c}}+\frac{3}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$\geq 3+\frac{3}{4}.6.\sqrt[6]{\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{b}{c}}=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy GTNN của A là $\frac{15}{2}$

★**Thí dụ 5.** Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$. Tìm GTNN của :

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a^2+b^2}=2\\ \frac{\alpha}{2ab}=2\alpha\end{cases}\Rightarrow 2\alpha=2\Rightarrow\alpha=1$

Hướng dẫn giải

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)2ab}}+\frac{1}{2ab}\geq 2.\frac{1}{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}+\frac{1}{2.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\frac{6}{\left(a+b\right)^2}\geq 6$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ a=b\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 6.

Chú ý : Ta từ 2 biểu thức a^2+b^2 và ab ta nghĩ đến liên hệ $\left(a^2+b^2\right)+2ab=\left(a+b\right)^2$ khi đó ta sẽ tận dụng được giả thiết $a+b\leq 1$. Mặt khác với dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi a = b nên $a^2+b^2=2ab$, từ đó ta nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng cộng mẫu thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ để được $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\geq\frac{4}{\left(a^2+b^2\right)+2ab}=\frac{4}{\left(a+b^2\right)}$.

Cách khác:

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{1}{2ab}$$

$$\geq\frac{4}{a^2+b^2+2ab}+\frac{1}{2.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{2}{(a+b)^2}=\frac{6}{(a+b)^2}=6.$$

★**Thí dụ 6.** Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$. Tìm GTNN của

$$A=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2+b^2}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{2\alpha ab}=\dfrac{2}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha=3$$

Hướng dẫn giải

$$A=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{(1+a^2+b^2)6ab}}+\frac{1}{3ab}$$

$$\geq 2.\frac{1}{\frac{1+a^2+b^2+6ab}{2}}+\frac{1}{3ab}=\frac{4}{(a+b)^2+1+4ab}+\frac{1}{3ab}$$

$$\geq\frac{4}{(a+b)^2+1+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\qquad\left(\text{Do } ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$\geq\frac{4}{2(a+b)^2+1}+\frac{4}{3(a+b)^2}$$

$$\geq\frac{4}{2.1+1}+\frac{4}{3.1}=\frac{8}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1+a^2+b^2=6ab\\ a=b\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\dfrac{8}{3}$

★**Thí dụ 7.** Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$. Tìm GTNN của

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a^2+b^2}=2\\ \dfrac{1}{\alpha ab}=\dfrac{4}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow 2=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow\alpha=2$$

$$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}4ab=1\\ \dfrac{1}{\beta ab}=\dfrac{4}{\beta}\end{cases}\Rightarrow 1=\frac{4}{\beta}\Rightarrow\beta=4$$

Hướng dẫn giải

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+4ab+\frac{1}{4ab}+\frac{1}{4ab}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)2ab}}+2\sqrt{4ab.\frac{1}{4ab}}+\frac{1}{4ab}$$

$$\ge 2.\frac{1}{\dfrac{a^2+b^2+2ab}{2}}+2+\frac{1}{4ab}=\frac{4}{(a+b)^2}+2+\frac{1}{4ab}$$

$$\ge\frac{4}{(a+b)^2}+2+\frac{1}{4\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}\qquad\left(\text{Do }ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$\ge\frac{5}{(a+b)^2}+2$$

$$\ge\frac{5}{1}+2=7$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ 4ab=\dfrac{1}{4ab}\\ a=b\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 7

★**Thí dụ 8.** Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của

$$A=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=\frac{1}{2}$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a^3+b^3}=2\\ \dfrac{1}{\alpha a^2b}=\dfrac{1}{\alpha ab^2}=\dfrac{4}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow 2=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow\alpha=2$$

Giải:

$$A=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}$$

$$\geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{a^3+b^3}.\frac{1}{2a^2b}.\frac{1}{2ab^2}.\frac{1}{2a^2b}.\frac{1}{2ab^2}}$$

$$\geq 5\frac{1}{\dfrac{a^3+b^3+2a^2b+2ab^2+2a^2b+2ab^2}{5}}$$

$$\geq\frac{25}{(a+b)^3+ab(a+b)}$$

$$\geq\frac{25}{(a+b)^3+\dfrac{(a+b)^3}{4}}\qquad\left(\text{Do } ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$\geq\frac{25}{1+\dfrac{1}{4}}=20$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a^3+b^3}=\dfrac{1}{2a^2b}=\dfrac{1}{2ab^2}\\ a=b\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 20

★Thí dụ 9. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Tìm GTLN của

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

(Đề thi Đại học khối A năm 2005)

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{x+x+y+z}\leq\frac{1}{4\sqrt[4]{x.x.y.z}}=\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\frac{1}{z}}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{x+2y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$P = \frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)=1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{4}$

Vậy GTLN của P là 1.

1) Kĩ Thuật tham số hóa

Khi giải toán về bất đẳng thức và cực trị với các biến bình đẳng ta thường dự đoán điểm rơi khi các biến bằng nhau. Nhưng với các bài toán mà các biến không bình đẳng thì việc tìm lời giải sẽ khó hơn vì việc xác định điểm rơi và tách số để triệt tiêu biến là không hề dễ, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn phương pháp ***Tham số hóa*** kết hợp với một số kĩ năng suy luận hợp lý để tìm lời giải cho các bài toán cực trị với các biến khác nhau.

★Thí dụ 1. Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $\sqrt{ab}\left(a-b\right)=a+b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b$.

(Đề TS lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải

Cách 1. Từ giả thiết suy ra $a>b>0$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\left(a+b\right)^2=ab\left(a-b\right)^2=\frac{1}{4}4ab.\left[\left(a+b\right)^2-4ab\right]\le\frac{1}{4}\left(\frac{4ab+\left(a+b\right)^2-4ab}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(a+b\right)^2\le\frac{1}{16}\left(a+b\right)^4\Rightarrow a+b\ge 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}4ab=\left(a+b\right)^2-4ab\\ \sqrt{ab}\left(a-b\right)=a+b\\ a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2+\sqrt{2}\\ a=2-\sqrt{2}\end{cases}.$

Nhận xét: Bài toán trên rõ ràng vai trò của a và b không giống nhau, việc tách và sử dụng AM-GM như trên thực chất không dựa trên việc xác định điểm rơi mà là sự khéo léo của người giải để từ ab và $\left(a-b\right)^2$ làm xuất hiện $\left(a+b\right)^4$, để làm được điều này thì học sinh cần rèn luyện nhiều và phải có tư duy nhất định trong việc giải toán. Ngoài cách trên các bạn có thể sử dụng phương pháp ***tham số hóa*** như sau:

Cách 2: Vì $a > b > 0$, đặt $a = tb\left(t > 0\right)$ khi đó ta có:

$\sqrt{tb.b}\left(tb - b\right) = tb + b \Leftrightarrow b = \dfrac{t+1}{\sqrt{t}\left(t-1\right)}$. Do $a, b > 0 \Rightarrow t > 1$.

Ta có: $P = a + b = b\left(t+1\right) \Rightarrow P = \dfrac{\left(t+1\right)^2}{\sqrt{t}\left(t-1\right)} = \dfrac{t^2 + 2t + 1}{\sqrt{t}\left(t-1\right)} = \dfrac{\left(t-1\right)^2 + 4t}{\sqrt{t}\left(t-1\right)}$

$$= \frac{t-1}{\sqrt{t}} + \frac{4t}{\sqrt{t}\left(t-1\right)} \geq 2\sqrt{\frac{t-1}{t} . \frac{4t}{\sqrt{t}\left(t-1\right)}} = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$\dfrac{t-1}{\sqrt{t}} = \dfrac{4t}{\sqrt{t}\left(t-1\right)} \Leftrightarrow \left(t-1\right)^2 = 4t \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 + 2\sqrt{2}.$ $\left(do\, t > 0\right)$

Khi đó: $b = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2 + \sqrt{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P = 4 khi $a = 2 + \sqrt{2}; b = 2 - \sqrt{2}.$

★**Thí dụ 2.** Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $4a + b + \sqrt{ab} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{ab}$.

(Đề TS lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $1 = 4a + b + \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{4ab} + \sqrt{ab} = 5\sqrt{ab}$.

$$\Rightarrow P = \frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2 \geq 25.$$

Vậy $\min P = 25$ đạt được khi $a = \dfrac{1}{10}; b = \dfrac{2}{5}$.

Nhận xét: Lời giải trêm rất hay và ngắn gọn tuy nhiên việc vai trò a và b không giống nhau trong bất đẳng thức khiến cho việc định hướng để sử dụng bất đẳng thức AM-GM trực tiếp với 4a và b có phần thiếu tự nhiên và mạo hiểm. Với bài toán này chúng ra cũng có thể sử dụng phương pháp ***tham số hóa*** như sau:

Do $a > 0, b > 0$ nên đặt $a = bt$ với $t > 0$. Khi đó: $4bt + b + \sqrt{bt.b} = 1 \Leftrightarrow b\left(4t + \sqrt{t} + 1\right) = 1.$

Suy ra $b = \dfrac{1}{4t + \sqrt{t} + 1}$. Thay vào biểu thức của P ta được:

$$P = \frac{1}{bt.b} = \frac{1}{b^2 t} = \frac{\left(4t + \sqrt{t} + 1\right)^2}{t} = \left(4\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$P=\left(4\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+1\right)^2\ge\left(2\sqrt{4\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{t}}}+1\right)^2=\left(2.2+1\right)^2=25.$$

Đẳng thức xảy ra khi $4\sqrt{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$. Khi đó ta có: $\begin{cases} b=4a \\ 25ab=1 \end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{10},b=\frac{2}{5}.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 25 đặt được khi $a=\frac{1}{10},b=\frac{2}{5}$

Chú ý: Khi có được điểm rơi tại $a=\frac{1}{10},b=\frac{2}{5}$ ta có thể lý giải lời giải đầu như sau : Từ $a=\frac{1}{10},b=\frac{2}{5}\Rightarrow 4a=b$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$1=4a+b+\sqrt{ab}\ge 2\sqrt{4ab}+\sqrt{ab}=5\sqrt{ab}.$

$$\Rightarrow 1\ge 5\sqrt{ab}\Leftrightarrow \frac{1}{ab}\ge 25.$$

★**Thí dụ 1.** Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a+b=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}$

(Đề TS lớp 10 THPT Bắc Giang năm học 2008-2009)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $a+b=\frac{5}{4}$ ta có:

$$P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}=\left(\frac{4}{a}+4a\right)+\left(\frac{1}{4b}+4b\right)-4\left(a+b\right)\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}.4a}+2\sqrt{\frac{1}{4b}.4b}-5=8+2-5=5.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} \frac{4}{a}=4a \\ \frac{1}{4b}=4b \end{cases}\Leftrightarrow a=1,b=\frac{1}{4}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5 đạt được khi $a=1,b=\frac{1}{4}$.

Nhận xét: Rõ ràng không tự nhiên để có được lời giải như trên mà phải qua kĩ thuật chọn điểm rơi (cân bằng hệ số) để có sự ghép cặp: $\left(\frac{4}{a}+4a\right)$ và $\left(\frac{1}{4b}+4b\right)$, kĩ thuật này bạn có thể kham khảo ở mục trước. Đối với bài toán này chúng ta có thể làm bằng phương pháp ***tham số hóa*** như sau:

Cách 2 (Tham số hóa)

Do $a>0, b>0$ nên đặt $a=bt$ với $t>0$. Từ giả thiết ta có: $bt+b=\frac{5}{4} \Leftrightarrow b=\frac{5}{4(t+1)}$.

Do đó $P=\frac{16(t+1)}{5t}+\frac{t+1}{5}=\frac{1}{5}\left(17+\frac{16}{t}+t\right) \Rightarrow P \geq \frac{1}{5}\left(17+2\sqrt{\frac{16}{t}.t}\right)=5$.

Suy ra $P \geq 5$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{16}{t}=t \Rightarrow t=4$.

Do đó $b=\frac{1}{4}, a=1$. Vậy $\min P=5$ đạt được khi $a=1, b=\frac{1}{4}$.

Nhận xét: đối với nhiều em học sinh THCS thì việc sử dụng kĩ thuật chọn điểm rơi thực sự tương đối khó nhất là việc áp dụng vào từng bài toán cụ thể thì cần hết sức linh hoạt vì khi đọc về kĩ thuật này có thể các em hiểu và vận dụng được nhưng khi vào phòng thi thì các em lại quên cách cân bằng hệ số do chưa thực hiểu sâu sắc, nhưng đối với phương pháp***Tham số hóa*** thì việc hình thành lời giải khá tự nhiên, giúp dễ nhớ hơn, nhưng lời giải của phương pháp ***Tham số hóa*** lại dài và không đẹp mắt nên các em có thể nháp bằng phương pháp này để có điểm rơi của bài toán sau đó dựa vào điểm rơi tách hợp lý từ đó có lời giải ngắn gọn và đẹp mắt.

Ví dụ như bài toán tên sau khi tìm được dấu bằng xảy ra khi $b=\frac{1}{4}, a=1$ thì ta có $\frac{4}{a}=4$ và $\frac{1}{4b}=1$ để áp dụng bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{4}{a}=4=ka \Rightarrow k=4; \frac{1}{4b}=1=lb \Rightarrow l=4.$$

Do đó ta tách số như sau:

$$P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}=\left(\frac{4}{a}+4a\right)+\left(\frac{1}{4b}+4b\right)-4(a+b) \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.4a}+2\sqrt{\frac{1}{4b}.4b}-5=8+2-5=5.$$

Cách 3: Với những em có kiến thức cơ bản về bất đẳng thức có thể dễ dàng sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski dạng phân thức để dồn mẫu thức về $(a+b)$ giống giả thiết như sau: $P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}=\frac{4}{a}+\frac{\frac{1}{4}}{b} \geq \frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}{a+b}=\frac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}}=5$.

Hoặc bất đẳng thức Bunyakovski như sau:

$$\left(\sqrt{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}.\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2 \leq (a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}\right) \Leftrightarrow \frac{25}{4} \leq \frac{5}{4}.P \Leftrightarrow P \geq 5.$$

★**Thí dụ 4.** Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a+b\ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a+2b+\frac{6}{a}+\frac{8}{b}$.

Hướng dẫn giải

Ở bài toán này giả thiết ở dạng bất đẳng thức nên ta chỉ có thể dùng phương pháp ***tham số hóa*** để tìm điểm rơi của bài toán. Ta xét dấu bằng xảy ra tức là $a+b=6$. Giả sử $a=bt$ với $t>0$. Khi đó $bt+b=6\Leftrightarrow b=\frac{6}{t+1}$.

Do đó $P=\frac{3.6t}{t+1}+\frac{2.6}{t+1}+\frac{t+1}{t}+\frac{8(t+1)}{6}=\frac{18t+12}{t+1}+1+\frac{1}{t}+\frac{4(t+1)}{3}$

$$=\frac{12(t+1)+6t}{t+1}+1+\frac{1}{t}+\frac{4(t+1)}{3}=13+\frac{6t}{t+1}+\frac{1}{t}+\frac{4(t+1)}{3}\ge 13+3\sqrt[3]{\frac{6t}{t+1}.\frac{1}{t}.\frac{4(t+1)}{3}}=19.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{6t}{t+1}=\frac{1}{t}=\frac{4(t+1)}{3}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó ta có $a=2;b=4$. Vậy $\min P=19$ đạt được khi $a=2;b=4$.

Chú ý: Khi đã có điểm rơi $a=2;b=4$. thì ta có thể trình bày nhanh lời giải như sau:

Từ $a=2\Rightarrow \frac{6}{a}=3$ để áp dụng bất đẳng thức AM-GM thì $\frac{6}{a}=3=ka\Rightarrow k=\frac{3}{2}$.

Từ $b=4\Rightarrow \frac{8}{b}=2$ suy ra $\frac{8}{b}=2=lb\Rightarrow l=\frac{1}{2}$. Do đó ta có thể tách số như sau:

$$P=3a+2b+\frac{6}{a}+\frac{8}{b}=\frac{3}{2}(a+b)+\left(\frac{3}{2}a+\frac{6}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{8}{b}\right)\ge\frac{3}{2}.6+2\sqrt{\frac{3a}{2}.\frac{6}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{8}{b}}=9+2.3+2.2=19.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=2;b=4$.

★**Thí dụ 5.** Cho hai số thực không âm x,y thỏa mãn $x+y\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x}+2\sqrt{y}$.

Hướng dẫn giải

Ta sử dụng thêm tham số phụ $a,b\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm, ta có:

$a+x\ge 2\sqrt{ax}$; $\quad b+y\ge 2\sqrt{by}$.

Suy ra: $a+b+x+y\ge 2\left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}\right)$.

Sử dụng giả thiết $x+y\le 1$ ta được: $1+a+b\ge 2\left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}\right)$.

Các tham số a, b cần thỏa mãn $\sqrt{b}=2\sqrt{a}$ (để tạo thành P) và

$a=x,b=y\Rightarrow a+b=x+y=1$ (để đẳng thức xảy ra trong giả thiết).

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Từ đó $\begin{cases} b=4a \\ 5a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{5}$ khi $(a;b)=\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{4}{5}\right)$.

★**Thí dụ 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{7x}{4\sqrt{3}}-\sqrt{x(x-1)}$, với $x\ge 1$.

Hướng dẫn giải

Xét $a>0$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có:

$\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}.2\sqrt{ax(x-1)}\le\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(ax+x-1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ax=x-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{1-a}$ (với $a<1$)

Điều kiện $x\ge 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-a}\ge 1\Leftrightarrow a\ge 0$. Vậy $0\le a<1$.

Từ đó: $Q\ge\left(\dfrac{7}{4\sqrt{3}}-\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)x+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Ta cần tìm a thỏa mãn:

$$\frac{7}{4\sqrt{3}}-\frac{a+1}{2\sqrt{a}}=0\Leftrightarrow 7\sqrt{a}=2\sqrt{3}(a+1)\Leftrightarrow 12a^2-25a+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{4}{3} \\ a=\dfrac{3}{4} \end{array}\right..$$

Do $0\le a<1$ nên $a=\dfrac{3}{4}\Rightarrow x=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi $x=4$.

★**Thí dụ 6.** Cho các số dương m,n thỏa mãn $m+2n=4$.

Tìm GTLN của biểu thức $P=m^2n$.

Phân tích: Với những gì đã cho người học nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương.

Nếu như biểu thức $P=mn^2$ thì việc dùng bất đẳng thức Cauchy không hề gặp chút khó khăn nào:

$\sqrt[3]{P}=\sqrt[3]{m.n.n}\le\dfrac{m+n+n}{3}\Leftrightarrow P\le\left(\dfrac{m+2n}{3}\right)^3\Leftrightarrow P\le\dfrac{64}{27}$. Từ đó chỉ ra giá trị lớn nhất của P.

Tuy nhiên với $P = m^2n$ thì lại không đơn giản như vậy. Đòi hỏi người học phải thật sự linh hoạt và tinh tế khi áp dụng.

Nếu áp dụng thông thường: $\sqrt[3]{m.m.n} \le \dfrac{m+m+n}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{m.m.n} \le \dfrac{2m+n}{3}$. Đối với biến m thì thừa, biến n lại thiếu so với giả thiết $m+2n=4$.

Do đó chúng ta tiếp tục suy nghĩ để giải quyết vấn đề này. Làm thế nào tăng n lên và giảm m xuống để xuất hiện tổng $m+2n$. Có một hướng suy nghĩ đó là bổ sung các hằng số đi kèm các biến trước khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\sqrt[3]{km.km.\ln} \le \frac{km+km+\ln}{3} \Leftrightarrow k^2l.P \le \left(\frac{2km+\ln}{3}\right)^3$$

Từ đó chúng ta chọn các hằng số k,l thỏa mãn $2km+\ln = m+2n$. Suy ra

$$\begin{cases} 2k=1 \\ l=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1}{2} \\ l=2 \end{cases}$$

Lời giải:

Theo Cauchy cho 3 số ta có

$$\sqrt[3]{\frac{m}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot 2n} \le \frac{\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+2n}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}P \le \left(\frac{m+2n}{3}\right)^3 \Leftrightarrow P \le 2.\left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow P \le \frac{128}{27}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{m}{2}=\dfrac{m}{2}=2n \\ m+2n=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{2}{3} \\ n=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

Vậy $\max P = \dfrac{128}{27}$ khi $(m;n) = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

Nhận xét: *Sự linh hoạt thể hiện trong tư duy để tìm ra cách giải hợp lí, đúng đắn trong ví dụ trên là sử dụng thêm bớt các hằng số vào các biến trước khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy nhằm mục tiêu xuất hiện giả thiết bài toán đã cho. Đây chính là biểu hiện của tính mềm dẻo trong tư duy.*

2) Kỹ thuật nhân thêm hệ số

★Thí dụ 1. Tìm GTLN của : $A = a^2(1\text{-}a)$, $a \in (0,1)$

Hướng dẫn giải

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Do a, 1- $a > \mathbf{0}$ nên áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$A = \frac{1}{2}a^2(2\text{-}2a) = \frac{1}{2}a.a(2\text{-}2a) \le \frac{1}{2}\left(\frac{a+a+2\text{-}2a}{3}\right)^3 = \frac{1}{2}.\frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow A \le \frac{4}{27}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2 - 2a = \frac{2}{3}$

Vậy GTLN của A là $\frac{4}{27}$

★**Thí dụ 2.** Tìm GTLN của : $A = a^3(2\text{-}a)$, $a \in (0,2)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$A = \frac{1}{3}a.a.a.(6-3a) \le \frac{1}{3}\left(\frac{a+a+a+6-3a}{4}\right)^4 = \frac{27}{16}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 6 - 3a = \frac{3}{2}$

Vậy GTLN của A là $\frac{27}{16}$

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực dương a, b thỏa $\begin{cases} a \le 3 \\ b \le 4 \end{cases}$. Tìm GTLN của

$$A = (3-a)(4-b)(2a+3b)$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$A = \frac{1}{6}(6-2a)(12-3b)(2a+3b) \le \frac{1}{6}\left(\frac{6-2a+12-3b+2a+3b}{3}\right)^3 = 36$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 6-2a = 12-3b = 2a+3b = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy GTLN của A là 36

★**Thí dụ 4.** Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 3$ thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của của biểu thức $P = abc$.

Hướng dẫn giải

Do tính đối xứng của a và b (chỉ có hai biến a và b thôi, vì điều kiện $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 3$ cho thấy vai trò của c khác với a, b) nên ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b. Mặt khác từ giả thiết $c \ge 3$, ta lại dự đoán tiếp rằng biểu thức P đạt giá trị lớn nhất tại c = 3. Do đó ta có:

$$\begin{cases} a = b \\ c = 3 \\ a + b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{3}{2}, c = 3.$$

Từ sự dự đoán này ta sử nhân thêm hệ số 2 vào hai biến a và b sau đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM, khi đó:

$$P = abc = \frac{1}{4}(2a)(2b)c \le \frac{1}{4}\left(\frac{2a + 2b + c}{3}\right)^3.$$

Mặt khác $2a + 2b + c = 2(a + b + c) - c = 12 - c \le 12 - 3 = 9$ nên:

$$P = abc = \frac{1}{4}(2a)(2b)c \le \frac{1}{4}\left(\frac{2a + 2b + c}{3}\right)^3 \le \frac{1}{4}\left(\frac{9}{3}\right)^3 = \frac{27}{4}.$$

Đến đây thì bài toán đã được giải quyết.

Giá trị lớn nhất của P là $\frac{27}{4}$ đạt được khi $a = b = \frac{3}{2}, c = 3.$

★**Thí dụ 5.** Cho số thực a, b thỏa mãn $0 \le a \le 3$ và $a + b = 11$. Tìm giá trị lớn nhất của của biểu thức $P = ab$.

(Trích đề vào 10 Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa 2004-2005)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $0 \le a \le 3$ ta dự đoán P đạt giá trị lớn nhất khi $a = 3$, mặt khác do $a + b = 11$ nên khi đó $b = 8$.

Từ dự đoán này để sử dụng bất đẳng thức AM – GM được đúng theo điểm rơi ta thêm hệ số 8 vào a và hệ số 3 vào b sau đó mới áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số (8a) và (3b), ta làm như sau : $P = ab = \frac{1}{24}(8a)(3b) \le \left(\frac{8a + 3b}{2}\right)^2.$

Mặt khác $8a + 3b = 3(a + b) + 5a \le 33 + 5.3 = 48$ nên $P \le \frac{1}{24}\left(\frac{48}{2}\right)^2 = 24.$

Đến đây thì bài toán đã được giải quyết.

Giá trị lớn nhất của P là 24 đạt được khi $a = 3, b = 8.$

★**Thí dụ 6.** Cho các số thực *a, b, c* thỏa $\begin{cases} a \ge 2 \\ b \ge 6 \\ c \ge 12 \end{cases}$. Tìm GTLN của:

$$A = \frac{bc\sqrt{a - 2} + ca\sqrt[3]{b - 6} + ab\sqrt[4]{c - 12}}{abc}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$bc\sqrt{a-2}=\frac{bc}{\sqrt{2}}\sqrt{(a-2).2}\le\frac{bc}{\sqrt{2}}.\frac{(a-2)+2}{2}=\frac{abc}{2\sqrt{2}}$$
$$ca\sqrt[3]{b-6}=\frac{ca}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{(b-6).3.3}\le\frac{ca}{\sqrt[3]{9}}.\frac{(b-6)+3+3}{3}=\frac{abc}{3\sqrt[3]{9}}$$
$$ab\sqrt[4]{c-12}=\frac{ab}{\sqrt[4]{64}}\sqrt[4]{(c-12).4.4.4}\le\frac{ab}{\sqrt[4]{64}}.\frac{(c-12)+4+4+4}{4}=\frac{abc}{4\sqrt[4]{64}}=\frac{abc}{8\sqrt{2}}$$

Khi đó ta có:

$$A=\frac{bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt[3]{b-6}+ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{8\sqrt{2}}=\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a-2=2\\b-6=3\\c-12=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=9\\c=16\end{cases}$

Vậy GTLN của A là $\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$

★**Thí dụ 7.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Tìm GTLN của:

$$A=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a+b=\frac{2}{3}\\b+c=\frac{2}{3}\\c+a=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(a+b).\frac{2}{3}}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{(a+b)+\frac{2}{3}}{2}\quad\textbf{(1)}$$

$$\sqrt{b+c}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{(b+c)+\frac{2}{3}}{2}\quad\textbf{(2)}$$

$$\sqrt{c+a}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{(c+a)+\frac{2}{3}}{2}\quad\textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$A=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{2(a+b+c)+3.\frac{2}{3}}{2}=\sqrt{6}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{2}{3} \\ b+c=\dfrac{2}{3} \\ c+a=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{6}$

Lưu ý: *Trong bài toán sử dụng kỹ thuật nhân thêm hệ số, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi để tìm hệ số cho phù hợp.*

★**Thí dụ 8.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le 3\sqrt[3]{3}$$

Phân tích:

Do biểu thức đã cho là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi:

$$a=b=c=1 \Rightarrow \begin{cases} a+2b=3 \\ b+2c=3 \\ c+2a=3 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\sqrt[3]{a+2b}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{(a+2b).3.3}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\dfrac{(a+2b)+3+3}{3}=\dfrac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}$ **(1)**

$\sqrt[3]{b+2c}\le\dfrac{6+b+2c}{3\sqrt[3]{9}}$ **(2)**

$\sqrt[3]{c+2a}\le\dfrac{6+c+2a}{3\sqrt[3]{9}}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le\dfrac{18+3(a+b+c)}{3\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[3]{3}$ (đpcm)

★**Thí dụ 9.** Cho $a, b, c\in[-2;2]$ thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\le 3\sqrt{3}$$

Phân tích:

Do biểu thức đã cho là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi:

$$a=b=c=1 \Rightarrow \begin{cases} 4-a^2=3 \\ 4-b^2=3 \\ 4-c^2=3 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

$\sqrt{4-a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(4-a^2\right)3} \le \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\left(4-a^2\right)+3}{2} = \frac{7-a^2}{2\sqrt{3}}$ **(1)**

$\sqrt{4-b^2} \le \frac{7-b^2}{2\sqrt{3}}$ **(2)**

$\sqrt{4-c^2} \le \frac{7-c^2}{2\sqrt{3}}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2} \le \frac{21-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\sqrt{3}}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunyakovski ta có

$$\left(a+b+c\right)^2 \le \left(1+1+1\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}$$

nên $\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2} \le \dfrac{21-\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ (đpcm)

10) Kỹ thuật hạ bậc

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$ (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^2+b^2+c^2$

Phân tích: Sự chênh lệch về số mũ của các biểu thức $a^2+b^2+c^2$ và $a+b+c$ gợi cho ta sử dụng bất đẳng thức AM - GM để hạ bậc $a^2+b^2+c^2$. Nhưng ta cần áp dụng cho bao nhiêu số và là những số nào? Căn cứ vào bậc của các biến số *a, b, c* trong các biểu thức trên (số bậc giảm 2 lần) thì ta cần áp dụng bất đẳng thức AM - GM lần lượt cho a^2, b^2 và c^2 cùng với 1 hằng số dương tương ứng khác để làm xuất hiện a, b và c. Do *a, b, c* dương và có vai trò như nhau nên ta dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=b=c$, từ **(*)** ta có $a=b=c=\frac{1}{3}$. Mặt khác thì dấu "=" của bất đẳng thức AM - GM xảy ra khi chỉ khi các số tham gia bằng nhau. Khi đó ta có lời giải như sau:

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 2 số: a^2 và $\frac{1}{9}$ ta có:

$a^2+\frac{1}{9} \ge 2\sqrt{a^2.\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}a$ **(1)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

Tương tự:

$b^2+\frac{1}{9} \ge \frac{2}{3}b$ **(2)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$

$c^2+\frac{1}{9} \ge \frac{2}{3}c$ **(3)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1), (2)** và **(3)** ta được:

$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{3}\ge\frac{2}{3}(a+b+c)=\frac{2}{3}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy GTNN của A là $\frac{1}{3}$

★Thí dụ 1. Cho các số thực dương *a, b* thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=1$ **(*)**. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Phân tích: Căn cứ vào bậc của các biến số *a, b* trong các biểu thức trên (số bậc giảm 6 lần) thì ta cần áp dụng bất đẳng thức AM - GM lần lượt cho a^3 và b^3 cùng với 5 hằng số dương tương ứng khác để làm xuất hiện $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$. Do *a, b* dương và có vai trò như nhau nên ta dự đoán *A* đạt giá trị lớn nhất khi $a=b$, từ **(*)** ta có $a^3=b^3=\frac{1}{2}$. Mặt khác thì dấu "=" của bất đẳng thức AM - GM xảy ra khi chỉ khi các số tham gia bằng nhau. Khi đó ta có lời giải như sau:

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 6 số: a^3 và 5 số $\frac{1}{2}$ ta có:

$a^3+5.\frac{1}{2}\ge 6.\sqrt[6]{a^3.\left(\frac{1}{2}\right)^5}=6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}.\sqrt{a}$ **(1)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Tương tự:

$b^3+5.\frac{1}{2}\ge 6.\sqrt[6]{b^3.\left(\frac{1}{2}\right)^5}=6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}.\sqrt{b}$ **(2)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)** và **(2)** ta được:

$a^3+b^3+5\ge 6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow 1+5\ge 6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt[6]{2^5}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Vậy giá trị lớn nhất của *A* là $\sqrt[6]{2^5}$

★Thí dụ 2. Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3\ge 3$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$a^3+b^3+1\ge 3\sqrt[3]{a^3b^3}=3ab$ **(1)** ; $b^3+c^3+1\ge 3bc$ **(2)** ; $c^3+a^3+1\ge 3ca$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\ge 3.3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge 3$ (đpcm)

★**Thí dụ 3.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a^3+b^3+c^3=3$.

Chứng minh rằng: $a^5+b^5+c^5\ge 3$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 5 số: 3 số a^5 và 2 số 1, ta có:

$3a^5+2\ge 5\sqrt[5]{a^{15}1.1}=5a^3$ **(1)**

Tương tự:

$3b^5+2\ge 5b^3$ **(2)** ; $3c^5+2\ge 5c^3$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$3\left(a^5+b^5+c^5\right)+6\ge 5\left(a^3+b^3+c^3\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(a^5+b^5+c^5\right)+6\ge 5.3$

$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5\ge 3$ (đpcm)

★**Thí dụ 4.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3$.

Chứng minh rằng: $a^7+b^7+c^7\ge 3$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 7 số: 3 số a^7 , 3 số b^7 và số 1, ta có:

$3a^7+3b^7+1\ge 7\sqrt[7]{a^{21}.b^{21}1}=7a^3b^3$ **(1)**

Tương tự:

$3b^7+3c^7+1\ge 7b^3c^3$ **(2)** ; $3c^7+3a^7+1\ge 7c^3a^3$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$6\left(a^7+b^7+c^7\right)+3\ge 7\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)$

$\Leftrightarrow 6\left(a^7+b^7+c^7\right)+3\ge 7.3$

$\Leftrightarrow a^7+b^7+c^7\ge 3$ (đpcm)

★**Thí dụ 5.** Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+4\ge 2a+2b+ab$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$a^2+4\ge 2\sqrt{a^2.4}=4a$ **(1);** $b^2+4\ge 4b$ **(2) ;** $a^2+b^2\ge 2ab$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$2a^2+2b^2+8\ge 4a+4b+2ab$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+4\ge 2a+2b+ab$ (đpcm)

★**Thí dụ 6.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 6 số: 4 số a^3,1 số b^3 và 1 số c^3 ta có:

$4a^3+b^3+c^3 \ge 6\sqrt[6]{a^{12}.b^3.c^3}=6a^2\sqrt{bc}$ **(1)**

Tương tự:

$4b^3+c^3+a^3 \ge 6b^2\sqrt{ca}$ **(2)** ; $4c^3+a^3+b^3 \ge 6c^2\sqrt{ab}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$6\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 6\left(a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}\right)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$ (đpcm)

★**Thí dụ 7.** Cho các số thực dương a, b, c, m, n. CMR:

$$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \ge a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho $m+n$ số: m số a^{m+n} và n số b^{m+n} ta có:

$ma^{m+n}+nb^{m+n} \ge (m+n).\sqrt[m+n]{\left(a^{m+n}\right)^m\left(b^{m+n}\right)^n}=(m+n).a^m b^n$ **(1)**

Tương tự:

$mb^{m+n}+nc^{m+n} \ge (m+n).b^m c^n$ **(2)**

$mc^{m+n}+na^{m+n} \ge (m+n).c^m a^n$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$(m+n)\left(a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\right) \ge (m+n)\left(a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n\right)$

$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \ge a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$ (đpcm)

Lưu ý: *Bất đẳng thức chúng ta vừa chứng minh sẽ được sử dụng trong chứng minh các bài toán sau này.*

★**Thí dụ 8.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1} \le 1$$

Hướng dẫn giải

Từ kết quả **bài 7** ta có $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \ge a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$

Chọn $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \\ c=a \end{cases}$ ta được:

$a^3+b^3+a^3 \ge a^2b+b^2a+a^2a=a^2b+b^2a+a^3$

$\Rightarrow a^3+b^3 \ge a^2b+b^2a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^3+b^3+1} \le \dfrac{1}{a^2b+b^2a+1}=\dfrac{abc}{a^2b+b^2a+abc}=\dfrac{c}{a+b+c}$ $(\text{do } abc=1)$ **(1)**

Tương tự:

$$\frac{1}{b^3+c^3+1} \le \frac{a}{a+b+c} \ \textbf{(2)}$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+1} \le \frac{b}{a+b+c} \ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1} \le \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \text{(đpcm)}$$

Bài toán 2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $10a^2+10b^2+c^2 \ge 4$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$8a^2+\frac{c^2}{2} \ge 2\sqrt{8a^2.\frac{c^2}{2}} = 4ac$$

$$8b^2+\frac{c^2}{2} \ge 2\sqrt{8b^2.\frac{c^2}{2}} = 4bc$$

$$2a^2+2b^2 \ge 2\sqrt{2a^2.2b^2} = 4ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$10a^2+10b^2+c^2 \ge 4(ab+bc+ca) = 4.1 = 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 8a^2 = \dfrac{c^2}{2} \\ 8b^2 = \dfrac{c^2}{2} \\ 2a^2 = 2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Đây là một lời giải ngắn gọn nhưng có vẻ hơi thiếu tự nhiên. Chúng ta sẽ thắc mắc tại sao lại tách được $10 = 8+2$. Nếu tách cách khác, chẳng hạn $10 = 6+4$ liệu có giải được không? Tất nhiên mọi cách tách khác đều không dẫn đến kết quả, và tách $10 = 8+2$ cũng không phải là sự may mắn. Bây giờ ta sẽ tìm lí do việc tách $10 = 8+2$ ở bài toán trên.

Với $0 < \alpha < 10$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\alpha a^2+\frac{c^2}{2} \ge 2\sqrt{\alpha a^2.\frac{c^2}{2}} = \sqrt{2\alpha}ac; \quad \alpha b^2+\frac{c^2}{2} \ge 2\sqrt{\alpha b^2.\frac{c^2}{2}} = \sqrt{2\alpha}bc$$

$$(10-\alpha)a^2+(10-\alpha)b^2 \ge 2\sqrt{(10-\alpha)a^2(10-\alpha)b^2} = (20-2\alpha)ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$10a^2+10b^2+c^2 \ge \sqrt{2\alpha}(ac+bc)+(20-2\alpha)ab$$

Lúc này ta cân bằng điều kiện giả thuyết, tức là:

$$\sqrt{2\alpha} = 20 - 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = 400 - 80\alpha + 4\alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 41\alpha + 200 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 8 \\ \alpha = \dfrac{25}{2} > 10 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \alpha = 8$$

Khi đó ta có lời giải bài toán như trên.

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 5$. CMR: :

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 10$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$2a^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{2a^2.\frac{c^2}{2}} = 2ac$$

$$2b^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{2b^2.\frac{c^2}{2}} = 2bc$$

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2.b^2} = 2ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca) = 2.5 = 10$$

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a + 4b$

Phân tích:

Dự đoán A đạt GTLN khi $a^3 + b^3 = 1$

Giả sử A đạt GTLN khi $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \end{cases}$. Ta có $\alpha^3 + \beta^3 = 1$ **(1)**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 3 số: a^3 và 2 số α^3 ta có:

$$a^3 + 2\alpha^3 \geq 3.\sqrt[3]{a^3.(\alpha^3)^2} = 3\alpha^2 a$$

Tương tự:

$$b^3 + 2\beta^3 \geq 3\sqrt[3]{b^3.(\beta^3)^2} = 3\beta^2 b$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(a^3 + b^3) + 2(\alpha^3 + \beta^3) \geq 3\alpha^2 a + 3\beta^2 b$$

Đẻ xuất hiện ở vế phải $a + 4b$ ta chọn α, β sao cho

$$3\alpha^2 a : 3\beta^2 b = a : 4b$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} \quad \textbf{(2)}$$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Từ **(1)** và **(2)** ta có hệ: $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{2} \\ \alpha^3 + \beta^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ \beta = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases}$

Khi đó ta có lời giải sau:

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a^3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \geq 3.\sqrt[3]{a^3.\frac{1}{9}.\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}a$$

$$b^3 + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} \geq \frac{4}{\sqrt[3]{3}}b$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(a^3 + b^3\right) + 2 \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(a + 4b)$$

$$\Rightarrow a + 4b \leq \sqrt[3]{3}\left[\left(a^3 + b^3\right) + 2\right] \leq 3\sqrt[3]{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a^3 = \dfrac{1}{9} \\ b^3 = \dfrac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ b = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases}$

Vậy GTLN của A là $3\sqrt[3]{3}$

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.

Tìm GTNN của $A = 4a^2 + 6b^2 + 3c^2$

Phân tích: Với $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$4a^2 + \alpha \geq 2\sqrt{4a^2.\alpha} = 2\sqrt{4\alpha}a \quad ; \quad 6b^2 + \beta \geq 2\sqrt{6b^2.\beta} = 2\sqrt{6\beta}b \quad ; \quad 3c^2 + \gamma \geq 2\sqrt{3c^2.\gamma} = 2\sqrt{3\gamma}c$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$4a^2 + 6b^2 + 3c^2 + \alpha + \beta + \gamma \geq 2\sqrt{4\alpha}a + 2\sqrt{6\beta}b + 2\sqrt{3\gamma}c$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a^2 = \alpha \\ 6b^2 = \beta \\ 3c^2 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a = \sqrt{\dfrac{\alpha}{4}} \\ b = \sqrt{\dfrac{\beta}{6}} \\ c = \sqrt{\dfrac{\gamma}{3}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{4}} + \sqrt{\dfrac{\beta}{6}} + \sqrt{\dfrac{\gamma}{3}} = 3$

Chọn α, β, γ sao cho $4\alpha = 6\beta = 3\gamma$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\alpha}{4}}+\sqrt{\dfrac{\beta}{6}}+\sqrt{\dfrac{\gamma}{3}}=3\\ 4\alpha=6\beta=3\gamma\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\alpha}{4}}+\sqrt{\dfrac{\beta}{6}}+\sqrt{\dfrac{\gamma}{3}}=3\\ \beta=\dfrac{4\alpha}{6}\\ \gamma=\dfrac{4\alpha}{3}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\frac{\alpha}{4}}+\sqrt{\frac{4\alpha}{6.6}}+\sqrt{\frac{4\alpha}{3.3}}=3\Rightarrow\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=3$$

$$\Rightarrow\alpha=4\Rightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{8}{3}\\ \gamma=\dfrac{16}{3}\end{cases}$$

Khi đó ta có lời giải bài toán như sau

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$4a^2+4\ge 2\sqrt{4a^2.4}=8a$$

$$6b^2+\frac{8}{3}\ge 2\sqrt{8b^2.\frac{6}{3}}=8b$$

$$3c^2+\frac{16}{3}\ge 2\sqrt{3c^2.\frac{16}{3}}=8c$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta được:

$$4a^2+6b^2+3c^2+4+\frac{8}{3}+\frac{16}{3}\ge 8(a+b+c)=24$$

$$\Rightarrow 4a^2+6b^2+3c^2\ge 12$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=3\\ 4a^2=4\\ 6b^2=\dfrac{8}{3}\\ 3c^2=\dfrac{16}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{2}{3}\\ c=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Vậy GTNN của A là 12

★**Thí dụ 6.** Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a+\frac{1}{b}=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}$$

(Trích đề chuyên Bình Định năm 2018-2019)

Phân tích: Quan sát a và b ta thấy có vẻ không đối xứng, nhưng nếu tinh tế bạn sẽ nhận ra nếu đặt $\frac{1}{b}=c$ thì ta sẽ được một bất đẳng thức đối xứng hoàn toàn. Khi đó ta được:

Cho a, c dương thỏa mãn: $a+c=1$. Chứng minh rằng: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\ge\frac{25}{2}$.

Do a và c đối xứng nên ta dễ dàng toán được dấu bằng của bài toán đạt được khi:

$$a=c=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2},b=2\Rightarrow a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=\frac{5}{2}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a+\frac{1}{b}=1\Leftrightarrow\frac{1}{b}=1-a\Leftrightarrow ab+1=b\ (a>0,b>0)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{4}\ge2\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2.\frac{25}{4}}=5\left(a+\frac{1}{a}\right);\quad\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\frac{25}{4}\ge2\sqrt{\left(b+\frac{1}{b}\right)^2.\frac{25}{4}}=5\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow A=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge5\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{25}{2}$$

$$=5\left(1+b+\frac{1}{a}\right)-\frac{25}{2}=5\left(1+\frac{ab+1}{a}\right)-\frac{25}{2}=5\left(1+\frac{b}{a}\right)-\frac{25}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2\ge4xy$, ta có:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\ge4\frac{a}{b}\Leftrightarrow1\ge4\frac{a}{b}\Leftrightarrow\frac{b}{a}\ge4\quad(2'),$$

Do đó: $A\ge5(1+4)-\frac{25}{2}=\frac{25}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a=\frac{1}{b},a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=\frac{5}{2}$ và $a+\frac{1}{b}=1\Rightarrow a=\frac{1}{2},b=2.$

12) Kỹ thuật cộng thêm

★**Thí dụ 1.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{1}{a}}=\frac{2}{b}\ \textbf{(1)};\quad\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{c}\ \textbf{(2)};\quad\frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}\ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

CHINH PHỤC KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HAI

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 2.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{2b+c}+\frac{b^2}{2c+a}+\frac{c^2}{2a+b}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^2}{2b+c}+\frac{2b+c}{9}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2b+c}.\frac{2b+c}{9}}=\frac{2a}{3}\ \textbf{(1)}\ ;$$

$$\frac{b^2}{2c+a}+\frac{2c+a}{9}\geq\frac{2b}{3}\ \textbf{(2)}\ ;\qquad \frac{c^2}{2a+b}+\frac{2a+b}{9}\geq\frac{2c}{3}\ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{2b+c}+\frac{b^2}{2c+a}+\frac{c^2}{2a+b}+\frac{3(a+b+c)}{9}\geq\frac{2(a+b+c)}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{2b+c}+\frac{b^2}{2c+a}+\frac{c^2}{2a+b}\geq\frac{a+b+c}{3}\text{ (đpcm)}$$

Lưu ý: *Trong bài toán sử dụng kỹ thuật cộng thêm hệ số, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi và kỹ thuật hạ bậc để tìm hạng tử cho phù hợp.*

Ví dụ:

- Đối với **bài 1** bất đẳng thức đã cho có tính đối xứng với *a, b, c* nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$. Khi đó $\frac{a}{b^2}=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}$, ta chọn $\frac{1}{a}$.
- Đối với **bài 2** bất đẳng thức đã cho có tính đối xứng với *a, b, c* nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$. Khi đó $\frac{a^2}{2b+c}=\frac{a^2}{2a+a}=\frac{a}{3}$, muốn sử dụng bất đẳng thức AM - GM để làm mất mẫu thì ta cộng thêm $\frac{2b+c}{9}$. Chọn mẫu là số 9 vì $\frac{2b+c}{9}=\frac{2a+a}{9}=\frac{a}{3}$.

★**Thí dụ 3.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3+b^3}{ab}+\frac{b^3+c^3}{bc}+\frac{c^3+a^3}{ca}\geq 2(a+b+c)$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a^3+b^3}{ab}+\frac{b^3+c^3}{bc}+\frac{c^3+a^3}{ca}=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.b}=2a$ **(1)**; $\frac{b^2}{a}+a\ge 2b$ **(2)** ; $\frac{b^2}{c}+c\ge 2b$ **(3)** ;

$\frac{c^2}{b}+b\ge 2c$ **(4)** ; $\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$ **(5)** ; $\frac{a^2}{c}+c\ge 2a$ **(6)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1)** đến **(6)** ta được:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}+2(a+b+c)\ge 4(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}\ge 2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{ab}+\frac{b^3+c^3}{bc}+\frac{c^3+a^3}{ca}\ge 2(a+b+c) \text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 4.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}.\frac{1}{a}.\frac{1}{a}}=\frac{3}{b}$ **(1)** ; $\frac{b^2}{c^3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{3}{c}$ **(2)**; $\frac{c^2}{a^3}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{a}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 5.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{b}+b^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}.\frac{a^3}{b}.b^2}=3a^2$ **(1)** ;

$\frac{b^3}{c}+\frac{b^3}{c}+c^2\ge 3b^2$ **(2)** ; $\frac{c^3}{a}+\frac{c^3}{a}+a^2\ge 3c^2$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge a^2+b^2+c^2 \text{ (đpcm)}$$

★Thí dụ 6. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \ge \frac{3}{4}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}.\frac{1+b}{8}.\frac{1+c}{8}}=\frac{3}{4}a \text{ } \mathbf{(1)} \text{ ;}$$

$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8} \ge \frac{3}{4}b \text{ } \mathbf{(2)} \text{ ;}$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8} \ge \frac{3}{4}c \text{ } \mathbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \ge \frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4} \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{abc}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

(đpcm)

★Thí dụ 7. Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^4}{bc^2}+\frac{b^4}{ca^2}+\frac{c^4}{ab^2} \ge a+b+c$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^4}{bc^2}+b+c+c \ge 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{bc^2}.b.c.c}=4a \text{ } \mathbf{(1)}$$

$$\frac{b^4}{ca^2}+c+a+a \ge 4b \text{ } \mathbf{(2)}$$

$$\frac{c^4}{ab^2}+a+b+b \ge 4c \text{ } \mathbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^4}{bc^2}+\frac{b^4}{ca^2}+\frac{c^4}{ab^2}+3(a+b+c) \ge 4(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{bc^2}+\frac{b^4}{ca^2}+\frac{c^4}{ab^2} \ge a+b+c \text{ (đpcm)}$$

★Thí dụ 8. Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{a+b}{4ab}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{c^2(a+b)}.\frac{a+b}{4ab}}=\frac{1}{c}\quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}\ge\frac{1}{a}\quad \textbf{(2)}\ ;\quad \frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{c+a}{4ca}\ge\frac{1}{b}\quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{a+b}{4ab}+\frac{b+c}{4bc}+\frac{c+a}{4ca}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4c}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 9.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{a(b+c)}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a^3}{b+c}.\frac{a(b+c)}{4}}=a^2\quad \textbf{(1)}\ ;$$

$$\frac{b^3}{c+a}+\frac{b(c+a)}{4}\ge b^2\quad \textbf{(2)}\ ;\quad \frac{c^3}{a+b}+\frac{c(a+b)}{4}\ge c^2\quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{2}\ge a^2+b^2+c^2\quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có: $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\ge a^mb^n+b^mc^n+c^ma^n$

Chọn $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ ta được:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge\frac{ab+bc+ca}{2}\quad \textbf{(2')}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1’)**và **(2’)** ta được:

$$\Rightarrow\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{3}{2} \text{ (đpcm)}$$

★Thí dụ 10. Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2} \ge a^3+b^3+c^3$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^5}{b^2}+ab^2 \ge 2\sqrt{\frac{a^5}{b^2}.ab^2}=2a^3 \quad \textbf{(1)};$$

$$\frac{b^5}{c^2}+bc^2 \ge 2b^3 \quad \textbf{(2)}; \quad \frac{c^5}{a^2}+ca^2 \ge 2c^3 \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}+ab^2+bc^2+ca^2 \ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right) \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có: $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \ge a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n$

Chọn $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$ ta được:

$$a^3+b^3+c^3 \ge ab^2+bc^2+ca^2 \quad \textbf{(2')}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1')**và **(2')** ta được:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}+ab^2+bc^2+ca^2+a^3+b^3+c^3 \ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+ab^2+bc^2+ca^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2} \ge a^3+b^3+c^3 \text{ (đpcm)}$$

★Thí dụ 11. Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a} \ge \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{a(a+2b)}{9} \ge 2\sqrt{\frac{a^3}{a+2b}.\frac{a(a+2b)}{9}}=\frac{2}{3}a^2 \quad \textbf{(1)};$$

$$\frac{b^3}{b+2c}+\frac{b(b+2c)}{9} \ge \frac{2}{3}b^2 \quad \textbf{(2)}; \quad \frac{c^3}{c+2b}+\frac{c(c+2b)}{9} \ge \frac{2}{3}c^2 \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}+\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{2}{9}(ab+bc+ca) \ge \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}+\frac{2}{9}(ab+bc+ca) \ge \frac{5}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có: $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\ge a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$

Chọn $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ ta được:

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$\Rightarrow \frac{2}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge \frac{2}{9}\left(ab+bc+ca\right)$ **(2')**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1')** và **(2')** ta được:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}+\frac{2}{9}\left(ab+bc+ca\right)+\frac{2}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge \frac{5}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{2}{9}\left(ab+bc+ca\right)$$

$\Rightarrow \frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}\ge \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (đpcm)

★**Thí dụ 12.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\ge \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{b+c}{a^2}+\frac{4}{b+c}\ge 2\sqrt{\frac{b+c}{a^2}.\frac{4}{b+c}}=\frac{4}{a}$ **(1)** ;

$\frac{c+a}{b^2}+\frac{4}{c+a}\ge \frac{4}{b}$ **(2)** ; $\frac{a+b}{c^2}+\frac{4}{a+b}\ge \frac{4}{c}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\ge \frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}$ **(1')**

Mà ta có:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=\frac{4}{2\sqrt{ab}}\ge \frac{4}{a+b}$ **(2')** ;

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{4}{b+c}$ **(3')** ; $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\ge \frac{4}{c+a}$ **(4')**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1')**, **(2')**, **(3')** và **(4')** ta được:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\ge \frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}$$

$\Rightarrow \frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\ge \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$ (đpcm)

★**Thí dụ 13.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{4c^2}{a}\ge a+3b$$

Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=2c$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.b}=2a$ **(1)**; $\frac{b^2}{c}+4c\ge 4b$ **(2)** ; $\frac{4c^2}{a}+a\ge 4c$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1), (2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{4c^2}{a}+a+b+4c\ge 2a+4b+4c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{4c^2}{a}\ge a+3b \text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 14.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\ge \frac{1}{9}(64c-a-b)$$

Hướng dẫn giải

Ta thấy dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=2c$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{4(b+c)}{9}\ge\frac{4a}{3}$ **(1)**; $\frac{b^2}{c+a}+\frac{4(c+a)}{9}\ge\frac{4b}{3}$ **(2)** ; $\frac{16c^2}{a+b}+(a+b)\ge 8c$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1), (2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}+\frac{13}{9}(a+b)+\frac{8}{9}c\ge\frac{4}{3}(a+b)+8c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\ge \frac{1}{9}(64c-a-b) \text{ (đpcm)}$$

13) Kỹ thuật AM - GM ngược dấu

Xét bài toán sau:

Bài toán: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$

Phân tích và giải:

Ta không thể dùng trực tiếp bất đẳng thức AM - GM với mẫu vì bất đẳng thức sau đó sẽ đổi chiều:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\ge\frac{3}{2}$$

$$\left(\text{Do } \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{2a}.\frac{1}{2b}.\frac{1}{2c}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}=\frac{3}{2}\right)$$

Đến đây chúng ta sẽ bị lúng túng trong cách giải. Ở đây ta sẽ sử dụng lại bất đẳng thức AM - GM theo cách khác:

$$\frac{1}{a^2+1}=\frac{\left(a^2+1\right)-a^2}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2} \qquad (1)$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{b^2+1}\ge 1-\frac{b}{2}$ **(2)**; $\frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

★**Thí dụ 1.** Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge 1-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=1-\frac{\sqrt{ab}}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+bc}\ge 1-\frac{\sqrt{bc}}{2}$ **(2)**; $\frac{1}{1+ca}\ge 1-\frac{\sqrt{ca}}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge 3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

$$\ge 3-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=3-\frac{a+b+c}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 2.** Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$ **(1)**

Tương tự ta có: $\frac{b}{c^2+1}\ge b-\frac{bc}{2}$ **(2)**; $\frac{c}{a^2+1}\ge c-\frac{ca}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{d}{d^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2} \quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có:

$$ab+bc+ca\le\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3 \qquad \mathbf{(2')}$$

Từ **(1′)** và **(2′)** ta có:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

Lưu ý: *Ta sẽ sử dụng kết quả* $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$ *trong chứng minh các bài toán khác.*

★**Thí dụ 3.** Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\ge a+1-\frac{(a+1)b^2}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}$ **(1)**

Tương tự ta có: $\frac{b+1}{c^2+1}\ge b+1-\frac{bc+c}{2}$ **(2)** ; $\frac{c+1}{a^2+1}\ge c+1-\frac{ca+a}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge a+b+c+3-\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2}$$

$$\ge\frac{a+b+c}{2}+3-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\ge\frac{3}{2}+3-\frac{\frac{(a+b+c)^2}{3}}{2}=\frac{3}{2}+3-\frac{3}{2}=3$$

Vậy $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$

★**Thí dụ 4.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$ **(1)**

Tương tự ta có: $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2}$ **(2)**; $\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge a+b+c-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b+c}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

★**Thí dụ 5.** Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge 2$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a}{b^2c+1}=a-\frac{ab^2c}{b^2c+1}\ge a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}=a-\frac{b\sqrt{a(ac)}}{2}\ge a-\frac{b(a+ac)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^2c+1}\ge a-\frac{1}{4}(ab+abc) \qquad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có:

$\frac{b}{c^2a+1}\ge b-\frac{1}{4}(bc+abc)$ **(2)**; $\quad \frac{c}{a^2b+1}\ge c-\frac{1}{4}(ca+abc)$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{4}-\frac{abc}{4}=3-\frac{ab+bc+ca}{4}-\frac{abc}{4} \quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có:

$3=\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca \Leftrightarrow \frac{3}{4}\ge\frac{ab+bc+ca}{4}$ **(2')**

$3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow \frac{1}{4}\ge\frac{abc}{4}$ **(3')**

Cộng theo vế **(1'), (2'), (3')** ta được:

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ge 3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge 2 \quad \text{(đpcm)}$$

★**Thí dụ 6.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* có tổng thỏa điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge 1$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a}{2b^3+1}=a-\frac{2ab^3}{b^3+b^3+1}\ge a-\frac{ab^3}{3b^2}=a-\frac{2ab}{3} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{2c^3+1}\ge b-\frac{2bc}{3}$ **(2)**; $\quad \frac{c}{2a^3+1}\ge c-\frac{2ca}{3}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge a+b+c-\frac{2(ab+bc+ca)}{3}=a+b+c-2 \quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \ge ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow a+b+c \ge \sqrt{3(ab+bc+ca)} = 3 \quad \textbf{(2')}$$

Cộng theo vế **(1′)** và **(2′)** ta được:

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}+a+b+c \ge a+b+c+1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1} \ge 1 \text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 7.** Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = a-\frac{a^2b+ab^2}{a^2+ab+b^2} \ge a-\frac{ab(a+b)}{3ab} = a-\frac{a+b}{3} = \frac{2a-b}{3}$ **(1)**

Tương tự ta có:

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \ge \frac{2b-c}{3} \quad \textbf{(2)}; \qquad \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{2c-a}{3} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3} \qquad \text{(đpcm)}$$

★**Thí dụ 8.** Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \ge 1$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = a-\frac{2ab^2}{a+b^2+b^2} \ge a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(ab)^2} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^2}{b+2c^2} \ge b-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(bc)^2} \quad \textbf{(2)}; \quad \frac{c^2}{c+2a^2} \ge c-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(ca)^2} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \ge a+b+c-\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right]$$

$$\ge 3-\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right] \qquad \textbf{(*)}$$

Mặt khác ta có:

$$\sqrt[3]{(ab)^2} = \sqrt[3]{a.ab.b} \le \frac{a+ab+b}{3} \quad \textbf{(1')}$$

Tương tự:

$\sqrt[3]{(bc)^2} \le \dfrac{b+bc+c}{3}$ **(2′)** ; $\sqrt[3]{(ca)^2} \le \dfrac{c+ca+a}{3}$ **(3′)**

Cộng theo vế **(1′), (2′)** và **(3′)** ta có

$$\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2} \le \frac{2}{3}(a+b+c)+\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\le \frac{2}{3}(a+b+c)+\frac{1}{3}.\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{2}{3}.3+\frac{1}{3}.\frac{3^2}{3}=3$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right] \ge -\frac{2}{3}.3=-2 \quad \textbf{(**)}$$

Từ **(*)** và **(**)** ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \ge 3-2=1 \qquad \text{(đpcm)}$$

★**Thí dụ 9.** Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3} \ge 1$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}=a-\frac{2ab^3}{a+b^3+b^3} \ge a-\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có:

$\dfrac{b^2}{b+2c^3} \ge b-\dfrac{2}{3}c\sqrt[3]{b^2}$ **(2)** ; $\dfrac{c^2}{c+2a^3} \ge c-\dfrac{2}{3}a\sqrt[3]{c^2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3} \ge a+b+c-\frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\right)$$

$$\ge 3-\frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\right) \quad \textbf{(*)}$$

Mặt khác ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2}=b\sqrt[3]{a.a.1} \le b\left(\frac{a+a+1}{3}\right)=b\left(\frac{2a+1}{3}\right)=\frac{2ab+b}{3} \qquad \textbf{(1')}$$

Tương tự ta có: $c\sqrt[3]{b^2} \le \dfrac{2bc+c}{3}$ **(2')**; $a\sqrt[3]{c^2} \le \dfrac{2ca+a}{3}$ **(3')**

Cộng theo vế **(1′), (2′), (3′)** ta được:

$$\left(b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\right)\le\frac{a+b+c}{3}+\frac{2}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\le\frac{a+b+c}{3}+\frac{2}{3}.\frac{(a+b+c)^2}{3}=3 \qquad \textbf{(**)}$$

Từ **(*)** và **(**)** ta có: $\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1$ (đpcm)

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\ge 6$. (Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2013).

2) Cho các số thực dương a,b sao cho : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. Chứng minh:

$$Q=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b}\le\frac{1}{2}$$

(Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Nguyễn Trãi- Hải Dương 2013).

3) Cho các số thực dương a,b sao cho $a+b=2$. Chứng minh:

$$2\left(a^2+b^2\right)-6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+9\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\ge 10.$$

4) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ac}+\sqrt{2c+ab}$. Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2014.

5) Cho các số thực không âm a,b sao cho $a^2+b^2=4$. Tìm GTLN của $P=\frac{ab}{a+b+2}$.

(Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2015).

6) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

7) Cho $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh: $ab+bc+ca\le\frac{3}{4}$

(Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015)

8) Cho $a,b,c>0, a+b+c=9$. Chứng minh: $\frac{a^3+b^3}{ab+9}+\frac{b^3+c^3}{bc+9}+\frac{c^3+a^3}{ac+9}\ge 9$.

9) Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{2a(a+b)^2}+b\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\le 3\left(a^2+b^2\right)$.

10) Cho x, y, z > 0 và thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge 1$.

11) Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\mathrm{P}=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$

12) Với x, y là các số thực thỏa mãn $1\le y\le 2$ và $xy+2\ge 2y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+4}{y^2+1}$

13) *Cho* x,y,z *là ba số thực dương thỏa mãn:* $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh: $\dfrac{2}{x^2+y^2}+\dfrac{2}{y^2+z^2}+\dfrac{2}{z^2+x^2}\le\dfrac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$.

14) *Cho các số thực dương* a,b,c *thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $3(a+b+c)\ge\sqrt{8a^2+1}+\sqrt{8b^2+1}+\sqrt{8c^2+1}$

15) *Cho hai số dương a, b thỏa mãn* $a+\dfrac{1}{b}=1$. *Chứng minh rằng:* $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\ge\dfrac{25}{2}$

16) *Cho hai số dương a, b thỏa mãn: a + b = 4ab. Chứng minh rằng:* $\dfrac{a}{4b^2+1}+\dfrac{b}{4a^2+1}\ge\dfrac{1}{2}$

17) *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn:* $xy+yz+4zx=32$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^2+16y^2+16z^2$

18) *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn:* $x+y\le1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$

19) *Cho hai số thực x, y thỏa mãn* $x\ge3;y\ge3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=21\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+3\left(y+\dfrac{1}{x}\right)$.

20) *Cho* $a,b,c>0$ *và* $a+2b+3c\ge20$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=a+b+c+\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{2b}+\dfrac{4}{c}$

CHỦ ĐỀ 10 SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKY

A. Kiến thức cần nhớ

1) Bất đẳng thức Bunyakovsky .

Với hai bộ số thực bất kì $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ (quy ước $b_i = 0$ thì $a_i = 0$)

Chứng minh: Theo bất đẳng thức về dấu giá trị tuyệt đối thì:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \le |a_1||b_1| + |a_2||b_2| + ... + |a_n||b_n|$$

$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (|a_1||b_1| + |a_2||b_2| + ... + |a_n||b_n|)^2$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$(|a_1||b_1| + |a_2||b_2| + ... + |a_n||b_n|)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

$$\Leftrightarrow |a_1||b_1| + |a_2||b_2| + ... + |a_n||b_n| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}.$$

Nếu $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = a_2 = ... = a_n = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, nên ta chỉ cần xét $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$. Tương tự, ta cũng chỉ cần xét $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 > 0$. Khi đó bất đẳng thức trên có thể viết lại như sau:

$$\frac{2|a_1||b_1|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}} + \frac{2|a_2||b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}}$$
$$+ ... + \frac{2|a_n||b_n|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}} \le 2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM (Cauchy), ta được:

$$\frac{2|a_1||b_1|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}} \le \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} + \frac{b_1^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2},$$

$$\frac{2|a_2||b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}} \le \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} + \frac{b_2^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2},$$

....

$$\frac{2|a_n||b_n|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}} \le \frac{a_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} + \frac{b_n^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}.$$

Cộng theo vế , ta thu được kết quả trên.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$ (quy ước $b_i=0$ thì $a_i=0$)

Trong chương trình toán cấp 2, chúng ta chỉ quan tâm tới hai trường hợp cơ bản là n = 2 và n = 3.

Với n = 2 ta có: Nếu a, b, x, y là các số thực, thì $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge\left(ax+by\right)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Nếu n = 3 ta có: Nếu a, b, c, x, y, z là các số thực, thì

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(ax+by+cz\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

2) Bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức:

Cho $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ và $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ hai dãy số thực với $b_i>0,\forall i$. Khi đó

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Chứng minh: Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số $\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}},\frac{a_2}{\sqrt{b_2}},...,\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ và $\left(\sqrt{b_1},\sqrt{b_2},...,\sqrt{b_n}\right)$ ta được:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\right)\left(b_1+b_2+...+b_n\right)\ge\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}.\sqrt{b_1}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}.\sqrt{b_2}+...+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}.\sqrt{b_n}\right)^2=\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi. $\frac{\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}}{\sqrt{b_1}}=\frac{\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}}{\sqrt{b_2}}=...=\frac{\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}}{\sqrt{b_n}}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Trong chương trình toán cấp 2, chúng ta chỉ quan tâm tới hai trường hợp cơ bản là n = 2 và n = 3.

Với n = 2 ta có: Nếu a, b, x, y là các số thực, thì $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Nếu n = 3 ta có: Nếu a, b, c, x, y, z là các số thực, thì

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Trong chương trình toán THCS khi áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức ta phải chứng minh trước.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Kỹ thuật tách ghép bộ số

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\left(\sqrt{a}.\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}.\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}.\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=9$$

Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakoysky dạng phân thức:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{1^2}{c}\ge\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}=\frac{9}{1}=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

★**Thí dụ 2.** Cho các số thực dương a, b,c. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}}\le\sqrt{6}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$6=\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}\right)\ge\left(\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}}\le\sqrt{6}$$

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=4$. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4\ge\frac{16}{3}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\left(1.a^2+1.b^2+1.c^2\right)^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+a^2\right)$$
$$\ge\left(ab+bc+ca\right)\left(ab+bc+ca\right)=16$$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge\dfrac{16}{3}$ (đpcm)

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực dương *a, b*. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có :

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)\ge\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}.\sqrt[4]{b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}.\sqrt[4]{a}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b.

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{b}}+\frac{\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}}\ge\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b.

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực dương *a, b*. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky với hai bộ số:

$\left(\dfrac{a}{\sqrt{b+c}},\dfrac{b}{\sqrt{c+a}},\dfrac{c}{\sqrt{a+b}}\right)$ và $\left(\sqrt{b+c},\sqrt{c+a},\sqrt{a+b}\right)$ ta được:

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right]$$

$$\ge\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}.\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}.\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}.\sqrt{a+b}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\left[2\left(a+b+c\right)\right]\ge\left(a+b+c\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{\frac{a}{\sqrt{b+c}}}{\sqrt{b+c}}=\dfrac{\frac{b}{\sqrt{c+a}}}{\sqrt{c+a}}=\dfrac{\frac{c}{\sqrt{a+b}}}{\sqrt{a+b}}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{c}{a+b}\Leftrightarrow a=b=c.$

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

★**Thí dụ 6.** Cho các số thực dương a, b thỏa $a^2+b^2=1$. Tìm GTLN của

$$A=a\sqrt{1+a}+b\sqrt{1+b}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$A=a\sqrt{1+a}+b\sqrt{1+b}\le\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(1+a+1+b\right)}=\sqrt{a+b+2}$$

$$\le\sqrt{\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right)}+2}=\sqrt{\sqrt{2}+2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\ \dfrac{a}{\sqrt{a+1}}=\dfrac{b}{\sqrt{b+1}}\\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{\sqrt{2}+2}$

★**Thí dụ 7.** Cho số thực a, b thỏa $36a^2+16b^2=9$. Tìm GTLN và GTNN của

$$A=-2a+b+5$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$\left(36a^2+16b^2\right)\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\ge\left[6a\left(-\frac{1}{3}\right)+4b.\frac{1}{4}\right]^2=\left(-2a+b\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(-2a+b\right)^2\le\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow-\frac{5}{4}\le-2a+b\le\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{15}{4}\le-2a+b+5\le\frac{25}{4}$$

Ta có:

GTNN của A là $-\dfrac{25}{4}$ khi $\Leftrightarrow\begin{cases}36a^2+9b^2=9\\ \dfrac{6a}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{4b}{\frac{1}{4}}\\ -2a+b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{5}\\ b=-\dfrac{9}{20}\end{cases}$

GTLN của A là $\dfrac{25}{4}$ khi $\Leftrightarrow \begin{cases} 36a^2+9b^2=9 \\ \dfrac{6a}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{4b}{\frac{1}{4}} \\ -2a+b=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{5} \\ b=\dfrac{9}{20} \end{cases}$

★**Thí dụ 8.** Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c\le 1.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9.$$

(Trích chuyên Lê Quý Đôn Bình Định năm 2001-2002)

Hướng dẫn giải

Quan sát ta thấy rằng: $\left(a^2+2bc\right)+\left(b^2+2ca\right)+\left(c^2+2ab\right)=\left(a+b+c\right)^2.$

Mà theo giả thiết $a+b+c\le 1.$ nên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge \frac{\left(1+1+1\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}=\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}\ge\frac{9}{1}=9.$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}.$

★**Thí dụ 9.** Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c\le 3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670.$$

(Trích đề vào lớp 10 Hải Phòng năm 2009 - 2010)

Hướng dẫn giải

Nhận thấy vai trò của a, b, c là như nhau, nên ta dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1.$

Do $a=b=c$ nên $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\Rightarrow \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{1}{ab+bc+ca}.$

Mặt khác để tận dụng được giả thiết $a+b+c\le 3$ ta nghĩ đến hằng đẳng thức:

$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=a^2+b^2+c^2+\left(ab+bc+ca\right)+\left(ab+bc+ca\right).$

Từ đây ta đi đến lời giải như sau:

Ta có: $ab+bc+ca\le\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3.$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{2007}{ab+bc+ca}$$

$$\ge \frac{(1+1+1)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}+\frac{2007}{3}=\frac{27}{(a+b+c)^2}+669\ge\frac{27}{27}+669=670$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 10.** Cho a, b, c dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(ab+a+1)^2}+\frac{b}{(bc+b+1)^2}+\frac{c}{(ca+c+1)^2}\ge\frac{1}{a+b+c}.$$

(Trích chuyên Lê Quý Đôn Bình Định năm 2001-2002)

Hướng dẫn giải

Một đẳng thức quen thuộc ta biết là khi $abc=1$ thì:

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

Thật vậy: $\frac{b}{bc+b+1}=\frac{ab}{abc+ab+a}=\frac{ab}{ab+a+1}$; $\quad\frac{c}{ca+c+1}=\frac{abc}{a^2bc+abc+ab}=\frac{1}{a+1+ab}$

Do đó: $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{a+1+ab}=1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức ta được:

$$\frac{a}{(ab+a+1)^2}+\frac{b}{(bc+b+1)^2}+\frac{c}{(ca+c+1)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{ab+a+1}\right)^2}{a}+\frac{\left(\frac{b}{bc+b+1}\right)^2}{b}+\frac{\left(\frac{c}{ca+c+1}\right)^2}{c}$$

$$\ge\frac{\left(\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\right)^2}{a+b+c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

★**Thí dụ 11.** Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

(Trích chuyên Lê Quý Đôn Bình Định năm 2001-2002)

Hướng dẫn giải

Ta quan sát và nhận xét: $(b+c-a)+(c+a-b)=2c,$

$$(c+a-b)+(a+b-c)=2a,$$

$$(a+b-c)+(b+c-a)=2b.$$

Do vậy ta nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức:

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{(1+1)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)}=\frac{4}{2c}=\frac{2}{c},$$

$$\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\ge\frac{(1+1)^2}{(c+a-b)+(a+b-c)}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}.$$

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{(1+1)^2}{(a+b-c)+(b+c-a)}=\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}.$$

Cộng theo vế rồi chia cho 2, ta thu được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

★**Thí dụ 12.** Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\ge\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b}.$$

Hướng dẫn giải

Ta tìm sự liên hệ giữa các mẫu thức, khi đó ta nghĩ đến việc tìm x, y, z thỏa mãn:

$$x(a+3b)+y(b+3c)+z(c+3a)=2a+b+c$$

Từ đó ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức như bài toán trên.

Hằng đẳng thức trên tương đương với:

$$(x+3z-2)a+(3x+y-1)b+(3y+z-1)c=0$$

Đồng nhất hệ số ta được: $\begin{cases}x+3z=2\\3x+y=1\\3y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{7},y=\frac{1}{7},z=\frac{4}{7}.$

Như vậy ta có sự liên hệ: $2(a+3b)+(b+3c)+4(c+3a)=7(2a+b+c)$.

Do đó:

$$\frac{7}{2a+b+c}=.\frac{7^2}{7(2a+b+c)}=\frac{(2+1+4)^2}{2(a+3b)+(b+3c)+4(c+3a)}$$

$$\le\frac{2^2}{2(a+3b)}+\frac{1^2}{(b+3c)}+\frac{4^2}{4(c+3a)}=\frac{2}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{4}{c+3a}$$

Đến đây bạn đọc tự chứng minh tiếp.

★**Thí dụ 13.** Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$A=4\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{441}{x+2x+4z}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có:

$$A=4\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{441}{x+2y+4z}=\frac{4}{21}\left(1+2^2+4^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{441}{x+2y+4z}$$

$$\ge \frac{4}{21}\left(x+2y+4z\right)^2+\frac{441}{x+2y+4z}=\frac{4}{21}\left(x+2y+4z\right)^2+\frac{441}{2\left(x+2y+4z\right)}+\frac{441}{2\left(x+2y+4z\right)}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{21}\left(x+2y+4z\right)^2.\frac{441}{2\left(x+2y+4z\right)}.\frac{441}{2\left(x+2y+4z\right)}}$$

$$=63$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{4}\\ \dfrac{4}{21}\left(x+2y+4z\right)^2=\dfrac{441}{2\left(x+2y+4z\right)}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}, y=1, z=2.$

★**Thí dụ 14.** Cho $a,b,c\in(0,1)$. Chứng minh rằng: $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$\left(\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\right)^2\le[a+(1-a)][bc+(1-b)(1-c)]=bc+(1-b)(1-c)$$
$$\Rightarrow\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\sqrt{bc+(1-b)(1-c)}<\sqrt{bc}+\sqrt{(1-b)(1-c)}$$

Mà

$$\left(\sqrt{bc}+\sqrt{(1-b)(1-c)}\right)^2\le[b+(1-b)][c+(1-c)]=1$$
$$\Rightarrow\sqrt{bc}+\sqrt{(1-b)(1-c)}\le 1$$

Vậy ta có: $\left(\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\right)^2<1$ hay $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

Lưu ý: *Trong cách chứng minh trên ta đã sử dụng bất đẳng thức* $\sqrt{x+y}<\sqrt{x}+\sqrt{y}\quad(x,y>0)$

Dễ dàng chứng minh tính chất này, ta có:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}>x+y\qquad(x,y>0)$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$$

★**Thí dụ 15.** Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]$$
$$=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{b}}{c+a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c}}{a+c}\right)^2\right]$$
$$\ge\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2$$

Mà ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ (bất đẳng thức Nesbit, đã chứng minh trong phần trước)

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2\ge\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}\quad\text{(đpcm)}$$

★**Thí dụ 16.** Cho $a;b>0$ và thỏa mãn $a^2+b^2=9$. Chứng minh: $\frac{ab}{a+b+3}\le\frac{3\sqrt{2}-3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $a^2+b^2=9\Leftrightarrow 2ab=(a+b)^2-9\Leftrightarrow 2ab=(a+b+3)(a+b-3)$

$$\Leftrightarrow\frac{2ab}{a+b+3}=a+b-3\Leftrightarrow\frac{ab}{a+b+3}=\frac{a+b}{2}-\frac{3}{2}.$$

Mà theo bất đẳng thức Bunyakovsky thì: $a+b\le\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2}$

Nên $\frac{ab}{a+b+3}\le\frac{3\sqrt{2}-3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}a;b>0\\ a^2+b^2=9\\ a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{3}{\sqrt{2}}.$

★**Thí dụ 17.** Cho x; y > 0 và thỏa mãn $x^2+y^2\le x+y$. Chứng minh: $x+3y\le 2+\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Giả thiết $x^2+y^2\le x+y\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số $(1;3)$ và $\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2}\right)$ ta có:

$$\left[1.\left(1-\frac{1}{2}\right)+3.\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]^2\le 10\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]\le 5$$

$$\Rightarrow(x+3y-2)^2\le 5\Rightarrow x+3y-2\le\sqrt{5}\Rightarrow x+3y\le 2+\sqrt{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\\ y=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}\end{cases}$

★**Thí dụ 18.** Cho x; y > 0 Chứng minh rằng: $(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2\ge 256.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được:

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)=\left[1^2+\left(\sqrt{x}\right)^2\right]\left[1^2+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right]\ge\left(1.1+\sqrt{x}.\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=\left(1+\sqrt{y}\right)^2.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(1+\sqrt{y}\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2\ge 256\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{y}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)\ge 16\quad (*)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được:

$$\left(1+\sqrt{y}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)=\left[1+\left(\sqrt[4]{y}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{3}{\sqrt[4]{y}}\right)^2\right]\ge\left(1.1+\sqrt[4]{y}.\frac{3}{\sqrt[4]{y}}\right)^2=(1+3)^2=16$$

Vậy bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{1}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{\sqrt{x}}\\ \dfrac{1}{1}=\dfrac{\dfrac{3}{\sqrt[4]{y}}}{\sqrt[4]{y}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}}{x}=1\\ \dfrac{3}{\sqrt{y}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=3, y=9.$

Cách khác: Ta dự đoán dấu bằng bất đẳng thức xảy ra khi $x=3, y=9$.

Từ đó ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$1+x=1+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\ge 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}}$$

$$1+\frac{y}{x}=1+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x}\ge 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{27x^3}}$$

$$1+\frac{9}{\sqrt{y}}=1+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}}\ge 4\sqrt[4]{\frac{27}{y\sqrt{y}}}\Rightarrow\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2\ge 16\sqrt{\frac{27}{y\sqrt{y}}}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2\ge 4.\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}}.4\sqrt[4]{\frac{y^3}{27x^3}}.16\sqrt{\frac{27}{y\sqrt{y}}}=256.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Dấy bằng zyar ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x}{3}=1\\ \dfrac{3}{\sqrt{y}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=3, y=9.$

★**Thí dụ 19.** Cho số dương x. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}, x > 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta nghĩ đến tìm số m và n sao cho:

$$y = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)} = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{\left(m^2 + n^2\right)\left(1^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{x}\right)^2\right)} \ge x + \frac{11}{2x} + \left(m + n.\frac{\sqrt{7}}{x}\right)$$

$$= m + x + \left(\frac{11}{2} + n\sqrt{7}\right)\frac{1}{x} \ge m + 2\sqrt{\frac{11}{2} + n\sqrt{7}}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} m^2 + n^2 = 4 \\ \frac{m}{1} = \frac{n.x}{\sqrt{7}} \\ x = \left(\frac{11}{2} + n\sqrt{7}\right)\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + n^2 = 4 \\ m = \frac{nx}{\sqrt{7}} \\ x = \sqrt{\frac{11}{2} + n\sqrt{7}} \end{cases}$

Từ $x = \sqrt{\frac{11}{2} + n\sqrt{7}}$ ta dự đoán $n = \frac{\sqrt{7}}{2}$ để x nguyên. Khi đó: $m = \sqrt{4 - \frac{7}{4}} = \frac{3}{2}$

Trong việc chứng minh bất đăng thức các bạn nên tập suy luận để tìm ra điểm rơi chứ không nên quá máy móc trong việc giải toán.

Khi đó ta làm như sau:

$$y = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)} = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right)\left(1^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{x}\right)^2\right)} \ge x + \frac{11}{2x} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2x}$$

$$= \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x} \ge \frac{3}{2} + 2\sqrt{x.\frac{9}{x}} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} : \frac{\sqrt{7}}{x} \\ x = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{15}{2}$ khi $x = 3.$

★Thí dụ 20. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh: $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \ge 3\left(a+b+c\right)^2$.

Hướng dẫn giải

Nhận thấy bất đẳng thức đối xứng và đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ ta biến đổi như sau:

Ta có: $\left(a+b+c\right)^2 = \left[a + \sqrt{2}.\left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 \le \left(a^2+2\right)\left[1 + \frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right]$.

Suy ra: $3\left(a+b+c\right)^2 \le 3\left(a^2+2\right)\left[1+\dfrac{\left(b+c\right)^2}{2}\right]$. Ta cần chứng minh:

$3\left(a^2+2\right)\left[1+\dfrac{\left(b+c\right)^2}{2}\right] \le \left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$ hay $3\left[1+\dfrac{\left(b+c\right)^2}{2}\right] \le \left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$. Sau khi khai triển và thu gọn ta được: $\dfrac{b^2+c^2}{2}+b^2c^2-3bc+1\ge 0$. Để ý rằng: $\dfrac{b^2+c^2}{2}\ge bc$ nên bất đẳng thức trở thành: $b^2c^2-2bc+1\ge 0 \Leftrightarrow \left(bc-1\right)^2\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\pm 1$.

★**Thí dụ 21.** Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}+\frac{b^3}{\left(2b^2+c^2\right)\left(2b^2+a^2\right)}+\frac{c^3}{\left(2c^2+a^2\right)\left(2c^2+b^2\right)}\le\frac{1}{a+b+c}$$

Hướng dẫn giải

Ta mong muốn xuất hiện lượng: $a+b+c$. Ta có:

$\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2+a^2\right)\left(a^2+a^2+c^2\right)\ge\left(a^2+ab+ac\right)^2=a^2\left(a+b+c\right)^2$

Từ đó suy ra: $\dfrac{a^3}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}\le\dfrac{a}{\left(a+b+c\right)^2}$.

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại thì suy ra điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 22.** Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được:

$\left(a^2+b+c\right)\left(1+b+c\right)\ge\left(a+b+c\right)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2+b+c}\le\dfrac{1+b+c}{\left(a+b+c\right)^2}$.

Tương tự: $\dfrac{1}{b^2+c+a}\le\dfrac{1+c+a}{\left(a+b+c\right)^2}$; $\dfrac{1}{c^2+a+b}\le\dfrac{1+a+b}{\left(a+b+c\right)^2}$.

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le\frac{a^2+b^2+c^2+6}{\left(a+b+c\right)^2}=\frac{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

★**Thí dụ 23.** Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b}\le 1$$

Hướng dẫn giải

Ta muốn làm xuất hiện $a+b+c$.

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}=\frac{a\left(\frac{1}{a}+1+c\right)}{\left(a^3+b^2+c\right)\left(\frac{1}{a}+1+c\right)}\le\frac{a\left(\frac{1}{a}+1+c\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=\frac{1+a+ca}{9}$$. Từ đó suy ra:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b}\le\frac{1+a+ca}{9}+\frac{1+b+ab}{9}+\frac{1+c+bc}{9}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{1+a+ca}{9}+\frac{1+b+ab}{9}+\frac{1+c+bc}{9}\le 1\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$. Nhưng điều này là hiển nhiên đúng do: $ab+bc+ca\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$

2) Kỹ thật chọn điểm rơi

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực dương *a, b,c* thỏa $a+b+c\ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $A=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$

Phân tích: Chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn. Giả sử với các số α,β ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right).\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha a+\frac{\beta}{b}\right)\\ \sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right).\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha b+\frac{\beta}{c}\right)\\ \sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right).\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha c+\frac{\beta}{a}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow A\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\alpha\left(a+b+c\right)+\beta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b, c* nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại $a=b=c=2$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=c=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{1}{\beta b}\\ \frac{b}{\alpha}=\frac{1}{\beta c}\\ \frac{c}{\alpha}=\frac{1}{\beta a}\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=ab=bc=ca=\frac{4}{1}$, chọn $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=1\end{cases}$

Kết hợp với " kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM" ta có lời giải:

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(a^2+\dfrac{1}{b^2}\right).\left(4^2+1^2\right)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4a+\dfrac{1}{b}\right) \\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(b^2+\dfrac{1}{c^2}\right).\left(4^2+1^2\right)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4b+\dfrac{1}{c}\right) \\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(c^2+\dfrac{1}{a^2}\right).\left(4^2+1^2\right)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}\left(4c+\dfrac{1}{a}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow A \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left[4(a+b+c)+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left[\dfrac{15}{4}(a+b+c)+\left(\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{4}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\right]$ Dấu

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{15}{4}.6+6.\sqrt[6]{\frac{a}{4}.\frac{b}{4}.\frac{c}{4}.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}\right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

"=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{4} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{b}{4} = \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{c}{4} = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 2$

Vậy GTNN của A là $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

★**Thí dụ 2.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c \geq 6$. Tìm GTNN của

$$A = \sqrt{a^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c+a}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a+b}}$$

Phân tích: Chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn. Giả sử với các số α, β ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+\dfrac{1}{b+c}} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left[a^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2\right].\left(\alpha^2+\beta^2\right)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha a+\dfrac{\beta}{\sqrt{b+c}}\right) \\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c+a}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha b+\dfrac{\beta}{\sqrt{c+a}}\right) \\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a+b}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha c+\dfrac{\beta}{\sqrt{a+b}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\alpha(a+b+c)+\beta\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)\right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a = b = c = 2$$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=c=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta b} \\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta c} \\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=ab=bc=ca=\dfrac{4}{1}$, chọn $\begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=1 \end{cases}$

Kết hợp với " kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM" ta có lời giải:

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+\dfrac{1}{b+c}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(a^2+\dfrac{1}{b+c}\right).\left(4^2+1^2\right)} \ge \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4a+\dfrac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c+a}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4b+\dfrac{1}{\sqrt{c+a}}\right) \\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a+b}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}\left(4c+\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \ge \frac{1}{\sqrt{17}}\left[4(a+b+c)+\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)\right]$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+3.\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a+b}}.\frac{1}{\sqrt{a+b}}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}}\right)$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a+b}+\sqrt{c+a}}\right)$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+\frac{9}{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]}\right)$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{6}(a+b+c)}\right)$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{31}{8}(a+b+c)+\frac{1}{8}(a+b+c)+\frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)}+\frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)}\right]$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{31}{8}.6+3\sqrt[3]{\frac{1}{8}(a+b+c).\frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)}.\frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)}}\right]=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a=b=c=2$ thì GTNN của A là $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c+\sqrt{2abc} \ge 10$. Tìm GTNN của

$$A=\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=c=2$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=c=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta b} \\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta c} \\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=ab=bc=ca=\dfrac{4}{1}$, chọn $\begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=1 \end{cases}$

Kết hợp với " kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM" ta có lời giải:

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} \sqrt{2+18+4}\sqrt{\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9b^2}{2}+\dfrac{c^2a^2}{4}} \le \dfrac{4}{a}+9b+ca \\ \sqrt{2+18+4}\sqrt{\dfrac{8}{b^2}+\dfrac{9c^2}{2}+\dfrac{a^2b^2}{4}} \le \dfrac{4}{b}+9b+ca \\ \sqrt{2+18+4}\sqrt{\dfrac{8}{c^2}+\dfrac{9a^2}{2}+\dfrac{b^2c^2}{4}} \le \dfrac{4}{a}+9b+ca \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{24}.A \ge \left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)+9(a+b+c)+(ab+bc+ca)$$

$$\ge \left(\frac{4}{a}+a\right)+\left(\frac{4}{b}+b\right)+\left(\frac{4}{c}+c\right)+(2a+bc)+(2b+ac)+(2c+ab)+6(a+b+c)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}.a}+2\sqrt{\frac{4}{b}.b}+2\sqrt{\frac{4}{c}.c}+2\sqrt{2abc}++2\sqrt{2abc}++2\sqrt{2abc}+6(a+b+c)$$

$$\ge 12+6\left(a+b+c+\sqrt{2abc}\right)\ge 72$$

$$\Rightarrow A \ge \frac{72}{\sqrt{24}}=6\sqrt{6}$$

Với $a=b=c=2$ thì GTNN của A là $6\sqrt{6}$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+2bc}+\frac{b}{b+2ac}+\frac{c}{c+2ab}\ge 1.$$

2) Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{a+2b}+\dfrac{b^3}{b+2c}+\dfrac{c^3}{c+2a}\ge\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

3) Cho các số thực dương x,y,z sao cho $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh: $x^3+y^3+z^3\ge 3$.

4) Cho các số thực dương x,y sao cho $x+y\le 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{3x^2+y^2}+\dfrac{2}{y^2+3xy}\ge 3$..

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

5) Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+ab+bc}+\frac{1}{b^2+bc+ca}+\frac{1}{c^2+ca+ab}\le\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2$$

6) Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{ab}{a^2+bc+ca}+\frac{bc}{b^2+ca+ab}+\frac{ca}{c^2+ab+bc}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

7) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+b^2}+\frac{1}{1+b+c^2}+\frac{1}{1+c+a^2}\le 1$$

8) Với ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{z+xy}}$.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội – 2014)

9) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c thì:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right).$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Ngoại Ngữ, ĐHNN Hà Nội 2007-2008)

10) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c thì:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 3\left(\frac{1}{3a+2b+c}+\frac{1}{3b+2c+a}+\frac{1}{3c+2a+b}\right).$$

CHỦ ĐỀ 11 BẤT ĐẲNG THỨC CÓ BIẾN TRÊN MỘT ĐOẠN

A. Kiến thức cần nhớ

Khi các biến bị chặn trên một đoạn ta cần chú ý các đánh giá để chặn biến như sau:

- $a,b,c\in[\mathrm{m};\mathrm{n}]$ thì:

Nếu cần đánh giá a^2,b^2,c^2 theo a,b,c ta dùng $(a-m)(a-n)\le 0\Rightarrow a^2\le(m+n)a-mn.$

Nếu cần đánh giá để tạo ra ab ta dùng $\begin{cases}(a-n)(b-n)\ge 0\\(a-m)(b-m)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab\ge n(a+b)-n^2\\ab\ge m(a+b)-m^2\end{cases}$

Nếu đánh giá đồng thời cả 3 biến ta dùng:

$$\begin{cases}(a-m)(b-m)(c-m)\ge 0\\(n-a)(n-b)(n-c)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow(a-m)(b-m)(c-m)+(n-a)(n-b)(n-c)\ge 0$$

- Ngoài ra còn chú ý với a, b không âm thì $\begin{cases}a^2+b^2\le(a+b)^2\\a^3+b^3\le(a+b)^3\end{cases}$

- Nếu $a+b+c=3p.$ Trong 3 số giả sử a là số lớn nhất ta suy ra $a+b+c=3p\le 3a\Leftrightarrow a\ge p.$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Tìm giá trị lớn nhất của $A=a^2+b^2+c^2$ biết $-1\le a,b,c\le 3$ và:

a) $a+b+c=5$

b) $a+b+c=4$

Hướng dẫn giải

a) Do $-1\le a\le 3$ nên $(a+1)(a-3)\le 0\Rightarrow a^2\le 2a+3$.

Tương tự, $b^2\le 2b+3, c^2\le 2c+3$ nên $A\le 2(a+b+c)+9=2.5+9=19$

$maxA=19$ khi trong ba số a,b,c có hai số bằng 3, một số bằng -1.

b) Do $-1\le a,b,c\le 3$ nên

$(a+1)(b+1)(c+1)+(3-a)(3-b)(3-c)\ge 0$

$\Rightarrow(a+1)(bc+b+c+1)+(3-a)(9-3b-3c+bc)\ge 0$

$\Rightarrow 4(ab+bc+ac)-8(a+b+c)+28\ge 0$.

$\Rightarrow 4(ab+bc+ac)-8.4+28\ge 0$

$\Rightarrow 2(ab+bc+ac)\ge 2$ (1)

Ta có $A = a^2 + b^2 + c^2 = \left(a+b+c\right)^2 - 2\left(ab+bc+ca\right) = 16 - 2\left(ab+bc+ca\right)$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A \le 14$

$maxA = 14$ khi trong ba số a,b,c có một số bằng 3, một số bằng 2, một số bằng -1.

Lưu ý: Cách giải ở câu $a)$ gọn vì ta gặp thuận lợi: cực trị xảy ra khi a,b,c chỉ nhận các giá trị là 3 và -1, tức là nhận các giá trị ở biên của các biến.

Cách giải ở câu $a)$ không vận dụng được cho câu $b)$ vì ở câu $b)$ cực trị xảy ra khi có một số bằng 2, không phải là giá trị ở biên của biến a,b,c. Như vậy cách giải ở câu $b)$ tổng quát hơn.

★**Thí dụ 2.** Cho các số thực $x, y, z \in \left[-1;2\right]$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 \le 6$.

Hướng dẫn giải

Vì $x \in \left[-1;2\right]$ nên $\left(x+1\right)\left(x-2\right) \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le x+2$.

Tương tự: $y^2 \le y+2 \quad ; z^2 \le x+2$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được: $x^2 + y^2 + z^2 \le \left(x+y+z\right) + 6 = 6$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x + y + z = 0$ và $x, y, z \in \left\{-1;2\right\}$

Hay đẳng thức xảy ra khi $\left(x,y,z\right) = \left(-1;1;2\right)$ và các hoán vị.

★**Thí dụ 3.** Cho ba số dương $a,b,c \in \left[0;1\right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \le 2$$

Hướng dẫn giải

Vì $a,b,c \in \left[0;1\right]$ nên:

$$\left(a-1\right)\left(b-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow ab+1 \ge a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \le \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \le \frac{c}{a+b} \qquad (1)$$

Tương tự: $\dfrac{a}{bc+1} \le \dfrac{a}{b+c} \qquad (2); \dfrac{b}{ac+1} \le \dfrac{b}{a+c} \quad (3)$

Do đó: $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ac+1} + \dfrac{c}{ab+1} \le \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \qquad (4)$

Mà : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \le \dfrac{2a}{a+b+c} + \dfrac{2b}{a+b+c} + \dfrac{2c}{a+b+c} = 2 \qquad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra: $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ac+1} + \dfrac{c}{ab+1} \le 2$ (đpcm)

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực $a,b,c \in \left[-2;5\right]$ thỏa mãn điều kiện $\mathrm{a + 2b + 3b \le 2}$

Chứng minh rằng: $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \le 66$.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10, năm học 2009 – 2010 Sở giáo dục Hà Tĩnh)

Hướng dẫn giải

Tương tự bài toán 1, từ $(a+2)(a-5)\le 0$ ta suy ra: $a^2\le 3a+10$ cùng các kết quả

Tương tự $b^2\le 3b+10, c^2\le 3c+10.$

Suy ra: $a^2+2b^2+3c^2\le 3(a+2b+3c)+60=66$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=-2, b=-5, c=-2.$

★**Thí dụ 5.** Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng : $a+b^2+c^3-ab-bc-ca\le 1.$

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Bình Định Năm 2017)

Hướng dẫn giải

Vì $a,b,c\in[0;1]$ nên 1 – a ≥ 0 ; 1 – b ≥ 0 ; 1 - c ≥ 0.

Do đó : (1 – a)(1 – b)(1 – c) ≥ 0

⇔ a + b + c – ab – bc – ca + abc ≤ 1 (1)

Vì $a,b,c\in[0;1]$ nên $b^2\le b;\ c^3\le c;\ \ abc\ge 0$

$\Rightarrow a+b^2+c^3-ab-bc-ca\le a+b+c-ab-bc-ca+abc$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $a+b^2+c^3-ab-bc-ca\le 1.$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 6.** Cho các số thực $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$

Hướng dẫn giải

Vì $a,b,c\in[0;1]$ nên $a(1-b)\ge a^2(1-b)$.

Tương tự: $b(1-c)\ge b^2(1-c);\quad c(1-a)\ge c^2(1-a)$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta suy ra:

$$(a+b+c)-(ab+bc+ca)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-(1-a)(1-b)(1-c)-abc\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Do $(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$ và $abc\ge 0$ nên suy ra đpcm.

★**Thí dụ 7.** Cho 2010 số thực $a_1,a_2,a_3,...,a_{2010}\in[0;1]$.

Chứng minh rằng: $(1+a_1+a_2+...+a_{2010})^2\ge 4\left(a_1^2+a_2^2+...+a_{2010}^2\right)^2$

Hướng dẫn giải

Với số thực x, y bất kì ta có: $(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy.$

Áp dụng với $x=1, y=a_1+a_2+...+a_{2010}$ ta có:

$$(1+a_1+a_2+...+a_{2010})^2\ge 4(a_1+a_2+...+a_{2010})^2$$

Mà với mỗi $i \in \{1; 2; ...; 2010\}$ ta có: $a_i \geq a_i^2$ (vì theo giả thiết $a_i \in [0;1]$.)

Từ đó suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi trong 2010 số đã cho có 2009 số bằng 0 và số còn lại bằng 1.

★**Thí dụ 8.** Cho các số thực $a, b, c \in [1;3]$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x + 1; b = y + 1; c = z + 1;\ x, y, z \in [0; 2]$.

Khi đó $P = a^2 + b^2 + c^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) + 3$$

$$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) + 2(x + y + z) + 3$$

$$= -2(xy + yz + zx) + 18$$

Từ $x, y, z \in [0; 2] \Rightarrow (2 - x)(2 - y)(2 - z) \geq 0$

$\Leftrightarrow 8 - 4(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) - xyz \geq 0$

$\Rightarrow -2(xy + yz + zx) = -4 - xyz \leq -4$ do $xyz \geq 0$

Từ đó suy ra: $P \leq -2(xy + yz + zx) + 18 \leq 14$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ hoặc các hoán vị.

Chú ý: đặt $a = x + 1; b = y + 1; c = z + 1$ để tận dụng tích $xyz \geq 0$.

★**Thí dụ 9.** Cho các số thực $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2-a} + \dfrac{1}{2-b} + \dfrac{1}{2-c} \geq 3abc$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a(2 - a) \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2-a} \geq a$.

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{2-b} \geq b;\ \dfrac{1}{2-c} \geq c$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$\dfrac{1}{2-a} + \dfrac{1}{2-b} + \dfrac{1}{2-c} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ do $abc \leq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

★**Thí dụ 10.** Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $a, b, c \in [0; 2]$ và a + b + c = 3.

a) Chứng minh rằng: $3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

b) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $P = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow P = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9 - 2(ab+bc+ca)$.

Ta tìm cách đánh giá $ab+bc+ca$.

Thật vậy, từ giả thiết $a, b, c \in [0;2]$ ta có: :

$$\begin{cases}(a-2)(b-2)(c-2) \le 0 \\ abc \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}abc + 4(a+b+c) - 2(ab+bc+ca) - 8 \le 0 \\ -abc \le 0\end{cases}$$

Cộng hai theo vế và kết hợp a + b + c = 3 ta được:

$4 - 2(ab+bc+ca) \le 0 \Rightarrow ab+bc+ca \ge 2$.

Mặt khác: $ab+bc+ca \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = 3 \Rightarrow 2 \le xy + yz + zx \le 3$.

Do đó: $9 - 2.3 \le P \le 9 - 2.2 \Rightarrow 3 \le P \le 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 5 khi $a = 0, b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

Giá trị nhỏ nhất của P là 3 khi $a = b = c = 1$

Cách khác: Từ a + b + c = 3 và $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$ ta dự đoán dấu bằng của bài toán xảy ra khi $a = 0, b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta giả sử: c = max(a, b, c).

Khi đó: $3 = a + b + c \le 3c \Rightarrow c \ge 1 \Rightarrow 1 \le c \le 2$.

Do $a, b \ge 0 \Rightarrow ab \ge 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \le (a+b)^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le (a+b)^2 + c^2 = (3-c)^2 + c^2 = 2c^2 - 6c + 9 = 2\left(c^2 - 3c + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{2} = 2\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

Do $1 \le c \le 2$ nên $-\dfrac{1}{2} \le c - \dfrac{3}{2} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|c - \dfrac{3}{2}\right| \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\left(c - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\left(c - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2} = 5$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = 0, b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

b) Do vai trò a, b, c là như nhau nên giả sử a = max(a, b, c) ; c = min(a, b, c).

Vì a + b + c = 6 ⇒ $0 \le c \le 1 \le a \le 2$.

$1 \le a \le 2 \Rightarrow (a-2)(a-1) \le 0 \Rightarrow a^2 \le 3a-2$

$\Rightarrow a^3 \le 3a^2 - 2a \le 3(3a-2) - 2a = 7a - 6 \Rightarrow a^3 \le 7a - 6.$ (1)

Mặt khác: $0 \le c \le 1 \Rightarrow c^3 \le c.$ (2)

Nếu: $0 \le b \le 1 \Rightarrow b^3 \le b$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được: $a^3 + b^3 + c^3 \le 7a - 6 + c + b = 6a - 3 \le 6.2 - 3 = 9$

Nếu $1 \le b \le 2$ thì tương tự ta có: $b^3 \le 7b - 6$ (4)

Từ (1), (2) và (4) ta được: $a^3 + b^3 + c^3 \le 7a + c + 7b - 12 = 21 - 6c - 12 \le 9.$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 \le 9.$

★**Thí dụ 10.** Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn: $a + b + c = 1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

a) Tìm GTNN, GTLN của: $P = \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4}.$

b) Tìm GTLN của: $P = \sqrt{2a^2+a+1} + \sqrt{2b^2+b+1} + \sqrt{2c^2+c+1}.$

Hướng dẫn giải

a) Do $a, b, c \ge 0$ và $a + b + c = 1$ nên $\begin{cases} a(a-1) \le 0 \\ b(b-1) \le 0 \\ c(c-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \le a \\ b^2 \le b \\ c^2 \le c \end{cases}$

Do đó: $P = \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \ge \sqrt{a^2+4a+4} + \sqrt{b^2+4b+4} + \sqrt{c^2+4c+4}$

$= \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+2)^2} + \sqrt{(c+2)^2} = a + b + c + 6 = 7.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 7 khi (a,b,c) là các hoán vị của bộ số $(1;0;0)$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$P^2 = \left(1.\sqrt{5a+4} + 1.\sqrt{5b+4} + 1.\sqrt{5c+4}\right)^2 \le \left(1^2+1^2+1^2\right)(5a+5b+5c+12) = 51 \Rightarrow \text{P} \le \sqrt{51}.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{51}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}.$

b) Làm tương tự câu a ta được:

$P = \sqrt{2a^2+a+1} + \sqrt{2b^2+b+1} + \sqrt{2c^2+c+1}$

$\le \sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{b^2+2b+1} + \sqrt{c^2+2c+1} = 3(a+b+c) + 3 = 6$

$\Rightarrow P \le 6.$

Đẳng thức xảy ra khi (a,b,c) là các hoán vị của bộ số $(1;0;0)$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho các số thực $a,b,c \in [0;1]$ *. Chứng minh rằng:*

$$a + 2b + 3c \le 60\ ;\ 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \le 3 + a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

2) Cho $\frac{1}{2010} \le \frac{a_i}{b_i} \le \frac{1}{2009}$ *với* $a_1, a_2, ..., a_{2010}$ *và* $b_1, b_2, ..., b_{2010}$ *là các số thực dương.*

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2010} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2010}}{b_1 + b_2 + ... + b_{2010}} \le \frac{1}{2009}$

3) Cho các số a,b,c *thỏa mãn* $-1 \le a,b,c \le 1$ *và* $a + b + c = 0$*. Chứng minh rằng* $a^2 + b^3 + c^4 \le 2$.

4) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $P = ab^2 + bc^2 + ca^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P = a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{c^2 + 1} + c\sqrt{a^2 + 1}$.

5) Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ *. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $P = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{b+c}{2}} + \sqrt{\frac{c+a}{2}}$.

CHỦ ĐỀ 12

KỸ THUẬT ĐỒNG BẬC HÓA

A. Kiến thức cần nhớ

Kĩ thuật đồng bậc (thuần nhất) liên quan chặt chẽ tới các đa thức đồng bậc. Thí dụ hai đa thức sau đây là hai đa thức đồng bậc: $A = x^2y + xy^2 - 12x^3 + y^3$ *và* $B = (x+y)^5 - 5x^3y^2$*, vì khi phá ngoặc, từng đơn thức trong đa thức A có bậc là 3, còn từng đơn thức trong đa thức B có bậc là 5. Còn các đa thức như* $C = x^4 + y^4 - xy$ *không phải là các đa thức đồng bậc.*

Kĩ thuật đồng bậc là kĩ thuật rất hữu hiệu trong việc chứng minh các bất đẳng thức có điều kiện. Tư tưởng cơ bản của phương pháp này là dựa vào điều kiện của bài toán ta đồng bậc hóa, chuyển bài toán về chứng minh bất đẳng thức đồng bậc.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực dương *a, b* thỏa mãn: $a + b = 2$ thì:

$$2 \le a^2 + c^2 \le a^3 + b^3 \le a^4 + b^4$$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh: $a^2 + b^2 \ge 2$

Ta thấy vế trái của bất đẳng thức có bậc 2, từ giả thiết $a + b = 2$ ta làm cân bằng bậc hai vế của bất đẳng thức:

$$2\left(a^2 + b^2\right) \ge (a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2 + b^2\right) \ge a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức đầu tiên được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi *a = b = 1*

Bằng các tương tự ta làm nhanh các bất đẳng thức sau như sau:

$$a^3 + b^3 \ge a^2 + b^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^3 + b^3\right) \ge (a+b)\left(a^3 + b^3\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^3 + b^3\right) \ge a^3 + b^3 + ab(a+b)$$
$$\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \ge 0 \text{ (đúng) do a, b dương}$$

Bất đẳng thức cuối cùng chứng minh tương tự.

★**Thí dụ 2.** Cho các số thực *a, b* thỏa mãn: $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+4a^2b^2 \ge 3ab$$

Hướng dẫn giải

Trước hết dựa vào giả thiết $a^2+b^2=1$ ta cân bằng bậc 2 vế của bất đẳng thức:

$$a^4+b^4+4a^2b^2 \ge 3ab\left(a^2+b^2\right) \qquad (1)$$

Do bất đẳng thức đối xứng, vai trò của *a, b* là như nhau nên dễ dàng đoán được dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi *a* = *b*. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần biết đổi tương đương dồn về nhân tử chung (*a* – *b*). Thật vậy:

$$(1) \Leftrightarrow a^3(a-b)+b^3(b-a)+2ab^2(a-b)+2a^2b(b-a) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^3-b^3\right)+(a-b)\left(2ab^2-2a^2b\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)-2ab(a-b)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2-ab+b^2\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right] \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

★**Thí dụ 3.** Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{2\left(x^2+6xy\right)}{1+2xy+2y^2}$.

Hướng dẫn giải

Trước hết dựa vào giả thiết $a^2+b^2=1$ ta cân bằng bậc của phân thức *P*:

$$P=\frac{2\left(x^2+6xy\right)}{1+2xy+2y^2}=\frac{2\left(x^2+6xy\right)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}=\frac{2\left(x^2+6xy\right)}{x^2+2xy+3y^2}$$

Nếu y = 0 thì $x^2=1$.Suy ra P = 2.

Xét $y \ne 0$. Ta có:

$$P=\frac{2\left(x^2+6xy\right)}{x^2+2xy+3y^2}=\frac{2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+6\left(\frac{x}{y}\right)\right]}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+3}=\frac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}\quad\left(t=\frac{x}{y}\right)$$

$\Leftrightarrow (P-2)t^2+2(P-6)t+3P=0 \quad (1).$

Với P = 2, phương trình (1) có nghiệm $t=\frac{3}{4}$.

Với $P\neq 2$, phương trình (1) có nghiệm nghi và chỉ khi

$\Delta'=-2P^2-6P+36\geq 0 \Leftrightarrow -6\leq P\leq 3.$

$P=3$ khi $x=\frac{3}{\sqrt{10}}, y=\frac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc $x=-\frac{3}{\sqrt{10}}, y=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

$P=-6$ khi $x=\frac{3}{\sqrt{10}}, y=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x=-\frac{3}{\sqrt{13}}, y=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, giá trị nhỏ nhất của P là -6.

Nhận xét: Kĩ thuật đồng bậc *(thuần nhất)* giúp ta có cách định hướng tìm lời giải cho nhiều bài toán bất đẳng thức vì sau khi đồng bậc nhiều bài toán trở về đúng bản chất khi chưa được tác giả giản lược bởi giả thiết.

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}\leq 1 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Trước hết dựa vào giả thiết $xyz=1$ ta đồng bằng bậc mẫu của các phân thức về bậc 0 như vế phải của bất đẳng thức:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{xyz}{x^3+y^3+xyz}+\frac{xyz}{y^3+z^3+xyz}+\frac{xyz}{z^3+x^3+xyz}\leq 1$$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc thường sử dụng: $a^3+b^3\geq ab(a+b)\ \forall a,b>0 \quad (*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0$ (luôn đúng với a, b dương)

Áp dụng (*) ta được:

$$x^3+y^3+xyz\geq xy(x+y)+xyz=xy(x+y+z)\Rightarrow \frac{xyz}{x^3+y^3+xyz}\leq \frac{xyz}{xy(x+y+z)}=\frac{z}{x+y+z}$$

Tương tự: $\frac{xyz}{y^3+z^3+xyz}\leq \frac{x}{x+y+z}$; $\quad \frac{xyz}{z^3+x^3+xyz}\leq \frac{y}{x+y+z}$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1.

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}}\ge 2+ab+bc+ca \qquad (3)$$

Hướng dẫn giải

Trước hết dựa vào giả thiết $a^2+b^2+c^2=1$ ta đồng bằng bậc mẫu thức trong căn vế trái của bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+ab}}=\frac{ab+2c^2}{\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM : $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\quad(x,y>0)$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}\le\frac{ab+2c^2+a^2+b^2+ab}{2}=\frac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2}$$

$$\le\frac{2c^2+a^2+b^2+a^2+b^2}{2}=a^2+b^2+c^2$$

Do đó: $\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\frac{ab+2c^2}{\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}}\ge\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2}=ab+2c^2$

Chứng minh tương tự: $\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}\ge bc+2a^2;\quad\sqrt{\frac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}}\ge ca+2b^2$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca=2+ab+bc+ca\quad(dpcm)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\ge\frac{1}{2}$$

Hướng dẫn giải

Trước hết sử dụng giả thiết $a^2+b^2+c^2=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc hai vế:

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\ge\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Do bất đẳng thức đối xứng với *a, b, c* nên dự đoán dấu "=" xảy ra khi: $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vì thế ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM như sau:

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{a(a+b)}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a^3}{a+b}.\frac{a(a+b)}{4}} = 2a^2$$

Tương tự: $\frac{b^3}{b+c} + \frac{b(b+c)}{4} \ge 2b^2 \quad ; \frac{c^3}{c+a} + \frac{c(c+a)}{4} \ge 2c^2$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vê ta được:

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} + \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right) \ge \left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \ge \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{1}{4}\left(ab+bc+ca\right)$$

$$\ge \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ để đưa bất đẳng thức về đồng bậc 0 ở hai vế

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a}\right); \qquad \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a}\right) = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

★**Thí dụ 4.** Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 9.$$

(Trích đề chuyên toán tin vào 10 Chuyên Vĩnh Phúc năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3(a^3+b^3+c^3)\ge 27$$

$\Leftrightarrow 4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3(a^3+b^3+c^3)\ge (a+b+c)^3$

$\Leftrightarrow (a^3+b^3+c^3)+4(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)\ge (a+b+c)^3 \quad (1)$

Ta có đẳng thức $(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)+6abc$.

Do đó (1) tương đương với $a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b\ge 6abc$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

$$\ge 2a^2\sqrt{bc}+2b^2\sqrt{ca}+2c^2\sqrt{ab}=2\left(a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}\right)\ge 6abc.$$

Vậy BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 5.** Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $b+c\ge 16abc$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Sử dụng điều kiện $a+b+c=1$ để quy về dạng bất đẳng thức đồng bậc, ta sẽ chứng minh:

$$(b+c)(a+b+c)^2\ge 16abc.$$

Do tính đối xứng của b và c nên ta sử dụng bất đẳng thức $(x+y)^2\ge 4xy$ với hai biến này được: $16abc.=4\text{a}.4\text{bc}\le 4\text{a}.(b+c)^2$

Do đó bây giờ chỉ cần chứng minh:

$(b+c)(a+b+c)^2\ge 4\text{a}.(b+c)^2 \Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 4a.(b+c) \quad (1)$

Ta thấy bất đẳng thức (1) chính là bất đẳng thức $(x+y)^2\ge 4xy$ dễ dàng biến đổi:

$$(1)\Leftrightarrow (a-b-c)^2\ge 0$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=b+c \\ b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}, b=c=\dfrac{1}{4}.$

★**Thí dụ 6.** Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $a+2b+c \ge 4(1-a)(1-b)(1-c)$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hồ Chí Minh năm 1988-1989)

Hướng dẫn giải

Do $a+b+c=1$ nên bất đẳng thức tương đương: $a+2b+c \ge 4(a+b)(b+c)(c+a)$.

Sử dụng điều kiện $a+b+c=1$ để quy về dạng bất đẳng thức đồng bậc, ta sẽ chứng minh:

$$(a+2b+c)(a+b+c)^2 \ge 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

Do tính đối xứng của a và c nên ta dự đoán $a+b=b+c$ sử dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \ge 4xy$ với hai biến $(a+b),(b+c)$ được: $4(a+b)(b+c)(c+a) \le (a+c)(a+2b+c)^2$

Do đó bây giờ chỉ cần chứng minh:
$(a+2b+c)(a+b+c)^2 \ge (a+c)(a+2b+c)^2 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge (a+c)(a+2b+c)$ (1)

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow (a+c)^2 + 2b(a+c) + b^2 \ge (a+c)^2 + 2b(a+c) \Leftrightarrow b^2 \ge 0$ (2)

Bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng, vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=b+c \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=c=\dfrac{1}{2}, \mathrm{b}=0.$

★**Thí dụ 6.** Giả sử x, y, z là các số dương và $xyz \ge 1$. Hãy chứng minh rằng:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^5-z^2}{z^5+y^2+x^2} \ge 0$$

Hướng dẫn giải

Việc đầu tiên, ta cần đưa bất đẳng thức về dạng chuẩn hóa – đồng bậc:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \ge \frac{x^5-x^2.xyz}{x^5+\left(y^2+z^2\right)xyz}=\frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz\left(y^2+z^2\right)} \ge \frac{2x^4-x^2\left(y^2+z^2\right)}{2x^4+\left(y^2+z^2\right)^2}$$

Đặt $a=x^2, b=y^2, \mathrm{c}=\mathrm{z}^2$ thì ta cần chứng minh:

$$\frac{2a^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2b^2-b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2c^2-c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2} \ge 0$$

Ta có: $\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}-\frac{ab}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c-a)^2}-\frac{ab}{2a^2+(b+c)^2}$

$$=(a-b)\left(\frac{a}{2a^2+(b+c)^2}-\frac{b}{2b^2+(a+c)^2}\right)=(a-b)^2\frac{c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2}{\left(2a^2+(b+c)^2\right)\left(2b^2+(a+c)^2\right)}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, tách tương tự cộng lại ta được điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c hay x = y = z = 1.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$S=\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ac}{\sqrt{2b+ac}}$$

2) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 3. Chứng minh rằng:

$$x^3+y^3+z^3+\frac{15}{4}xyz\ge\frac{27}{4}.$$

3) Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng: $5\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 6\left(a^3+b^3+c^3\right)+1.$

4) Cho a, b, c > 0 và thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$

5) Cho a,b,c *dương thỏa mãn* $ab+bc+ca=1$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}-a^2-28b^2-28c^2$$

6) Cho $x,y,z>0$ *thỏa mãn* $x+y+z=1$. *Chứng minh rằng* $\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{3}{2}$

13 KỸ THUẬT CHUẨN HÓA

A. Kiến thức cần nhớ

*** Dấu hiệu chuẩn hóa:** Bậc của các hạng tử trong bất đẳng thức phải bằng nhau (thuần nhất) tức là nếu ta nhân mỗi biến với một số $t > 0$ thì bất đẳng thức đó không đổi, tức là với bất đẳng thức $f(a,b,c) \ge 0$ thì $f(at,bt,ct) = t^{\alpha}.f(a,b,c)$ với α là bậc của các hạng tử trong bất đẳng thức.

Ví dụ: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ ta có $(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2 \ge (tx)(ty)+(ty)(tz)+(tz)(tx)$

$$\Leftrightarrow t^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge t^2\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$$

*** Cách đặt ẩn mới:**

Ta có thể chia các hạng tử cho: $abc, a+b+c, (a+b+c)^2, a^2+b^2+c^2, ab+bc+ca$

Việc chia làm sao để xuất hiện ẩn mới và kèm theo điều kiện thích hợp để dễ dàng chứng minh.

Ví dụ : Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

Nhận xét: Ta nhận thấy các hạng tử có tử và mẫu đều là bậc 1, do đó ta nghĩ đến việc chia cả tử và mẫu cho $(a+b+c)$, khi đó ta có:

$$\frac{\frac{a}{a+b+c}}{\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}}+\frac{\frac{b}{a+b+c}}{\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}}+\frac{\frac{c}{a+b+c}}{\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}} \ge \frac{3}{2}$$

Đặt: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\text{a}+b+c} \\ y = \dfrac{b}{\text{a}+b+c} \\ z = \dfrac{c}{\text{a}+b+c} \end{cases}$. Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2} \text{ với } x+y+z=1$$

Trong trường này $t = \dfrac{1}{a+b+c}$

*** Lưu ý:** Việc chuẩn hóa không bó buộc trong một phạm vi nào cả. Bằng cách chia thích hợp ta có thể chọn một giá trị bất kì nào cho một biểu thức đối xứng của bất đẳng thức . Ví dụ: $a+b+c=3, abc=1, a^2+b^2+c^2=1, ab+bc+ca=3$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực x, y. Chứng minh rằng:

$$x^4+y^4+4x^2y^2 \geq 3xy\left(x^2+y^2\right)$$

Phân tích:

Để bài toán đơn giản hơn ta cần chuẩn hóa về biến a, b sao cho $a^2+b^2=1$

Muốn được vậy ta cần chia các biến của bất đẳng thức cho biểu thức t mà:

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=t^2 \Leftrightarrow t=\sqrt{x^2+y^2}$$

Do bậc của bất đẳng thức là 4 nên ta sẽ chia hai vế của bất đẳng thức cho $t^4=\left(x^2+y^2\right)^2$

Hướng dẫn giải

- Xét x = y = 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng
- Nếu $x, y \neq 0$, chia hai vế của bất đẳng thức trên cho $\left(x^2+y^2\right)^2>0$ ta được bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2+4\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \geq 3\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Mặt khác: $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}.\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}=\dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \geq \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2+4\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \geq 3\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}.\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}} \\ b=\sqrt{\dfrac{y}{x^2+y^2}} \end{cases}$. Khi đó bài toán trở thành:

Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng:

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

$$a^4+b^4+4a^2b^2\geq 3ab\left(a^2+b^2\right)\qquad (1)$$

Thật vậy: $(1)\Leftrightarrow a^4+b^4+4a^2b^2\geq 3ab$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2+4a^2b^2\geq 3ab$
$\Leftrightarrow 2a^2b^2-3ab+1\geq 0$
$\Leftrightarrow (2ab-1)(ab-1)\geq 0\qquad (2)$

Mặt khác $1=a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|\geq 2ab\Rightarrow ab\leq \frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases}2ab-1\leq 0\\ ab-1<0\end{cases}$

Do đó bất đẳng thức (2) luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ *hay* $x=y$

★**Thí dụ 2.** Cho các số thực x, y, z. Chứng minh rằng:

$$3\left(x^4+y^4+z^4\right)\geq (x+y+z)\left(x^3+y^3+z^3\right)\quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Do bất đẳng thức (1) là thuần nhất (đồng bậc) nên ta có thể giả sử $x+y+z=3$

Khi đó ta cần chứng minh: $x^4+y^4+z^4\geq x^3+y^3+z^3\quad (2)$

Ta sẽ chứng minh: $x^4+1\geq x^3+x\quad (3)$

Thật vậy: $(3)\Leftrightarrow x^3(x-1)-(x-1)\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+x+1\right)\geq 0$ (luôn đúng)

Tương tự: $y^4+1\geq y^3+y$, $z^4+1\geq z^3+y$

Cộng cá bất đẳng thức trên theo vế ta được: $x^4+y^4+z^4+3\geq x^3+y^3+z^3+(x+y+z)$

Mà $x+y+z=3$ nên bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=$ z.

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực x, y, z ≥ 0. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\leq \sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}}\qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

CHINH PHỤC KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HAI

Do bất đẳng thức trên là thuần nhất nên nếu bất đẳng thức trên đúng với bộ số (x, y, z) thì cũng đúng với (tx, ty, tz) với t là số thực dương bất kì .

Do đó ta có thể giả sử $xy + yz + zx = 3$.

Khi đó: $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 9 \Rightarrow x+y+z \geq 3$

Và $3 = xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow xyz \leq 1$

Ta có: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \geq 3.3 - 1 = 8$

Suy ra: $\sqrt[3]{\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} \geq 1 = \sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực x, y > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{5}{8} \qquad (4)$$

Hướng dẫn giải

Do bất đẳng thức trên là thuần nhất nên nếu bất đẳng thức trên đúng với bộ số (x, y) thì cũng đúng với (tx, ty) với t là số thực dương bất kì .

Do đó ta có thể giả sử $x + y = 1$ suy ra $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}$. Khi đó ta cần chứng minh:

$$x^4 + y^4 + \sqrt{xy} \geq \frac{5}{8} \Leftrightarrow \left[(x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2\right] + \sqrt{xy} \geq \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left[\left((x+y)^2 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2\right] + \sqrt{xy} \geq \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow (1-2xy)^2 - 2x^2y^2 + \sqrt{xy} \geq \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y^2 - 4xy + \sqrt{xy} + 1 \geq \frac{5}{8}$$

Đặt $t = \sqrt{xy}$ với $0 < t \leq \frac{1}{2}$. Khi đó cần chứng minh:

$$2t^4 - 4t^2 + t + 1 \geq \frac{5}{8} \Leftrightarrow 16t^4 - 32t^2 + 8t + 3 \geq 0$$

$\Leftrightarrow \left(4t^2-3\right)\left(4t^2-1\right)+8t\left(1-2t\right)\ge 0$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì $0<t\le \frac{1}{2}$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi x = y

Nhận xét: Đối phương pháp chuẩn hóa thường được áp dụng hiệu quả với phương pháp hệ số bất định để giải nhiều bài toán hay và khó, sau đây sẽ trình bày với các bạn một số bài toán kết hợp hai phương pháp này, các bạn có thể đọc thêm phương pháp hệ số bất định để hiểu hơn nhé!

★**Thí dụ 4.** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge \frac{3}{2}$

Phân tích tìm lời giải

Bất đẳng thức trên là thuần nhất (đồng bậc). Không mất tính tổng giả sử: $a+b+c=3$.

Bài toán qui về việc chứng minh: $\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge \frac{3}{2}$

Dễ thấy bất đẳng thức trên có cấu trúc $f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)\ge \frac{3}{2}$ nên ta nghĩ đến phương pháp thường được sử dụng để chứng minh cho dạng trên là hệ số bất định (UCT).

Ta cần tìm số m và n sao cho: $\frac{a}{3-a}\ge \frac{1}{2}+mx+n \quad (*)$

Tương tự với 2 biểu thức còn lại: $\frac{b}{3-b}\ge mb+n$; $\frac{c}{3-c}\ge mc+n$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge \frac{3}{2}+m\left(a+b+c\right)+3n=\frac{3}{2}+3\left(m+n\right)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số m và n phải thỏa mãn điều kiện $m+n=0\Leftrightarrow n=-m$. Thế vào $(*)$ dẫn đến $\frac{a}{3-a}\ge \frac{1}{2}+m\left(x-1\right) \quad (**)$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là m để bất đẳng thức $(**)$ là đúng.

Chú ý ở bài toán này điểm cực trị đạt được tại $a=b=c=1$ nên ta cần xác định m sao cho

$$\frac{a}{3-a}\ge \frac{1}{2}+m(a-1)\Leftrightarrow \frac{3(a-1)}{2(3-a)}\ge m(a-1)\Leftrightarrow \left(a-1\right)\left[\frac{3}{2\left(3-a\right)}-m\right]\ge 0$$

Khi cho $a=1$ thì ta có $\frac{3}{2\left(3-a\right)}=\frac{3}{4}$ từ đó ta dự đoán rằng $m=\frac{3}{4}$ để tạo thành đại lượng bình phương $(a-1)^2$ trong biểu thức. Từ đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{a}{3-a}\ge \frac{1}{2}+\frac{3}{4}\left(a-1\right)\Leftrightarrow \frac{a}{3-a}\ge \frac{3a-1}{4}$$

Từ đây ta đi đến lời giải sau:

Lời giải

Bất đẳng thức trên thuần nhất nên ta có thể giả sử rằng: $a+b+c=3$

Khi đó: $\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{2}$

Ta sử dụng bất đẳng thức sau đây $\frac{a}{3-a}\ge\frac{3a-1}{4}$

Thật vậy: $\frac{a}{3-a}\ge\frac{3a-1}{4}\Leftrightarrow\frac{3(a-1)^2}{4(3-a)}\ge 0$

Hiển nhiên đúng với $0 < a < 3$ do a, b, c dương và a + b + c = 3.

Sử dụng các bất đẳng thức tương tự với b và c. Ta được: $\frac{b}{3-b}\ge\frac{3b-1}{4}$; $\frac{c}{3-c}\ge\frac{3c-1}{4}$

Cộn theo vế ta được: $\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{4}\left(a+b+c\right)-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực x, y, z > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{x\left(y+z\right)}{x^2+\left(y+z\right)^2}+\frac{y\left(z+x\right)}{y^2+\left(z+x\right)^2}+\frac{z\left(x+y\right)}{z^2+\left(x+y\right)^2}\le\frac{6}{5}\qquad(1)$$

Phân tích tìm lời giải

Bất đẳng thức trên thuần nhất nên ta có thể giả sử rằng: $x+y+z=3$.

Khi đó: $\frac{x\left(3-x\right)}{x^2+\left(3-x\right)^2}+\frac{y\left(3-y\right)}{y^2+\left(3-y\right)^2}+\frac{z\left(3-z\right)}{z^2+\left(3-z\right)^2}\le\frac{6}{5}\qquad(1)$

Dễ thấy bất đẳng thức trên có cấu trúc $f\left(x\right)+f\left(y\right)+f\left(z\right)\le\frac{6}{5}$ nên ta nghĩ đến phương pháp thường được sử dụng để chúng minh cho dạng trên là hệ số bất định (UCT).

Ta cần tìm số m và n sao cho: $\frac{x\left(3-x\right)}{x^2+\left(3-x\right)^2}\le\frac{2}{5}+mx+n\qquad(*)$

Tương tự với 2 biểu thức còn lại: $\frac{y\left(3-y\right)}{y^2+\left(3-y\right)^2}\le\frac{2}{5}+my+n$; $\frac{z\left(3-z\right)}{z^2+\left(3-z\right)^2}\le\frac{2}{5}+mz+n$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{x\left(y+z\right)}{x^2+\left(y+z\right)^2}+\frac{y\left(z+x\right)}{y^2+\left(z+x\right)^2}+\frac{z\left(x+y\right)}{z^2+\left(x+y\right)^2}\le\frac{6}{5}+m\left(a+b+c\right)+3n=\frac{6}{5}+3\left(m+n\right)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số m và n phải thỏa mãn điều kiện $m+n=0 \Leftrightarrow n=-m$. Thế vào $(*)$ dẫn đến $\dfrac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2} \le \dfrac{2}{5}+m(x-1) \qquad (**)$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là m để bất đẳng thức $(**)$ là đúng.

Chú ý ở bài toán này điểm cực trị đạt được tại $x=y=z=1$ nên ta cần xác định m sao cho

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2} \le \frac{2}{5}+m(x-1) \Leftrightarrow (x-1)\left[m+\frac{9(x-2)}{5\left[x^2+(3-x)^2\right]}\right] \ge 0$$

Khi cho $x=1$ thì ta có $\dfrac{9(x-2)}{5\left[x^2+(3-x)^2\right]}=-\dfrac{9}{25}$ từ đó ta dự đoán rằng $m=\dfrac{9}{25}$ để tạo thành đại lượng bình phương $(a-1)^2$ trong biểu thức. Từ đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ $\dfrac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2} \le \dfrac{2}{5}+\dfrac{9}{25}(x-1)$ *hay* $\dfrac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2} \le \dfrac{9}{25}x+\dfrac{1}{25}$

Từ đây ta đi đến lời giải sau:

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức trên thuần nhất nên ta có thể giả sử rằng: $x+y+z=3$.

Khi đó: $\dfrac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}+\dfrac{y(3-y)}{y^2+(3-y)^2}+\dfrac{z(3-z)}{z^2+(3-z)^2} \le \dfrac{6}{5} \qquad (1)$

Ta sử dụng bất đẳng thức sau đây $\dfrac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2} \le \dfrac{9}{25}x+\dfrac{1}{25}$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với $\dfrac{9(a-1)^2(2x+1)}{25\left[x^2+(3-x)^2\right]} \ge 0$

Hiển nhiên đúng với a là số thực dương.

Sử dụng các bất đẳng thức tương tự với b và c. Ta được:

$$\frac{y(3-y)}{y^2+(3-y)^2} \le \frac{9}{25}y+\frac{1}{25}\ ;\ \frac{z(3-z)}{z^2+(3-z)^2} \le \frac{9}{25}z+\frac{1}{25}$$

Cộn theo vế ta được:

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}+\frac{y(3-y)}{y^2+(3-y)^2}+\frac{z(3-z)}{z^2+(3-z)^2} \le \frac{9}{25}(x+y+z)+\frac{3}{25}=\frac{27}{25}+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

★**Thí dụ 6.** Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Hướng dẫn giải

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\ge a^2+b^2+c^2$$

Ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\ge a^2+m(a-1)$

Ta lại có $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}-a^2=-\frac{(a-1)(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3}$

Từ đây dễ dàng dự đoán với $m=-6$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\ge a^2-6(a-1)\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(6-a)a}{a^2-2a+3}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a\in(0,3)$.

Tương tự với các biến còn lại. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Với x, y, z > 0. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

1) $\frac{x^3+y^3}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$.

2) $3\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

3) $\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\ge x+y+z$.

4) $x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)\le 2\left(x^3+y^3+z^3\right)$

5) $x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)\ge\left(xy+yz+zx\right)\sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$

6) $\frac{\left(2x+y+z\right)^2}{2x^2+\left(y+z\right)^2}+\frac{\left(2y+z+x\right)^2}{2y^2+\left(z+x\right)^2}+\frac{\left(2z+x+y\right)^2}{2z^2+\left(x+y\right)^2}\le 8$.

7) $\frac{\left(y+z-x\right)^2}{\left(y+z\right)^2+x^2}+\frac{\left(z+x-y\right)^2}{\left(z+x\right)^2+y^2}+\frac{\left(x+y-z\right)^2}{\left(x+y\right)^2+z^2}\ge\frac{3}{5}$.

CHỦ ĐỀ 14

SỬ DỤNG ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Trong nhiều bài toán về bất đẳng thức, người ta lồng ghép một số đẳng thức thường gặp nhằm làm tăng độ khó của bất đẳng thức, sau đây chúng ta sẽ làm quen với một số đẳng thức đó.

Đẳng thức thường gặp 1:

Với a, b, c là các số thực thì ta có: $(a+b)(a+c)=a^2+ab+bc+ca=a(a+b+c)+bc$

Từ đẳng thức này ta có các kết quả sau:

Kết quả 1. *Nếu $a + b + c = 1$ thì $(a + b)(a + c) = a(a + b + c) + bc = a + bc$*

Kết quả 2. *Nếu $ab + bc + ca = 1$ thì $(a + b)(a + c) = a^2 + ab + bc + ca = a^2 + 1$*

Kết quả 3. *Nếu $a + b + c = k$ thì $(a + b)(a + c) = a(a + b + c) + bc = k.a + bc$*

Kết quả 4. *Nếu $ab + bc + ca = 1$ thì* $c=-\dfrac{ab+1}{a+b}$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab)\ge 0$$

Hướng dẫn giải

Do $a + b + c = 1$ nên: $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(b+c)$

Tương tự:

$b+ca=b(a+b+c)+ca=(b+a)(b+c)$; $c+ab=c(a+b+c)+ab=(c+a)(c+b)$

Do đó: $(a+bc)(b+ca)(c+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\ge 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi một trong 3 số bằng 1 và hai số còn lại đối nhau.

★**Thí dụ 2.** Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{3}{2}$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Hà Tĩnh năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}}=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}\le\frac{1}{2}.\left(\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}\right);\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}\right)$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{x+z}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{x+z}+\frac{z}{x+z}\right)+\left(\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x+y}\right)+\left(\frac{z}{y+z}+\frac{y}{y+z}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{1}{2}.3=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$.

★**Thí dụ 3.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{b+ca}\ge\frac{3}{4}.$$

Hướng dẫn giải

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Schwarz ta được:

$$\begin{aligned}\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{b+ca}&=\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}\\&=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ac(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\\&\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)}\\&=\frac{1}{a+bc+b+ca+c+ab}\ge\frac{1}{1+\frac{(a+b+c)^2}{3}}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

★**Thí dụ 3.** Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a + b + c = 2016$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{a + \sqrt{2016a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2016b + ac}} + \frac{c}{c + \sqrt{2016c + ab}}$

(Trích đề vào 10 Chuyên Hà Tĩnh năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Ta có $a + \sqrt{2016a + bc} = a + \sqrt{(a + b + c)a + bc} = a + \sqrt{(a + b)(a + c)}$

Áp dụng bđt Bunyakovski ta có:

$$(a + b)(a + c) = \left[\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2\right].\left[\left(\sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2\right] \geq \left(\sqrt{ac} + \sqrt{ab}\right)^2$$

Suy ra $a + \sqrt{(a + b)(a + c)} \geq a + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$

Suy ra $\frac{a}{a + \sqrt{2016a + bc}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Tương tự $\frac{b}{b + \sqrt{2016b + ac}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$; $\frac{c}{c + \sqrt{2016c + ab}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Suy ra $P \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1$, Dấu = xảy ra khi $a = b = c = 672$

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 11. Tìm GTNN

$$P = \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11}}$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Quảng Bình năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Thay 11 = ab + bc + ca vào P, ta có:

$$P = \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11}}$$

$$= \frac{5a + 5b + 5c}{\sqrt{12(a^2 + ab + bc + ca)} + \sqrt{12(b^2 + ab + bc + ca)} + \sqrt{c^2 + ab + bc + ca}}$$

$$= \frac{5a + 5b + 5c}{2\sqrt{3(a + b)(a + c)} + 2\sqrt{3(b + a)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} \le 3(a+b)+(a+c)=4a+3b+c \quad (1)$$

Tương tự:

$$2\sqrt{3(b+a)(b+c)} \le 4b+3a+c \quad (2)$$

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \le \frac{1}{2}(a+b+2c) \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)}+2\sqrt{3(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)} \le \frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có

$$P \ge \frac{5a+5b+2c}{\frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c}=\frac{2}{3}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b)=a+c \\ 3(b+a)=b+c \\ c+a=c+b \\ ab+bc+ca=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{c}{5} \\ ab+bc+ca=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=5 \end{cases}$

Vậy GTNN của P là $\frac{2}{3}$,đạt được khi a = b = 1, c = 5.

★**Thí dụ 6.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a+3b+2c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $$B=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{b^2+4}}+\frac{3}{\sqrt{c^2+9}}$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{6}{bc}+\frac{3}{ca}+\frac{2}{ab}=1$. Đặt $a=\frac{1}{x}$; $b=\frac{2}{y}$; $c=\frac{3}{z}$, khi đó ta được $xy+yz+zx=1$

Biểu thức B được viết lại thành $B=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Để ý đến giả thiết $xy+yz+zx=1$ ta có $x^2+1=x^2+xy+yz+zx=\left(x+y\right)\left(z+x\right)$

Khi đó ta được $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(z+x\right)}}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $B=\dfrac{x}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}+\dfrac{y}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}+\dfrac{z}{\sqrt{\left(z+x\right)\left(y+z\right)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(z+x\right)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$
$$\frac{y}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$$
$$\frac{z}{\sqrt{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$B=\frac{x}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}+\frac{y}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}+\frac{z}{\sqrt{\left(z+x\right)\left(y+z\right)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\dfrac{3}{2}$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{3};\ b=2\sqrt{3};\ c=3\sqrt{3}$

★**Thí dụ 7.** Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-x^2}{x+yz}+\frac{1-y^2}{y+zx}+\frac{1-z^2}{z+xy}\ge 6$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Hà Nội năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Áp dụng giả thiết ta được $\dfrac{1-x^2}{x+yz}=\dfrac{\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{\left(x+y\right)\left(z+x\right)}=\dfrac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)+\left(z+x\right)\left(y+z\right)}{\left(x+y\right)\left(z+x\right)}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1-y^2}{y+zx}=\frac{\left(x+z\right)\left(x+y\right)+\left(x+z\right)\left(y+z\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}$$
$$\frac{1-z^2}{z+xy}=\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)+\left(x+y\right)\left(x+z\right)}{\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Đặt $a=\left(x+y\right)\left(y+z\right);\ b=\left(y+z\right)\left(z+x\right);\ c=\left(x+y\right)\left(z+x\right)$, khi đó ta viết lại được bất đẳng thức thành

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2;\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a}\ge 2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

★**Thí dụ 8.** Cho số thực $x, y(x+y\ne 0)$. Chứng minh rằng $x^2+y^2+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2\ge 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z=-\frac{1+xy}{x+y}$ ta có : $xy+yz+zx=-1$ và BĐT đã trở thành:

$x^2+y^2+z^2\ge 2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge -2(xy+yz+zx) \Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức thường gặp 2:

Với x, y, z là các số thực thỏa mãn: $xyz=1$

Ta có các kết quả sau:

Kết quả 1. Đẳng thức: $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$

Kết quả 2. Đẳng thức $\frac{1}{1+x^2+x^2y^2}+\frac{1}{1+y^2+y^2z^2}+\frac{1}{1+z^2+z^2x^2}=1$

Chứng minh

Vì xyz = 1 nên $\frac{1}{1+y+yz}=\frac{x}{x+xy+xyz}=\frac{x}{1+x+xy}$

$$\frac{1}{1+z+zx}=\frac{1}{1+z+zx}=\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}=\frac{xy}{1+x+xy}$$

Do đó: $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{1+x+xy}=1$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Từ đẳng trước trên có thể suy ra với các số thực x, y, z thỏa mãn xyz = 1 thì ta có: $\frac{1}{1+x^2+x^2y^2}+\frac{1}{1+y^2+y^2z^2}+\frac{1}{1+z^2+z^2x^2}=1$

Các bài toán sử dụng:

★**Thí dụ 1.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}\le\frac{1}{2}$$

Hướng dẫn giải

Do bất đẳng thức đối xứng với x, y, z nên dễ đoán được đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho các số dương ta được:

$$2x^2+y^2+3=\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+1\right)+2\ge 2xy+2x+2\Rightarrow\frac{1}{2x^2+y^2+3}\le\frac{1}{2\left(1+x+xy\right)}$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{1}{2y^2+z^2+3}\le\frac{1}{2\left(1+y+yz\right)};\quad\frac{1}{2z^2+x^2+3}\le\frac{1}{2\left(1+x+zx\right)}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}\right)$$

Mà ta đã biết đẳng thức: $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1.

★**Thí dụ 2.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn xyz = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $C=\frac{1}{\left(x+1\right)^2+y^2+1}+\frac{1}{\left(y+1\right)^2+z^2+1}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2+x^2+1}$

Hướng dẫn giải

Do bất đẳng thức đối xứng với x, y, z nên dễ đoán được đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho các số dương ta được:

$$(x+1)^2+y^2+1=x^2+y^2+2x+2\ge 2xy+2x+2\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\frac{1}{2(xy+x+1)}$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\frac{1}{2(xy+x+1)};\quad \frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2(zx+z+1)}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$C=\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}\right)$$

Mà ta đã biết đẳng thức: $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$

Vậy giá trị lớn nhất C là $\frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1.

★**Thí dụ 3.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}$

Hướng dẫn giải

Vì abc = 1 nên $\frac{a}{a+2b}=\frac{a}{a+2ab^2c}=\frac{1}{1+2b^2c}\ge\frac{1}{1+b^2+b^2c^2}$

(do áp dụng bất đẳng thức AM-GM với hai số dương b^2 và b^2c^2).

Tương tự: $\frac{b}{b+2c}\ge\frac{1}{1+c^2+c^2a^2}$; $\frac{c}{c+2a}\ge\frac{1}{1+a^2+a^2b^2}$.

Do đó: $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\ge\frac{1}{1+b^2+b^2c^2}+\frac{1}{1+c^2+c^2a^2}+\frac{1}{1+a^2+a^2b^2}=1$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

★**Thí dụ 4.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}$

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Quảng Nam năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}=\frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4}\geq\frac{2ab+2a+6}{ab+a+4}=\frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4}=2-\frac{2}{ab+a+4}$$

Tương tự: $\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}\geq 2-\frac{2}{bc+b+4}$; $\quad\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}\geq 2-\frac{2}{ca+c+4}$

Do đó: $P\geq 6-2\left(\frac{1}{ab+a+4}+\frac{1}{bc+b+4}+\frac{1}{ca+c+4}\right)=6-2Q$

Với x, y dương ta có:

$$(x-y)^2\geq 0\Leftrightarrow (x+y)^2\geq 4xy\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}\leq\frac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{ab+a+4}=\frac{1}{(ab+a+1)+3}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{3}\right).$

Tương tự: $\frac{1}{bc+b+4}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{ca+c+4}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ca+c+1}+\frac{1}{3}\right)$

Do đó:

$$Q\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)\Rightarrow 2Q=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$\Rightarrow P\geq 6-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{ac}{bc.ac+abc+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ca+c+1}+\frac{ac}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}.2$$

$$=5$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

★**Thí dụ 5.** Cho a,b,c thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab-2}}+\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}+\frac{1}{\sqrt{c^4+c^3+ac+2}}\leq\sqrt{3}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(a-1)^2(a^2+a+1)\ge 0 \Leftrightarrow (a^2-2a+1)(a^2+a+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-a^3-a+1\ge 0 \Leftrightarrow a^4-a^3+1\ge a$$

$$\Leftrightarrow a^4-a^3+ab+2\ge ab+a+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab+2}}\le \frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}\le \frac{1}{\sqrt{bc+b+1}};\frac{1}{\sqrt{c^4-c^3+ac+2}}\le \frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}$$

Như vậy

$$VT\le \frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}}+\frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}\le \sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}$$

(Áp dụng BĐT Bunyakovski cho 3 số)

Lại có

$$\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{a^2bc+abc+ab}\right)}$$

$$=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{ab}{a+ab+1}\right)}=\sqrt{3}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 6.** Cho ba số thực a, b, c dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{2a^3+b^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{2b^3+c^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{2c^3+a^3+6}}\le 1 \quad (5)$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đăng thức Cauchy ta có:

$$a^3+b^3+1\ge 3ab,\ a^3+1+1\ge 3a \Rightarrow 2a^3+b^3+6\ge 3(1+a+ab)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2a^3+b^3+6}}\le \frac{1}{\sqrt{3(1+a+ab)}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1+a+ab}\right)(6)$$

Tương tự $\frac{1}{\sqrt{2b^3+c^3+6}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1+b+bc}\right)(7),\ \frac{1}{\sqrt{2c^3+a^3+6}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1+c+ac}\right)(8)$

Cộng ba bất đẳng thức (6), (7), (8) và kết hợp với đẳng thức (1) ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

★**Thí dụ 7.** Cho ba số thực a, b, c dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{(2a+1)(b+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2b+1)(c+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2c+1)(a+2)}}\le 1 \quad (9)$$

Hướng dẫn giải

Đặt $a=x^2, b=y^2, c=z^2$, với x, y, z là các số dương và x.y.z = 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$(x.y+x.1+1.1)^2\le(x^2+x^2+1)(y^2+1+1)\Leftrightarrow(1+x+xy)^2\le(2x^2+1)(y^2+2)$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{(2a+1)(b+2)}}\le\frac{1}{1+x+xy}$ (10),

tương tự ta có: $\frac{1}{\sqrt{(2b+1)(c+2)}}\le\frac{1}{1+y+yz}$(11), $\frac{1}{\sqrt{(2c+1)(a+2)}}\le\frac{1}{1+z+xz}$ (12)

Cộng ba bất đẳng thức (10), (11), (12) và kết hợp với đẳng thức (1) ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

Đẳng thức thường gặp 3:

Với x, y, z là các số thực thỏa mãn: $xyz=1$

Ta có các kết quả sau: $\frac{x}{2+x+xy}+\frac{y}{1+y+yz}+\frac{2z}{2+2z+zx}=1$

Chứng minh

Vì xyz = 2 nên $\frac{y}{1+y+yz}=\frac{xy}{x+xy+xyz}=\frac{xy}{x+xy+2}$

$$\frac{2z}{2+2z+zx}=\frac{2z}{xyz+2z+zx}=\frac{2}{xy+2+x}.$$

Do đó:

$$\frac{x}{2+x+xy}+\frac{y}{1+y+yz}+\frac{2z}{2+2z+zx}=\frac{x}{2+x+xy}+\frac{xy}{x+xy+2}+\frac{2}{xy+2+x}=\frac{x+xy+2}{2+x+xy}=1$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Các bài toán sử dụng:

★**Thí dụ 1.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn xyz = 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16}\le\frac{1}{2}$$

(Trích đề vào 10 chuyên Quốc Học Huế 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho các số dương ta được:

$$2x^2+y^2+5=\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+1\right)+4\ge 2xy+2x+4\Rightarrow\frac{x}{2x^2+y^2+5}\le\frac{x}{2\left(xy+x+2\right)}$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{2y}{6y^2+z^2+6}\le\frac{2y}{4\left(yz+y+1\right)}=\frac{y}{2\left(yz+y+1\right)};$$
$$\frac{4z}{3z^2+4x^2+16}\le\frac{4z}{4\left(zx+2z+2\right)}=\frac{z}{zx+2z+2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+2z+2}\right)=\frac{1}{2}$$

Mà ta đã biết đẳng thức: $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = 1, z = 2.

Đẳng thức thường gặp 4:

Xuất phát từ hai hằng đẳng thức đơn giản:
$\left(a+b\right)^2=a^2-2ab+b^2$; $\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$

Từ đẳng thức này ta có các kết quả sau:

Kết quả 1. $2\left(a^2+b^2\right)=\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2\ge\left(a+b\right)^2$

Kết quả 2. $4ab=\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2\le\left(a+b\right)^2$

Kết quả 3. $a^2-ab+b^2\ge\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$ *Do* $3\left(a^2-ab+b^2\right)-\left(a^2+ab+b^2\right)=2\left(a-b\right)^2\ge 0$

Kết quả 4. $m\left(a^2+b^2\right)+nab=\frac{2m+n}{4}(a+b)^2+\frac{2m-n}{4}(a-b)^2$

Chứng minh kết quả 4:

Thật vậy:

$$\frac{2m+n}{4}(a+b)^2+\frac{2m-n}{4}(a-b)^2=\left(\frac{2m+n}{4}+\frac{2m-n}{4}\right)\left(a^2+b^2\right)+\left(\frac{2m+n}{4}-\frac{2m-n}{4}\right).2ab$$
$$=m\left(a^2+b^2\right)+n.ab$$

Tổng quát: $ax^2+bxy+cy^2=(mx+ny)^2+p(x-y)^2$,

Trong đó: $m=\frac{2a+b}{2\sqrt{a+b+c}},n=\frac{2c+b}{2\sqrt{a+b+c}},p=-\frac{b^2-4ac}{4(a+b+c)}$.

Các bài toán sử dụng:

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực $a,b,c\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức:

$$P=\frac{c}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+1}}+\frac{a}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+1}}+\frac{b}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+1}}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng kết quả 1 ta được: $2\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2\Rightarrow\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\ge a+b$

Lại do $c\in[0;1]\Rightarrow c\le1\Rightarrow\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+1\ge a+b+c\Rightarrow\frac{c}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+1}\le\frac{c}{a+b+c}$

Tương tự:

$$\frac{a}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+1}\le\frac{a}{a+b+c};\frac{b}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}+1}\le\frac{b}{a+b+c}$$

Cộng theo vế ta được: $P\le\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$

Dâu "=" xảy ra khi a = b = c = 1

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức ở kết quả 1:

$(b+c)^2 \le 2(b^2+c^2)$; (a + b)$^2 \le 2(a^2+b^2)$; (c + a)$^2 \le 2(c^2+b^2)$, ta có:

$$T \ge \frac{a^2}{a^2+2(b^2+c^2)}+\frac{b^2}{b^2+2(a^2+c^2)}+\frac{c^2}{c^2+2(a^2+b^2)}$$

$$\Rightarrow T+3 \ge \left(\frac{a^2}{a^2+2(b^2+c^2)}+1\right)+\left(\frac{b^2}{b^2+2(a^2+c^2)}+1\right)+\left(\frac{c^2}{c^2+2(a^2+b^2)}+1\right)$$

$$=\frac{2}{5}.5(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2+2(b^2+c^2)}+\frac{1}{b^2+2(a^2+c^2)}+\frac{1}{c^2+2(a^2+b^2)}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho ba bộ số dương m, n, p và $\frac{1}{m},\frac{1}{n},\frac{1}{p}$ ta được:

$(m+n+p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) \ge 3.\sqrt[3]{mnp}.\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}}=9$ .Suy ra: $T+3 \ge \frac{2}{5}.9 \Leftrightarrow T \ge \frac{3}{5}.$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{3}{5}$ khi a = b = c.

★**Thí dụ 3.** Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $(a+b)^3+4ab=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P=10a+6b+\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết , áp dụng kết quả 2 ta được:

$$2=(a+b)^3+4ab=(a+b)^3+(a+b)^2-(a-b)^2 \le (a+b)^3+(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3-1+(a+b)^2-1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-1)\left[(a+b)^2+(a+b)+1+(a+b+1)\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-1)\left[(a+b)^2+2(a+b)+2\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a+b \ge 1.$$

Ta có:

$$P=10a+6b+\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(8a+\frac{2}{a}\right)+\left(4b+\frac{1}{b}\right)+2(a+b) \ge 2\sqrt{8a.\frac{2}{a}}+2\sqrt{4b.\frac{1}{a}}+2.1=8+4+2=14$$

Dấu "=" xảy ra khi : $a=b=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 14.

★**Thí dụ 3.** Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $a^2-ab+b^2=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+3ab\le 5$$

Hướng dẫn giải

Ta có $a^2-ab+b^2=1\Leftrightarrow 1=(a+b)^2-3ab\ge (a+b)^2-\frac{3}{4}(a+b)^2=\frac{1}{4}(a+b)^2\Rightarrow a+b\le 2$

Do đó:

$$a^3+b^3+3ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab=a+b+3ab\le a+b+\frac{3}{4}(a+b)^2\le 2+\frac{3}{4}.4=5$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi: a = b = 1.

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a+b+c\ge 6$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $Q=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$

Ta có:

$$\begin{aligned}P-Q&=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c-a)(c^2+ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}\\&=(a-b)+(b-c)+(c-a)\\&=0\end{aligned}$$

Do đó: P = Q

Mặt khác (theo kết quả 3): $x^2-xy+y^2\ge\frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)$ $(**)$

Thật vậy:

$$x^2-xy+y^2\ge\frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)\Leftrightarrow 3x^2-3xy+3y^2\ge x^2+xy+y^2\Leftrightarrow 2(x-y)^2\ge 0$$

Sử dụng (**) ta được:

$$\begin{aligned}P+Q&=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)(c^2-ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}\\&\ge\frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}(c+a)\end{aligned}$$

$=\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)\geq\frac{2}{3}.6=4$

Mà $P=Q\Rightarrow P\geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 2

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

★**Thí dụ 5.** Cho các số dương x, y, z thoả mãn x + y + z = 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+zx+2x^2}\geq\sqrt{5}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 tỉnh Thái Bình năm 2005-2006)

Hướng dẫn giải

Theo kết quả 4 với m = 2 và n = 1 ta được:

$$2x^2+xy+2y^2=\frac{2.2+1}{4}\left(x+y\right)^2+\frac{2.2-1}{4}\left(x-y\right)^2=\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-y\right)^2\geq\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad\sqrt{2x^2+xy+2y^2}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}(x+y)\quad(\text{do } x,y>0)\quad(1)$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$\sqrt{2y^2+yz+2z^2}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}(y+z)\qquad(2)$$

$$\sqrt{2z^2+zx+2x^2}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}(z+x)\qquad(3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được :

$$\sqrt{2x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+zx+2x^2}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}(2x+2y+2z)$$

$$\sqrt{2x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+zx+2x^2}\geq\sqrt{5}(x+y+z)=\sqrt{5}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\ x=y=z=\frac{1}{3}$

★**Thí dụ 6.** Cho các số không âm x, y, z. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+3xy+y^2}+\sqrt{y^2+3yz+z^2}+\sqrt{z^2+3zx+x^2}\leq\sqrt{5}\left(x+y+z\right)$$

Hướng dẫn giải

Theo kết quả 4 với m = 1 và n = 2 ta được:

$$x^2+3xy+y^2=\frac{2.1+3}{4}\left(x+y\right)^2+\frac{2.1-3}{4}\left(x-y\right)^2=\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2-\frac{1}{4}\left(x-y\right)^2\leq\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad\sqrt{x^2+3xy+y^2}\leq\frac{\sqrt{5}}{2}(x+y)\quad(\text{do } x,y\geq 0)\quad(1)$$

Chứng minh tương tự, ta có : $\sqrt{y^2+3yz+z^2} \le \frac{\sqrt{5}}{2}(y+z)$ (2)

$$\sqrt{z^2+3zx+x^2} \le \frac{\sqrt{5}}{2}(z+x) \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được :

$$\sqrt{x^2+3xy+y^2}+\sqrt{y^2+3yz+z^2}+\sqrt{z^2+3zx+x^2} \le \frac{\sqrt{5}}{2}(2x+2y+2z)$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+3xy+y^2}+\sqrt{y^2+3yz+z^2}+\sqrt{z^2+3zx+x^2} \le \sqrt{5}(x+y+z) \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=y=z$

Đẳng thức thường gặp 5:

1) Xuất phát từ đẳng thức:

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}=-1$$

Thật vậy:

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{ab(a-b)-bc\left[(c-a)+(a-b)\right]+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{ab(a-b)-bc(c-a)-bc(a-b)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)(ab-bc)+(c-a)(ca-bc)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{b(a-b)(a-c)+c(c-a)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)(c-a)(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$$

2) Nếu $x=\frac{a+b}{a-b}, y=\frac{b+c}{b-c}, z=\frac{c+a}{c-a}$ thì $xy+yz+zx=-2$

Thật vậy: $\begin{cases} x+1=\dfrac{2a}{a-b} \\ y+1=\dfrac{2b}{b-c} \\ z+1=\dfrac{2c}{c-a} \end{cases}$ và $\begin{cases} x-1=\dfrac{2b}{a-b} \\ y-1=\dfrac{2c}{b-c} \\ z-1=\dfrac{2a}{c-a} \end{cases}$

Do đó: $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$

$\Leftrightarrow xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=-2$

Các bài toán sử dụng:

★Thí dụ 1. Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\ge 2$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Vĩnh Phúc năm 2009-2010)

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 2+2\left(\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}\right)$$

Mà ta lại có

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}$$
$$=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$$

Do đó bất đẳng thức trên trở thành $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

★Thí dụ 2. Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3}\ge\frac{9}{4}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3}\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2-bc+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2}\ge\frac{9}{4}$

Mà $x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2$

Nên $\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2-bc+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2}=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\right]+\frac{3}{4}$

Ta cần chứng minh: $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge 2$

Đặt $x=\frac{a+b}{a-b},y=\frac{b+c}{b-c},z=\frac{c+a}{c-a}$

Khi đó cần chứng minh: $x^2+y^2+z^2\ge 2.$

Mà: $\begin{cases} x+1=\dfrac{2a}{a-b} \\ y+1=\dfrac{2b}{b-c} \\ z+1=\dfrac{2c}{c-a} \end{cases}$ và $\begin{cases} x-1=\dfrac{2b}{a-b} \\ y-1=\dfrac{2c}{b-c} \\ z-1=\dfrac{2a}{c-a} \end{cases}$

Do đó: $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$

$\Leftrightarrow xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=-1$

Do đó: $x^2+y^2+z^2\ge 2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge -2(xy+yz+zx)\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức thường gặp 6:

$a^2+ab+b^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+b+c)$

$b^2+bc+c^2+ab+bc+ca=(b+c)(a+b+c)$

$c^2+ca+a^2+ab+bc+ca=(c+a)(a+b+c)$

★**Thí dụ 1.** Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và đẳng thức 6 ta được:

$$(a^2+ab+b^2)(ab+bc+ca)\le\frac{1}{4}(a+b)^2(a+b+c)^2 \Rightarrow \sqrt{(a^2+ab+b^2)(ab+bc+ca)}\le\frac{1}{2}(a+b)(a+b+c)$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}\ge\frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.\frac{c}{a+b}.$$

Tương tự: $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}\ge\dfrac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.\dfrac{a}{b+c}$; $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+ac+c^2}}\ge\dfrac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.\dfrac{b}{a+c}$.

Do đó:

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}&\ge\frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\\&=\frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.\left(\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}\right)\\&\ge\frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\\&=\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}.\end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. *Cho ba số thực x, y, z dương thỏa mãn xyz = 1. Tìm GTLN của biểu thức*

$$P=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+(x+1)^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{(y+z)^2+(y+1)^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{(z+x)^2+(z+1)^2+4}}$$

2. *Cho ba số thực x, y, z dương thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{(x+2)(x+y+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(y+2)(y+z+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(z+2)(z+x+1)}}\le 1$$

3. *Chứng minh rằng với mọi số thực đôi một khác nhau a, b, c thì:*

$a)\ \dfrac{ab}{(a-b)^2}+\dfrac{bc}{(b-c)^2}+\dfrac{ca}{(c-a)^2}\ge\dfrac{-1}{4}.$

$b)\ \dfrac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\dfrac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\dfrac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\ge\dfrac{5}{4}.$

$c)\ \dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}\ge\dfrac{9}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$

4. *Cho a, b, c dương thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=2018$ *. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{a}{a+\sqrt{2018a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2018b+ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{2018c+ab}}$$

5. *Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$S=\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}+\frac{\sqrt{y^2-yz+z^2}}{y+z+2x}+\frac{\sqrt{z^2-zx+x^2}}{z+x+2y}$$

6) *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn* $abc=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$$

CHỦ ĐỀ 14

NGUYÊN LÝ DIRICHLET

A. Kiến thức cần nhớ

Nhà toán học Đức **P.G.Lejeune Dirichlet** (1805-1859) đã nêu ra một định lí mà về sau người ta gọi là ***Nguyên lí Dirichlet,*** nguyên lý được phát biểu như sau:

"Nếu nhốt vào n chiếc lồng một số chú thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó có nhiều hơn một con thỏ"

Từ nguyên lí Dirichlet có một nhận xét có ý nghĩa ứng dụng hết sức quan trọng. Đó là:

Trong 3 số thực bất kì x, y, z thì phải có 2 số cùng là số âm hoặc cùng là số dương.

Đây là một nhận xét rất quan trọng thường được ứng dụng vào giải nhiều bài toán bất đẳng thức 3 ẩn mà vai trò các ẩn là như nhau, bởi khi ta đã tìm được *"điểm rơi"* (tức là đẳng thức của bài toán) thì ta có thể áp dụng nhận xét trên để chứng minh BĐT.

Chẳng hạn đối với bài toán đẳng thức 3 ẩn mà vai trò các ẩn là như nhau xảy ra khi $a=b=c=k$ thì ta có thể giả sử 2 số $(a-k)$, $(b-k)$ cùng dấu, khi đó thì $(a-k)(b-k)\ge 0$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực dương a, b, c.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$

Phân tích:

Trước tiên ta tìm dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi nào để có những đánh giá đúng. Do vai trò của các ẩn *a, b, c* là như nhau nên dự đoán dấu bằng xảy ra tại $a = b = c$.

Khi đó thay vào bất đẳng thức ta được phương trình:

$$3a^2+2a^3+1=6a^2 \Leftrightarrow 2a^3-3a^2+1=0 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1)=0 \Leftrightarrow a=1$$

Thay $a = b = c = 1$ bất đẳng thức ta thấy dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra.

Do đó ta dự đoán được điểm rơi $a = b = c = 1$

Hướng dẫn giải

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow ab\ge a+b-1$ mà $c > 0$ nên

$abc\ge bc+ca-c \Rightarrow 2abc\ge 2bc+2ca-2c$

Do đó ta có: $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge a^2+b^2+c^2+2bc+2ca-2c+1$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2bc+2ca-2c+1\ge 2(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+1\ge 2c+2ab$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2\ge 0$$

BĐT trên luôn đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 2.** Cho ba số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=a^2+b^2+c^2+2abc+\frac{18}{ab+bc+ca}$$

(Trích đề toán vào 10 Phú Thọ năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Xét ba hiệu $(a-1),(b-1),(c-1)$. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ít nhất hai trong ba hiệu phải cùng dấu. Do vai trò ba hiệu như nhau giả sử: $(a-1)$ và $(b-1)$ cùng dấu

$\Rightarrow (a-1).(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow ab+1\ge a+b$

$\Rightarrow abc+c\ge ac+bc$

(Nhân hai vế với c)

$\Rightarrow abc\ge ac+bc-c \Rightarrow 2abc\ge 2ac+2bc-2c$

Vậy :

$$P=a^2+b^2+c^2+2abc+\frac{18}{ab+bc+ca}$$
$$\ge a^2+b^2+c^2+2ac+2bc-2c+\frac{18}{ab+bc+ca}$$
$$\ge (a^2+b^2)+(c-1)^2+2ac+2bc+\frac{18}{ab+bc+ca}-1$$
$$\ge 2ab+2ac+2bc+\frac{18}{ab+bc+ca}-1=2.\left(ab+ac+bc+\frac{9}{ab+bc+ca}\right)-1$$
$$\ge 2.2.\sqrt{(ab+ac+bc)\left(\frac{9}{ab+bc+ca}\right)}-1=2.2.3-1=11$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 3.** Cho các số $a,b,c\ge 0$ sao cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh $ab+bc+ca-abc\le 2$

Hướng dẫn giải

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow c(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow abc\ge bc+ca-2c$.

Nên $ab+bc+ca-abc\le ab+c$

Mà $4=a^2+b^2+c^2+abc\ge 2ab+c^2+abc\Rightarrow 4-c^2\ge ab(c+2)\Rightarrow 2-c\ge ab\Rightarrow ab+c\le 2$

Từ hai BĐT trên ta suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực bất kì a, b, c.

Chứng minh rằng: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a^2-1),(b^2-1),(c^2-1)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a^2-1)(b^2-1)\ge 0$

Ta có: $(a^2+2)(b^2+2)=3(a^2+b^2)+3+(a^2-1)(b^2-1)\ge 3(a^2+b^2+1)$

Do đó: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a^2+b^2+1)(c^2+2)$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $(a^2+b^2+1)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$(a^2+b^2+1)(c^2+2)=(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)\ge (a+b+c)^2$

Do đó bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực dương bất kì a, b, c. Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge \frac{5}{16}(a+b+c+1)^2$$

Hướng dẫn giải

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau bằng dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$, bằng cách thay vào bất đẳng thức ta tính được dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$ từ đó ta có lời giải sau.

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $\left(a^2-\frac{1}{4}\right),\left(b^2-\frac{1}{4}\right),\left(c^2-\frac{1}{4}\right)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\left(b^2-\frac{1}{4}\right)\ge 0$

Ta có: $(a^2+1)(b^2+1)=\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{4}b^2+\frac{15}{16}+\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\left(b^2-\frac{1}{4}\right)\ge \frac{5}{4}a^2+\frac{5}{4}b^2+\frac{15}{16}$

Do đó: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge \left(\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{4}b^2+\frac{15}{16}\right)(c^2+1)$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$\left(\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{4}b^2+\frac{15}{16}\right)(c^2+1)\ge \frac{15}{16}(a+b+c+1)^2$ *hay* $(4b^2+4c^2+3)(a^2+1)\ge (a+b+c+1)^2$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\left(4a^2+4c^2+1+2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+a^2+\frac{1}{2}\right)\ge\left(a+b+c+1\right)^2$$

Do đó bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

★**Thí dụ 6.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)\ge 1$$

Hướng dẫn giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\left(b-1\right)\left(c-1\right)\ge 0$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned}\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)&=bc\left(b-1\right)\left(c-1\right)+b^2+c^2-b-c+1\\&\ge b^2+c^2-b-c+1\ge\frac{1}{2}\left(b+c\right)^2-\left(b+c\right)+1\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}&\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)\\&\ge\left(a^2-a+1\right)\left[\frac{1}{2}\left(b+c\right)^2-\left(b+c\right)+1\right]=\frac{1}{2}\left(a^2-a+1\right)\left(a^2-4a+5\right)\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(a^2-a+1\right)\left(a^2-4a+5\right)\ge 2\Leftrightarrow\left(a-1\right)^2\left(a^2-3a+3\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:* $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$

2) *Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn* $a^2+b^2+c^2+2abc=1$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:* $P=ab+bc+ca-abc$

   (Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 thành phố Hà Nội năm 2018)

3) *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng:*

$$9abc+1\ge 4\left(ab+bc+ca\right)$$

4) *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)$$

CHỦ ĐỀ 15

PHƯƠNG PHÁP SẮP XẾP BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

Có nhiều bài chứng minh bất đẳng thức mà các biến tham gia có vai trò như nhau. Khi đó ta có thể dựa vào vai trò như nhau. Khi đó ta có thể dựa vào vai trò như nhau của chúng mà sắp xếp chúng theo một thứ tự. Việc sắp xếp này tuy rất đơn giản nhưng đôi khi lại giúp ta giải quyết được nhiều bài toán khó.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

Hướng dẫn giải

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Khi đó ta có: $(a-b)(a-c) \ge 0 \Leftrightarrow a^2+bc \ge ac+ab$ (1)

Mặt khác: $(b-c)^2 \ge 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 \ge 2bc$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được:

$a^2+bc+b^2+c^2 \ge ab+2bc+ca \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

★**Thí dụ 2.** Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \ge 0.$$

Hướng dẫn giải

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Nếu có hai trong ba số *a, b, c* bằng nhau thì BĐT hiển nhiên đúng.

Nếu a > b > c, chia hai vế BĐT cần chứng minh cho (a – b)(b – c)(a – c) ta được BĐT tương đương $\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}+\frac{c}{a-b} \ge 0$.

Bất đẳng thức trên luôn đúng do $\begin{cases} a>b>0 \\ 0<b-c<a-c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b-c} > \frac{b}{a-c}$ và $\frac{c}{a-b} > 0$.

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực a, b, c khác nhau thuộc đoạn $[0;2]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM với x > 0, y > 0 ta có:

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x+y)^2\ge 2\frac{1}{xy}.4xy=8.$$

Suy ra: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi x = y.

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giải sử a > b > c. Áp dụng bất đẳng thức (1) cho cặp dương a – b và b – c ta có: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\ge\frac{8}{(a-b+b-c)^2}=\frac{8}{(a-c)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a – b = b – c .

Suy ra $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{8}{(a-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\frac{9}{(a-c)^2}$.

Mặt khác do $a,c\in[0;2]$ và a > c nên $0<a-c\le 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = 2 và c = 0.

Do đó: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{9}{(a-c)^2}\ge\frac{9}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c)=(2;1;0)$ và các hoán vị.

★**Thí dụ 4.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\ge ab+bc+ca$$

Hướng dẫn giải

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta giả sử $a\ge b\ge c$.. Từ giả thiết ta có:

$$3c+c^3\le 4=a+b+c+abc\le 3a+a^3$$

Suy ra $a\ge 1$ và $c\le 1$.

Nếu $a\ge b\ge 1\ge c$, ta có $4\ge a+b\ge 2\sqrt{ab}$, suy ra $ab\le 4$ .Do đó:

$$(a+b-2)^2 \ge 4(a-1)(b-1) \ge ab(a-1)(b-1)$$
$$\Leftrightarrow (a+b-ab)(ab+1) \ge (4-a-b)(a+b-1)$$
$$\Leftrightarrow a+b-ab \ge \frac{4-a-b}{ab+1}(a+b-1)$$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $c=\frac{4-a-b}{ab+1}$.

Kết hợp với (1) ta có: $a+b-ab \ge c(a+b-1)$

$$\Leftrightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca \quad (dpcm).$$

Nếu $a \ge 1 \ge b \ge c$, ta có $(a-1)(b-1)(c-1) \ge 0$

$$\Rightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca+1-abc \qquad (2)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có:

$$4 = a+b+c+abc \ge 4\sqrt[4]{abcabc} \Rightarrow abcd \le 1.$$

Kết hợp với (2) ta có điều phải chứng minh.

Đăng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

★**Thí dụ 5.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn *abc = 1*. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Hướng dẫn giải

Vì vài trò của a, b,c là như nhau nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$. Do abc = 1 nên $bc \le 1$ và $a \ge 1$. Ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+b^2}\right) = 2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+b^2)(1+c^2)}\right) \le 2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+bc)^2}\right)$$
$$=\frac{4}{1+bc}=\frac{4a}{1+a}.$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le 2\sqrt{\frac{a}{1+a}}$ (1)

Mặt khác, ta có: $2\sqrt{\frac{a}{1+a}}+\frac{\sqrt{2}}{1+a} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$ (3)

Thật vậy, BĐT (3) tương đương với $1+3a-2\sqrt{2a(1+a)}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2a}-\sqrt{1+a}\right)^2\ge 0 \text{(luôn đúng)}$$

Vậy BĐT (3) được chứng minh. Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

★**Thí dụ 6.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+abc\ge 4.$$

Hướng dẫn giải

Do bất đẳng thức đối xứng, vai trò của a, b, c như nhau nên giả sử $a\ge b\ge c$. Suy ra $c\le 1$ ta có

$$a^2+b^2+c^2+abc=9-2(ab+bc+ca)+abc=9+ab(c-2)-2c(3-c).$$

Lại có $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$ và c – 2 < 0 nên

$$a^2+b^2+c^2+abc\ge 9+(c-2)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2-2c(3-c)\quad(1)$$

Ta sẽ chứng minh $9+(c-2)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2-2c(3-c)\ge 4\quad(2)$

Thật vậy, $(2)\Leftrightarrow(c-1)^2(c+2)\ge 0$ (luôn đúng)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1.$

★**Thí dụ 7.** Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng: $ab^2+bc^2+ca^2\le 2+abc.$

Hướng dẫn giải

Do vai trò a, b, c là hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử $a=max\{a,b,c\}$. Xét hai trường hợp:

Với $a\ge b\ge c\ge 0$. Khi đó

$$a(b-a)(b-c)\le 0\Leftrightarrow a^2b+abc\ge ab^2+ca^2\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le a^2b+bc^2+abc\quad(1)$$

mà $ab^2+bc^2-2=b(3-b^2)-2=-(b-1)^2(b+2)\le 0\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Với $a \ge c \ge b \ge 0$. Khi đó

$b\left(c-a\right)\left(c-b\right) \le 0 \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \le ca^2 + cb^2 + abc$

Lại có: $ca^2 + cb^2 - 2 = c\left(3-c^2\right) - 2 = -\left(c-1\right)^2\left(c+2\right) \le 0 \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(a;b;c\right) = \left(1;1;1\right), \left(\sqrt{2};0;1\right), \left(0;1;\sqrt{2}\right), \left(1;\sqrt{2};0\right)$.

Lưu ý: Xét một bất đẳng thức A > B có n biến $x_1, x_2, ..., x_n$

Xét hàm số $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = A - B$

Một bất đẳng thức là đối xứng khi và chỉ khi $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f\left(x_{i_1}, x_{i_2}, ...x_{i_n}\right)$

(với $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, ...x_{i_n}\right)$ là hoán vị bất kì của bộ $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$)

Một bất đẳng thức gọi là hoán vị nếu

$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f\left(x_2, x_3, ..., x_n, x_1\right) = f\left(x_3, x_4, ..., x_2\right) = ... = f\left(x_n, x_1, ..., x_{n-1}\right)$

Như vậy, các đối với các bài toán bất đẳng thức đối xứng (vai trò các biến là như nhau) ta có thể tùy ý sắp xếp thứ tự các biến được, nhưng đối với các bài bất đẳng thức hóa vị chúng ta chỉ có thể chọn một biến bất kì giá đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

★**Thí dụ 10.** Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \left[0;2\right]$ và a + b + c = 3.

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$.

b) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 \le 9$.

Hướng dẫn giải

a) Từ a + b + c = 3 và $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$ ta dự đoán dấu bằng của bài toán xảy ra khi $a = 0, b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta giả sử: c = max(a, b, c).

Khi đó: $3 = a + b + c \le 3c \Rightarrow c \ge 1 \Rightarrow 1 \le c \le 2$.

Do $a, b \ge 0 \Rightarrow ab \ge 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \le \left(a+b\right)^2$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le (a+b)^2+c^2=(3-c)^2+c^2=2c^2-6c+9=2\left(c^2-3c+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{2}=2\left(c-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

Do $1\le c\le 2$ nên $-\frac{1}{2}\le c-\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\left|c-\frac{3}{2}\right|\le\frac{1}{2}\Rightarrow 2\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}\Rightarrow 2\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\le\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5.$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=0,b=1,c=2$ và các hoán vị.

b) Do vai trò a, b, c là như nhau nên giả sử a = max(a, b, c) ; c = min(a, b, c).

Vì a + b + c = 6 $\Rightarrow$ $0\le c\le 1\le a\le 2$.

$1\le a\le 2\Rightarrow (a-2)(a-1)\le 0\Rightarrow a^2\le 3a-2$

$\Rightarrow a^3\le 3a^2-2a\le 3(3a-2)-2a=7a-6\Rightarrow a^3\le 7a-6.$ (1)

Mặt khác: $0\le c\le 1\Rightarrow c^3\le c.$ (2)

Nếu: $0\le b\le 1\Rightarrow b^3\le b$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được: $a^3+b^3+c^3\le 7a-6+c+b=6a-3\le 6.2-3=9$

Nếu $1\le b\le 2$ thì tương tự ta có: $b^3\le 7b-6$ (4)

Từ (1), (2) và (4) ta được: $a^3+b^3+c^3\le 7a+c+7b-12=21-6c-12\le 9.$

Vậy $a^3+b^3+c^3\le 9.$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca-3abc\ge\frac{1}{4}.$$

2. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng: $abc+2\ge ab+bc+ca\ge abc.$
3. Chứng minh rằng với ba số thực a, b, c bất kì thuộc đoạn $[1;2]$ ta có bất đẳng thức

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10.$$

4. Chứng minh rằng với ba số thực a, b, c bất kì thuộc đoạn $[0;1]$ ta có bất đẳng thức

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$$

CHỦ ĐỀ 16 SỬ DỤNG HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. Kiến thức cần nhớ

Xét hàm số $y = f\left(x\right) = ax + b$

Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên R

Khi $a < 0$ hàm số nghịch biến trên R

Khi $a = 0$ thì hàm số không đổi trên R

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực x, y, z $\in \left[0;1\right]$. Chứng minh rằng:

$$x + y + z - \left(xy + yz + xz\right) \le 1$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x + y + z - \left(xy + yz + xz\right) \le 1 \Leftrightarrow \left(1 - y - z\right)x + y + z - yz - 1 \le 0.$

Xét hàm số $f\left(x\right) = \left(1 - y - z\right)x + y + z - yz - 1$

Có $f\left(0\right) = y + z - yz - 1 = -\left(1 - y\right)\left(1 - z\right) \le 0$

$f\left(1\right) = -yz \le 0$

Nếu 1 – y – z > 0 thì *f(x)* đồng biến trên $\left[0;1\right]$

Do $x \le 1 \Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(1\right) \Rightarrow f\left(x\right) \le 0.$

Nếu 1 – y – z < 0 thì *f(x)* nghịch biến trên $\left[0;1\right]$

Do $x \ge 0 \Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(0\right) \Rightarrow f\left(x\right) \le 0.$

Nếu 1 – y – z = 0 thì *f(0)* = y + z – yz – 1 = -yz ≤ 0.

Vậy $f\left(x\right) \le 0 \quad \forall x, y, z \in \left[0;1\right]$

Dấu "=" xảy ra khi (x, y, z) = (0 ; 0 ; 1) và các hoán vị của nó.

Nhận xét: Từ bài toán trên ta nhận thấy. Cho hàm số *f(x) = ax + b.*

Nếu $f(\alpha)\le 0, f(\beta)\le 0$ thì $f(x)\le 0 \quad \forall x,y,z\in[\alpha;\beta]$

Nếu $f(\alpha)\ge 0, f(\beta)\ge 0$ thì $f(x)\ge 0 \quad \forall x,y,z\in[\alpha;\beta]$

$min\{f(\alpha);f(\beta)\}\le f(x)\le max\{f(\alpha);f(\beta)\}$ với $\forall x\in[\alpha;\beta]$

★**Thí dụ 2.** Cho các số thực $0\le x,y,z\le 2$. Chứng minh rằng: $2(x+y+z)-(xy+yz+zx)\le 4$.

Hướng dẫn giải

Ta coi y,z như là các tham số, x là ẩn số thì bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại như sau: $f(x)=(2-y-z)x+2(y+z)-yz-4\le 0$.

Để chứng minh $f(x)\le 0$ ta chỉ cần chứng minh: $\begin{cases} f(0)\le 0\\ f(2)\le 0\end{cases}$. Thật vậy ta có:

+ $f(0)=2(y+z)-yz-4=(y-2)(2-z)\le 0$ với y,z thỏa mãn: $0\le y,z\le 2$.

+ $f(2)=2(2-y-z)+2(y+z)-yz-4=-yz\le 0$ với y,z thỏa mãn: $0\le y,z\le 2$.

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh: Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=(0;2;2)$ hoặc các hoán vị của bộ số trên.

★**Thí dụ 3.** Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.. Chứng minh rằng:

$$4(xy+yz+zx)\le 9xyz+1$$

Hướng dẫn giải

Do vai trò của x, y, z trong bất đẳng thức là như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z\Rightarrow \frac{1}{3}\le x\le 1$, ta có: $4(xy+yz+xz)\le 9xyz+1\Leftrightarrow (9yz-4y-4z)x+1-4yz\ge 0$

Xét hàm số $f(x)=(9yz-4y-4z)x+1-4yz$ với $x\in\left[\frac{1}{3};1\right]$

Dễ thấy khi $x=1$ thì do x + y + z = 1 nên y = z = 0, suy ra $f(1)=1$

Khi $x=\frac{1}{3}$ thì do $x\ge y\ge z$ và x + y + z = 1 nên $y=z=\frac{1}{3}$, suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

Do đó $f(x)\ge \min\left\{f(1);f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=0$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

★**Thí dụ 4.** Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz\ge\frac{1}{2}.$$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Hướng dẫn giải

Do x + y + z = 1 nên ta có:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz \ge \frac{1}{2}. \Leftrightarrow 1-2\left(xy+yz+zx\right)+\frac{9}{2}xyz \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\left(xy+yz+xz\right) \le 9xyz+1$$

Theo thí dụ 3 thì bất đẳng thức trên đúng, suy ra đpcm.

★**Thí dụ 5.** Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$x^2+y^2+z^2+xyz \ge \frac{10}{27}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có x + y + z = 1 nên :

$$x^2+y^2+z^2+xyz \ge \frac{10}{27}. \Leftrightarrow 1-2\left(xy+yz+zx\right)+xyz \ge \frac{10}{27} \Leftrightarrow \left(2y+2z-yz\right)x+2yz \le \frac{17}{27}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z \Rightarrow \frac{1}{3} \le x \le 1.$

Xét $f\left(x\right)=\left(2y+2z-yz\right)x+2yz$ trên $\left[\frac{1}{3};1\right]$ có $f\left(1\right)=0; f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{27}.$

Do đó $f\left(x\right) \le max\left\{f\left(1\right); f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{17}{27}$ suy ra bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

★**Thí dụ 6.** Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=xy+yz+zx-2xyz$.

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z=\min\left(x,y,z\right) \Rightarrow z \le \frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}$. Ta có

$0 \le xy \le \frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{\left(1-z\right)^2}{4}$. $P=xy\left(1-2z\right)+\left(x+y\right)z=xy\left(1-2z\right)+z\left(1-z\right)$. Ta coi z là tham số xy là ẩn số thì $f\left(xy\right)=xy\left(1-2z\right)+z\left(1-z\right)$ là hàm số bậc nhất của xy với $0 \le xy \le \frac{\left(1-z\right)^2}{4}$.

Để ý rằng: $1-2z>0$ suy ra hàm số $f\left(xy\right)=xy\left(1-2z\right)+z\left(1-z\right)$ luôn đồng biến .

Từ đó suy ra

$$f\left(xy\right) \le f\left(\frac{\left(1-z\right)^2}{4}\right)=\left(1-2z\right)\frac{\left(1-z\right)^2}{4}+z\left(1-2z\right)=\frac{-2z^3+z^2+1}{4}=\frac{7}{27}-\left(\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{108}\right)$$

$=\frac{7}{27}-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\left(z+\frac{1}{6}\right) \le \frac{7}{27}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

★**Thí dụ 7.** Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $5\left(a^2+b^2+c^2\right)-6\left(a^3+b^3+c^3\right)\le 1$.

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát giả sử: $a=\min\{a,b,c\}$ suy ra $a\le\frac{1}{3}$.

Bất đẳng thức tương đương với

$5\left[a^2+(b+c)^2-2bc\right]\le 6\left[a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)\right]+1$

$\Leftrightarrow 5\left[a^2+(1-a)^2-2bc\right]\le 6\left[a^3+(1-a)^3-3bc(1-a)\right]+1\Leftrightarrow (9a-4)bc+(2a-1)^2\ge 0$. Đặt $t=bc$

thì $0<t\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$. Ta cần chứng minh: $f(t)=(9a-4)t+(2a-1)^2\ge 0$ với mọi

$t\in\left(0;\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right]$. Do $9a-4<0$ suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến. Suy ra

$f(t)\ge f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{4}a(3a-1)^2\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn x + y + z = 1. Chứng minh rằng:
   $2(xy+yz+xz)-xyz\le\frac{17}{27}$.
2. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn x + y + z = 3. Chứng minh rằng:
   $2\left(x^2+y^2+y^2\right)+xyz\ge 7$.
3. Cho $x,y,z\in[0;2]$. Chứng minh rằng: $2(x+y+z)-(xy+yz+xz)\le 4$.

CHỦ ĐỀ 17

PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

Phương pháp dồn biến thường được áp dụng đối với các bất đẳng thức đối xứng từ ba biến trở lên. Để chứng minh bất đẳng thức đối xứng dạng $f(a, b, c) \geq 0$, đầu tiên bằng việc sắp xếp lại thứ tự các biến, tùy theo điều kiện bài toán mà ta có thể chứng minh bất đẳng thức ban đầu lớn hơn hoặc bằng một trong các bất đẳng thức trung gian, tức là $f\left(a,b,c\right) \geq f_{TG}$, các bất đẳng thức trung gian thường là:

$$f_{TG}\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},\mathrm{c}\right);\ f_{TG}\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right);\ f_{TG}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};c\right)$$

Sau đó ta sẽ chứng minh $f_{TG} \geq 0$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Bất đẳng thức không có điều kiện rằng buộc giữa các biến

Đối với các bất đẳng thức không có điều kiện rằng buộc giữa các biến các biểu thức trung gian ta có thể lấy bất kì là một trong các biểu thức, tùy vào từng bài toán mà chúng ta dùng bất đẳng thức trung gian phù hợp.

$$f_{TG}\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},\mathrm{c}\right);\ f_{TG}\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right);\ f_{TG}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};c\right)$$

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $f\left(a,b,c\right)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ và $t=\frac{a+b}{2}$

Khi đó: $f\left(\mathrm{t};\mathrm{t};c\right)=\frac{t}{t+c}+\frac{t}{c+t}+\frac{c}{2t} = \frac{2t}{t+c}+\frac{c}{2t}$

Ta có:

$$f(a,b,c)=\frac{\left(a^2+b^2\right)+c(a+b)}{c^2+ab+c(a+b)}+\frac{c}{a+b}=\frac{4\left(a^2+b^2\right)+4c(a+b)}{4c^2+4ab+4c(a+b)}+\frac{c}{a+b}$$

$$\geq\frac{2(a+b)^2+4c(a+b)}{4c^2+(a+b)^2+4c(a+b)}+\frac{c}{a+b}=\frac{8t^2+8tc}{4c^2+4t^2+8tc}+\frac{c}{2t}$$

$$=\frac{2t^2+2tc}{c^2+t^2+2tc}+\frac{2c}{t}=\frac{2t(t+c)}{(t+c)^2}+\frac{c}{2t}$$

$$=\frac{2t}{t+c}+\frac{c}{2t}=f(t,t,c)$$

Do đó: $f(a,b,c)\geq f(t,t,c)$. Vậy ta cần chứng minh: $f(t,t,c)=\frac{2t}{t+c}+\frac{c}{2t}\geq\frac{3}{2}$ (*)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow\frac{4t^2+ct+c^2-3t^2-3tc}{2t(t+c)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{t^2-2tc+c^2}{2t(t+c)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(t-c)^2}{2t(t+c)}\geq 0$

Vậy bất đẳng thức thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca).$$

Hướng dẫn giải

Do tính chất đối xứng giữa các biến nên ta giả sử: $c=min\{a,b\}$

Đặt: $f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)$. và $t=\sqrt{ab}\geq c$

Ta có:

$$f(a,b,c)-f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c\right)=a^2+b^2-2ab-2c\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(a+b+2\sqrt{ab}-2c\right)\geq 0$$

Suy ra: $f(a,b,c)\geq f\left(\sqrt{ab};\sqrt{ab};c\right)=f(t,t,c)$

Vậy ta cần chứng minh với t, c > 0 thì: $f(t,t,c)\geq 0$ (*)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow 2t^2+c^2+2t^2c-2\left(t^2+2tc\right)+1\geq 0$

$\Leftrightarrow c^2+2t^2c-4tc+1\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(c^2-2c+1\right)+2c\left(t^2-2t+1\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow(c-1)^2+2c(t-1)^2\geq 0$

Vậy bất đẳng thức thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Chú ý: Bài này đã được chứng minh ở phương pháp dùng nguyên lý dirichlet.

Dạng 2: Bất đẳng thức có điều kiện tích 3 số bằng 1.

Ta tìm cách đánh giá $f(a,b,c)\geq f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\geq 0$

$f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=f\left(\frac{1}{x^2},x,x\right)\ge 0$ Với $x=\sqrt{bc}$.

Khi đó ta cần sắp xếp thứ tự $a=min\{a,b,c\}$ hoặc $a=max\{a,b,c\}$.

Chú ý: Một số trường hợp dồn biến về $f\left(ta,\frac{b}{t},c\right)$ với $t\in\left[\sqrt{\frac{b}{a}};1\right]$.

★**Thí dụ 1.** Cho $a,b,c>0:abc=1$. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}\ge 5$.

Hướng dẫn giải

Do tính chất đối xứng giữa các biến nên ta giả sử: $a=max\{a,b,c\}$

Đặt: $f\left(a,b,c\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}\ge 5$. và $t=\sqrt{bc}$

Ta có: $f\left(a,t,t\right)=\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{6}{a+2\sqrt{bc}}$

$$f\left(a,b,c\right)-f\left(a,t,t\right)=\left(\frac{1}{b}-\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{c}\right)+6\frac{2\sqrt{bc}-b-c}{\left(a+b+c\right)\left(a+2\sqrt{bc}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{bc}-6.\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(a+b+c\right)\left(a+2\sqrt{bc}\right)}$$

$$a\ge\sqrt{bc}\Rightarrow\left(a+b+c\right)\left(a+2\sqrt{bc}\right)\ge\left(\sqrt{bc}+2\sqrt{bc}\right)\left(\sqrt{bc}+2\sqrt{bc}\right)=9bc$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{\left(a+b+c\right)\left(a+2\sqrt{bc}\right)}\ge-\frac{1}{9bc}$$

$$\Rightarrow f\left(a,b,c\right)-f\left(a,t,t\right)\ge\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{bc}-6.\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{9bc}=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{3bc}\ge 0$$

$$\Rightarrow f\left(a,b,c\right)\ge f\left(a,t,t\right)$$

Vậy ta cần chứng minh với t, a > 0 mà abc = 1 nên $a=\frac{1}{t^2}$ thì: $f\left(\frac{1}{t^2},t,t\right)\ge 0$ (*)

Thật vậy: $f\left(\frac{1}{t^2},t,t\right)\ge 5\Leftrightarrow(t-1)^2(2t^4+4t^3-4t^2-t+2)\ge 0$,

$2t^4+4t^3-4t^2-t+2\ge 0\Leftrightarrow 2\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+t\left(2t-1\right)^2+1\ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+7 \ge 5(a+b+c).$$

Hướng dẫn giải

Do tính chất đối xứng giữa các biến nên ta giả sử: $a = max\{a,b,c\}$

Đặt: $f(a,b,c) = (a+b)(b+c)(c+a) - 5(a+b+c) + 7$ và $t = \sqrt{bc}$

Ta có:

$$f(a,b,c) = 2abc + (b^2+c^2)a + (b+c)a^2 + (b+c)bc - 5(a+b+c) + 7$$

$$f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) = 4abc + 2\sqrt{bc}.a^2 + (b+c)bc - 5\left(a+2\sqrt{bc}\right) + 7$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) - f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) = \left(b^2-2bc+c^2\right)a + \left(b-2\sqrt{bc}+c\right)a^2 - 5\left(b-2\sqrt{bc}+c\right)$$

$$= (b-c)^2 a + \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)a^2 - 5\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left[a^2 + \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 a - 5\right]$$

Do abc = 1 mà $a = max\{a,b,c\}$ nên $a \ge 1$. Do đó:

$$a^2 + \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 a - 5 \ge a^2 + 4\sqrt{bc}.a - 5 = a^2 + 4\sqrt{a}.\sqrt{abc} - 5 = a^2 + 4\sqrt{a} - 5 \ge 1 + 4 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 a - 5 \ge 0$$

Suy ra: $f(a,b,c) \ge f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) = f(a,\mathrm{t},\mathrm{t})$

Vậy ta cần chứng minh với t, a > 0 mà abc = 1 nên $a = \dfrac{1}{t^2}$ thì: $f\left(\dfrac{1}{t^2},t,t\right) \ge 0$ (*)

Thật vậy: $f\left(\dfrac{1}{t^2},t,t\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{t^2}+t\right)^2.2t - 5\left(\dfrac{1}{t^2}+2t\right) + 7 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t^3}(t-1)^2\left(2t^4+4t^3-4t^2-t+2\right) \ge 0 \Leftrightarrow 2t^4+4t^3-4t^2-t+2 \ge 0$$

$\Leftrightarrow 2\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + t(2t-1)^2 + 1 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Dạng 3: Nếu điều kiện bài toán cho tổng 3 số $a+b+c=k$.

Ta cần đánh giá $f(a,b,c) - f\left(a,\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right) \ge 0$

$$f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right) = f\left(a,\frac{k-a}{2},\frac{k-a}{2}\right) \ge 0$$

Khi đó ta cần sắp xếp thứ tự $a = min\{a,b,c\}$ hoặc $a = max\{a,b,c\}$.

★**Thí dụ 1.** Cho $a,b,c \ge 0 : a+b+c=1.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a,b,c) = ab + bc + ca - 2abc.$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t = \dfrac{b+c}{2}$. Ta có: $f(a,b,c) = ab + bc + ca - 2abc.$

$$f(a,t,t) = a(b+c) + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - 2a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) - f(a,t,t) = \frac{1}{4}(2a-1)(b-c)^2$$

Do vai trò 3 biến là như nhau nên có thể giả sử $a = min\{a,b,c\}$

$$\Rightarrow a \le \frac{1}{3} \Rightarrow 2a - 1 < 0 \Rightarrow f(a,b,c) \le f(a,t,t).$$

Xét $g(t) = f(a,t,t) = t^2 + 2at - 2at^2 = t^2 + (2-4t)t - (2-4t)t^2 = 4t^3 - 5t^2 + 2t$ trên miền $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$

Ta dự đoán $g(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong 2 điểm nút tức là $\dfrac{1}{3}$ hoặc $\dfrac{1}{2}$ mà $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} < g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{27}$ nên xét hiệu:

$$g(t) - g\left(\frac{1}{3}\right) = 4t^3 - 5t^2 + 2t - \frac{7}{27} = \left(t - \frac{1}{3}\right)^2\left(4t - \frac{7}{3}\right) < 0\ \forall t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$$

Vậy $\max g(t) = g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{27} \Rightarrow \max f(a,b,c) = \dfrac{7}{27}$ khi 3 biến cùng bằng $\dfrac{1}{3}$

★**Thí dụ 2.** Cho $a,b,c \ge 0 : a + b + c = 2.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(a,b,c) = 9abc - 8(ab + bc + ca).$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $t = \dfrac{b+c}{2}$. Ta có: $f(a,b,c) = 9abc - 8(ab + bc + ca).$

$$f(a,t,t) = 9a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - 8a(b+c)$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) - f(a,t,t) = \frac{1}{4}(8-9a)(b-c)^2$$

Do vai trò 3 biến là như nhau nên có thể giả sử $a = min\{a,b,c\}$

$$\Rightarrow a \le \frac{2}{3} \Rightarrow 8 - 9a > 0 \Rightarrow f(a,b,c) \ge f(a,t,t).$$

Xét $g(t) = f(a,t,t) = 9at^2 - 16at - 8t^2 = -18t^3 + 42t^2 - 32t$ trên miền $\left[\frac{2}{3},1\right]$

Ta dự đoán $g(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong 2 điểm nút tức là $\frac{2}{3}$ hoặc 1 mà

$g\left(\frac{2}{3}\right) = -8; g(1) = -8$ nên xét hiệu:

$$g(t) + 8 = -18t^3 + 42t^2 - 32t + 8 = -18t^2(t-1) + 24t(t-1) - 8(t-1)$$

$$= -2(t-1)\left(9t^2 - 12t + 4\right) = -6(t-1)(3t-2)^2 \geq 0\ \forall t \in \left[\frac{2}{3};1\right]$$

Vậy $\min g(t) = g\left(\frac{1}{3}\right) = g(1) = -8 \Rightarrow \min f(a,b,c) = -8$ khi 3 biến cùng bằng nhau hoặc 2 biến bằng nhau còn biến kia bằng 0.

Dạng 4: Nếu điều kiện bài toán cho tổng bình phương 3 số $a^2 + b^2 + c^2 = k$

Ta tìm cách đánh giá $P(a,b,c) - P\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) \geq 0$

$$P\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) = P\left(a, \sqrt{\frac{k-a^2}{2}}, \sqrt{\frac{k-a^2}{2}}\right) \geq 0$$

Khi đó ta cần sắp xếp thứ tự $a = min\{a,b,c\}$ hoặc $a = max\{a,b,c\}$.

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng: $a + b + c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát giả sử: $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq 1, b^2 + c^2 \geq 2 \Rightarrow b + c \geq \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{2}$.

Ta cần chứng minh:

$$f(a,b,c) = a + b + c - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = a + b + c - a^2\left(b^2+c^2\right) - b^2c^2 \geq 0.$$

Xét $f(a,b,c) - f\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) = b + c - 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} - b^2c^2 + \left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)^2$

$$= \frac{\left(b^2-c^2\right)^2}{4} + \frac{(b+c)^2 - 2\left(a^2+b^2\right)}{b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}} = (b-c)^2\left[\frac{(b+c)^2}{4} - \frac{1}{b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}\right] \geq 0$$

$$Do\ \frac{(b+c)^2}{4} - \frac{1}{b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}} = \frac{(b+c)^3 + (b+c)^2\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)} - 4}{4\left(b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\right)} \geq \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2.2} - 4}{4\left(b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\right)} > 0$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

$$f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)\ge 0 \Leftrightarrow f\left(a,\sqrt{\frac{3-a^2}{2}},\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{2\left(3-a^2\right)}\ge a^2\left(3-a^2\right)+\frac{1}{4}\left(3-a^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a-1\right)^2\left[\frac{3}{4}\left(a+1\right)^2-\frac{3}{3-a+\sqrt{2\left(3-a^2\right)}}\right]\ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vì $\frac{3}{4}\left(a+1\right)^2-\frac{3}{3-a+\sqrt{2\left(3-a^2\right)}}\ge\frac{3}{4}\left(a+1\right)^2-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(a^2+2a\right)\ge 0, \forall a\in\left[0;1\right].$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho $x,y,z\ge 0$ *. Chứng minh rằng:* $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$ $\quad(1)$

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}\ge\frac{25}{4} \qquad (1)$$

3) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\ge\frac{3}{ab+bc+ca}$$

4) (VMO) Cho x,y,z *là các số thực thỏa mãn:* $x^2+y^2+z^2=9.$ *Chứng minh rằng:*

$$2(x+y+z)-xyz\le 10.$$

Gợi ý: $t=\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}.$

5) Cho $a,b,c>0:abc=1$*, chứng minh rằng:* $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c-1).$

6) Cho x,y,z *là các số thực thỏa mãn:* $x^2+y^2+z^2=3.$ *Chứng minh rằng:*

$$7(xy+yz+xz)\le 12+9xyz.$$

7) Cho $a,b,c>0:abc=1$*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:*

$$f(a,b,c)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-2(a+b+c).$$

CHỦ ĐỀ 18

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

Xét tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c thì $|a-b| < c < a+b$.

Bất đẳng thức tam giác: Với ba điểm M, N, P bất kì ta luôn có:

$$|MP - MN| \le NP \le MP + MN.$$

Bất đẳng thức $|MP - MN| \le NP$ xảy ra dấu bằng khi M, N, P thẳng hàng và điểm M nằm ngoài đoạn NP.

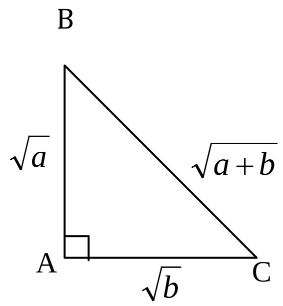
Bất đẳng thức $NP \le MP + MN$ xảy ra dấu bằng khi M, N, P thẳng hàng và điểm M nằm trong đoạn NP.

Nếu $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng với a, b ta có: $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Hướng dẫn giải



Xét ΔABC có $\hat{A} = 90^0$, AB = $\sqrt{a}$, AC = $\sqrt{b}$.

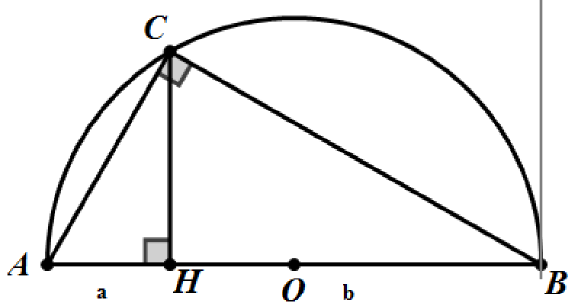
Theo định lý Pi ta go ta có: BC = $\sqrt{a+b}$

Trong ΔABC ta có: BC < AB + AC

$\Rightarrow \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (đpcm)

★**Thí dụ 2.** Chứng minh rằng với a, b dương ta có:

$\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$



Hướng dẫn giải

Vẽ nửa đường tròn đường kính AB = $a+b$

Trên AB lấy điểm H thỏa mãn AH = a, HB = b. Từ H kẻ đường vuông góc với AB cắt đường tròn tại C thì $CH = \sqrt{AH.AB} = \sqrt{ab}$

Hiển nhiên CH không lớn hơn bán kính đường tròn nên $\sqrt{ab} = CH \le \frac{1}{2}.AB = \frac{a+b}{2}$ do đó bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi CH là bán kính hay H trùng tâm đường tròn, điều này chính là a = b.

★**Thí dụ 3.** Cho a, b, c, d >0 . Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

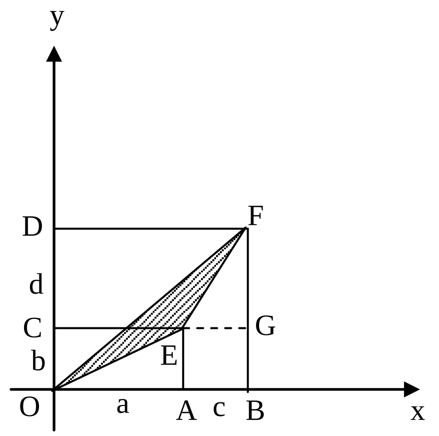
Hướng dẫn giải

Trên trục hoành Ox đặt liên tiếp hai đoạn OA = a, AB = c, còn trên trục Oy đặt liên tiếp OC = b, CD = d. Xét hình chữ nhật COAE và DOBF. Theo định lý pitago ta có:

OE = $\sqrt{a^2+b^2}$

EF = $\sqrt{c^2+d^2}$

OF = $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

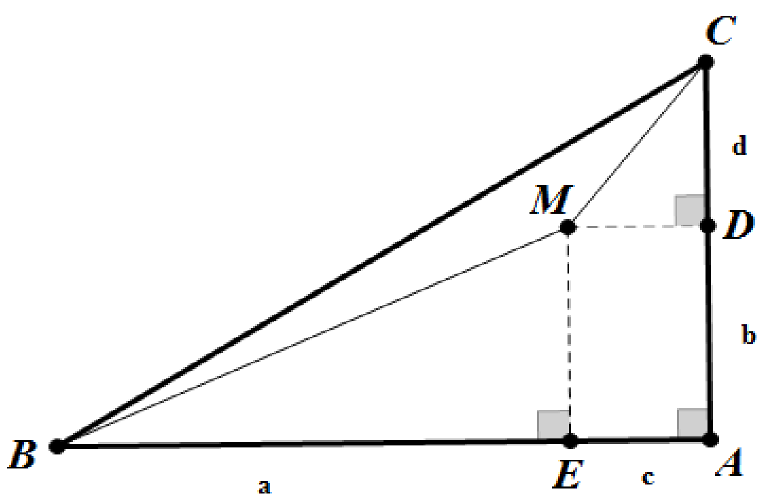


Mà OE + EF $\ge$ OF

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta$OAE $\sim \Delta$EFG $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Cách khác: Sử dụng phương pháp hình học.



Dựng tam giác ABC vuông tại A trên AB lấy E trên BC lấy D sao cho BE = a, AE = c, AD = b, DC = d. Khi đó AB = (a + c), AC = (b + d).

Dựng hình chữ nhật ADME. Khi đó ta tính được:

$$MB=\sqrt{a^2+b^2},MC=\sqrt{c^2+d^2},\mathrm{BC}=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

Xét tam giác MBC, theo bất đẳng thức trong tam giác ta có:

$$MB+BC\ge BC\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi M nằm trên BC khi đó tam giác MBE đồng dạng với tam giác CMD hay $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Nhận xét: Bất đẳng thức trên có tên là Minkowski thường được áp dụng đối với các bất đẳng thức chứa 2 căn bậc 2 mà bên trong là tổng hai bình phương.

★**Thí dụ 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $y=\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-4x+4}$.

(Trích đề toán vào 10 Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2005-2006)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt{2}y=\sqrt{4x^2+4x+2}+\sqrt{4x^2-8x+8}=\sqrt{(2x+1)^2+1}+\sqrt{(2x-2)^2+2^2}$.

Xét các điểm $A(-1;1),B=(2;-2),C=(2x;0)$ ta có:

$$AC=\sqrt{(2x+1)^2+1},\qquad BC=\sqrt{(2x-1)^2+4},\quad AB=\sqrt{(2+1)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}.$$

Theo bất đẳng thức tam giác ta suy ra: $\sqrt{2}y=AC+BC\ge AB=3\sqrt{2}\Rightarrow y\ge 3$.

$y=3$ khi và chỉ khi $\frac{2x+1}{2x-2}=\frac{-1}{2}\Leftrightarrow x=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 3 đạt được khi $x=0$.

Chú ý: *Bài toán trên thuộc dạng* $\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2}$ *trong đó* $f+h$ *và* $k+g$ *đều là hằng số chúng ta tiếp cận bằng phương pháp đại số thuần túy sẽ đơn giản hơn. Để chứng tỏ điều này ta qua ví dụ sau:*

a) Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2}\ge\sqrt{(f+h)^2+(g+k)^2}$. (1)

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+8x+17}$.

Hướng dẫn giải

a) $(1) \Leftrightarrow f^2 + g^2 + h^2 + k^2 + 2\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)} \ge f^2 + h^2 + 2fh + g^2 + k^2 + 2gk$

$\Leftrightarrow \sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)} \ge fh + gk$

$\Leftrightarrow f^2h^2 + f^2k^2 + g^2h^2 + g^2k^2 \ge f^2h^2 + g^2k^2 + 2fhgk$

$\Leftrightarrow (fk - gh)^2 \ge 0$, đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi fk = gh.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có

$A = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 1} \ge \sqrt{(x+4-x)^2 + (2+1)^2} = 5$

minA = 5 $\Leftrightarrow x.1 = 2(4-x) \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}.$

★**Thí dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \left|\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 6x + 13}\right|.$

(Trích đề toán vào 10 Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm 2009-2010)

Hướng dẫn giải

Viết biểu thức P dưới dạng $P = \left|\sqrt{(x-2)^2 + 1} - \sqrt{(x+3)^2 + 4}\right|.$

Xét các điểm $A(2;1), B = (-3,2), C = (x;0)$ ta có:

$AC = \sqrt{(x-2)^2 + 1}, \quad BC = \sqrt{(x+3)^2 + 4}, \quad AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}.$

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có: $P = |AC - BC| \le AB = \sqrt{26} \Rightarrow P \le \sqrt{26}.$

Vì A, B nằm cùng phía với trục hoành và C nằm trên trục hoành nên đẳng thức xảy ra khi ba điểm thẳng hàng hay $\frac{x-2}{x+3} = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow x = 7.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{26}$ đạt được khi $x = 7$.

Chú ý: *Bài toán trên thuộc dạng* $\sqrt{f^2+g^2} - \sqrt{h^2+k^2}$ *trong đó f − g và g – k đều là hằng số chúng ta tiếp cận bằng phương pháp đại số thuần túy sẽ đơn giản hơn. Để chứng tỏ điều này ta qua ví dụ sau:*

a) Chứng minh bất đẳng thức $\left|\sqrt{f^2+g^2} - \sqrt{h^2+k^2}\right| \le \sqrt{(f-h)^2 + (g-k)^2}.$ (1)

b) Tìm giá trị lớn nhất của $A = \sqrt{x^2 + 4x + 13} - \sqrt{x^2 + 2x + 5}.$

Hướng dẫn giải

a) $(1) \Leftrightarrow f^2 + g^2 + h^2 + k^2 - 2\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)} \ge f^2 + h^2 - 2fh + g^2 + k^2 - 2gk$

$\Leftrightarrow fh + gk \le \sqrt{\left(f^2+g^2\right)\left(h^2+k^2\right)} \qquad (2)$

Nếu fh + gk < 0 thì (2) đúng.

Nếu fh + gk ≥ 0 thì

$$(2) \Leftrightarrow f^2h^2 + g^2k^2 + 2fhgi \le f^2h^2 + f^2k^2 + g^2h^2 + g^2k^2$$

$\Leftrightarrow 0 \le (fk - gh)^2$, đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\begin{cases} fk = gh \\ fh + gk \ge 0. \end{cases}$

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có

$$|A| = \left|\sqrt{(x+2)^2+3^2} - \sqrt{(x+1)^2+2^2}\right| \le \sqrt{(x+2-x-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$max|A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2) = 3(x+1) \\ (x+2)(x+1)+3.2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Với x = 1 thì $A = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$

Vậy $\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1.$

★**Thí dụ 6.** Chứng minh bất đẳng thức sau với $a, b, c, d > 0$ thì

$$\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)} + \sqrt{\left(a^2+d^2\right)\left(b^2+d^2\right)} \ge (a+b)(c+d)$$ trong đó a,b,c,d

là những số thực dương.

Hướng dẫn giải

Xét tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$, O là giao điểm hai đường chéo; $OA = a, OC = b,$ $OB = c, OD = d$ với a,b,c,d là các số dường (h.8). Theo định lí Py-ta-go:

$$AB = \sqrt{a^2+c^2}, BC = \sqrt{b^2+c^2}, AD = \sqrt{a^2+d^2}, CD = \sqrt{b^2+d^2}.$$

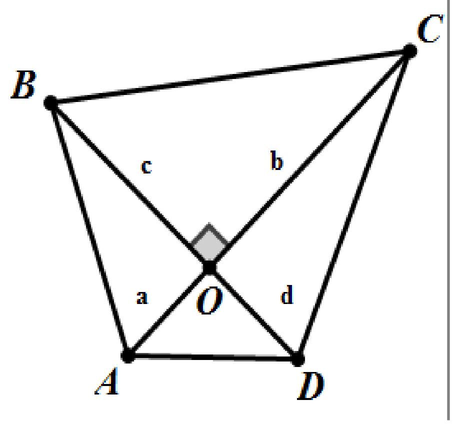
$$AC = a + b, BD = c + d.$$

Cần chứng minh $AB.BC + AD.CD \ge AC.BD$

Thật vậy, ta có $AB.BC \ge 2S_{ABC}$

$$AD.CD \ge 2S_{ADC}.$$

Suy ra $AB.BC + AD.CD \ge 2S_{ABCD} = AC.BD$.



Vậy

$$\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)} + \sqrt{\left(a^2+d^2\right)\left(b^2+d^2\right)} \ge (a+b)(c+d).$$

Cách giải khác: Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$$\left(m^2+n^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(mx+ny\right)^2 \text{ với } m=a,n=c,x=c,y=b$$

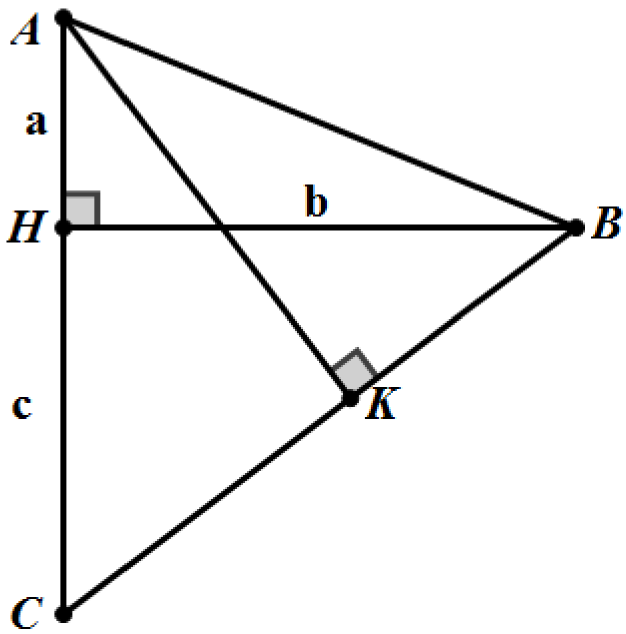
Ta có: $\left(a^2+c^2\right)\left(c^2+b^2\right)\geq\left(ac+cb\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(c^2+b^2\right)}\geq ac+cb \qquad (1)$

Tương tự $\quad \sqrt{\left(a^2+d^2\right)\left(d^2+b^2\right)}\geq ad+db. \quad (2).$

Cộng (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 7.** Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}\geq b\left(a+c\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?.



Hướng dẫn giải

Vẽ tam giác AHB vuông tại H với $AH=a$, $BH=b.$ Trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho $HC=c$. Nối B với C. Hạ AK vuông góc với BC.

Khi đó ta có: $2S_{ABC}=BH.AC=AK.BC\leq AB.BC$

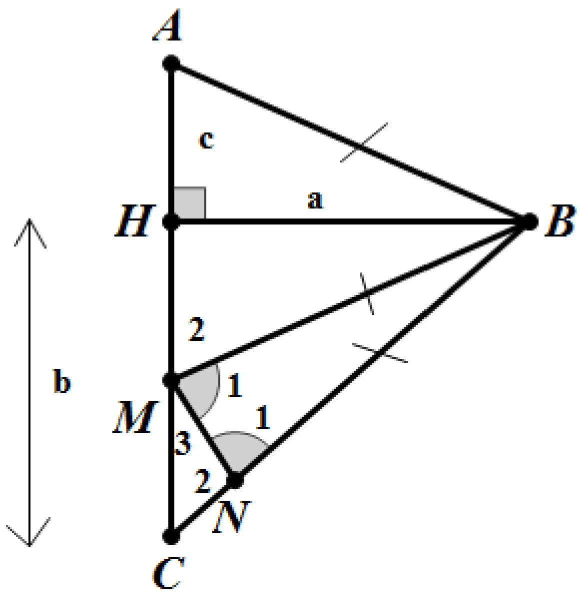
hay $b\left(a+c\right)\leq\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}$.

Dấy "=" xảy ra khi $AK=AB\Leftrightarrow K\equiv B$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại B $\Leftrightarrow b^2=ac.$

★**Thí dụ 8.** Cho các số dương a,b,c với $b>c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}<\text{b}-\text{c}.$$



Hướng dẫn giải

Từ các biểu thức $\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+c^2}$ và các số dương a,b,c ta nghĩ đến việc tạo ra các tam giác vuông HAB và HBC có hai cạnh góc vuông tương ứng là a,c và a,b. Khi đó ta có $AB=\sqrt{a^2+c^2}, BC=\sqrt{a^2+b^2}$. .Do $b>c>0$ nên $BC>AB, HC>AH$. Bài toán đưa về chứng minh rằng

$BC - AB < HC - HA.$

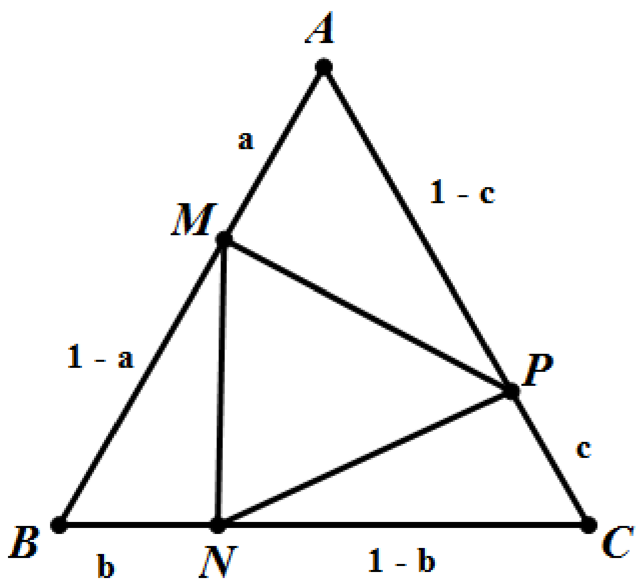
Trên HC, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho HM = AH, BN = AB. Dễ thấy AB = MB = BN suy ra ΔBMN cân tại B nên $\angle M_1 = \angle N_1$. Mặt khác

$\angle N_1 + \angle N_2 = \angle M_1 + \angle M_2 + \angle M_3 \left(=180^o\right)$ nên

$\angle N_2 > \angle M_3 \Leftrightarrow MC > NC \Leftrightarrow BC - AB < HC - HA.$

Hay $\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2} < b - c.$

Vậy bài toán được chứng minh.



★**Thí dụ 9.** Cho các số dương a,b,c thuộc khoảng $(0;1)$. Chứng minh rằng

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)<1.$$

Hướng dẫn giải

Mỗi số hạng ở vế trái $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ có thể xem là tích độ dài hai cạnh của một tam giác nên gợi ý đến vẽ tam giác nên gợi ý đến vẽ tam giác đều ABC có cạnh bằng 1.Trên các cạnh AB, BC và CA lấy các điểm M, N và P sao cho $AM = a, BM = b,$

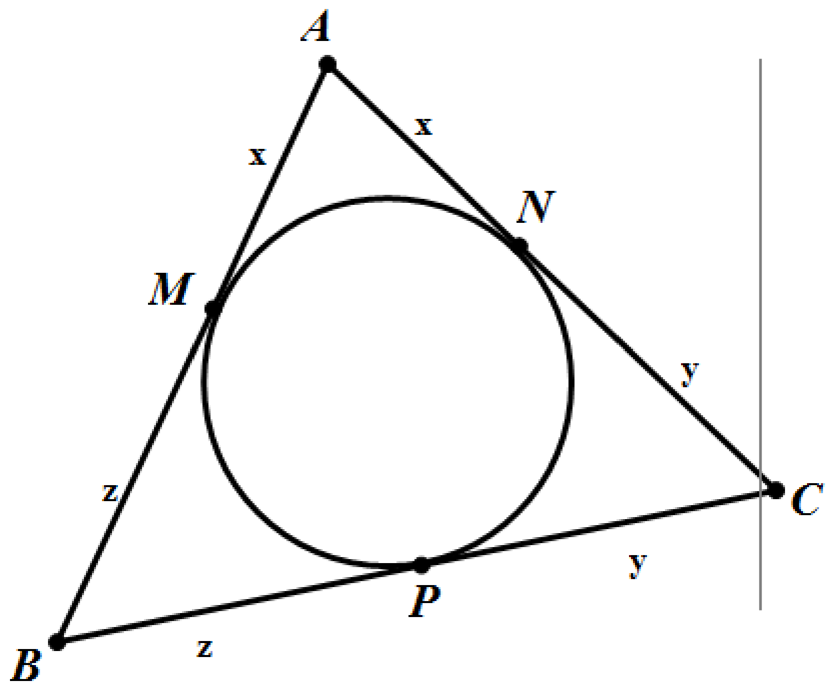
$CP = c.$Ta có: $2S_{AMP} + 2S_{BMN} + 2S_{CPS} < 2S_{ABC}$

Hay

$a(1-b)\sin 60^o + b(1-c)\sin 60^o + c(1-a)$

Suy ra: $a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)<1.$

Vậy bài toán được chứng minh.



★**Thí dụ 10.** Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn hệ thức $xyz(x+y+z)=4.$Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+y)(x+z).$

Hướng dẫn giải

Từ tích $xyz\left(x+y+z\right)$ ta nghĩ đến công thức He-rong tính diện tích tam giác.

$S_{ABC}=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$ với a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC, p là nửa chu vi.

Với x,y,z là các số dương nên lấy các đoạn thẳng có độ dài lần lượt luôn là $x+y,y+z,z+x$ có độ dài ba cạnh của một tam giác ABC và $x=AM=AN,\ y=CN=CP,\ z=BM=BP$ với M, N, P là các tiếp điểm của AB, AC và BC với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có $p=x+y+z\Rightarrow p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)=\left(x+y+z\right)xyz=4.$

Suy ra $2S_{ABC}=2\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}=AB.AC.\sin A$

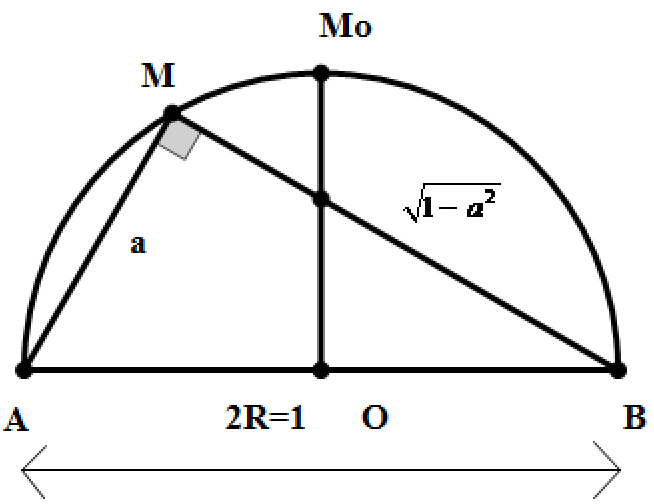
Hay $4=\left(x+y\right)\left(x+z\right).\sin A.$

Mà $0<\sin A\le 1$ nên $P=\left(x+y\right)\left(x+z\right)\ge 4.$

$\left(x+y\right)\left(x+z\right)=4\Leftrightarrow \sin A=1\Leftrightarrow \angle A=90^o\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2+\left(x+z\right)^2=\left(y+z\right)^2\Leftrightarrow x\left(x+y+z\right)=yz.$
Kết hợp $xyz\left(x+y+z\right)=4$ có $yz=2$. Chọn $y=z=\sqrt{2}$ thì $x=2-\sqrt{2}$. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là 4, chẳng hạn khi $x=2-\sqrt{2};y=z=\sqrt{2}.$

★**Thí dụ 11.** Cho ba số dương a,b,c thuộc khoảng $a^2+b^2+c^2=\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{1-a^2}+\dfrac{1}{1-b^2}+\dfrac{1}{1-c^2}$.

Hướng dẫn giải



Dựng nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 1. Do $0<a<1$ nên trên nửa đường tròn đó lấy điểm M sao cho $AM=a$ ta có $\angle AMB=90^o\Leftrightarrow AM\perp BM$ nên $2S_{ABM}=AM.BM=a\sqrt{1-a^2}$.

Dễ thấy $2S_{ABM}\le 2S_{ABM_o}$ (với M_o là điểm chính giữa của nửa đường tròn đã cho)

$a\sqrt{1-a^2} \le OM.AB = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2\left(1-a^2\right) \le \frac{1}{4}$ *hay* $\frac{1}{1-a^2} \ge 4a^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M_o \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\frac{1}{1-b^2} \ge 4b^2; \frac{1}{1-c^2} \ge 4c^2$ do đó

$M = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \ge 4\left(a^2+b^2+c^2\right) = 4.\frac{3}{2} = 6.$

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho $a > b > c > 0$. *Chứng minh rằng* $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

2) Cho $a > c; b > c > 0$. *Chứng minh rằng:* $\sqrt{c\left(a-c\right)} + \sqrt{c\left(b-c\right)} < \sqrt{ab}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$a)\ A = \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{x^2+6x+10}$ $\quad$ $b)\ B = \sqrt{4x^2+4x+5} + 2\sqrt{x^2+2x+2}$.

4) Cho x, y, z, t là các số thực dương thuộc khoản (0; 1). Chứng minh rằng:

$x\left(1-y\right) + y\left(1-z\right) + z\left(1-t\right) + t\left(1-x\right) < 2.$

5) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có: $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| < \left|b-c\right|$.

6) Cho a, b, c là các số dương thuộc khoảng (0; 1) và $a+b+c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. *Chứng minh rằng:*

$M = \frac{1}{a\left(1-a^2\right)} + \frac{1}{b\left(1-b^2\right)} + \frac{1}{c\left(1-c^2\right)} \ge 6\sqrt{2}.$

7) *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$

8) *Chứng minh rằng:* $\left|\sqrt{x^2-6x+34} - \sqrt{x^2-6x+10}\right| \le 4$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

CHỦ ĐỀ 19

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

Trong chứng minh bất đẳng thức việc đổi biến có thể làm cho nhiều bài toán bất đẳng thức đơn giản hơn, tùy vào từng bài toán và điều kiện cụ thể mà ta có các cách đạt ẩn phụ khác nhau.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Đặt ẩn phụ dựa vào giá trị của biến khi dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra.

★**Thí dụ 1.** Cho ba số thực a , b , c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\ge 3$

Hướng dẫn giải

Dự đoán bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Đặt $a=1+x, b=1+y, c=1+z,\ (x,y,z\in R)\Rightarrow x+y+z=0$

Từ $a+b+c=1$ suy ra $x+y+z=0$

Khi đó: $a^2+b^2+c^2\ge 3\Leftrightarrow (1+x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2\ge 3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)\ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge 0$ (luôn đúng). Do đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách khác:

Đặt $a=1+x, b=1+y\Rightarrow c=1-x-y, x,y\in R$

Khi đó: $a^2+b^2+c^2\ge 3\Leftrightarrow (1+x)^2+(1+y)^2+(1-x-y)^2\ge 3$

$\Leftrightarrow 1+2x+x^2+1+2y+y^2+1+x^2+y^2-2x-2y+2xy\ge 3$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xy\ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2+x^2+y^2\ge 0$ (luôn đúng). Do đó suy ra điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 2.** Cho $a+b\ge 2$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $a^3+b^3\le a^4+b^4$

Hướng dẫn giải

Dự đoán bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$.

Đặt $a=1+x; b=1+y$ Từ giả thiết suy ra $x+y\ge 0$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(1+x)^3+(1+y)^3 \le (1+x)^4+(1+y)^4$$
$$\Leftrightarrow 0 \le x(1+x)^3+y(1+y)^3$$
$$\Leftrightarrow x+y+3(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+3\left(x^2+y^2\right)+\left(x^4+y^4\right) \ge 0$$

(đúng vì $x+y \ge 0$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0$ hay $a=b=1$

Cách khác:

Do $a+b \ge 2$. Vì thế ta chỉ cần chứng minh:

$$a^4+b^4-(a+b) \ge a^3+b^3-2$$
$$\Leftrightarrow a^3(a-1)-(a-1)+b^3(b-1)-(b-1) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)\left(a^3-1\right)+(b-1)\left(b^3-1\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2\left(a^2+a+1\right)+(b-1)^2\left(b^2+b+1\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+(b-1)^2\left[\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 3.** Cho $x+y=3, x \le 1$. Chứng minh rằng $y^3-x^3-6y^2-x^2+9y \ge 0$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=1-a; a \ge 0$. Từ giả thiết suy ra $y=2+a$. Lúc này bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$(2+a)^3-(1-a)^3-6(a+2)^2-(1-a)^2+9(2+a) \ge 0 \Leftrightarrow a^3-2a^2+a \ge 0 \Leftrightarrow a(a+1)^2 \ge 0$ (đúng vì $a \ge 0$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $a=1$ tức là khi x=1,y=2 hoặc $x=0, y=3$

★**Thí dụ 4.** Cho $x \le 1; x+y \ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=3x^2+y^2+3xy$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=1-a$ và $x+y=3+b$. Từ giả thiết suy ra $a,b \ge 0$

Ta có: $y=2+a+b$. Từ đó

$$B=3x^2+y^2+3xy$$
$$=3(1-a)^2+(2+a+b)^2+3(1-a)(2+a+b)$$
$$=a^2+b^2-5a+7b-ab+13=\left(a-\frac{b}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{9}{2}b+\frac{27}{4} \ge \frac{27}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=0 \end{cases}$ tức là $x=-\dfrac{3}{2}; y=\dfrac{9}{2}$

Vậy B đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{27}{2}$ khi $x = -\frac{3}{2}; y = \frac{9}{2}$

★**Thí dụ 5.** Cho $a + b = c + d$ Chứng minh bất đẳng thức: $b^2 + c^2 + cd \ge 3ab$

Hướng dẫn giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$

Đặt $c = a + x$ với $x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết suy ra $d = b - x$. Ta có:

$$c^2 + d^2 + cd = (a+x)^2 + (b-x)^2 + (a+x)(b-x)$$

$$= \left(a - b + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} + 3ab \ge 3ab$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 0 \\ a - b + \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d$

★**Thí dụ 6.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases} a \ge 4\ ;\ b \ge 5\ ;\ c \ge 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 90 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $a + b + c \ge 16$

Hướng dẫn giải

Đặt $a = 4 + x$, $b = 5 + y$, $c = 6 + z$

Từ giả thiết suy ra: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Ta giả sử ngược lại: $a + b + c < 16$, dẫn đến $x + y + z < 1$

Mặt khác từ $a^2 + b^2 + c^2 = 90$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+5)^2 + (6+z)^2 = 90$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13 \quad (1)$

Do $0 \le x + y + z < 1 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 < 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) < 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 1$ (vì $x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ z \ge 0$)

Khi đó ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = (x^2 + y^2 + z^2) + 12(x + y + z) - 4x - 2y < 1 + 12 = 13$

Điều này mâu thuẫn với đẳng thức (1)

Từ đó ta có điều cần chứng minh.

★**Thí dụ 7.** Cho $x \le 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2(2 - x)$

Hướng dẫn giải

Dự đoán giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = 4$

Đặt $x = 4 - t$, từ giả thiết suy ra $t \ge 0$

Ta có $A = (4-t)^2(2 - 4 + t) = t^3 - 10t^2 + 32t - 32 = t(t-5)^2 + 7t - 32 \ge -32$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi t = 0 hay x = 4

Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $ab=cd=1$.

★**Thí dụ 8.** Chứng minh rằng: $(a+b)(c+d)+4\ge 2(a+b+c+d)$

(ĐTTS lớp 10 THPT Năng Khiếu ĐHQG HCM-2007)

Hướng dẫn giải

Đặt $u=a+b, v=c+d$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab}=2, c+d\ge 2\sqrt{cd}=2$ do đó $u\ge 2, v\ge 2$.

BĐT cần chứng minh được viết lại như sau:

$$uv+4\ge 2(u+v)\Leftrightarrow (u-2)(v-2)\ge 0 \text{ đúng do } u\ge 2, v\ge 2.$$

Từ đó suy ra BĐT đã được chứng minh.

Dạng 2. Đặt mẫu là các biến mới

★**Thí dụ 1.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3 \qquad \textbf{(1)}$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó vế trái của bất đẳng thức **(1)** trở thành: $\dfrac{y+z}{2x}+\dfrac{z+x}{2y}+\dfrac{x+y}{2z}$

Ta có: $\dfrac{y+z}{2x}+\dfrac{z+x}{2y}+\dfrac{x+y}{2z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)$

$$\ge \frac{2}{2}\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{y}.\frac{y}{z}}=3$$

Hay $\qquad \dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge 3$ (đpcm)

★**Thí dụ 2.** Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{3a-2b-2c}{b+c-a}+\frac{3b-2c-2a}{c+a-b}+\frac{3c-2a-2b}{a+b-c}\ge -3$$

Lời giải:

Đặt $x=b+c-a,y=c+a-b,z=a+b-c\Rightarrow a=\frac{y+z}{2},b=\frac{z+x}{2},c=\frac{x+y}{2}\left(x,y,z>0\right)$

Khi đó: $P\ge -3\Leftrightarrow \frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}-6\ge -3$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 6$$

Theo BĐT Cô-si ta có: $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}}+2\sqrt{\frac{x}{z}.\frac{z}{x}}=6$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

★**Thí dụ 3.** Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{3a+b+c}+\frac{b}{3b+c+a}+\frac{c}{3c+a+b}\le \frac{3}{5}$

(Đề thi HSG môn Toán lớp 9- Quảng Ninh-2010)

Lời giải:

Đặt $x=3a+b+c,y=3b+c+a,z=3c+a+b$.

Ta tính được: $a=\frac{4x-y-z}{10},b=\frac{4y-z-x}{10},c=\frac{4z-x-y}{10}\left(x,y,z>0\right)$

Khi đó BĐT đa cho được viết lại như sau:

$\frac{4x-y-z}{10x}+\frac{4y-z-x}{10y}+\frac{4z-x-y}{10z}\le \frac{3}{5}\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6\Rightarrow$ đpcm.(theo trên)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

★**Thí dụ 4.** Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{25b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}>2$.

Giải:

Đặt: $x=b+c,y=c+a,z=a+b$.

Từ đó tính được: $a=\frac{y+z-x}{2},b=\frac{z+x-y}{2},c=\frac{x+y-z}{2}\left(x,y,z>0\right)$

Vì vậy $\frac{a}{b+c}+\frac{25b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}>2\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{25\left(z+x-y\right)}{2y}+\frac{4\left(x+y-z\right)}{2z}>2$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{2x}+\frac{25z+25x}{2y}+\frac{2x+2y}{z}-\frac{1}{2}-\frac{25}{2}-2>2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{2x}+\frac{25x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{2x}{z}\right)+\left(\frac{25z}{2y}+\frac{2y}{z}\right)>17$$

Mặt khác áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\left(\frac{y}{2x}+\frac{25x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{2x}{z}\right)+\left(\frac{25z}{2y}+\frac{y}{2z}\right)\geq 2\sqrt{\frac{y}{2x}.\frac{25x}{2y}}+2\sqrt{\frac{z}{2x}.\frac{2x}{z}}+2\sqrt{\frac{25z}{2y}.\frac{2y}{z}}$$

$$=2.\frac{5}{2}+2.1+2.5=17$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$\frac{y}{2x}=\frac{25x}{2y},\frac{z}{2x}=\frac{2x}{z},\frac{25z}{2y}=\frac{2y}{z}\Rightarrow y^2=25x^2,z^2=4x^2,4y^2=25z^2$ vô lí vì $x,y,z>0$.

Từ đó suy ra $\left(\frac{y}{2x}+\frac{25x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{2x}{z}\right)+\left(\frac{25z}{2y}+\frac{2y}{z}\right)>17\Rightarrow$ đpcm.

★**Thí dụ 5.** Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c \textbf{ (1)}$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức **(1)** tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\geq x+y+z$$

Ta có:

$$\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\geq \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\right)$$

$$\geq\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x}}=z+x+y$$

Hay $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$ (đpcm)

★**Thí dụ 6.** Cho $a,b,c>0$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{4a}{a+b+2c}+\frac{b+3c}{2a+b+c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

(Đề thi HSG Toán lớp 9 Tỉnh Phú Thọ-2011)

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=a+b+2c, y=2a+b+c, z=a+b+3c\left(x,y,z>0\right)$.

Từ đó tính được: $a=z+y-2x, b=5x-y-3z, c=z-x$

Biểu thức đã cho trở thành $A=\dfrac{4\left(z+y-2x\right)}{x}+\dfrac{\left(5x-y-3z\right)+3\left(z-x\right)}{y}-\dfrac{8\left(z-x\right)}{z}$

$$=\frac{4z+4y}{x}-8+\frac{2x}{y}-1+\frac{8x}{z}-8=\left(\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\right)-17$$

Mặt khác áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\left(\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\right)\ge 2\sqrt{\frac{4y}{x}.\frac{2x}{y}}+2\sqrt{\frac{4z}{x}.\frac{8x}{z}}=2\sqrt{8}+2\sqrt{32}=12\sqrt{2}$$

Do đó $A\ge 12\sqrt{2}-17$. Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{4y}{x}=\frac{2x}{y},\frac{4z}{x}=\frac{8x}{z}\Leftrightarrow x=y\sqrt{2},z=x\sqrt{2}=2y\Leftrightarrow x=k\sqrt{2},y=k,z=2k\left(k>0\right)$$

Vậy $\min A=12\sqrt{2}-17$ khi $a=\left(3-2\sqrt{2}\right)k, b=\left(5\sqrt{2}-7\right)k, c=\left(2-\sqrt{2}\right)k,\left(k>0\right)$

★**Thí dụ 8.** Cho $x,y>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)}$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Toán, ĐHKHTN-2004)

Hướng dẫn giải

Ta có $P=\dfrac{x^2\left(x-1\right)+y^2\left(y-1\right)}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)}=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$

Đặt $\begin{cases}a=x-1\\b=y-1\end{cases}\left(a,b>0\right)$. Khi đó $P=\dfrac{\left(a+1\right)^2}{b}+\dfrac{\left(b+1\right)^2}{a}$

Áp BĐT cơ bản: $\left(m+n\right)^2\ge 4mn$, ta có: $P=\dfrac{\left(a+1\right)^2}{b}+\dfrac{\left(b+1\right)^2}{a}\ge\dfrac{4a}{b}+\dfrac{4b}{a}$

Mặt khác theo BĐT Cô-si ta có: $P \ge \frac{4a}{b} + \frac{4b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}.\frac{4b}{a}} = 8$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy $\min P = 8$ khi $x = y = 2$

Dạng 3. Đổi biến khi tích các biến bằng k^3

Đây là một kỹ thuật đổi biến rất hiệu quả, giúp chúng ta giải quyết nhiều bài toán hay và khó. Tuy vậy ở đây cũng có nhiều cách đổi biến khác nhau, tùy theo tình huống cụ thể ta chọn cách làm thích hợp. Dưới đây xin trình bày một số trường hợp cụ thể:

3.2.1. Với $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ abc = k^3 \end{cases}$ ta có thể đổi biến như sau: $a = \frac{k}{x}, b = \frac{k}{y}, c = \frac{k}{z} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$

Trong thực tế ta hay gặp $k = 1$, đây là tình huống gặp khá nhiều ngay cả các kỳ thi lớn như IMO. Ta xét một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 5. Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2} \qquad \textit{(IMO-1995)}$$

Lời giải:

Vì $a,b,c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$, ta đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$

Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{x^3yz}{y+z} + \frac{y^3zx}{z+x} + \frac{z^3xy}{x+y} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương ta có:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}} = x\,(1)$$

$$\frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \ge 2\sqrt{\frac{y^2}{z+x}.\frac{z+x}{4}} = y\,(2)$$

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \ge 2\sqrt{\frac{z^2}{x+y}.\frac{x+y}{4}} = z\,(3)$$

Lấy $(1)+(2)+(3)$ theo vế ta được: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{1}{2}(x+y+z) \ge (x+y+z)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{1}{2}(x+y+z)\,(4)$$

Lại áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương ta có: $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\left(5\right)$

Từ $\left(4\right),\left(5\right)\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 6. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{yz}{x^2\left(y+z\right)}+\frac{zx}{y^2\left(z+x\right)}+\frac{xy}{z^2\left(x+y\right)}$$

Lời giải:

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$. Từ giả thiết suy ra $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$. Khi đó $P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$

Làm tương tự bài toán trên ta có $\min P=\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

● *Hai ví dụ trên cho thấy rõ phần nào ứng dụng của phép đổi biến này. Ví dụ sau với cách phát biểu lạ hơn, nhưng thông qua một vài biến đổi đơn giản chúng ta lại có cách đổi biến quen thuộc:*

Ví dụ 7. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc+a+b=3ab$. Chứng minh rằng:

$$P=\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}}+\sqrt{\frac{b}{bc+c+1}}+\sqrt{\frac{a}{ca+c+1}}\ge\sqrt{3}$$

(Đề thi HSG môn Toán lớp 9 Tỉnh Phú Thọ-2012)

Lời giải:

Ta có: $abc+a+b=3ab\Leftrightarrow c+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=3$. Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=c\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\ x+y+z=3\end{cases}$

Khi đó:

$$P=\sqrt{\frac{1}{x+y+xy}}+\sqrt{\frac{1}{z+zy+y}}+\sqrt{\frac{1}{z+zx+x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{z+zy+y}}+\frac{1}{\sqrt{z+zx+x}}$$

Áp dụng BĐT: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\ge\frac{9}{m+n+p}\left(m,n,p>0\right)$ ta có:

$$P\ge\frac{9}{\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}}$$

Áp dụng BĐT cơ bản: $\left(u+v+w\right)^2\le 3\left(u^2+v^2+w^2\right)$ ta có:

$$\left(\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\right)^2\le 3\left(x+y+xy+z+zy+y+z+zx+x\right)$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\right)^2\le 3\left[2\left(x+y+z\right)+\left(xy+yz+zx\right)\right]$$

Không khó khăn lắm ta chứng minh được $\left(xy+yz+zx\right)\le\frac{1}{3}\left(x+y+z\right)^2$

Do đó: $\left(\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\right)^2\le 3\left(2.3+3\right)=27$

$$\Rightarrow\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{z+zy+y}+\sqrt{z+zx+x}\le 3\sqrt{3}$$

Từ đó suy ra: $P\ge\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 8. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.Chứng minh rằng:

$$P=\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$$ *(Baltic Way 2005)*

Lời giải:

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\xyz=1\end{cases}$. Khi đó: $P=\frac{x}{2x^2+1}+\frac{y}{2y^2+1}+\frac{z}{2z^2+1}$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$2x^2+1=x^2+\left(x^2+1\right)\ge x^2+2x$$
$$2y^2+1=y^2+\left(y^2+1\right)\ge y^2+2y$$
$$2z^2+1=z^2+\left(z^2+1\right)\ge z^2+2z$$

Do đó $P\le\frac{x}{x^2+2x}+\frac{y}{y^2+2y}+\frac{z}{z^2+2z}\Rightarrow P\le\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}$

Ta cần chứng minh BĐT: $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le 1\left(1\right)$

Với $x,y,z>0$ ta có:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow\left(y+2\right)\left(z+2\right)+\left(z+2\right)\left(x+2\right)+\left(x+2\right)\left(y+2\right)\le\left(x+2\right)\left(y+2\right)\left(z+2\right)$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+4\left(x+y+z\right)+12\le xyz+4\left(x+y+z\right)+2\left(xy+yz+zx\right)+8$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 3\left(\text{do } xyz=1\right)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có:

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{xy.yz.zx}=3\left(\text{do } xyz=1\right)\Rightarrow\text{đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

• *Như vậy với kỹ thuật trên kết hợp với việc sử dụng thêm một số BĐT khác chúng ta tìm được lời giải của một lớp các bài toán tương đối khó.Với phương pháp như trên chúng ta có thể giải được một số bài toán sau:*

1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

2. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{ab+bc+ca}{2}$$

3.2.2. Với $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=k^3\end{cases}$ ta có thể đổi biến như sau: $a=\frac{kx}{y},b=\frac{ky}{z},c=\frac{kz}{x}(x,y,z>0)$

Lí giải cho phép đổi biến trên như sau:

Vì $a,b,c>0\Rightarrow$ Tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\frac{kx}{y},b=\frac{ky}{z}$.

Do $abc=k^3\Rightarrow\frac{kx}{y}.\frac{ky}{z}.c=k^3\Leftrightarrow c=\frac{kz}{x}$

Phép đổi biến này thực sự là một biện pháp hữu hiệu khi chứng minh nhiều BĐT tương đối khó. BĐT với biến mới giúp ta có nhiều sự lựa chọn hơn trong chứng minh.

Ví dụ 9. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le1\qquad\textit{(IMO-2000)}$$

Lời giải:

Vì $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$ nên tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$.

Khi đó BĐT được viết lại:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\le1\Leftrightarrow(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\le xyz$$

Ta có: $\begin{cases}(x+y-z)+(y+z-x)+(z+x-y)=x+y+z\ge0\\(x+y-z)+(y+z-x)=2y\ge0\\(y+z-x)+(z+x-y)=2z\ge0\\(z+x-y)+(x+y-z)=2x\ge0\end{cases}$ do $x,y,z\ge0$.

nên trong 3 tổng $(x+y-z),(y+z-x),(z+x-y)$ chỉ có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:

1) $(x+y-z),(y+z-x),(z+x-y)\ge0$

Ta có: $\begin{cases} x^2 \ge x^2 - (y-z)^2 = (x-y+z)(x+y-z) \\ y^2 \ge y^2 - (z-x)^2 = (y+z-x)(y-z+x) \\ z^2 \ge x^2 - (x-y)^2 = (z-x+y)(z+x-y) \end{cases}$

$\Rightarrow x^2y^2z^2 \ge (x+y-z)^2(y+z-x)^2(z+x-y)^2$

$\Rightarrow xyz \ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

2) Hai trong 3 tổng đó lớn hơn bằng 0, tổng còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 0

$\Rightarrow xyz \ge 0 \ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

Từ các trường hợp trên suy ra bài toán được chứng minh.

● *Đây là một trong những bất đẳng thức rất quan trọng, từ bất đẳng thức này chúng ta có thể giải quyết được một số bài toán hay và khó. Chúng ta sẽ tìm hiểu ứng dụng của nó trong phần khác. Tiếp theo xét một số vị dụ khác để thấy rõ tác dụng của phương pháp nêu trên:*

Ví dụ 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Vì $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$ nên tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

Khi đó BĐT đã cho trở thành: $\frac{zx}{xy+yz} + \frac{xy}{zx+yz} + \frac{yz}{zx+xy} \ge \frac{3}{2}$

Đây là BĐT Nesbit's quen thuộc. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 11. Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a+2b} + \frac{c}{b+2c} + \frac{a}{c+2a} \le 1.$$

Lời giải:

BĐT được viết lại: $\frac{1}{\frac{a}{b}+2} + \frac{1}{\frac{b}{c}+2} + \frac{1}{\frac{c}{a}+2} \le 1$. Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$

Khi đó cần chứng minh BĐT: $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \le 1 (1)$

Mặt khác:

$(1) \Leftrightarrow (y+2)(z+2) + (z+2)(x+2) + (x+2)(y+2) \le (x+2)(y+2)(z+2)$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx + 4x + 4y + 4z + 12 \le xyz + 4x + 4y + 4z + 2xy + 2yz + 2zx + 8$

$\Leftrightarrow 3 \le xy + yz + zx$ (do $xyz = 1$)

Theo BĐT Cô-si ta có: $xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{xy.yz.zx} = 3$ (do $xyz = 1$) $\Rightarrow$ đpcm

Ví dụ 12. Cho các số thực dương $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$M = \frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \le \frac{1}{2}$$

Lời giải:

Ta có: $\dfrac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 2x + 2} \le \dfrac{1}{2xy + 2x + 2}$ do $x, y > 0$ và $x^2 + y^2 \ge 2xy$.

Tương tự: $\dfrac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} \le \dfrac{1}{2yz + 2y + 2}$; $\dfrac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \le \dfrac{1}{2zx + 2z + 2}$

Do đó: $M \le \dfrac{1}{2xy + 2x + 2} + \dfrac{1}{2yz + 2y + 2} + \dfrac{1}{2zx + 2z + 2} = P$

Vì $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$ nên tồn tại $a, b, c > 0$ sao cho $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$.

Khi đó $P = \dfrac{1}{2.\frac{a}{b}.\frac{b}{c} + 2.\frac{a}{b} + 2} + \dfrac{1}{2.\frac{b}{c}.\frac{c}{a} + 2.\frac{b}{c} + 2} + \dfrac{1}{2.\frac{c}{a}.\frac{a}{b} + 2.\frac{c}{a} + 2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{ab + bc + ca} + \frac{ca}{ab + bc + ca} + \frac{ab}{ab + bc + ca}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

● *Qua bài toán này chúng ta thấy được vẻ đẹp của phép đổi biến trên, nó không chỉ áp dụng cho việc chứng minh các BĐT mà còn giải quyết được một số bài toán về chứng minh đẳng thức. Chẳng hạn xét thêm ví dụ sau:*

Ví dụ 13. Cho *a, b,* c là ba số thực thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) = \left(a + 1 - \frac{1}{b}\right)\left(b + 1 - \frac{1}{c}\right)\left(c + 1 - \frac{1}{a}\right)$$

Lời giải:

Từ giả thiết $abc = 1 \Rightarrow a, b, c \ne 0 \Rightarrow$ có thể đặt $a = \dfrac{x}{y}, b = \dfrac{y}{z}, c = \dfrac{z}{x}$ với $x, y, z \ne 0$

Vế trái được viết lại như sau:

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) = \frac{(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)}{xyz} \quad (1)$$

Vế phải trở thành:

$$\left(\frac{x}{y} + 1 - \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} + 1 - \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} + 1 - \frac{y}{x}\right) = \frac{(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)}{xyz} \quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra đẳng thức đã cho được chứng minh.

• *Trong một số tình huống việc đổi biến tương tự như trên nhưng khéo léo hơn chẳng hạn: Với* $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $abc=1$ *đặt:* $a=\frac{x^2}{y^2},b=\frac{y^2}{z^2},c=\frac{z^2}{x^2}$, *với* $x,y,z>0$.

Ví dụ 14. Cho *a, b,* c là ba số thực dương thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$a\left(b^2-\sqrt{b}\right)+b\left(c^2-\sqrt{c}\right)+c\left(a^2-\sqrt{a}\right)\ge 0$$

Lời giải:

Vì $a,b,c>0$ thoả mãn *abc* = 1 nên ta đặt: $a=\frac{x^2}{y^2},b=\frac{y^2}{z^2},c=\frac{z^2}{x^2}$ với $x,y,z>0$

BĐT trở thành: $\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{y^4}{z^4}-\frac{y}{z}\right)+\frac{y^2}{z^2}\left(\frac{z^4}{x^4}-\frac{z}{x}\right)+\frac{z^2}{x^2}\left(\frac{x^4}{y^4}-\frac{x}{y}\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{z^4}+\frac{y^2z^2}{x^4}+\frac{z^2x^2}{y^4}-\frac{x^2}{yz}-\frac{y^2}{zx}-\frac{z^2}{xy}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2y^2z^2}\left(\frac{x^2y^2}{z^4}+\frac{y^2z^2}{x^4}+\frac{z^2x^2}{y^4}-\frac{x^2}{yz}-\frac{y^2}{zx}-\frac{z^2}{xy}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^6}+\frac{1}{y^6}+\frac{1}{z^6}-\frac{1}{x^3y^3}-\frac{1}{y^3z^3}-\frac{1}{z^3x^3}\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)^2+\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{z^3}\right)^2+\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{x^3}\right)^2\ge 0$$

Từ đó dẫn đến BĐT đã cho được chứng minh.

• *Trong một số tình huống việc đổi biến:* $a=\frac{kx}{y},b=\frac{ky}{z},c=\frac{kz}{x}$ *gặp khá nhiều khó khăn khi chứng minh BĐT tiếp theo. Lúc đó chúng ta có thể lựa chọn giải pháp đổi biến xoay vòng lại giữa các biến* x,y,z *chẳng hạn:* $a=\frac{kx}{y},b=\frac{kz}{x},c=\frac{ky}{z}$.

Ví dụ 15. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+d)}+\frac{1}{d(1+a)}\ge 2$$

Lời giải:

Vì $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $abcd=1$ nên ta đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{z}{x},c=\frac{t}{z},d=\frac{y}{t}$ với $x,y,z,t>0$.

Khi đó BĐT đã cho trở thành: $A=\frac{y}{x+z}+\frac{x}{z+t}+\frac{z}{t+y}+\frac{t}{y+x}\ge 2$

Ta có $A = \frac{y^2}{xy + yz} + \frac{x^2}{zx + xt} + \frac{z^2}{tz + yz} + \frac{t^2}{yt + tx}$. Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$\left(\frac{y^2}{xy + yz} + \frac{x^2}{zx + xt} + \frac{z^2}{tz + yz} + \frac{t^2}{yt + tx}\right)\left[(xy + yz) + (zx + xt) + (tz + yz) + (yt + tx)\right]$$

$$\geq (x + y + z + t)^2$$

Suy ra: $A \geq \frac{(x + y + z + t)^2}{(xy + yz) + (zx + xt) + (tz + yz) + (yt + tx)}$

Ta chứng minh BĐT: $\frac{(x + y + z + t)^2}{(xy + yz) + (zx + xt) + (tz + yz) + (yt + tx)} \geq 2(1)$

Thật vậy, BĐT $(1) \Leftrightarrow (x + y + z + t)^2 \geq 2\left[(xy + yz) + (zx + xt) + (tz + yz) + (yt + tx)\right]$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 2(yz + zt) \Leftrightarrow (y - z)^2 + (z - t)^2 \geq 0. \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + ab} + \frac{1}{b^2 + bc} + \frac{1}{c^2 + ca} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Vì $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$ nên ta đổi biến: $a = \sqrt{\frac{x}{y}}, b = \sqrt{\frac{z}{x}}, c = \sqrt{\frac{y}{z}}$ với $x, y, z > 0$.

Khi đó BĐT đã cho được viết lại như sau: $\frac{x}{z + \sqrt{xy}} + \frac{y}{x + \sqrt{yz}} + \frac{z}{y + \sqrt{xz}} \geq \frac{3}{2}$

Xét $P = \frac{x}{z + \sqrt{xy}} + \frac{y}{x + \sqrt{yz}} + \frac{z}{y + \sqrt{xz}}$. Theo BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$$P = \frac{x}{z + \sqrt{xy}} + \frac{y}{x + \sqrt{yz}} + \frac{z}{y + \sqrt{xz}} \geq \frac{x}{z + \frac{x + y}{2}} + \frac{y}{x + \frac{y + z}{2}} + \frac{z}{y + \frac{z + x}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P \geq \frac{x^2}{x^2 + xy + 2zx} + \frac{y^2}{y^2 + yz + 2xy} + \frac{z^2}{z^2 + zx + 2yz}$$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta thu được:

$$\frac{1}{2}P \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + xy + 2zx + y^2 + yz + 2xy + z^2 + zx + 2yz} = \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx}$$

Cuối cùng ta cần chứng minh BĐT: $\frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx} \geq \frac{3}{4}(1)$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 4(x+y+z)^2 \ge 3(x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx)$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \ge 3(x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \text{ đúng với mọi } x,y,z>0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

● *Với phương pháp như trên chúng ta một số bài toán tương tự:*

1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \ge \frac{3}{2}$$

2. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

3. Cho bốn số dương x,y,z,t thỏa mãn điều kiện $xyzt=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2} \ge 1.$$ *(China IMO TST 2005)*

3.2.3. Với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=k^3 \end{cases}$ ta có thể đổi biến như sau: $a=\frac{kyz}{x^2}, b=\frac{kzx}{y^2}, c=\frac{kxy}{z^2} (x,y,z>0)$

$$\text{hoặc } a=\frac{kx^2}{yz}, b=\frac{ky^2}{zx}, c=\frac{kz^2}{xy} (x,y,z>0)$$

Hai phép đổi biến này cũng đem lại cho chúng ta thêm lựa chọn khi chứng minh BĐT, kết hợp với các BĐT đã biết một số bài toán BĐT khó được giải quyết.

Ví dụ 17. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$K=\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1} \ge 1$$ *(Vasile Cirtoaje)*

Lời giải:

Từ giả thiết ta có thể đặt $x=\frac{bc}{a^2}, y=\frac{ca}{b^2}, z=\frac{ab}{c^2}$ với $a,b,c>0$.

Khi đó $K=\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ca+c^2a^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2}$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$K.\left[(a^4+a^2bc+b^2c^2)+(b^4+b^2ca+c^2a^2)+(c^4+c^2ab+a^2b^2)\right] \ge (a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\Rightarrow K \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)}$$

$$\Rightarrow K \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab}$$

Vậy cần chứng minh BĐT: $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab} \ge 1(1)$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 \ge a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương:

$$a^2b^2+b^2c^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2.b^2c^2} = 2b^2ac$$

$$b^2c^2+c^2a^2 \ge 2\sqrt{b^2c^2.c^2a^2} = 2c^2ab$$

$$c^2a^2+a^2b^2 \ge 2\sqrt{c^2a^2.a^2b^2} = 2a^2bc$$

Cộng các vế của 3 BĐT trên suy ra:

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \ge 2\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right) \Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

Do đó (1) được chứng minh. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c \Rightarrow x=y=z=1$

Ví dụ 18. Cho 3 số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \ge 1$$ *(Phạm Văn Thuận)*

Lời giải:

Từ giả thiết ta có thể đặt $a=\frac{yz}{x^2}, b=\frac{zx}{y^2}, z=\frac{xy}{z^2}$ với $x,y,z>0$.

Khi đó $P=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}$

$$=\frac{x^4}{\left(x^2+yz\right)^2}+\frac{y^4}{\left(y^2+zx\right)^2}+\frac{z^4}{\left(z^2+xy\right)^2}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}$$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+k^2\right)\ge\left(m^2+nk\right)^2\Rightarrow\frac{1}{\left(m^2+nk\right)^2}\ge\frac{1}{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+k^2\right)}(*)$$

Áp dụng BĐT $(*)$ ta được:

$$P\ge\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)\left(y^2+x^2\right)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)\left(z^2+y^2\right)}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}$$

$$P\ge\frac{x^4\left(y^2+z^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}$$

Mặt khác theo BĐT trên ta có:

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\ge\left(x^2+yz\right)^2\\\left(y^2+z^2\right)\left(y^2+x^2\right)\ge\left(y^2+zx\right)^2\\\left(z^2+y^2\right)\left(z^2+x^2\right)\ge\left(z^2+xy\right)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)^2\left(y^2+z^2\right)^2\left(z^2+x^2\right)^2\ge\left(x^2+yz\right)^2\left(y^2+zx\right)^2\left(z^2+xy\right)^2$$

$\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)\ge\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)$ do $x,y,z>0$

$$\Rightarrow\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)}\ge\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}$$

Do đó $P\ge\frac{x^4\left(y^2+z^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}$

$$\Rightarrow P\ge\frac{x^4y^2+x^4z^2+y^4z^2+y^4x^2+z^4x^2+z^4y^2+2x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{x^4y^2+x^4z^2+y^4z^2+y^4x^2+z^4x^2+z^4y^2+2x^2y^2z^2}{x^4y^2+x^4z^2+y^4z^2+y^4x^2+z^4x^2+z^4y^2+2x^2y^2z^2}=1$$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Ví dụ 19. Cho các số thực x,y,z khác 1 và thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z}{z-1}\right)^2\ge1\qquad\textit{(IMO-2008)}$$

Lời giải:

Do x,y,z khác 1 và thỏa mãn $xyz=1$ nên ta có thể đặt: $x=\frac{a^2}{bc},y=\frac{b^2}{ca},z=\frac{c^2}{ab}$

với $\left(a^2-bc\right)\left(b^2-ca\right)\left(c^2-ab\right)\ne0$.

Khi đó BĐT cần chứng minh được viết lại như sau:

$$\frac{a^4}{\left(a^2-bc\right)^2}+\frac{b^4}{\left(b^2-ca\right)^2}+\frac{c^4}{\left(c^2-ab\right)^2}\ge 1$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\left[\left(a^2-bc\right)^2+\left(b^2-ca\right)^2+\left(c^2-ab\right)^2\right]\left[\frac{a^4}{\left(a^2-bc\right)^2}+\frac{a^4}{\left(b^2-ca\right)^2}+\frac{a^4}{\left(c^2-ab\right)^2}\right]\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^4}{\left(a^2-bc\right)^2}+\frac{a^4}{\left(b^2-ca\right)^2}+\frac{a^4}{\left(c^2-ab\right)^2}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^2-bc\right)^2+\left(b^2-ca\right)^2+\left(c^2-ab\right)^2}$$

Ta cần chứng minh BĐT: $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^2-bc\right)^2+\left(b^2-ca\right)^2+\left(c^2-ab\right)^2}\ge 1(1)$

Thật vậy, BĐT $(1)\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\left(a^2-bc\right)^2+\left(b^2-ca\right)^2+\left(c^2-ab\right)^2$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge a^4+b^4+c^4+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-2\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 0$$

Từ đó suy ra BĐT đã cho được chứng minh.

Ví dụ 20. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $xyz=8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2+2x+4}+\frac{y^2}{y^2+2y+4}+\frac{z^2}{z^2+2z+4}\ge 1$$

Lời giải:

Đặt $x=\dfrac{2a^2}{bc},y=\dfrac{2b^2}{ca},z=\dfrac{2c^2}{ab}$. Khi đó BĐT đã cho được viết dưới dạng:

$$P=\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ca+c^2a^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2}\ge 1$$

Áp dụng BĐT Bunhia-copx-ki ta có:

$$\left[\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)\right].P\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)}$$

Vậy chỉ cần chứng minh BĐT:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)}\ge 1(1)$$

Thật

vậy $(1)\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)+\left(b^4+b^2ca+c^2a^2\right)+\left(c^4+c^2ab+a^2b^2\right)$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge a^4+b^4+c^4+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2bc+b^2ca+c^2ab$

$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab\ge 0 \Leftrightarrow 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2bc-2b^2ca-2c^2ab\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(ab-ac\right)^2+\left(bc-ba\right)^2+\left(ca-cb\right)^2\ge 0$

Do đó BĐT đã cho được chứng.

● *Những ví dụ trên cho thấy hiệu quả của phép đổi biến nêu trên là rất lớn. Với cách làm tương tự chúng ta có một số bài toán sau:*

1. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\left(a+1\right)\left(a+2\right)}+\frac{1}{\left(b+1\right)\left(b+2\right)}+\frac{1}{\left(c+1\right)\left(c+2\right)}\ge\frac{1}{2}$$

2. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\ge 1$$

3. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Dạng 4. Đưa bất đẳng thức về một biến

Trong bất đẳng thức thường thì các bài toán cùng một dạng thì càng nhiều biến càng khó, điều này có nghĩa với nhiều bài toán sẽ đơn giản hơn khi ta đưa bất đẳng thức về dạng ít biến hơn.

Các bước làm:

- Đưa bất đẳng thức về một ẩn
- Xác định điều kiện ẩn (nếu có) , dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức hay biểu thức cực trị
- Biến đổi tương đương về nhân tử theo dấu bằng dự đó của biến mới hoặc sử dụng các bất đẳng thức AM-GM hoặc Bunyakovski.

★**Thí dụ 1.** Cho các số thực *x, y* thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=x^3+y^3+2xy.$$

(Học sinh giỏi lớp 9 Thành phố Hà Nội năm 2006-2007)

Hướng dẫn giải

Ta có: $A=x^3+y^3+2xy.=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)+2xy$

Theo giả thiết $x+y=2$, ta có $y=2-x$ nên

$A=2^3-6x\left(2-x\right)+2x\left(2-x\right)=4x^2-8x+8$

$=4\left(x-1\right)^2+4\ge 4,\ \forall x\in R.$

Ta có A= 4 khi và chỉ khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4 khi $x=1, y=1$.

★**Thí dụ 2.** Cho a, b là các số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

Hướng dẫn giải

Đặt $m=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ta có: $m^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 \ge 4.\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=4 \Rightarrow |m|\ge 2 \Rightarrow m\ge 2 \vee m\le -2$

Cách 1: Do đó: $A=3m^2-6-8m=3\left(m-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{34}{3}$.

Với $m\ge 2$ thì: $m-\frac{4}{3}\ge\frac{2}{3}\Rightarrow\left(m-\frac{4}{3}\right)^2\ge\frac{4}{9}\Rightarrow A=3\left(m-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{34}{3}\ge\frac{4}{3}-\frac{34}{3}=-10$

Với $m\le -2$ thì: $m-\frac{4}{3}\le-\frac{10}{3}\Rightarrow\left(m-\frac{4}{3}\right)^2\ge\frac{100}{9}\Rightarrow A=3\left(m-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{34}{3}\ge 3.\frac{100}{9}-\frac{34}{3}=22$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -10 với m = 2, khi đó a = b.

Cách 2: $A=3m^2-6-8m=\left(m^2-4\right)+\left(2m^2-8m+8\right)-10=\left(m^2-4\right)+2\left(m-2\right)^2-10\ge -10$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -10 với m = 2, khi đó a = b.

★**Thí dụ 3.** Cho x, y là các số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge 3.$$

(Đề toán vào 10 chuyên KHTN Hà Nội 2000-2001)

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành:

$$\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2y^2}\ge 5.$$

Đặt $\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2y^2}=t\Rightarrow\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)}=\frac{4}{t}$. Ta được:

$$\frac{4}{t}+t\ge 5\Leftrightarrow\frac{t^2-5t+4}{t}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(t-1)(t-4)}{t}\ge 0. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức AM- GM ta dễ thấy: $t \ge 4$ suy ra $t-1>0, t-4\ge 0$.

Do đó (1) đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

★**Thí dụ 4.** Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{xy+yz+zx}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\ge 14.$$

(Đề toán vào 10 chuyên Trần Phú Hải Phòng 2003-2004)

Hướng dẫn giải

Đặt: $xy+yz+zx=t \Rightarrow x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1-2t$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc: $3(xy+yz+zx)\le (x+y+z)^2 \Rightarrow t\le \frac{1}{3} \Rightarrow 0<t\le \frac{1}{3}$.

Do đó ta cần chứng minh:

$$\frac{3}{t}+\frac{2}{1-2t}\ge 14 \Leftrightarrow 3(1-2t)+2t\ge 14t(t-2t) \Leftrightarrow 3-4t\ge 14t-28t^2 \Leftrightarrow 3-18t+28t^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-3t)^2+t^2\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 5.** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=17x^2+17y^2+16xy$

(Đề toán vào 10 chuyên KHTN 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Ta có: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1 \Leftrightarrow 4(x+y)^2+9xy+5(x+y)\ge 1$

Đặt $t=x+y$, $t>0$, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$xy\le \frac{(x+y)^2}{4}=\frac{t^2}{4}$. Do đó: $4t^2+\frac{9}{4}t^2+5t\ge 1 \Rightarrow t\ge \frac{2\sqrt{2}-2}{5}$ hay $x+y\ge \frac{2\sqrt{2}-2}{5}$.

Ta có: $P=17x^2+17y^2+16xy=17(x+y)^2-18xy$

$$\ge 17(x+y)^2-18\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{25}{4}(x+y)^2\ge \frac{25}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{5}\right)^2=6-4\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{\sqrt{2}-1}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $6-4\sqrt{2}$

★**Thí dụ 6.** Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A=a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$

(Đề toán vào 10 chuyên Phan Bội Châu)

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh: $t=a^2+b^2+c^2\ge a^2b+bc^2+c^2a \quad (1)$

Thật vậy: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$

Áp dụng AM- GM: $a^3+ac^2\ge 2\sqrt{a^4c^2}=2a^2c$

Tương tự: $b^3+bc^2\ge 2b^2c; c^3+ca^2\ge 2c^2a$

Nên: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+bc^2+c^2a\right)$. Do đó (1) đúng.

$$A=a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow A\ge a^2+b^2+c^2+\frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=t+\frac{9-t}{2t} \text{ với } t=a^2+b^2+c^2\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của: $f\left(t\right)=t+\dfrac{9-t}{2t}$ với $t\ge 3$.

(Dự đoán Min của $f(t)$ là 4 khi $t=3$, Biến đổi tương đương theo nhân tử $\left(t-3\right)$)

Ta chứng minh: $f\left(t\right)\ge f\left(3\right)\Leftrightarrow t+\dfrac{9-t}{2t}\ge 4 \quad \left(*\right)$

Thật vậy: $\left(*\right)\Leftrightarrow\dfrac{2t^2-9t+9}{2t}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{\left(t-3\right)\left(2t-3\right)}{2t}\ge 0$ luôn đúng với mọi $t\ge 3$

Vậy Min(A) = 4 khi $t=3$ hay $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 7.** Cho các số x, y thỏa mãn $\left(x+y\right)^3+4xy\ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức $A=3\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1$.

(Đề toán Đại học khối B năm 2009)

Hướng dẫn giải

Ta có $2\le\left(x+y\right)^3+4xy\le\left(x+y\right)^3+\left(x+y\right)^2\Rightarrow x+y\ge 1\Rightarrow x^2+y^2\ge\dfrac{1}{2}$.

$$A=3\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1=3\left[\frac{3}{4}\left(x^2+y^2\right)^2+\frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right)^2\right]^2-2\left(x^2+y^2\right)+1$$

$$\ge\frac{9}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+1=\frac{9}{4}\left[\left(x^2+y^2\right)^2+\frac{1}{4}\right]-2\left(x^2+y^2\right)+\frac{7}{16}$$

$$\geq \frac{9}{4}.2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2.\frac{1}{4}}-2\left(x^2+y^2\right)+\frac{7}{16}=\frac{9}{4}.\left(x^2+y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+\frac{7}{16}$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)+\frac{7}{16}\geq\frac{1}{8}+\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{9}{16}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

★**Thí dụ 8.** Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x\left(x+y+z\right)=3yz$. Chứng minh rằng $\left(x+y\right)^3+\left(y+z\right)^3+3\left(x+y\right)\left(x+z\right)\left(y+z\right)\leq 5\left(y+z\right)^3$.

(Đề toán Đại học khối A năm 2009)

Hướng dẫn giải

Do x là số dương nên:

+) $x\left(x+y+z\right)=3yz\Leftrightarrow 1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=3.\frac{y}{x}.\frac{z}{x}$

+) $\left(x+y\right)^3+\left(y+z\right)^3+3\left(x+y\right)\left(x+z\right)\left(y+z\right)\leq 5\left(y+z\right)^3$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)^3+3\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)\leq 5\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)^3$$

Đặt $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{x}\left(a,b>0\right)$. Bài toán đã cho trở thành: "Cho các số dương a, b thỏa mãn $1+a+b=3ab$. Chứng minh rằng $\left(1+a\right)^3+\left(1+b\right)^3+3\left(a+b\right)\left(1+a\right)\left(1+b\right)\leq 5\left(a+b\right)^3$ (2)

Ta thấy biểu thức điều kiện và bất đẳng thức cần chứng minh đều đối xứng với a và b. Đặt $t=a+b,$ ta có: $1+a+b=3ab\leq\frac{3}{4}\left(a+b\right)^2\Leftrightarrow 3t^2-4t-4\geq 0\Leftrightarrow\left(3t+2\right)\left(t-2\right)\geq 0\Leftrightarrow t\geq 2$

Khi đó:

$$\left(2\right)\Leftrightarrow 4t^3-6t^2-4t\geq 0\Leftrightarrow t\left(2t+1\right)\left(t-2\right)\geq 0 \text{ luôn đúng } t\geq 2.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

★**Thí dụ 9.** Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{6}{a+b+c}$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Vĩnh Phúc 2010)

Hướng dẫn giải

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Đặt $t=a+b+c\left(t>0\right)$. Dễ dàng chứng minh được BĐT:

$\left(a+b+c\right)^2 \ge 3\left(ab+bc+ca\right) \Leftrightarrow ab+bc+ca \le \frac{1}{3}t^2$. Suy ra: $\frac{3}{ab+bc+ca} \ge \frac{3}{\frac{1}{3}t^2} = \frac{9}{t^2}$

Ta sẽ chứng minh BĐT: $1+\frac{9}{t^2} \ge \frac{6}{t} \Leftrightarrow \frac{9}{t^2}-\frac{6}{t}+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{t}-1\right)^2 \ge 0$. BĐT này hiển nhiên đúng. Từ đó suy ra BĐT đã cho được chứng minh.

★**Thí dụ 10.** Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng: $\frac{9}{a+b+c}-\frac{1}{abc} \le 2$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=a+b+c\left(t>0\right)$. Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} = \frac{t}{3} \Rightarrow abc \le \frac{t^3}{27}$

Khi đó: $\frac{9}{a+b+c}-\frac{1}{abc} \le \frac{9}{t}-\frac{27}{t^3}$.

Vậy chỉ cần chứng minh BĐT: $\frac{9}{t}-\frac{27}{t^3} \le 2 \Leftrightarrow \frac{27}{t^3}+2 \ge \frac{9}{t}$

Thậy vậy

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương ta có: $\frac{27}{t^3}+2 = \frac{27}{t^3}+1+1 \ge 3.\sqrt[3]{\frac{27}{t^3}.1.1} = \frac{9}{t}$

Từ đó suy ra BĐT đã cho được chứng minh.

★**Thí dụ 11.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A, biết :

$$A=\left(x-1\right)^4+\left(x-3\right)^4+6\left(x-1\right)^2\left(x-3\right)^2$$

(ĐTTS lớp 10 TP Hà Nội 2008)

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\left(x-1\right)\left(x-3\right)$, Ta có

$\left(x-1\right)^2+\left(x-3\right)^2=\left(x-1-x+3\right)^2+2\left(x-1\right)\left(x-3\right)=4+2t$

Mặt khác:

$\left(x-1\right)^4+\left(x-3\right)^4=\left[\left(x-1\right)^2+\left(x-3\right)^2\right]^2-2\left(x-1\right)^2.\left(x-3\right)^2=\left(4+2t\right)^2-2t^2$

$\Rightarrow \left(x-1\right)^4+\left(x-3\right)^4=2t^2+16t+16$. Do đó $A=8t^2+16t+16=8\left(t+1\right)^2+8 \ge 8$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=-1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x-3\right)=-1 \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Vậy $\min A=8$ khi $x=2$

★**Thí dụ 12.** Cho số thực x thỏa mãn $x^2+\left(3-x\right)^2 \ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^4 + (3-x)^4 + 6x^2(3-x)^2$$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Toán, ĐHKHTN-2003)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2 + (3-x)^2 \Rightarrow t \ge 5$

Mặt khác:

$$t = x^2 + (3-x)^2 = (x+3-x)^2 - 2x(3-x) = 9 - 2x(3-x) \Rightarrow x(3-x) = \frac{9-t}{2}$$

Do đó

$$P = \left[x^2 + (3-x)^2\right]^2 + 4x^2(3-x)^2 = t^2 + 4.\left(\frac{9-t}{2}\right)^2 = 2t^2 - 18t + 81 = 2\left(t - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$$

Theo trên $t \ge 5 \Rightarrow t - \frac{9}{2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow P \ge 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{81}{2} = 41$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 5 \Leftrightarrow x^2 + (x-3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$

★**Thí dụ 13.** Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $a + 2b + c \ge 4(1-a)(1-b)(1-c)$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hồ Chí Minh năm 1988-1989)

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} 1-a = x \\ 1-b = y \\ 1-c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1-x \\ b = 1-y \\ c = 1-z \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 3-(a+b+c) = 2 \,\&\, x, y, z \le 1$ nên bất đẳng thức tương đương: $(1-x) + 2(1-y) + (1-z) \ge 4xyz \Leftrightarrow x + 2y + z + 4xyz \le 4$

Do bất đẳng thức đối xứng với x và z nên ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi x = z, nên ta nghĩ đến đánh giá như sau:

$$4xyz = y.4xz \le y(x+z)^2 \Rightarrow x + 2y + z + 4xyz \le x + 2y + z + y(x+z)^2$$

Sử dụng điều kiện $x+y+z=2$ để quy về bất đẳng thức một biến y:

$$x + 2y + z + y(x+z)^2 = 2 + y + y(2-y)^2 = 2 + y + y^3 - 4y^2 + 4y = y^3 - 4y^2 + 5y + 2$$

Do đó bây giờ chỉ cần chứng minh:

$$y^3 - 4y^2 + 5y + 2 \le 4 \Leftrightarrow y^3 - 4y^2 + 5y - 2 \le 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y-2) \le 0 \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng do $x, y, z \le 1$ vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x=z=\frac{1}{2}, y=1 \Leftrightarrow a=c=\frac{1}{2}, \mathrm{b}=0.$

Dạng 5.

1) Nếu bài toán cho điều kiện $x, y, z>0$ và $x+y+z+2=xyz$, ta biến đổi:

$$\begin{aligned}
& xyz=x+y+z+2 \\
\Leftrightarrow\ & xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=(xy+yz+zx)+2(x+y+z)+3 \\
\Leftrightarrow\ & (xy+x+y+1)(z+1)=(xy+x+y+1)+(yz+y+z+1)+(zx+z+x+1) \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(y+1)(z+1)=(x+1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x+1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1
\end{aligned}$$

Sau đó đặt: $a=\frac{1}{x+1}, b=\frac{1}{y+1}, c=\frac{1}{z=1}$.

Khi đó $a+b+c=1$ và $x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}; y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b}; \mathrm{z}=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{c}$.

2) Nếu đổi $(a, b, c) \rightarrow\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$ ta có: $abc=a+b+c+2$ tương đương với $ab+bc+ca+2abc=1$. Vì vậy khi gặp giả thiết $ab+bc+ca+2abc=1$ ta có thể đặt $a=\frac{x}{y+z}; b=\frac{y}{z+x}; c=\frac{z}{x+y}$.

3) Nếu $a, b, c>0$ và $ab+bc+ca+abc=4$ ta biến đổi

$$\begin{aligned}
& ab+bc+ca+abc=4 \\
\Leftrightarrow\ & abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8=12+ab+bc+ca+4(a+b+c) \\
\Leftrightarrow\ & (a+2)(b+2)(c+2)=(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2) \\
\Leftrightarrow\ & 1=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}=2 \\
\Leftrightarrow\ & 3-\left(\frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}\right)=1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1
\end{aligned}$$

Sau đó đặt $x=\frac{a}{a+2}; \mathrm{y}=\frac{b}{b+2}; \mathrm{z}=\frac{c}{c+2}$.

Khi đó $x+y+z=1$ và $\frac{1}{x}=\frac{a+2}{a}=1+\frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{x}-1=\frac{y+z}{x} \Rightarrow a=\frac{2x}{y+z}$.

Tương tự: $b=\frac{2y}{z+x}, \mathrm{c}=\frac{2z}{x+y}$.

4) Nếu đổi $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$ ta có: $ab+bc+ca+abc=4$ tương đương với $a+b+c+1=4abc$. Vì vậy khi gặp giả thiết $a+b+c+1=4abc$ ta có thể đặt $a=\frac{y+z}{2x};b=\frac{z+x}{2y};c=\frac{x+y}{2z}$.

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng: $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$ab+bc+ca+abc=4$$
$$\Leftrightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8=12+ab+bc+ca+4(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2)=(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)$$
$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}=2$$
$$\Leftrightarrow 3-\left(\frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1$$

Sau đó đặt $x=\frac{a}{a+2};\mathrm{y}=\frac{b}{b+2};\mathrm{z}=\frac{c}{c+2}$.

Khi đó $x+y+z=1$ và $\frac{1}{x}=\frac{a+2}{a}=1+\frac{2}{a}\Rightarrow\frac{2}{a}=\frac{1}{x}-1=\frac{y+z}{x}\Rightarrow a=\frac{2x}{y+z}$.

Tương tự: $b=\frac{2y}{z+x},\mathrm{c}=\frac{2z}{x+y}$.

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sqrt{\frac{2x}{y+z}.\frac{2y}{x+z}}+\sqrt{\frac{2y}{z+x}.\frac{2z}{x+y}}+\sqrt{\frac{2z}{x+y}.\frac{2x}{y+z}}\le 3$$
$$\Leftrightarrow 2.\sqrt{\frac{y}{y+z}.\frac{x}{x+z}}+2.\sqrt{\frac{z}{z+x}.\frac{x}{x+y}}+2.\sqrt{\frac{x}{x+y}.\frac{z}{y+z}}\le 3$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$2.\sqrt{\frac{y}{y+z}.\frac{z}{x+z}}\le\frac{y}{y+z}+\frac{x}{x+z}$$

Tương tự: $2.\sqrt{\frac{z}{z+x}.\frac{y}{x+y}}\le\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}$; $2.\sqrt{\frac{x}{x+y}.\frac{z}{y+z}}\le\frac{x}{x+y}+\frac{z}{y+z}$

Cộng theo vế ta được:

$$2.\sqrt{\frac{y}{y+z}.\frac{x}{x+z}}+2.\sqrt{\frac{z}{z+x}.\frac{x}{x+y}}+2.\sqrt{\frac{x}{x+y}.\frac{z}{y+z}}\le\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\right)+\left(\frac{y}{y+z}+\frac{z}{y+z}\right)+\left(\frac{z}{x+z}+\frac{x}{x+z}\right)=3$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ hay $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 2.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 4(x+y+z)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned}&xy+yz+zx+2xyz=1\\ \Leftrightarrow\ &3xyz+2(xy+yz+zx)+(x+y+z)=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1\\ \Leftrightarrow\ &x(y+1)(z+1)+y(x+1)(z+1)+z(x+1)(y+1)=(x+1)(y+1)(z+1)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=1\end{aligned}$$

Đặt : $a=\frac{x}{x+1}; b=\frac{y}{y+1}; c=\frac{z}{z+1}\Rightarrow a+b+c=1.$

Ta có: $a=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow x=\frac{a}{b+c}$

Tương tự: $y=\frac{b}{a+c}; z=\frac{c}{a+b}.$

Do đó: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 4(x+y+z)\Leftrightarrow\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$

Ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\ge\frac{4}{m+n}\ \forall m,n>0\quad(*)$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{a}{b+c}\right)\text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hay $x=y=z=\frac{1}{2}$.

★**Thí dụ 3.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z+2=xyz$. Chứng minh rằng: $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\le x+y+z+6.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $xyz = x + y + z + 2$

$\Leftrightarrow xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = (xy + yz + zx) + 2(x + y + z) + 3$

$\Leftrightarrow (xy + x + y + 1)(z + 1) = (xy + x + y + 1) + (yz + y + z + 1) + (zx + z + x + 1)$

$\Leftrightarrow (x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x + 1)(y + 1) + (y + 1)(z + 1) + (z + 1)(x + 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 1$

Sau đó đặt: $a = \dfrac{1}{x+1}, b = \dfrac{1}{y+1}, c = \dfrac{1}{z+1}.$

Khi đó $a + b + c = 1$ và $x = \dfrac{1-a}{a} = \dfrac{b+c}{a}; y = \dfrac{1-b}{b} = \dfrac{c+a}{b}; z = \dfrac{1-c}{c} = \dfrac{a+b}{c}.$

Ta có: $2\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right) \le x + y + z + 6.$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 - (x + y + z) \le x + y + z + 6.$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{2(x + y + z + 3)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{2\left[(x+1) + (y+1) + (z+1)\right]}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{b+c}{a}} + \sqrt{\dfrac{c+a}{b}} + \sqrt{\dfrac{a+b}{c}} \le \sqrt{\left[(b+c) + (c+a) + (a+b)\right]\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)}$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì đây là bất đẳng thức Bunyakovski do đó bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ hay $x = y = z = 2.$

★**Thí dụ 4.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4.$ Chứng minh rằng: $a + b + c \ge ab + bc + ca.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$ab + bc + ca + abc = 4$

$\Leftrightarrow abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 8 = 12 + ab + bc + ca + 4(a + b + c)$

$\Leftrightarrow (a + 2)(b + 2)(c + 2) = (a + 2)(b + 2) + (b + 2)(c + 2) + (c + 2)(a + 2)$

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}=2$$
$$\Leftrightarrow 3-\left(\frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1$$
Sau đó đặt $x=\frac{a}{a+2}; y=\frac{b}{b+2}; z=\frac{c}{c+2}$.

Khi đó $x+y+z=1$ và $\frac{1}{x}=\frac{a+2}{a}=1+\frac{2}{a}\Rightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{x}-1=\frac{y+z}{x}\Rightarrow a=\frac{2x}{y+z}$.

Tương tự: $b=\frac{2y}{z+x}, c=\frac{2z}{x+y}$.

Ta có điều kiện $x+y+z=1$ và ta cần chứng minh

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge \frac{2ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a(c+a)(a+b)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge \frac{2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$\Leftrightarrow a(c+a)(a+b)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)\ge 2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)$$
$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2.$$
$$\Leftrightarrow \left(a^3-a^2b-a^2c+abc\right)+\left(b^3-ab^2-b^2c+abc\right)+\left(c^3-ac^2-bc^2+abc\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

(Đây chính là bất đẳng thức Shur có nhiều cách chứng minh.)

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

Trường hợp 1: nếu 2 trong 3 số bằng nhau thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2: nếu $a>b>c$ ta chia hai vế bất đẳng thức cho $(a-b)(b-c)(c-a)>0$ nên bất đẳng thức tương đương: $\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}+\frac{c}{a-b}>0$ bất đẳng thức trên luôn đúng do

$$\begin{cases} a>b>0 \\ 0<b-c<a-c \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a-b}>0 \\ \frac{a}{b-c}>\frac{b}{a-c} \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$ hoặc hoặc $a=b; c=0$ các hoán vị của nó.

★**Thí dụ 5.** Cho $x, y, z>2$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng: $(x-2)(y-2)(z-2)\le 1$.

(Đề tuyển sinh chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa 2005-2006).

Hướng dẫn giải

Với giả thiết x, y, z đều lớn hơn 2, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn. Hãy xét lời giải sau:

Đặt $x = a+2, y = b+2, z = c+2$ với $a>0, b>0, c>0$. Bài toán quy về chứng minh: $abc \le 1$

với $a>0, b>0, c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1.$

Đến đây đặt tiếp: $m=\frac{a}{a+2}; n=\frac{b}{b+2}; p=\frac{c}{c+2} \Rightarrow m+n+p=1.$

Ta có: $\frac{1}{m}=\frac{a+2}{a}=1+\frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{m}-1=\frac{n+p}{m} \Rightarrow a=\frac{2m}{n+p}.$

Tương tự: $b=\frac{2n}{p+m}, c=\frac{2p}{m+n}.$

Do đó bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{2m}{n+p}.\frac{2n}{p+m}.\frac{2p}{m+n} \le 1 \Leftrightarrow (m+n)(p+m)(n+p) \ge 8mnp.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $(m+n)(p+m)(n+p) \ge 2\sqrt{mn}.2\sqrt{np}.2\sqrt{pm}=8mnp.$

Bài toán được giải quyết xong.

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow m=n=p \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=3.$

Cách khác: Sử dụng ghép đối xứng:

$$\frac{1}{c+2}=1-\frac{1}{a+2}-\frac{1}{b+2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b+2}\right)=\frac{a}{2(a+2)}+\frac{b}{2(b+2)} \ge \sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}}.$$

Tương tự: $\frac{1}{b+2} \ge \sqrt{\frac{ca}{(c+2)(a+2)}}$; $\quad \frac{1}{a+2} \ge \sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}}.$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{1}{(a+2)(b+2)(c+2)} \ge \frac{abc}{(a+2)(b+2)(c+2)} \Rightarrow abc \le 1.$$

★**Thí dụ 6.** Cho a, b, c dương thỏa mãn: $ab+bc+ca+abc=4$

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$

2) Tìm giá trị lớn nhất: $P=\frac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}}+\frac{1}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+4}}+\frac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+4}}$.

(Đề tuyển sinh chuyên Tin, Hà Nội 2019-2020).

Hướng dẫn giải

1) Ta có:

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$$
$$\Leftrightarrow (b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)+(b+2)(a+2)=(a+2)(b+2)(c+2)$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+4(a+b+c)+12=abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8$$
$$\Leftrightarrow 4=abc+ab+bc+ca.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng theo giả thiết, các phép biến đổi là tương đương, do đó đẳng thức đã cho được chứng minh.

2) Với x, y dương ta có bất đẳng thức:

$$2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2 \ (*)$$
$$\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \ (**)$$

Thật vậy:

$(*)\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng)

$(**)\Leftrightarrow \frac{x+y}{4xy}\ge\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Các bất đẳng thức (*), (**) xảy ra dấu "=" khi x = y.

Lần lượt áp dụng (*) và (**) ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}}\le\frac{1}{a+b+4}=\frac{1}{(a+2)+(b+2)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+4}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right);\quad \frac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+4}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+2}+\frac{1}{a+2}\right);$$

Cộng theo vế ta được:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}.$$

Dâu "=" xảy ra khi a = b = c

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z+2=xyz$. *Chứng minh rằng:*

$a)\, xy+yz+zx \ge 2(x+y+z)$ $\qquad$ $b)\, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \frac{3}{2}\sqrt{xyz}.$

2) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z+2xyz=1$. *Chứng minh rằng:*

$a)\, xyz \le \frac{1}{8}$ $\qquad$ $b)\, xy+yz+zx \ge \frac{3}{4}.$

3) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c} \le 1$$

4) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b^3+2}+\frac{b}{c^3+2}+\frac{c}{a^3+2} \ge 1$$

5) Cho các số dương a, b, c dương thỏa mãn $abc=a+b+c+2$ *. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$$

6) Cho x, y,z là các số dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$ *. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3 \qquad (1)$$

7) Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz=\frac{1}{2}$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)} \ge xy+yz+zx.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào:

8) Cho x, y, z là số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng: $x+2xy+4xyz \le 2$

CHỦ ĐỀ 20 CỰC TRỊ BIỂU THỨC CÓ DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. Kiến thức cần nhớ

● Định nghĩa: $|A| = A$ nếu $A \geq 0$ và $|A| = -A$ nếu $A < 0$.

● Tính chất:

- Với mọi $A \in R$ thì $|A| \geq 0, |A| \geq A, |A| \geq -A$.

- Với mọi $x, y \in R$ ta có $|x+y| \leq |x| + |y|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x, y cùng dấu, tức là $xy \geq 0$.

- Với mọi $x, y \in R$ ta có $|x-y| \geq |x| - |y|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y(x-y) \geq 0$. cùng dấu, tức là $xy \geq 0$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Đặt ẩn phụ dựa vào giá trị của biến khi dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra.

★Thí dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = |x-2020| + |x-2021|$;

b) $B = |x-3| + |x+5| + |x-7|$;

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng tính chất 3 và 6, ta có

$$A = |x-2020| + |x-2021| = |x-2020| + |2021-x| \geq |x-2020+2021-x| = 1.$$

Từ đó $\min A = 1$ khi $(x-2020)(x-2021) \geq 0$ hay $2020 \leq x \leq 2021$.

b) $B = |x-3| + |x+5| + |x-7| = (|x+5| + |x-7|) + |x-3| = (|x+5| + |7-x|) + |x-3|$.

Áp dụng bất đẳng thức $|x+y| \leq |x| + |y|$ ta có: $|x+5| + |7-x| \geq |x+5+7-x| = 12$ đẳng thức xảy ra khi $-5 \leq x \leq 7$.

$|x-3| \geq 0$ đẳng thức xảy ra khi $x = 3$.

Vậy $\min B = 2$ khi $x = 3$.

★Thí dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = |5x+3| + |2x-3| - x + 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $D=|5x+3|+|2x-3|-x+1=2\left|x+\dfrac{3}{5}\right|+3\left|x+\dfrac{3}{5}\right|+|2x-3|-x+1.$

Mặt khác:

$2\left|x+\dfrac{3}{5}\right|\ge 0$ đẳng thức xảy ra khi $x=-\dfrac{3}{5}$;

$3\left|x+\dfrac{3}{5}\right|\ge 3\left(x+\dfrac{3}{5}\right)$, đẳng thức xảy ra khi $x\ge -\dfrac{3}{5}$;

$|2x-3|=|3-2x|\ge 3-2x$; đẳng thức xảy ra khi $x\le \dfrac{2}{3}$;

Do đó: $D=2\left|x+\dfrac{3}{5}\right|+3\left|x+\dfrac{3}{5}\right|+|3-2x|-x+1\ge 0+3\left(x+\dfrac{3}{5}\right)+3-2x-x+1=\dfrac{29}{5}.$

Vậy $\min D=\dfrac{29}{5}$ khi $x=-\dfrac{3}{5}$.

★**Thí dụ 3.** Cho số thực x. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}.$$

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh 2003-2004)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$A=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=\sqrt{(x-2)-2\sqrt{x-2}+1}+\sqrt{(x-2)-6\sqrt{x-2}+9}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-3\right)^2}=\left|\sqrt{x-2}-1\right|+\left|\sqrt{x-2}-3\right|=\left|\sqrt{x-2}-1\right|+\left|3-\sqrt{x-2}\right|$$

Áp dụng bất đẳng thức $|x+y|\le|x|+|y|$ ta có:

$$A=\left|\sqrt{x-2}-1\right|+\left|3-\sqrt{x-2}\right|\ge\sqrt{x-2}-1+3-\sqrt{x-2}=2.$$

$A=2$ khi và chỉ khi: $\begin{cases}\sqrt{x-2}-1\ge 0\\ 3-\sqrt{x-2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le\sqrt{x-2}\le 3\Leftrightarrow 3\le x\le 11.$

★**Thí dụ 4.** Cho số thực x. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\sqrt{x-4+2\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}$ với $x\ge 5$;

b) $A=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+5\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ với $x\ge 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$A=\sqrt{x-4+2\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=\sqrt{(x-5)+2\sqrt{x-5}+1}+\sqrt{(x-5)-4\sqrt{x-5}+4}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-5}-2\right)^2}=\sqrt{x-5}+1+\left|\sqrt{x-5}-2\right|=\sqrt{x-5}+1+\left|2-\sqrt{x-5}\right|$$
$$\ge \sqrt{x-5}+1+2-\sqrt{x-5}$$
$$=3.$$

A = 3 khi và chỉ khi $2-\sqrt{x-5}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x-5}\le 2\Leftrightarrow 5\le x\le 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3 khi $5\le x\le 9$.

b) Ta có:

$$A=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+5\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$
$$=\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}+5\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+5\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}$$
$$=\left|\sqrt{x-1}-1\right|+5\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|$$
$$\ge\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|3-\sqrt{x-1}\right|$$
$$\ge\sqrt{x-1}-1+3-\sqrt{x-1}$$
$$=2$$

A = 2 khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{x-1}-1\ge 0\\ \sqrt{x-1}-2=0\\ 3-\sqrt{x-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $x=5$.

★**Thí dụ 5.** Cho số thực x, y, z thỏa mãn $0\le x,y,z\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\sqrt{x^2+y^2-2xy}+\sqrt{y^2+z(z-2y)}+\sqrt{z(z-2x)+x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(y-z)^2}+\sqrt{(z-x)^2}=|x-y|+|y-z|+|z-x|$.

Không mất tính tổng quát giả sử: $0\le z\le y\le x\le 3$. Khi đó:

$A=x-y+y-z+x-z=2(x-z)$.

Do $0 \le z \le x \le 3$ nên $2x \le 6, -2z \le 0 \Rightarrow 2x - 2z \le 6 \Rightarrow A \le 6$.

$A = 6$ khi và chỉ khi $x = 3, z = 0$ và y tùy ý thỏa mãn $0 \le y \le 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 6 đạt được khi một số bằng 3, một số bằng 0 và một số nhận giá trị từ 0 đến 3.

★Thí dụ 6. Cho số thực a, b, c thỏa mãn $0 \le a, b, c \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2} + 2\sqrt{b^2 - 2bc + c^2} + \sqrt{4c^2 - 12ca + 9a^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \sqrt{(2a-3b)^2} + 2\sqrt{(b-c)^2} + \sqrt{(2c-3a)^2} = |2a-3b| + 2|b-c| + |2c-3a|$.

Sử dụng tính chất $|A| \ge -A$, ta được: $|2a-3b| \ge 3b - 2a$, $|b-c| \ge c - b$, $|2a-3c| \ge 3c - 2a$.

Do đó: $A \ge (3b-2a) + 2(c-b) + (3a-2c) = a + b \ge 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 3b - 2a \ge 0 \\ c - b \ge 0 \\ 3a - 2c \ge 0 \\ a = b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ 1 \le c \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2, đạt được khi $a = b = 1$ và c là một số thực bất kì thuộc đoạn $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

★Thí dụ 7. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3|$.

(Chuyên Bắc Giang năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất $|a - b| \le |a| + |b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \le 0$.

Khi đó $M \le 2\left(|x|^3 + |y|^3 + |z|^3\right)$

Mặt khác $x^2 + y^2 + z^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le 8 \\ y^2 \le 8 \\ z^2 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 2\sqrt{2} \\ |y| \le 2\sqrt{2} \\ |z| \le 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3| \le 2\sqrt{2}x^2 \\ |y^3| \le 2\sqrt{2}y^2 \\ |z^3| \le 2\sqrt{2}z^2 \end{cases}$

Vậy $M \le 2\left(|x|^3 + |y|^3 + |z|^3\right) \le 4\sqrt{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 32\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z)=\left(2\sqrt{2};0;0\right)$ hoặc $(x;y;z)=\left(-2\sqrt{2};0;0\right)$ và các hoán vị của nó. Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $32\sqrt{2}$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$A=|3x-1|+|3x+4|$; $B=|2x+5|+2|x+3|$

$C=|x-1|+|x-2|+...+|x-2010|$;; $D=|x^2+x+16|+|x^2+x-6|$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$A=|x+4|+2|x+5|+|x+6|$; $B=|x+18|+12|23x+10|+|x-5|$

$C=|x+1|+|x+2|+...+|x+2011|$; $D=|x|+|2x+1|+|3x+2|+...+|2011x+2010|$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$A=|2x-y|+2|2x-1|+|y+5|$

$B=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2+2x+1}$

$C=\sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}$

$D=\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+12-8\sqrt{x-4}}$.

4) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{a^2-4ab+4b^2}+\sqrt{b^2-2bc+c^2}+\sqrt{c^2-6ac+9c^2}$.

4) Cho các số thực a, b thỏa mãn $(a^2-1)(b^2-1)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|1+ab|+|a+b|$.

4) Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $|a-1|+|b-1|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|a+b-1|$

CHỦ ĐỀ 21

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH (UCT)

A. Kiến thức cần nhớ

Sử dụng các biểu thức phụ chứa các hệ số chưa xác định để giải bài toán dễ dàng hơn. Biểu thức phụ không có dạng cố định nào cả.

Dấu hiệu để sử dụng phương pháp hệ số bất định (UCT) đó là khi gặp những bài toán khó, các bài toán các biến có tính chất đối xứng.

*** Phương pháp chung:**

+ Bước 1: Dự đoán điểm rơi (để xác định hệ số bất định được dễ dàng hơn).

+ Bước 2: Tìm biểu thức phụ (**Lưu ý:** Bậc của biểu thức phụ phải bằng bậc của hạng tử trong điều kiện đã cho ban đầu của bài toán) và chứng minh bất đẳng thức phụ.

+ Bước 3: Áp dụng bất đẳng thức phụ vào chứng minh bài toán.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c lớn hơn 0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=2(a+b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Phân tích:

Dự đoán điểm rơi: a = b = c = 1

$$P=2(a+b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$=\left(2a+\frac{1}{a}\right)+\left(2b+\frac{1}{b}\right)+\left(2c+\frac{1}{c}\right)$$

Tìm biểu thức phụ: Ta dự đoán biểu thức phụ có dạng

$$2x+\frac{1}{x}\ge mx^2+n \qquad (*)$$

Do đó ta có:

$$\begin{cases} 2a+\dfrac{1}{a}\ge ma^2+n \\ 2b+\dfrac{1}{b}\ge mb^2+n \\ 2c+\dfrac{1}{c}\ge mc^2+n \end{cases}$$

Cộng 2 vế ta được:

$$P\ge m(a^2+b^2+c^2)+3n=3(m+n)$$

Ở trên ta đã dự đoán điểm rơi a = b = c = 1, nên khi đó P = 9.

Do đó ta có n = 3 – m, thay ngược trở lại vào (*), ta được:

$$\begin{aligned}
&2x+\frac{1}{x}\ge mx^2+3-m \\
&\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x}\ge m(x-1)(x+1)+3 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x}\ge m(x-1)(x+1) \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)}{x}\ge m(x-1)(x+1) \\
&\Leftrightarrow m\le \frac{2x-1}{x(x+1)}
\end{aligned}$$

Đồng nhất x = 1 vào ta được $m=\dfrac{1}{2}\Rightarrow n=\dfrac{5}{2}$, ta được biểu thức phụ là:

$$2x+\frac{1}{x}\ge\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$$

Hướng dẫn giải

Với mọi $x\in(0;3)$, ta có:

$$\begin{aligned}
&2x+\frac{1}{x}\ge\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2} \\
&\Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2\le 0 \qquad (**) \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)\le 0
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = 1

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Áp dụng bất đẳng thức (**) cho bài toán, ta có:

$$P\ge\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+3.\frac{5}{2}=\frac{1}{2}.3+\frac{15}{2}=\frac{18}{2}=9 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c =1

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\ge 5.$$

Phân tích: Nếu để ý đến dấu đẳng thức xảy ra thì ta nghĩ đến chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{(a-1)(a+1)\left(2a^2-3\right)}{3a^2}\ge 0.$$

Tuy nhiên đánh giá trên không hoàn toàn đúng với số dương a.

Để ý là với cách làm trên ta chưa sử dụng điều kiện $a+b+c=3$.

Như vậy ta sẽ không đi theo lối suy nghĩ đơn giản ban đầu nữa mà sẽ đi tìm hệ số để bất đẳng thức sau đúng $\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge ma+n\ (4)$

Trong đó m, n là các hệ số chưa xác định, thiết lập tương tự với các biến b và c ta được $\frac{1}{b^2}+\frac{2b^2}{3}\ge mb+n\ (5)$; $\frac{1}{c^2}+\frac{2c^2}{3}\ge mc+n\ (6)$

Cộng (4); (5); (6) theo vế ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\ge m(a+b+c)+3n=3(m+n).$$

Như vậy ở đây 2 hệ số m, n phải thỏa mãn điều kiện $3(m+n)=5\Leftrightarrow n=\frac{5}{3}-m.$

Thế vào (4) dẫn đến $\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1)\ (7)$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là m để bất đẳng thức (7) là đúng.

Chú ý đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ nên ta cần xác định m sao cho

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left[\frac{(a+1)\left(2a^2-3\right)}{3a^2}-m\right]\ge 0.$$

Khi cho $a=1$ thì ta có $\frac{(a+1)\left(2a^2-3\right)}{3a^2}=\frac{-2}{3}$ từ đó ta dự đoán rằng $m=\frac{-2}{3}$ để tạo thành đại lượng bình phương $(a-1)^2$ trong biểu thức. Từ đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{7}{3}-\frac{2a}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đã cho được viết lại thành $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2a^2}{3}+\frac{2b^2}{3}+\frac{2c^2}{3}\ge 5.$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau đây $\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge \frac{7}{3}-\frac{2a}{3}$ (1)

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{(a-1)^2\left(2a^2+6a+3\right)^2}{3a^2}\ge 0$ luôn đúng với mọi số dương a.

Tương tự ta có: $\frac{1}{b^2}+\frac{2b^2}{3}\ge \frac{7}{3}-\frac{2b}{3}$ (2); $\frac{1}{c^2}+\frac{2c^2}{3}\ge \frac{7}{3}-\frac{2c}{3}$ (3).

Cộng (1); (2); (3) theo vế ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\ge 7-\frac{2(a+b+c)}{3}=5.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 3.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 27.$$

Hướng dẫn giải

Ta cần tìm hệ số m để bất đẳng thức

$$\frac{4}{a}+5a^2\ge 9+m\left(a^3-1\right)\Leftrightarrow \frac{(a-1)\left(5a^2+5a-4\right)}{a}\ge m(a-1)\left(a^2+a+1\right)$$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Khi cho $a=1$ thì ta có thể dự đoán $m=2.$ Ta sẽ chứng minh rằng khi $m=2$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng.

Thật vậy: $\frac{4}{a}+5a^2\ge 7+2a^3\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2\left(-2a^2+a-4\right)}{a}\ge 0$

Do $a\le \sqrt[3]{3}\Rightarrow -2a^2+a+4\ge 0$. Vậy bất đẳng thức đúng.

Chứng minh tương tự ta được $\frac{4}{b}+5b^2\ge 7+2b^3$; $\frac{4}{b}+5c^2\ge 7+2c^3$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 21+2\left(a^3+b^3+c^3\right)=27$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 4.** Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1$$

Phân tích:

Dự đoán điểm rơi: $a=b=c=1$, khi đó P = 1. Ta có:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}=\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}$$

Dự đoán biểu thức phụ:

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le ma+n$$
$$\Rightarrow P\le m(a+b+c)+3n$$

Thay a = 1 ở trên ta được:

$$P\le 3(m+n)=1\Rightarrow \text{n}=\frac{1}{3}-m$$

Ta có:

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le ma+\frac{1}{3}-m$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2-a+3}-\frac{1}{3}\le m(a-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-(a^2-a+3)}{a^2-a+3}\le m(a-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-a(a-1)}{a^2-a+3}\le m(a-1)$$
$$\Leftrightarrow m\ge \frac{-a}{a^2-a+3}$$

Ta đồng nhất bằng cách thay a = 1 ở trên vào, ta được: $m=-\frac{1}{3}$ và $n=\frac{2}{3}$.

Ta có bất đẳng thức phụ là:

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le -\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}$$

Hướng dẫn giải

Chứng minh bất đẳng thức phụ:

Với $x\in(0;3)$, ta có:

$$\frac{1}{x^2-x+3} \le -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+5x-3 \le 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-3) \le 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Áp dụng vào bài toán ta được:

$$P \le -\frac{1}{3}(a+b+c)+3.\frac{2}{3}=1\,(\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c =1

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng với các số dương a, b, c thì

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2} \le a+b+c \qquad (1)$$

Phân tích: Cấu trúc bài toán này gợi cho ta phương pháp đánh giá đại diện. Bây giờ ta đánh giá thử đại diện $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}$. Ta thấy rằng bậc của tử là 3, bậc của mẫu là 2. Suy ra bậc của cả biểu thức là 1. Do đó ta nghĩ tới việc đánh giá với đa thức bậc 1 có dạng $na+mb$.

Tức là $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} \le na+mb \quad (2)$. Để tìm m,n ta sử dụng phương pháp hệ số bất định. Do vai trò tương tự, ta cũng có: $\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2} \le nb+mc$ và $\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2} \le nc+ma$.

Cộng theo vế ba BĐT đánh giá ở trên ta được:

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2} \le (m+n)(a+b+c) \qquad (3)$$

Nhìn vào BĐT cần chứng minh ta thấy nếu tìm được cặp (n,m) mà thì lời giải thành công.

Thế $m=1-n$ vào (2) ta có $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} \le na+(1-n)b \Leftrightarrow \frac{5-\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\left(\frac{a}{b}\right)+3} \le n.\left(\frac{a}{b}\right)+(1-n) \qquad (4)$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$ BĐT (4) trở thành $\frac{5-t^3}{t+3} \le n.t+1-n \quad (5)$

Do đẳng thức xảy ra khi $a=b$ nên do đó $t=1$ ta phân tích (5) về nhân tử $(t-1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-t-t^3}{t+3} \le n(t-1) \Leftrightarrow \frac{(1-t)(2+t+t^2)}{t+3} \le n(t-1) \Leftrightarrow -\frac{t^2+t+2}{t+3} \le n$$

Cho t = 1 vào ta được $-\frac{t^2+t+2}{t+3}=-1$ nên ta chọn $n=-1\Rightarrow m=2$, ta được biểu thức phụ là:

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le -a+2b.$$

Việc chứng minh BĐT này là đơn giản.

Như vậy, phương pháp hệ số bất định đã mở cho ta con đường đi tìm lời giải cho bài toán trên một cách tự nhiên chứ nhiên không theo kiểu áp đặt giống như kiểu hay gặp ở nhiều cuốn sách:

"Ta sẽ chứng minh $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le -a+2b$".

Hướng dẫn giải

Ta đi chứng minh bất đẳng thức $\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}\le 2a-b.$

Thật vậy:

$$\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}\le 2a-b.\Leftrightarrow 5a^3-b^3\ge a(2a-b)(3a+b)\Leftrightarrow 5a^3-b^3\le a\left(6a^2-ab-b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 5a^3-b^3\le 6a^3-ab(a+b)\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b)-b^2(a-b)\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0 \qquad (*)$$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng với a, b dương nên: $\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}\le 2a-b.$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}\le 2b-c$; $\frac{5c^3-a^3}{ac+3c^2}\le 2c-a$.

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}+\frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}+\frac{5c^3-a^3}{ac+3c^2}\le a+b+c=3.$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 6.** Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$P=\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\ge 7$$

Phân tích:

Dự đoán điểm rơi: $\begin{cases}a=1\\ b,c=0\end{cases}$ và các hoán vị của nó. Khi đó ta dự đoán:

$$\sqrt{5a+4}\ge ma+n$$

Đến đây ta để ý có 2 điểm rơi, ta sẽ thay lần lượt a = 0 và a = 1 vào trên ta được:

$$\begin{cases} n=2 \\ m+n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$$

Ta có bất đẳng thức phụ là $\sqrt{5a+4} \ge a+2$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ: $\sqrt{5a+4} \ge a+2$

Với $a \in [0;1]$, ta có:

$$\begin{aligned} &\sqrt{5a+4} \ge a+2 \\ &\Leftrightarrow 5a+4 \ge a^2+4a+4 \\ &\Leftrightarrow a^2-a \le 0 \\ &\Leftrightarrow a(a-1) \le 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng với $a \in [0;1]$. Do đó:

$$P \ge a+b+c+2+2+2+=7 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = 1; b, c = 0 và các hoán vị của nó.

★**Thí dụ 7.** Chứng minh rằng với các số dương x, y, z thì

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{y^2+yz+2z^2}+\sqrt{z^2+zx+2x^2} \ge 2(x+y+z) \qquad (1)$$

Phân tích: Trong bất đẳng thức (1) các biến được hoán vị vòng quanh và đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$. Do vậy, nên ta chọn được các số n, m để có BĐT:

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2} \ge nx+my \qquad (2)$$

Để tìm m,n ta sử dụng phương pháp hệ số bất định. Do vai trò tương tự, ta cũng có:
$\sqrt{y^2+yz+2z^2} \ge ny+mz$ và $\sqrt{z^2+zx+2x^2} \ge nz+mx.$

Cộng theo vế ba BĐT đánh giá ở trên ta được:

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{y^2+yz+2z^2}+\sqrt{z^2+zx+2x^2} \ge (n+m)(x+y+z) \qquad (1) \qquad (3)$$

Nhìn vào BĐT cần chứng minh ta thấy nếu tìm được cặp (n,m) mà thì lời giải thành công.

Thế $m=2-n$ vào (2) ta có

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2} \ge nx+(2-n)y \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)+2} \ge n.\left(\frac{x}{y}\right)+(2-n) \qquad (4).$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ BĐT (4) trở thành $\sqrt{t^2+t+2} \ge nt.+2-n \quad (5)$

Do đẳng thức xảy ra khi $x = y$ nên do đó $t = 1$ ta phân tích (5) về nhân tử $(t-1)$

$$(5) \Leftrightarrow \left(\sqrt{t^2+t+2}-2\right)-n(t-1)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t+2)}{\sqrt{t^2+t+2}+2}-n(t-1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left[\frac{t+2}{\sqrt{t^2+t+2}+2}-n\right]\ge 0 \Leftrightarrow n\le \frac{t+2}{\sqrt{t^2+t+2}+2}$$

Đồng nhất t = 1 vào ta được $n=\frac{3}{4}\Rightarrow m=\frac{5}{4}$, ta được biểu thức phụ là:

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2}\ge \frac{3x+5y}{4}$$

Tới đây các bạn tự chứng minh.

★**Thí dụ 8.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$ và làm cho các biểu thức của bất đẳng thức luôn xác định. Chứng minh rằng

$\sqrt{a^2+a-1}+\sqrt{b^2+b-1}+\sqrt{c^2+c-1}\le 3$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $a\ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $b\ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $c\ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Ta cần tìm hệ số m để có bất đẳng thức **:** $\sqrt{a^2+a-1}\le 1+m(a-1)$.

Tìm được $m=\frac{3}{2}$, tức là ta phải chứng minh $\sqrt{a^2+a-1}\le \frac{3a-1}{2}\Leftrightarrow (a-1)^2\ge 0$.

Chứng minh tương tự ta có các bất đẳng thức

$$\sqrt{b^2+b-1}\le \frac{3b-1}{2};\ \sqrt{c^2+c-1}\le \frac{3c-1}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a^2+a-1}+\sqrt{b^2+b-1}+\sqrt{c^2+c-1}\le 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

★**Thí dụ 9.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+3ca+a^2}\ge \frac{3}{5}.$$

Hướng dẫn giải

Ta đi tìm hệ số m,n sao cho bất đẳng thức $\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2} \ge ma+nb$ đúng với $m+n=\frac{1}{5} \Rightarrow n=\frac{1}{5}-m$. Bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{\frac{a^3}{b^3}}{\frac{a^2}{b^2}+3.\frac{a}{b}+1} \ge \frac{ma}{b}+\left(\frac{1}{5}-m\right) \Leftrightarrow \frac{y^3}{y^2+3y+1} \ge my+\left(\frac{1}{5}-m\right).$$

Ta cần xác định m sao cho $\frac{y^3}{y^2+3y+1} \ge m.(y-1)+\frac{1}{5} \Leftrightarrow (y-1)\left[\frac{5y^2+4y+1}{5(y^2+3y+1)}-m\right] \ge 0$.

Cho $y=1$ ta được $\frac{5y^2+4y+1}{5(y^2+3y+1)}=\frac{2}{5} \Rightarrow m=\frac{2}{5} \Rightarrow n=\frac{-1}{5}$.

Từ đó dễ dàng chứng minh các bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2} \ge \frac{2a}{5}-\frac{b}{5}(1);\ \frac{b^3}{b^2+3bc+c^2} \ge \frac{2b}{5}-\frac{c}{5}(2);\ \frac{c^3}{c^2+3ac+a^2} \ge \frac{2c}{5}-\frac{a}{5}(3).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức ta có điều chứng minh.

★**Thí dụ 10.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \ge 2.$$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $2=2\sqrt[3]{abc} \le \frac{2(a+b+c)}{3}$. Do đó ta nghĩ đến việc chứng minh

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{2(a+b+c)}{3}$$

Ta đi tìm hệ số m,n sao cho bất đẳng thức $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \ge ma+nb$ đúng với $m+n=\frac{2}{3} \Rightarrow n=\frac{2}{3}-m$. Tìm được $m=n=\frac{1}{3}$.

Ta phải chứng minh: $\frac{y^3+1}{y^2+y+1} \ge \frac{1}{3}(y-1)+\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2(y+1)}{3(y^2+y+1)} \ge 0$ BĐT đúng.

Suy ra: $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \ge \frac{a}{3}+\frac{b}{3}$ (1); $\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} \ge \frac{b}{3}+\frac{c}{3}$ (2); $\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{c}{3}+\frac{a}{3}$ (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}\ge 2\sqrt[3]{abc}=2.$$

★**Thí dụ 11.** Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$.

Chứng minh rằng $2\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge 2+\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2+ab+ac+ad+bc+bd+cd}$.

Giải.

Từ $a^2+b^2+c^2+d^2=4\Leftrightarrow (a+b+c+d)^2=2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

$$\Rightarrow a+b+c+d=\sqrt{2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge 2+\frac{3}{2}(a+b+c+d)$$

Ta cần tìm hệ số m để có bất đẳng thức

$$2a^3\ge\frac{3a+1}{2}+m\left(a^2-1\right)\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)\left[\frac{(2a+1)^2}{2(a+1)}-m\right]\ge 0$$

Cho $a=1$ tìm được $m=\frac{9}{4}$.

Mặt khác $2a^3\ge\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\left(a^2-1\right)\Leftrightarrow(a-1)\left(8a^2-a-7\right)\ge 0\Leftrightarrow(a-1)^2\left(8a^2+7\right)\ge 0$.

Tương tự ta có $2b^3\ge\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\left(b^2-1\right);\ 2c^3\ge\frac{3}{2}c+\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\left(c^2-1\right)$.

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được $2\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge 2+\frac{3}{2}(a+b+c+d)$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$.

★**Thí dụ 12.** Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}$$

* **Phân tích:** Ở 3 ví dụ trên ta nhận thấy các bài toán đều có điều kiện ban đầu, điều đó giúp ta dự đoán được điểm rơi một cách chính xác. Nhưng ở bài toán này không cho điều kiện rằng buộc giữa các biến nên rất khó dự đoán điểm rơi. Để giải quyết được vấn đề này chúng ta cùng làm quen với **"Kỹ thuật chuẩn hóa"** trong chứng minh bất đẳng thức. Nhưng hẳn sẽ tồn tại câu hỏi: Thế nào là chuẩn hóa? Chuẩn hóa đơn giản chỉ là cách ta đặt ẩn phụ và từ đó làm xuất hiện điều kiện rằng buộc giữa các biến mới.

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

* **Dấu hiệu chuẩn hóa:** Bậc của các hạng tử phải bằng nhau

* **Cách đặt ẩn mới:**

Ta có thể chia các hạng tử cho: $abc, a+b+c, (a+b+c)^2, a^2+b^2+c^2, ab+bc+ca$

Việc chia làm sao để xuất hiện ẩn mới và kèm theo điều kiện thích hợp để dễ dàng sử dụng phương pháp hệ số bất định UCT..

Trở lại bài toán: Ta nhận thấy các hạng tử có tử và mẫu đều là bậc 2, do đó ta nghĩ đến việc chia cả tử và mẫu cho $(a+b+c)^2$, khi đó ta có:

$$\frac{\frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2}}{\frac{a^2+(b+c)^2}{(a+b+c)^2}}+\frac{\frac{b(c+a)}{(a+b+c)^2}}{\frac{b^2+(c+a)^2}{(a+b+c)^2}}+\frac{\frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2}}{\frac{a^2+(b+c)^2}{(a+b+c)^2}}\le\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{a}{a+b+c}.\frac{b+c}{a+b+c}}{\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^2}+\frac{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c+a}{a+b+c}}{\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{a+b+c}\right)^2}+\frac{\frac{c}{a+b+c}.\frac{a+b}{a+b+c}}{\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^2}\le\frac{6}{5}$$

Đặt: $\begin{cases} x=\frac{a}{a+b+c} \\ y=\frac{b}{a+b+c} \\ z=\frac{c}{a+b+c}\end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$P=\frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y(z+x)}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z(x+y)}{z^2+(x+y)^2}\le\frac{6}{5} \text{ với } x+y+z=1$$

* **Lưu ý:** Việc chuẩn hóa không bó buộc trong một phạm vi nào cả. Giả sử vẫn đặt ẩn phụ như trên nhưng ta có thể chuẩn hóa x + y + z = 3

Đến đây ta hoàn toàn sử dụng được phương pháp hệ số bất định UCT. Ta có:

$$P=\frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y(z+x)}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z(x+y)}{z^2+(x+y)^2}\le\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}+\frac{y(3-y)}{y^2+(3-y)^2}+\frac{z(3-z)}{z^2+(3-z)^2}\le\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9}+\frac{y(3-y)}{y^2-6y+9}+\frac{z(3-z)}{2z^2-6z+9}\le\frac{6}{5}$$

* **Nháp:**

Dự đoán điểm rơi: x = y = z = 1, khi đó $P=\frac{6}{5}$.

Dự đoán biểu thức phụ:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le mt+n \qquad (*)$$

Thay t = 1 vào ta được:

$$\Rightarrow \frac{6}{5} = m.3+3n \Leftrightarrow \frac{6}{5} = 3(m+n) \Rightarrow n = \frac{2}{5} - m$$

Thay vào biểu thức (*) ở trên ta được:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le mt + \frac{2}{5} - m$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9t^2+27t-18}{5(2t^2-6t+9)} \le m(t-1)$$

$$\Rightarrow m \ge \frac{-9(t-2)}{5(2t^2-6t+9)}$$

Ta đồng nhất t = 1, suy ra $m = \frac{9}{25}$ và $n = \frac{1}{25}$.

Khi đó ta có bất đẳng thức phụ:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le \frac{9}{25}t + \frac{1}{25}$$

Hướng dẫn giải

Chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le \frac{9}{25}t + \frac{1}{25}$$

Với $t \in (0;3)$, ta có:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le \frac{9}{25}t + \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow 18t^3 - 27t^2 + 9 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 9(t-1)^2(2t+1) \ge 0$$

Với $t \in (0;3)$ bất đẳng thức cuối luôn đúng.

Áp dụng vào bài toán, ta có:

$$P = \frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9} + \frac{y(3-y)}{y^2-6y+9} + \frac{z(3-z)}{2z^2-6z+9} \le \frac{9}{25}(x+y+z) - 3.\frac{1}{27} = \frac{6}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1 (đpcm)

★**Thí dụ 13.** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \ge \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}.$$

Hướng dẫn giải

Chuẩn hóa bất đẳng thức trên ta chọn $a+b+c=3$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\ge a^2+b^2+c^2$$

Cần xác định m sao cho : $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\ge a^2+m(a-1)$. Tìm được $m=-6$

Khi đó: $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\ge a^2-6(a-1)\Leftrightarrow\frac{a(6-a)(a-1)^2}{a^2-2a+3}\ge 0$ đúng với $0<a<3$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}\ge b^2-6(b-1);\ \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\ge c^2-6(c-1)$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có điều cần chứng minh.

★**Thí dụ 14.** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Hướng dẫn giải

Chuẩn hóa bất đẳng thức trên ta chọn $a+b+c=3$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với : $\frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2}\ge\frac{3}{4}$.

Làm tương tự như các bài toán trên ta có

$$\frac{a}{(3-a)^2}\ge\frac{2a-1}{4};\ \frac{b}{(3-b)^2}\ge\frac{2b-1}{4};\ \frac{c}{(3-c)^2}\ge\frac{2c-1}{4}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được $\frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2}\ge\frac{3}{4}$.

★**Thí dụ 15.** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\ge\frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Chuẩn hóa bất đẳng thức trên ta chọn $a+b+c=3$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với : $\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\geq\frac{1}{2}$

Làm tương tự như các bài toán trên ta có

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\geq\frac{8a-7}{6};\ \frac{(4-3b)^2}{2b^2+(3-b)^2}\geq\frac{8b-7}{6};\ \frac{(4-3c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\geq\frac{8c-7}{6}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\geq\frac{1}{2}$$

★**Thí dụ 16. (Olypic 30-4 năm 2006)** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}.$$

Hướng dẫn giải

Chuẩn hóa bất đẳng thức trên ta chọn $a+b+c=3$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với : $\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2}+\frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2}+\frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2}\leq\frac{6}{5}$.

Làm tương tự như các bài toán trên ta có

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2}\geq\frac{21+9a}{25};\ \frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2}\geq\frac{21+9b}{25};\ \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2}\geq\frac{21+9c}{25}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2}+\frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2}+\frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2}\leq\frac{6}{5}.$$

★**Thí dụ 17.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)..$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức là thuần nhất, ta giả sử: $a+b+c=1$. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a,b,c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\left(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right)\le 9 \Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le 9,$$

Với $f(x)=\frac{4}{1-x}-\frac{1}{x}=\frac{5x-1}{x-x^2}$, $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Biểu thức phụ: $\frac{5a-1}{a-a^2}\le ma+n\Rightarrow 9=(m+3n)\Rightarrow m=3(3-n)$

Dự đoán BĐT cần chứng minh trở thành đẳng thức khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ta biến đổi dồn về nhân tử $(3a-1)$. Do đó"

$$\frac{5a-1}{a-a^2}\le 3(3-n)a+n\Leftrightarrow\frac{5a-1}{a-a^2}\le 9a-3na+n\Leftrightarrow\frac{9a^3-9a^2+5a-1}{a-a^2}\le n(-3a+1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{9a^3-3a^2-6a^2+2a+3a-1}{a-a^2}\le n(-3a+1)\Leftrightarrow\frac{(3a-1)(3a^2-2a+1)}{a-a^2}\le n(-3a+1)\Leftrightarrow\frac{3a^2-2a+1}{a^2-a}\le n.$$

Ta đồng nhất $a=\frac{1}{3}$, suy ra $n=-3$ và $m=18$.

Vậy ta có bất đẳng thức phụ: $\frac{5a-1}{a-a^2}\le 18a-3$.

Thật vậy: $f(x)=\frac{5x-1}{x-x^2}\le 18x-3\Leftrightarrow(3x-1)^2(2x-1)\le 0\quad\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ luôn đúng. Do đó:

$f(a)+f(b)+f(c)\le 18(a+b+c)-9=9.$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{4(a+b+c)}{3}\ge 7.$$

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

3) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1.$$

5) Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 2.$$

6) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(a+c)^3}+\frac{(2c+a+b)^3}{4c^3+(a+b)^3}\le \frac{12}{a+b+c}.$$

7) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c+2b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN
BẤT ĐẲNG THỨC HAY THCS

Câu 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\ge 2 \text{ với } a,b,c>0$$

Hướng dẫn giải

Gọi vế trái là A. Ta có:

$$\sqrt{\frac{2c}{a+b}}=\frac{2c}{\sqrt{2c(a+b)}}\ge\frac{2c}{\frac{2c+a+b}{2}}=\frac{4c}{2c+a+b} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với $x,y>0$ ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{4(a+b+c)}{2c+a+b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A+2\ge\frac{4(a+b+c)+4c}{2c+a+b}=4\Rightarrow A\ge 2$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 2. a) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $(a+b)(a+c)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A=abc(a+b+c)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x}{y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}$ với $x>0,\ y>0$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$(a+b)(a+c)=8\Rightarrow a(a+c)+ab+bc=8$

$\Rightarrow a(a+b+c)+bc=8.(1)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sqrt{A}=\sqrt{a(a+b+c).bc}\le\frac{a(a+b+c)+bc}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$\Rightarrow A\le 16$

$A=16\Leftrightarrow a(a+b+c)=bc=4$

$maxA = 16$ khi, chẳng hạn $\begin{cases} b = c = 2 \\ a + 2 = \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 2 \\ a = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$

b) Ta có $x^2 + y^2 \geq 2$ và x, y dương nên $\frac{1}{y} \geq \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq \frac{2x^2}{x^2 + y^2}$

$$A = \frac{x}{y} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \geq \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi a = b.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ với $1 \leq x \leq 2$ và $1 \leq y \leq 2$

Hướng dẫn giải

Do $1 \leq x \leq 2$ nên $(x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow x + \frac{2}{x} \leq 3$

Tương tự, $y + \frac{2}{y} \leq 3$. Suy ra $(x + y) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \leq 6$ (1)

Ta lại có $(x + y) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \geq 2\sqrt{(x + y)\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right)} = 2\sqrt{2A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2\sqrt{2A} \leq 6 \Rightarrow \sqrt{2A} \leq 3 \Rightarrow 2A \leq 9 \Rightarrow A \leq \frac{9}{2}$

$\max A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 1 \end{array}\right.$

Câu 4. *(Đề thi thử vào 10 THCS Giảng Võ– Hà Nội 2017-2018)*

Tìm GTNN của biểu thức sau: $\mathrm{P} = \mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{x}^2 + \frac{1}{\mathrm{x}}}$ (voi x > 0)

Hướng dẫn giải

Bình phương hai vế ta được $\mathrm{P}^2 - 2\mathrm{Px} + \mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^2 + \frac{1}{\mathrm{x}} \Leftrightarrow 2\mathrm{Px}^2 - \mathrm{xp}^2 + 1 = 0$ (1)

Vì $\mathrm{P} > 0$ nên phương trình (1) có nghiệm khi

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}^4 - 8\mathrm{P} \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{P}^3 - 8) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{P} \geq 2$ (vì $\mathrm{P} > 0$)

Dấu bằng xảy ra khi $\mathrm{x} = \frac{1}{2}$ (các em thay $\mathrm{P} = 2$ vào (1) để tìm x)

Vậy $\min \mathrm{P} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{1}{2}$

Câu 5. *(Đề thi thử vào 10 THCS Lương Thế Vinh Hà Nội 2019-2020)*

Cho a,b là các số dương thỏa mãn $ab=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\left(a+b-2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a+b}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $P=\frac{\left(a+b-2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a+b}=\left(1-\frac{2}{a+b}\right)\left(a^2+b^2\right)$ với $ab=4$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cosi, ta có:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}=4 \qquad (1) \quad \Leftrightarrow -\frac{2}{a+b}\ge\frac{-1}{2}\Leftrightarrow 1-\frac{2}{a+b}\ge\frac{1}{2}$$

$$a^2+b^2\ge 2ab=8 \qquad (2)$$

Do đó: $P\ge\frac{1}{2}.8=4$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở các bất đẳng thức Cosi (1) và (2) đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ a.b=4\end{cases}\Leftrightarrow a=b=2$$

Vậy $P_{min}=4$ $\Leftrightarrow a=b=2$.

Câu 6. *(Trích đề toán học kì 2 quận Hoàng Mai năm 2018-2019)*

Tìm giá trị của m để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

$$F=(2x+y+1)^2+(4x+my+5)^2$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(2x+y+1)^2\ge 0$; $(4x+my+5)^2\ge 0$, suy ra $F\ge 0$

Xét hệ $\begin{cases}2x+y+1=0\\ 4x+my+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y+2=0\\ 4x+my+5=0\end{cases}\Rightarrow(m-2)y+3=0$

+ Nếu $m\ne 2$ thì $m-2\ne 0\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3}{2-m}\\ x=\dfrac{m-5}{4-2m}\end{cases}$ suy ra F có giá trị nhỏ nhất bằng 0

+ Nếu m = 2 thì

$F=(2x+y+1)^2+(4x+2y+5)^2=(2x+y+1)^2+[2(2x+y+1)+3]^2$

Đặt $2x+y+1=z$ thì

$$F=5z^2+12z+9=5\left[\left(z+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{25}\right]=5\left(z+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\ge\frac{9}{5}$$

F nhỏ nhất bằng $\frac{9}{5}$ khi $2x + y + 1 = \frac{-6}{5}$ hay $y = \frac{-11}{5} - 2x$, $x \in R$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là 0 khi $m \neq 0$.

Câu 6. *(Trích đề toán vào 10 Chuyên Quảng Nam năm 2019-2020)*

Cho 3 số dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}} + \sqrt{\frac{yz}{(2y+x)(2z+x)}} + \sqrt{\frac{zx}{(2z+y)(2x+y)}}$$

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được:

$$(2x+z)(2y+z) = (x+x+z)(y+z+y) \geq \left(\sqrt{xy} + \sqrt{zx} + \sqrt{yz}\right)^2$$

Do đó:

$$\sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(2x+z)(2y+z)}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{yz}{(2y+x)(2z+x)}} \leq \frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}$; $\sqrt{\frac{zx}{(2z+y)(2x+y)}} \leq \frac{\sqrt{zx}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được: $P \leq \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}} = 1$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 7. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2, a + b + c = 3$.

Tìm GTLN và GTNN của $P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \\ b^2+c^2 \geq 2bc \\ c^2+a^2 \geq 2ca \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2\right) \geq \frac{1}{2}(2ab+2ac+2bc)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $\text{MinP} = 1$ khi $a = b = c = 1$

Theo đề bài ta có:

$$0 \le a,b,c \le 2 \Rightarrow (a-2)(b-2)(c-2) \le 0$$
$$\Leftrightarrow abc - 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) - 8 \le 0$$
$$\Leftrightarrow abc - 2(ab+ac+bc) + 12 - 8 \le 0$$
$$\Rightarrow 2(ab+ac+bc) \ge 4 + abc \ge 4$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca \ge 2$$
$$\Rightarrow P = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{ab+ac+bc} - 2$$
$$\Leftrightarrow P = \frac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc} - 2 \le \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} abc = 0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b+c=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ a+c=3 \end{cases} \\ \begin{cases} c=0 \\ a+b=3 \end{cases} \\ 0 \le a,b,c \le 2 \end{array} \right.$

Vậy $\text{Max}P = \frac{5}{2}$ khi $abc = 0, a+b+c=3, 0 \le a,b,c \le 2$

Câu 8. *(Trích đề chuyên Bắc Ninh năm 2016-2017)*

Cho a, b, c > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{3a^4+3b^4+c^3+2}{(a+b+c)^3}$

Hướng dẫn giải

Sử dụng AM-GM ta được:

$$3a^4+1 = a^4+a^4+a^4+1 \ge 4\sqrt[4]{a^{12}} = 4a^3; \quad 3b^4+1 = b^4+b^4+b^4+1 \ge 4\sqrt[4]{b^{12}} = 4b^3$$

Do đó:

$$M = \frac{3a^4+3b^4+c^3+2}{(a+b+c)^3} \ge \frac{4a^3+4b^3+c^3}{(a+b+c)^3}$$

Ta dễ dàng chứng minh được BĐT với a, b dương thì: $4(a^3+b^3) \ge (a+b)^3 \quad (*)$

Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow a^3+b^3 \ge ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 0$ (đúng)

Vậy (*) được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b.

Áp dụng (*) ta được:

$$M \ge \frac{4a^3+4b^3+c^3}{(a+b+c)^3} \ge \frac{(a+b)^3+c^3}{(a+b+c)^3} \ge \frac{(a+b+c)^3}{4(a+b+c)^3} = \frac{1}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = 1, c = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{1}{4}$

Chú ý: Bổ đề $4\left(a^3+b^3\right)\ge\left(a+b\right)^3$ rất thường hay được sử dụng trong các bài toán.

Câu 8. *(Trích đề chuyên Nam Định năm 2016-2017)*

Cho hai số a, b không âm thỏa mãn $a+b\le 3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b}\ge\frac{8}{15}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$P=\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+1+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b}=2\left(\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{1+4b}\right)$$

Với a, b, c dương ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (*)

Thậy vậy: $\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}}=4\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Vậy (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng (*) ta được:

$$P=2\left(\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{1+4b}\right)\ge 2.\frac{4}{2+4a+1+4b}=\frac{8}{3+4\left(a+b\right)}\ge\frac{8}{3+4.3}=\frac{8}{15}\text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a+b=3\\2+4a=1+4b\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{11}{8};b=\frac{13}{8}$

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{x+3\sqrt{x-2}}{x+4\sqrt{x-2}+1}.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x\ge 2.$ $A=\frac{x+3\sqrt{x-2}}{x+4\sqrt{x-2}+1}=\frac{x-2+3\sqrt{x-2}+2}{x-2+4\sqrt{x-2}+3}=\frac{\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}$

$=1-\frac{1}{\sqrt{x-2}+3}$. Vì $\sqrt{x-2}\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x-2}+3\ge 3\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{x-2}+3}\ge\frac{2}{3}\Rightarrow$ $\min A=\frac{2}{3}$ khi $x=2.$

Câu 10. *(Trích đề chuyên Thái Bình năm 2015-2016)*

Cho $x;y$ thỏa mãn $x^2+y^2-4x-2=0$. Chứng minh rằng

$$10-4\sqrt{6}\le x^2+y^2\le 10+4\sqrt{6}\ .$$

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với $x^2+y^2=4x+2$ (1).

Ta có $x^2-4x-2=-y^2\le 0$ $\Rightarrow\left(x-\sqrt{6}-2\right)\left(x+\sqrt{6}-2\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{6} \le x \le 2+\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow 10-4\sqrt{6} \le 4x+2 \le 10+4\sqrt{6} \ \ (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $10-4\sqrt{6} \le x^2+y^2 \le 10+4\sqrt{6}$.

Câu 11. *(Trích đề chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định 2017)*

Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 thỏa mãn a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a+bc}+\dfrac{1}{b+ac}+(a+b)(4+5c)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y} (\forall x, y \ne 0)$

Tacó :

$$P=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+(a+b)(5c+4) \ge \frac{4}{(a+b)(c+1)}+(a+b)(5c+4)$$

$$=\frac{4}{(1-c)(1+c)}+(1-c)(5c+4) \ge 4\sqrt{\frac{5c+4}{c+1}}=4\sqrt{\frac{c}{c+1}+4} \ge 8$$

Vậy minP = 8. Đẳng thức xảy ra khi $c=0, a=b=\dfrac{1}{2}$.

Câu 12. *(Trích Chuyên Đại học Vinh năm 2009 – 2010)*

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x>8y>0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x+\frac{1}{y(x-8y)}.$$

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM (Cauchy) cho ba số dương ta có:

$$P=(x-8y)+8y+\frac{1}{y(x-8y)} \ge 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-8y=8y \\ 8y=\dfrac{1}{y(x-8y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16y \\ y^3=\dfrac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy minP = 6. khi và chỉ khi x = 4 và y = $\dfrac{1}{4}$.

Câu 12. *(Trích đề vào lớp 10 Bắc Giang 2017 – 2018)*

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $2a+3b \le 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{2002}{a}+\frac{2017}{b}+2996a-5501b.$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $2a+3b\le 4$ ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{2}, b=1$, lúc đó: $\frac{2002}{a}=8008a$, $\frac{2017}{b}=2017b$ do đó ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

Ta có $Q=\frac{2002}{a}+\frac{2017}{b}+2996a-5501b$

$=\frac{2002}{a}+8008a+\frac{2017}{b}+2017b-(5012a+7518b)$

$=2002\left(\frac{1}{a}+4a\right)+2017\left(\frac{1}{b}+b\right)-2506(2a+3b)$

$\ge 2002.2\sqrt{\frac{1}{a}.4a}+2017.2\sqrt{\frac{1}{b}.b}-2506(2a+3b)$ $(BDT\ CoSi)$

$\ge 2002.4+2017.2-2506.4=2018.$

Do đó Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2018 khi $\mathrm{a}=\frac{1}{2}$ và $b=1$.

Câu 12. *(Trích đề vào lớp 10 Cao Bằng 2017 – 2018)*

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=-m^2+6 \end{cases}$ (m là tham số)

Hãy tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ sao cho biểu thức $P=xy+2(x+y)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải

$\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=-m^2+6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m-x \\ x^2+y^2=-m^2+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m-x \\ x^2+(m-x)^2=-m^2+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m-x \\ x^2+m^2-2mx+x^2=-m^2+6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m-x \\ 2x^2-2mx+2m^2-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m-x \\ x^2-mx+m^2-3=0 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-mx+m^2-3=0$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \Delta=m^2-4\left(m^2-3\right)\ge 0 \Leftrightarrow m^2-4m^2+12\ge 0$

$\Leftrightarrow 12-3m^2\ge 0 \Leftrightarrow m^2\le 4$

$\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

Với m thỏa mãn $-2\le m\le 2$ thì phương trình có nghiệm $(x;y)$. Khi đó ta có:.

$P=xy+2(x+y)=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)\right]+2(x+y)$

$\Leftrightarrow P = \frac{1}{2}\left[m^2 - \left(-m^2 + 6\right)\right] + 2m = \frac{1}{2}\left(2m^2 - 6\right) + 2m$

$\Leftrightarrow P = m^2 + 2m - 3 = m^2 + 2m + 1 - 4 = \left(m+1\right)^2 - 4$

Nhận xét: $\left(m+1\right)^2 \geq 0 \quad \forall m \in \left[-2;2\right]$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m = -1$ thỏa mãn điều kiện.

$\Rightarrow P \geq -4$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $\min P = -4$ khi $m = -1$.

Câu 13. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(2 - a^2\right)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = a + b + c + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(2 - a^2\right)$

$\Rightarrow 9 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2bc + \left(a^2 + b^2\right) + \left(a^2 + c^2\right) \geq \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\left(ab + bc + ca\right) = \left(a + b + c\right)^2$.

$\Rightarrow a + b + c \leq 3$

Ta có: $T = a + b + c + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 2\left(b + \frac{1}{b}\right) + 2\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(a + b + c\right)$

$\geq 2.2\sqrt{a.\frac{1}{a}} + 2.2\sqrt{b.\frac{1}{b}} + 2.2\sqrt{c.\frac{1}{c}} - 3 = 9.$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 9 khi a = b = c = 1.

Câu 14. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y \leq z$. Chứng minh rằng:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{27}{2}.$$

(ĐTTS lớp 10 tỉnh Nghệ An năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $x + y \leq z \Rightarrow \frac{z}{x+y} \geq 1 \Rightarrow t \geq 1 \left(t = \frac{z}{x+y}\right)$.

Ta có: $\left(x - y\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2\left(x^2 + y^2\right) \geq \left(x + y\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{\left(x+y\right)^2}{2}$.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{2}{xy}\ge\frac{2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}=\frac{8}{(x+y)^2}\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$$

Do đó:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge\left[\frac{(x+y)^2}{2}+z^2\right]\left[\frac{8}{(x+y)^2}+\frac{1}{z^2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2\right]\left[8+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2\right]=\left(\frac{1}{2}+t^2\right)\left(8+\frac{1}{t^2}\right)=4+\frac{1}{2t^2}+8t^2+1$$

$$=5+\left(\frac{1}{2t^2}+\frac{t^2}{2}\right)+\frac{15t^2}{2}\ge5+2\sqrt{\frac{1}{2t^2}.\frac{t^2}{2}}+\frac{15t^2}{2}=\frac{27}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{z}{2}$.

Câu 15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(3a+2b)(3a+2c)=16bc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết: $(3a+2b)(3a+2c)=16bc\Leftrightarrow 9a^2+6a(b+c)=12bc\le3(b+c)^2$

$$\Rightarrow 3.\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+2\frac{a}{b+c}-3\le0$$

Đặt $x=\frac{a}{b+c}\Rightarrow 3x^2+2x-3\le0\Leftrightarrow 0<x\le\frac{1}{3}$.

Ta có:

$$P=\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)}=\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+2=x+\frac{1}{x}+2=\left(x+\frac{1}{9x}\right)+\frac{8}{9x}+2\ge2\sqrt{x.\frac{1}{9x}}+\frac{8}{9.\frac{1}{3}}+2=\frac{16}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{a}{b+c}=\frac{1}{3}\\ b=c\end{cases}\Leftrightarrow b=c=3k, a=2k, k>0$

Câu 16. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\begin{cases}xy\ge6\\ y\ge3\end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x+y+2020$

Hướng dẫn giải

Ta có: $P=x+y+2020=(x+1)+y+2019\ge2\sqrt{(x+1)y}+2019$

$$\ge2\sqrt{6+3}+2019=2025.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2025 khi $\begin{cases} x+1=y \\ xy=6 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=3.$

Cách khác: Các giải trên khá khéo léo nếu không giải được như trên bạn có thể tư duy như sau: Từ giả thiết $\begin{cases} xy \ge 6 \\ y \ge 3 \end{cases}$ ta dự đoán biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=2, y=3$

Khi đó: $x=\frac{2}{3}y$ do đó để xuất hiện xy và y ta tách như sau:

$$P=x+y+2020=x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}y+2020 \ge 2\sqrt{\frac{2}{3}xy}+\frac{y}{3}+2020 \ge 2\sqrt{\frac{2}{3}.6}+\frac{3}{3}+2020=2025.$$

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{P}=\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}$, trong đó a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông (c là độ dài cạnh huyền).

(Trích đề thi HSG huyện Hương Sơn năm 2020)

Hướng dẫn giải

Vì $c^2=a^2+b^2 \ge 2ab$ nên $c \ge \sqrt{2ab}$.

$$P=\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}=\frac{ab(a+b)+c(a^2+b^2)}{abc}=\frac{a+b}{c}+\frac{c^2}{ab} \ge \frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{\sqrt{2ab}.c}{ab}$$

Ta có: $\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{\sqrt{2ab}.c}{ab}=\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{c}{\sqrt{ab}}+\frac{(\sqrt{2}-1)c}{\sqrt{ab}} \ge 2\sqrt{\frac{2\sqrt{ab}}{c}.\frac{c}{\sqrt{ab}}}+\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2ab}}{\sqrt{ab}}$

$=\sqrt{2}+2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P=\sqrt{2}+2$.

Câu 17. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+3xy+4y^2 \le \frac{7}{2}$. Chứng minh rằng: $x+y \le 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x+y=t \Rightarrow x=t-y$. Do đó

$$x^2+3xy+4y^2 \le \frac{7}{2} \Leftrightarrow (t-y)^2+3(t-y)y+4y^2-\frac{7}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+ty+t^2-\frac{7}{2} \le 0 \Leftrightarrow \left(2y+\frac{t}{2}\right)^2 \le 7\left(1-\frac{t^2}{4}\right)$$

Suy ra $1-\frac{t^2}{4} \ge 0$ (vì $\left(2y+\frac{t}{2}\right)^2 \ge 0$)

$\Rightarrow t^2 \le 4 \Rightarrow x+y \le 2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y=2 \\ \left(2y+\frac{t}{2}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \left(2y+\frac{x+y}{2}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}.$

Câu 18. Cho các số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x+3y=53.$ Chứng minh rằng: $P=\sqrt{xy+4}$

Hướng dẫn giải

Đặt $2x=a,\quad 3y=b$ (a chia hết cho 2, b chia hết cho 3)

Ta có $ab=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\dfrac{2809-(a-b)^2}{4}$

Do a, b là số tự nhiên mà $a+b=53$ nên $a\neq b$ do đó $|a-b|\geq 1 \Rightarrow (a-b)^2=1.$ Do vậy

$ab\leq \dfrac{2809-1}{4}=702.$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} |a-b|=1 \\ a+b=53 \\ a\,\vdots\, 2, b\,\vdots\, 3 \end{cases} \Rightarrow a=26, b=27$. Giải hệ này ta được $a=26, b=27.$

Vậy giá trị lớn nhất của ab là 702, đạt được khi a = 26; b = 27.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $P=\sqrt{xy+4}$ là 11 khi $x=13, y=9.$

Câu 19. *(Trích đề tuyển sinh lớp 10 tỉnh Bắc Giang năm học 2017)*

Cho x, y thỏa mãn $x\leq 2, x+y\geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A=14x^2+9y^2+22xy-42x-34xy+35.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $a=2-x, b=x+y-2\,(a,b\geq 0)$ suy ra $y=a+b.$

Ta có biểu thức A trở thành:

$$A=14(2-a)^2+9(a+b)^2+22(2-a)(a+b)-42(2-a)-34(a+b)+35$$
$$=a^2+9b^2-4ab-4a+10b+7=a^2+4b^2+4-4ab-4a+8b+15b^2+2b+3$$
$$=(a-2b-2)^2+15b^2+2b+3\geq 3\ \forall a,b$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a-2b-2=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0, y=2.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3 khi $x=0, y=2$

Câu 20. *(Trích đề tuyển sinh lớp 10 tỉnh Bắc Giang năm học 2017)*

Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(3-x)(3-y).$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$P=(3-x)(3-y)=9-3(x+y)+xy=\frac{18-6(x+y)+2xy}{2}$$

$$=\frac{17+(x^2+y^2)-6(x+y)+2xy}{2}=\frac{8+(x+y)^2-6(x+y)+9}{2}$$

$$=\frac{(x+y-3)^2}{2}+4.$$

Từ $x^2+y^2=1$ chỉ ra được $(x+y)^2\le 2\Rightarrow -\sqrt{2}\le x+y\le\sqrt{2}$;

Suy ra $-\sqrt{2}-3\le x+y-3\le\sqrt{2}-3<0.$

$$P=\frac{(x+y-3)^2}{2}+4\ge\frac{(\sqrt{2}-3)^2}{2}+4=\frac{19-6\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{19-6\sqrt{2}}{2}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. Cho x, y là các số tự nhiên khác 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\left|36^x-5^y\right|.$$

Hướng dẫn giải

Với $x,y\in N^*$ thì 36^x có chữ số tận cùng là 6, 5^y có chữ số tận cùng là 5 nên:

A có chữ số tận cùng là 1 (nếu $36^x>5^y$) hoặc 9 (nếu $36^x<5^y$)

Trường hợp 1: A = 1. Khi đó $36^x-5^y=1\Leftrightarrow 36^x-1=5^y$. Điều này không xảy ra vì $(36^x-1)\,\vdots\,35$ nên $(36^x-1)\,\vdots\,7$, còn 5^y không chia hết cho 7.

Trường hợp 2: A = 9. Khi đó $5^y-36^x=9\Leftrightarrow 5^y=9+36^x$ điều này không xảy ra vì $(9+36^x)\,\vdots\,9$ còn còn 5^y không chia hết cho 9.

Trường hợp 3: A = 11. Khi đó $36^x-5^y=11$. Thấy $x=1, y=2$ thỏa mãn.

Vậy GTNN của A bằng 11, khi $x=1, y=2$.

Câu 22. Cho ba số nguyên dương $a,\ b,\ c$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 28.$$

Hướng dẫn giải

Với $x;y;z>0$ ta có:

+) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\quad (1).$

+) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\quad (2)$

+) $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} \ge 1 \quad (3)$

Xảy ra đẳng thức ở (1), (2) và (3) $\Leftrightarrow x=y=z$

Ta có:

$$M=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+(a+b+c)^2.\frac{a+b+c}{abc}$$
$$=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right).\frac{a+b+c}{abc}$$

Áp dụng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$M \ge \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{9}{ab+bc+ca}+2.9$$
$$=\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)+8.\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+18 \ge 2+8+18=28.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \\ ab=bc=ca \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$

Câu 23. Cho 3 số thực $x, y, z > 0$ thoả mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=6$ và biểu thức $P=x+y^2+z^3$.

a) Chứng minh $P \ge x+2y+3z-3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$P \ge x+2y+3z-3 \Leftrightarrow y^2+z^3 \ge 2y+3z-3 \Leftrightarrow y^2-2y+1+z^3-3z+2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2+(z+2)(z-1)^2 \ge 0 \text{ (1)}$$

Vì $(y-1)^2 \ge 0$; $(z-1)^2 \ge 0$; $z+2>0$ vì $z>0$ theo giả thiết. Vậy bđt (1) đúng.

Ta có đpcm

b) Theo câu a) ta có $P \ge x+2y+3z-3 \Leftrightarrow P \ge x+2y+3z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}-9$

(vì $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=6$ theo giả thiết), hay $P \ge \left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(2y+\dfrac{2}{y}\right)+\left(3z+\dfrac{3}{z}\right)-9$

Áp dụng bđt Cô-si cho 2 số dương ta có : $x+\dfrac{1}{x} \ge 2$; $2y+\dfrac{2}{y} \ge 4$; $3z+\dfrac{3}{z} \ge 6$ (2)

Do đó $P \ge 2+4+6-9=3$

Dấu "=" xảy ra khi các dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Vậy GTNN của P là 3, đạt được khi $x=y=z=1$

Câu 24. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{y}{2x+3}=\frac{\sqrt{2x+3}+1}{\sqrt{y}+1}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=xy-3y-2x-3$

(Trích đề thi toán vào lớp 10 Hà Nam năm 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{y}{2x+3}=\frac{\sqrt{2x+3}+1}{\sqrt{y}+1}\Leftrightarrow y\sqrt{y}+y=(2x+3)\sqrt{2x+3}+2x+3$

$\Leftrightarrow y\sqrt{y}-(2x+3)\sqrt{2x+3}+y-(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{2x+3}\right)\left(y+\sqrt{y}\sqrt{2x+3}+2x+3\right)+\left(\sqrt{y}+\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{2x+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{2x+3}\right)\left(y+\sqrt{y}\sqrt{2x+3}+2x+3+\sqrt{y}+\sqrt{2x+3}\right)=0$

Với x, y dương thì $y+\sqrt{y}\sqrt{2x+3}+2x+3+\sqrt{y}+\sqrt{2x+3}>0$ do đó:

$\sqrt{y}-\sqrt{2x+3}=0\Leftrightarrow\sqrt{y}=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow y=2x+3$

Do đó: $Q=xy-3y-2x-3=x(2x+3)-3(2x+3)-2x-3=2x^2-5x-12$

$=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)-\frac{25}{8}-12=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{121}{8}\geq-\frac{121}{8}.$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{11}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $-\frac{121}{8}$ khi $x=\frac{5}{4},y=\frac{11}{2}.$

Câu 25. Cho các số dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=(a+b+1)\left(a^2+b^2\right)+\frac{4}{a+b}$$

(Trích đề thi toán HSG lớp 9 Bình Định năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Sử dụng BĐT AM – GM, ta có: $a^2+b^2\geq 2ab=2$

$\Rightarrow M=(a+b+1)\left(a^2+b^2\right)+\frac{4}{a+b}\geq(a+b+1).2+\frac{4}{a+b}=\left(a+b+\frac{4}{a+b}\right)+a+b+2$

$\geq 2\sqrt{(a+b).\frac{4}{a+b}}+2\sqrt{ab}+2=2.2+2+2=8$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 8 khi $a=b=1$.

Câu 26. Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^3y+xy^3$.

(Trích đề thi toán HSG lớp 9 Khánh Hòa năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Ta có: $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Rightarrow 1 = x^2+xy+y^2 \geq 3xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$.

$$P = x^3y+xy^3 = xy\left(x^2+y^2\right) = xy(1-xy) = xy-(xy)^2 = \frac{1}{4}-\left[(xy)^2-xy+\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2$$

Do $xy \leq \frac{1}{3} \Rightarrow xy-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{6} \Rightarrow \left|xy-\frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6} \Rightarrow \left(xy-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{36} \Rightarrow -\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2 \leq -\frac{1}{36}$

$\Rightarrow P = \frac{1}{4}-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}-\frac{1}{36} = \frac{2}{9}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy = \frac{1}{3}$ và $x = y$ $\Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = y = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{2}{9}$ khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = y = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Câu 27. Cho hai số thực dương $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc} \geq 30$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)+\frac{7}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}+\frac{7}{\frac{(a+b+c)^2}{3}}$$

$$= \frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{21}{(a+b+c)^2} = 30.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 28. Cho a,b,c là ba số thực sao cho $a+b = c-2$ và $ab = 2c^2-3c+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2+b^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(c-2)^2 = (a+b)^2 \geq 4ab = 4\left(2c^2-3c+1\right) \Rightarrow c^2-4c+4 \geq 8c^2-12c+4$

$\Leftrightarrow 7c^2-8c \leq 0 \Leftrightarrow c(7c-8) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq \frac{8}{7}$

Do đó $P = a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = (c-2)^2-2\left(2c^2-3c+1\right) = -3c^2+2c+2$

$$= -3\left(c^2 - \frac{2c}{3} - \frac{2}{3}\right) = -3\left(c - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \le \frac{7}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $c = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

Câu 29. Giả sử x, y, z là số thực thỏa mãn điều kiện $2x^2 + 2xy + 5y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x-y}{x+2y+2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2x^2 + 2xy + 5y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x+2y)^2 = 1$.

Đặt $a = x - y, b = x + 2y$ thì $a^2 + b^2 = 1$ và $P = \frac{a}{b+2}$

Gọi m là một giá trị của biểu thức P thì hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ m = \dfrac{a}{b+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a = 2m + bm \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m + bm)^2 + b^2 = 1 \\ a = 2m + bm \end{cases}$$

Hay phương trình $(mb + 2m)^2 + b^2 = 1$ có nghiệm *b*. Phương trình này tương đương với $(m^2+1)b^2 + 4m^2b + 4m^2 - 1 = 0$, nên điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 4m^4 - (m^2+1)(4m^2-1) \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \le m \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta có:

+) $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $b = -\frac{2m^2}{m^2+1} = -\frac{1}{2}, a = (b+2)m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, hay $x = -\frac{2\sqrt{3}+1}{6}, y = \frac{-1+\sqrt{3}}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

+) $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $b = -\frac{2m^2}{m^2+1} = -\frac{1}{2}, a = (b+2)m = \frac{\sqrt{3}}{2}$, hay $x = \frac{2\sqrt{3}-1}{6}, y = \frac{-1-\sqrt{3}}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 30. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + 3y \le 10$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{27}{\sqrt{3y}} \ge 10$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{x}}.x}=3(1)$$

$$\frac{27}{\sqrt{3y}}+\frac{27}{\sqrt{3y}}+3y\geq 3\sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt{3y}}.\frac{27}{\sqrt{3y}}.3\text{y}}=27(2)$$

Cộng các bất đẳng thức (1) và (2) ta được

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{27}{\sqrt{3y}}\right)+x+3y\geq 30$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{27}{\sqrt{3y}}\right)\geq 30-(x+3y)\geq 20 \quad (do\ \text{x + 3y} \leq 10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{27}{\sqrt{37}}\geq 10$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{27}{\sqrt{3y}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3.27}{3\sqrt{3y}}\geq\frac{(1+9)^2}{\sqrt{x}+3\sqrt{3y}}=\frac{100}{\sqrt{x}+3\sqrt{3y}}$$

$$\left(1\sqrt{x}+3\sqrt{3y}\right)^2\leq\left(1^2+3^2\right)\left(x+3y\right)\leq 100$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3\sqrt{3y}\leq 10$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{27}{\sqrt{3y}}\geq 10$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

Câu 30. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=ab+bc+2ca$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $(a+b+c)^2\geq 0\Rightarrow ab+bc+ca\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-\frac{1}{2}$

Ta có: $(a+c)^2\geq 0\Rightarrow ac\geq-\frac{a^2+c^2}{2}=\frac{b^2-(\text{a}^2+b^2+c^2)}{2}=\frac{b^2-1}{2}\geq\frac{-1}{2}$

Do đó: $F=ab+bc+ca\geq\frac{-1}{2}+-\frac{1}{2}=-1$

Min $F=-1$. Dấu "=" xẩy ra khi $\begin{cases}a+b+c=0\\a+c=0,b=0\\a^2+b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=-c=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Câu 31. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a^2+2b^2\leq 3c^2$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq\frac{3}{c}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số, ta có:

$$\left(a+2b\right)^2=\left(1.a+\sqrt{2}.\sqrt{2}a\right)^2\le\left(1+2\right)\left(a^2+2b^2\right)\le 3.3c^2=9c^2\Rightarrow a+2b\le 3c.$$

Với mọi $x,y,z>0$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương ta có

$$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 3\sqrt[3]{xyz}.3\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}=9\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{a+b+b}=\frac{9}{a+2b}\ge\frac{9}{3c}=\frac{3}{c}\text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ a = b = c.

Câu 32. Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{3}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\left(\frac{1}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)\ge\frac{3}{4}.2+2\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}(a+b)^2=ab\\ a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b.$

Vậy $MinP=\frac{5}{2}\Leftrightarrow a=b$

Câu 33. Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{a^2+2a}+\dfrac{1}{b^2+2b}+\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\ge 1+ab=1+a+b$ (1)

Với mọi x, y > 0, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}.2\sqrt{xy}=4\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\qquad(2)$$

Áp dụng (1) và (2) ta có:

$$P\ge\frac{4}{a^2+2a+b^2+2b}+1+a+b=\frac{4}{a^2+b^2+2ab}+1+a+b$$
$$=\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{8}+\frac{7(a+b)}{8}+1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$a+b=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow(a+b)^2\ge4(a+b)\Rightarrow a+b\ge4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{16}+\frac{a+b}{16}\ge3\sqrt[3]{\frac{4}{(a+b)^2}.\frac{a+b}{16}.\frac{a+b}{16}}=\frac{3}{4}$$

Suy ra $P\ge\frac{3}{4}+\frac{7}{8}.4+1=\frac{21}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{21}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = 2.

Câu 34. Cho *x, y* thỏa mãn: $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$ (6)

Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $S=x+y+1$

Hướng dẫn giải

Viết lại biểu thức đã cho thành $(x+y+1)^2+5(x+y+1)+4=-y^2$ (*).

Như vậy với mọi x và mọi y ta luôn có $S^2+5S+4\le0$ (với $S=x+y+1$)

Suy ra: $(S+4)(S+1)\le0\Leftrightarrow-4\le S\le-1$.

Từ đó có: $S_{min}=-4$, khi $\begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}$

$S_{max}=-1$, khi $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$.

Cách 2:

$$x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$$
$$\Leftrightarrow4x^2+4y^2+49+8xy+28x+28y+4y^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow(2x+2y+7)^2+4y^2=9$$

Do $4y^2\ge0,\forall y$ suy ra $(2x+2y+7)^2\le9$

$$\Leftrightarrow(2x+2y+7+3)(2x+2y+7-3)\le0$$
$$\Leftrightarrow(x+y+5)(x+y+2)\le0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+5\ge0\\x+y+2\le0\end{cases}\quad(Do\ x+y+5>x+y+2\ \forall x,y)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}S\ge-4\\S\le-1\end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là -4 khi y = 0, x = -5

Giá trị lớn nhất của S là -1 khi y = 0, x = -2.

Cách 3: Ta có $S=x+y+1\Rightarrow y=S-x-1$ thay vào (6) ta được:

$$x^2+2(S-x-1)x+7(x+S-x-1)+2(S-x-1)^2+10=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2Sx-2x^2-2x+7S-7+2S^2+2x^2+2-4Sx-4S+4x+10=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2xS+6x+2S^2+3S+5=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2(S-3)x+2S^2-3S+5=0 \qquad (*)$$

Để phương trình (*) có nghiệm thì:

$$\Delta'_{(*)}=(S-3)^2-(2S^2-3S+5)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow -S^2-3S+4\ge 0$$
$$\Leftrightarrow -4\le S\le -1$$

S = -4 thay vào biểu thức ta được y = 0, x = -5.

S = -1 thay vào biểu thức ta được y = 0, x = -2

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là -4 khi y = 0, x = -5

Giá trị lớn nhất của S là -1 khi y = 0, x = -2.

Câu 35. Cho x,y,z thỏa mãn $x+y+z=0; x+1>0; y+1>0; z+4>0$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A=\dfrac{xy-1}{(x+1)(y+1)}+\dfrac{z}{z+4}$

(Trích đề thi hsg lớp 9 tỉnh Nam Định năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} x+1=a \\ y+1=b \Rightarrow a+b+c=x+y+z+6=6 \\ z+4=c \end{cases}$

Khi đó: $A=\dfrac{(a-1)(b-1)-1}{ab}+\dfrac{c-4}{c}=\dfrac{ab-a-b+1-1}{ab}+1-\dfrac{4}{c}=2-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}\right)$

Với m, n dương ta luôn có: $(m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\ge 2\sqrt{mn}.\dfrac{2}{\sqrt{mn}}=4\Rightarrow \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\ge\dfrac{4}{m+n}$ (*)

Áp dụng (*) ta được:

$$A=2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\right)\le 2-\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}\right)=2-4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)\le 2-4.\frac{4}{a+b+c}=2-\frac{16}{6}=2-\frac{8}{3}=-\frac{2}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ a+b=c \\ a+b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{3}{2} \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow x=y=\dfrac{1}{2}, c=-1$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $-\dfrac{2}{3}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}, c=-1$.

Câu 36. Cho x,y nguyên thỏa mãn $3x+2y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $H=x^2-y^2+|xy|+|x+y|-2$.

(Trích đề thi hsg lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Do $x, y \in Z$ và $3x + 2y = 1$, suy ra x, y trái dấu

$$3x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -x + \frac{1-x}{2} \Rightarrow \frac{1-x}{2} = t \in Z \Rightarrow x = 1 - 2t; y = 3t - 1.$$

Khi đó: $H = t^2 - 3t + |t| - 1$

Nếu $t \ge 0 \Rightarrow H = (t-1)^2 - 2 \ge -2$, dấu "=" xảy ra khi t = 1.

Nếu $t < 0 \Rightarrow H = t^2 - 4t - 1 > -1 > -2$

Vậy $H_{\min} = -2$ khi $t = 1 \Rightarrow x = -1, y = 2.$

Câu 37. Cho *a, b, c* là ba số thực dương thỏa mãn $4c + 2b \ge a(b^2 + c^2)$. Tìm GTNN của biểu thức: $S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$

(Trích đề thi hsg lớp 9 tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $4c + 2b \ge a(b^2 + c^2) \ge 2abc \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \ge a$

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c} \\ &= \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) \\ &\ge \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a} \ge 2a + \frac{6}{a} \ge 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt{3}$ khi $a = b = c = \sqrt{3}.$

Câu 38. Cho $a,\ b > 0$ thỏa mãn $a + b \ge 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$M = \frac{1}{a+b^2} + \frac{1}{b+a^2}$$

(Trích đề thi hsg lớp 9 tỉnh Điện Biên năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh với $a > 0$ thì $(a+b)^2 \le (a+b^2)(a+1)$ (*)

Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le a^2 + a + ab^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab \le a + ab^2$

$$\Leftrightarrow a(b-1)^2 \ge 0 \text{ (do a > 0)}$$

Từ $(*) \Rightarrow \frac{1}{a+b^2} \le \frac{a+1}{(a+b)^2}$. Tương tự: $\frac{1}{b+a^2} \le \frac{b+1}{(b+a)^2}$

Cộng vế theo vế ta được: $M = \frac{1}{a+b^2} + \frac{1}{b+a^2} \le \frac{a+b+2}{(a+b)^2}$ (1)

Ta chứng minh với $a,\ b > 0$ thỏa mãn $a+b \ge 2$ thì $\frac{a+b+2}{(a+b)^2} \le 1$ (2)

Thật vậy: $(2) \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge (a+b)+2 \Leftrightarrow (a+b+1)(a+b-2) \ge 0$ (do $a+b \ge 2$)

Từ (1) và (2) suy ra $M \le 1$

Dấu '=' xãy ra khi $a = b = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của M bằng 1 khi $a = b = 1$.

Câu 39. Cho 2 số thực dương x, y thỏa điều kiện $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2$.

(Trích đề thi hsg lớp 9 TP Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1 \Leftrightarrow x + xy + 2y + 2xy = 1 + x + y + xy \Leftrightarrow 2xy + y = 1$

Do đó: $1 = 2xy + y \ge 2\sqrt{2xy^2} \Rightarrow P = xy^2 \le \frac{1}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 2xy + y = 1 \\ 2xy = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 40. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = x - 2y + 3z$ biết x, y, z không âm và thỏa hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+4y+3z=8 \\ 3x+y-3z=2 \end{cases}$

(Trích đề thi hsg lớp 9 TP Hồ Chí Minh năm 2011-2012)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} 2x+4y+3z=8 \\ 3x+y-3z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=8-3z \\ 12x+4y=8+12z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=15z \\ y=3z-3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}z \\ y=-\frac{3}{2}z+2 \end{cases}$

Do x, y, z không âm nên: $y = -\frac{3}{2}z + 2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le z \le \frac{4}{3}$.

CHINH PHỤC KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HAI

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Do đó: $A = x - 2y + 3z = \frac{3}{2}z + 3z - 4 + 3z = \frac{15}{2}z - 4 \le \frac{15}{2}.\frac{4}{3} - 4 = 10 - 4 = 6.$

Dấu "=" xảy ra khi : $x = 2, y = 0, z = \frac{4}{3}.$

$A = \frac{15}{2}z - 4 \ge -4$

Dấu "=" xảy ra khi : $x = 0, y = 2, z = 0.$

Vậy $\max A = 6$ khi $x = 2, y = 0, z = \frac{4}{3}$, $\min A = -4$ khi $x = 0, y = 2, z = 0.$

Câu 41. Cho các số thực dương a và b thay đổi thỏa mãn $|a - 2b| \le \frac{1}{\sqrt{a}}, |b - 2a| \le \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Tìm giá trị lớn nhất của tích ab.

Hướng dẫn giải

Ta có: $|a - 2b| \le \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow (a - 2b)^2 \le \frac{1}{a} \Rightarrow a(a - 2b)^2 \le 1 \Rightarrow a^3 - 4a^2b + 4ab^2 \le 1$ (1)

$|b - 2a| \le \frac{1}{\sqrt{b}} \Rightarrow (b - 2a)^2 \le \frac{1}{b} \Rightarrow b(b - 2a)^2 \le 1 \Rightarrow b^3 - 4ab^2 + 4a^2b \le 1$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được: $a^3 + b^3 \le 2.$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $2 \ge a^3 + b^3 \ge 2\sqrt{a^3b^3} \Rightarrow a^3b^3 \le 1 \Rightarrow ab \le 1.$

Vậy giá trị lớn nhất của ab là 1 khi a = b = 1.

Câu 42. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + 2y + 3z = 18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y + 3z + 5}{1 + x} + \frac{3z + x + 5}{1 + 2y} + \frac{x + 2y + 5}{1 + 3z} \ge \frac{51}{7}$$

(Đề toán vào 10 Chuyên Đại học Vinh năm 2009-2010)

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x;\ b = 2y;\ c = 3x$, khi đó giả thiết trở thành $a + b + c = 18$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{b + c + 5}{1 + a} + \frac{c + a + 5}{1 + b} + \frac{a + b + 5}{1 + c} \ge \frac{51}{7}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b + c + 5}{1 + a} + 1 + \frac{c + a + 5}{1 + b} + 1 + \frac{a + b + 5}{1 + c} + 1 \ge \frac{51}{7} + 3$$

Hay $$(a + b + c + 6)\left(\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c}\right) \ge \frac{72}{7}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} \ge \frac{3}{7}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{9}{3+a+b+c}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=6$ hay $x=6;\ y=3;\ z=2$.

Câu 43. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\le\frac{3}{2}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Phú Thọ năm 2009-2010)

Hướng dẫn giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x+1};\ b=\frac{1}{y+1};\ c=\frac{1}{z+1}$. Khi đó ta được $a+b+c=1$. Từ đó suy ra

$$x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a};\ y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b};\ z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{a}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$
$$\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}\right)$$
$$\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

Câu 44. Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên KHTN năm 2009-2010)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3a^2+8b^2+14ab=3a^2+8b^2+12ab+2ab\le 4a^2+9b^2+12ab=\left(2a+3b\right)^2$$

Suy ra $$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{a^2}{\sqrt{\left(2a+3b\right)^2}}=\frac{a^2}{2a+3b}$$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{5\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{5}$$

Do đó ta được: $$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách khác: $$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}=\frac{a^2}{\sqrt{\left(3a+2b\right)\left(a+4b\right)}}\ge\frac{2a^2}{4a+6b}=\frac{a^2}{2a+3b}$$

Câu 45. Cho hai số dương x,y thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3=x-y$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2\le 1$.

(Trích đề thi HSG huyện Thường Tín năm 2020-2021)

Hướng dẫn giải

Từ giải thiết $x > y > 0$. Giả sử $x^2+y^2\ge 1$

Ta có $x^3+y^3=x-y\le(x-y)(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^3+y^3\le x^2+xy^2-x^2y-y^3$

$\Leftrightarrow xy^2-x^2y-2y^3\ge 0\Leftrightarrow xy(y-x)+\left(-2y^3\right)\ge 0$

Vô lý vì $y-x<0;\ -2y^2<0$.

Điều vô lý này chứng tỏ giải sử ban đầu là sai.

Vậy $x^2+y^2\le 1$.

Câu 46. Cho 3 số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=a+b^{2011}+c^{1954}-ab-bc-ac$$

(Trích đề thi HSG quận Cầu Giấy năm 2020-2021)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a,b,c \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a,b,c \in [0;1]$

$\Rightarrow (\mathrm{a}-1)(b-1)(c-1) \le 0$

$\Leftrightarrow abc-ab-bc-ca+a+b+c-1 \le 0$

$\Leftrightarrow a-ab-bc-ca \le 1-abc-b-c$

$\Rightarrow T \le 1+b^{2011}+c^{1954}-abc-b-c = 1+b.(b^{2010}-1)+c.(c^{1953}-1)-abc \le 1$

GTLN của T bằng 1 khi và chỉ khi $a=1; b=c=0$.

Câu 47. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{1+2y}+\dfrac{1}{1+2z}$

(Trích đề thi HSG Quận Thanh Xuân năm 2020-2021)

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\dfrac{a}{b}; y=\dfrac{b}{c}; z=\dfrac{c}{a}; a,b,c>0$ *nên*

$$P=\frac{b}{b+2a}+\frac{c}{c+2b}+\frac{a}{a+2c}=\frac{b^2}{b^2+2ab}+\frac{c^2}{c^2+2bc}+\frac{a^2}{a^2+2ac} \ge 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Câu 48.

a) Cho hai số thực dương *x, y* thỏa mãn $5(x-y)^2 \le x^2+y^2$. . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} \le \frac{x}{y} \le 2.$$

b) Cho ba số thực dương *x, y, z* thay đổi thỏa mãn $5(x+y+z)^2 \ge 14(x^2+y^2+z^2)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{2x+z}{x+2z}$.

(Trích đề thi HSG Hà Nội năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

a) Giả thiết đã cho có thể được viết lại thành $2x(x-2y)(2x-y) \le 0$ hay

$$\left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\frac{2x}{y}-1\right) \le 0.$$

b) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$5(x+y+z)^2 \le 5\left(\frac{9}{5}+1\right)\left[\frac{5}{9}(x+z)^2+y^2\right]=14\left[\frac{5}{9}(x+z)^2+y^2\right]$$

Kết hợp với giả thiết, ta suy ra $x^2+z^2\le\frac{5}{9}(x+z)^2$ hay $(x-2z)(2x-z)\le 0$

Từ đây, ta có $\frac{z}{2}\le x\le 2z$. Suy ra: $P=\frac{2x+z}{x+2z}=2-\frac{3z}{x+2z}\ge 2-\frac{3z}{\frac{z}{2}+2z}=\frac{4}{5}$

Và $\frac{4}{5}\le P\le\frac{5}{4}$. Bất đẳng thức bên trái xảy ra dấu đẳng thức khi z = 2x và $y=\frac{5}{3}x$. Bất đẳng thức bên phải phải đạt được dấu đẳng thức khi x = 2z và $y=\frac{5}{3}z$. Tóm lại, giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{4}$ và giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{5}$

Nhận xét: Học sinh cần chứng minh lại bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Câu 48. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}\ge 4$

(Trích đề thi HSG Hưng Yên năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}=\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+2\left(\frac{zy}{x}+\frac{xy}{z}\right)+3\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\ge 2z+4y+6x$$

$$=4(x+y)+2(z+x)\ge 8\sqrt{xy}+4\sqrt{xz}=4\sqrt{x}(2\sqrt{y}+\sqrt{z})=4\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}=4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Câu 49. Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}$$

(Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab\ge(a+b)^2-\frac{3(a+b)^2}{4}=\frac{(a+b)^2}{4}$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\le\frac{2}{a+b}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);\ \frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^2 - ab + b^2 \ge 2ab - ab = ab$

Do đó ta được $$\frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \le \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \le \frac{1}{\sqrt{bc}};\ \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \le \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \le \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Dễ thấy $$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Do đó ta được $P \le 3$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Câu 50. Với x,y là các số thực thay đổi thỏa mãn $1 \le y \le 2$ và $xy + 2 \ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{x^2 + 4}{y^2 + 1}$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $xy + 2 \ge 2y \Rightarrow 4xy + 8 \ge 8y$

Mà ta lại có $4x^2 + y^2 \ge 4xy$

$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 8 \ge 4xy + 8 \ge 8y$

$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \ge 8y + 8 - y^2$

$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \ge 4(y^2 + 1) + (5y + 2)(2 - y) \ge 4(y^2 + 1)$

$\Rightarrow M = \dfrac{x^2 + 4}{y^2 + 1} \ge 1$

Dấu "=" xẩy ra khi x = 1 và y = 2, $M_{min} = 1$.

Câu 51. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn xy + yz + xz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3$$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3$$

Ta có:

$1 + x^2 = xy + yz + xz + x^2 = (x + y)(x + z)$

$1 + y^2 = xy + yz + xz + y^2 = (x + y)(y + z)$

$1 + z^2 = xy + yz + xz + z^2 = (z + y)(x + z)$

VT$=\dfrac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Ta có: $\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\leq(x+y+z)\left(\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}\right)$

$=(x+y+z)\left(\dfrac{x}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y}{(x+y)(y+z)}+\dfrac{z}{(z+y)(x+z)}\right)=\dfrac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Do đó VP$\leq\dfrac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)$

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\leq\dfrac{3}{2}$

Ta có: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x}{x+z}\right)$

$\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}\right)$

$\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\dfrac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{x+z}+\dfrac{z}{y+z}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\leq\dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 51. Với a, b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\sqrt{a+2b}=2+\sqrt{\dfrac{b}{3}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+2a}}$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 1 năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

+ Lời giải 1. Ta sẽ chứng minh $M \ge 2$ với dấu đẳng thức xẩy ra chẳng hạn khi $a = b = 3$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{b}{\sqrt{b+2a}} = \frac{b\sqrt{3b}}{\sqrt{3b\left(b+2a\right)}} \ge \frac{2b\sqrt{3b}}{3b+b+2a} = \frac{b\sqrt{3b}}{a+2b}$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}} + \dfrac{b\sqrt{3b}}{a+2b} \ge 2$.

Đặt $x = \sqrt{a+2b}; y = \sqrt{\dfrac{b}{3}}\left(x \ge 0; y \ge 0\right)$. Khi đó giả thiết được viết lại thành $x - y = 2$.

Cũng từ trên ta có $b = 3y^2; a = x^2 - 6y$. Bất đẳng thức cần chứng minh trên được viết lại thành $\dfrac{x^2-6y^2}{x} + \dfrac{9y^3}{x^2} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6y^2}{x} + \dfrac{9y^3}{x^2} \ge x - y$.

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$x\left(x^2-6y^2\right) + 9y^3 \ge x^2\left(x-y\right) \Leftrightarrow x^3 - 6xy^2 + 9y^3 \ge x^3 - x^2y$$

$$\Leftrightarrow 9y^3 - 6xy^2 + x^2y \ge 0 \Leftrightarrow y\left(9y^2 - 6xy + x^2\right) \ge 0 \Leftrightarrow y\left(3y-x\right)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng trên luôn đúng. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn.

+ Lời giải 2. Xét biểu thức $M + \sqrt{\dfrac{b}{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{a+2b}} + \dfrac{b}{\sqrt{b+2a}} + \sqrt{\dfrac{b}{3}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$M + \sqrt{\frac{b}{3}} = \frac{a^2}{a\sqrt{a+2b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b+2a}} + \frac{b^2}{b\sqrt{3b}} \ge \frac{\left(a+b+b\right)^2}{a\sqrt{a+2b} + b\sqrt{b+2a} + b\sqrt{3b}}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta lại có

$$b\sqrt{b+2a} + b\sqrt{3b} = b\left(\sqrt{b+2a} + \sqrt{3b}\right) \le b\sqrt{\left(1+1\right)\left(b+2a+3b\right)} = 2b\sqrt{a+2b}$$

Từ đó $\dfrac{\left(a+b+b\right)^2}{a\sqrt{a+2b} + b\sqrt{b+2a} + b\sqrt{3b}} \ge \dfrac{\left(a+2b\right)^2}{a\sqrt{a+2b} + 2b\sqrt{a+2b}} = \dfrac{a+2b}{\sqrt{a+2b}} = \sqrt{a+2b}$.

Suy ra $M + \sqrt{\dfrac{b}{3}} \ge \sqrt{a+2b}$ nên $M \ge \sqrt{a+2b} - \sqrt{\dfrac{b}{3}} = 2$. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Câu 52. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \le 2$$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2 năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\le\sqrt{2.\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)}.\sqrt{2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)}\le\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{b}{b+c}\right)=2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 53. Với a, b là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=(a+b)\left(\frac{1}{a^2+b}+\frac{1}{b^2+a}\right)-\frac{1}{ab}$$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 1 năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(a^3+b\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)\ge(a+b)^2;\left(b^3+a\right)\left(\frac{1}{b}+a\right)\ge(a+b)^2$$

Từ đó ta được $\frac{a+b}{a^3+b}\le\frac{\frac{1}{a}+b}{a+b};\frac{a+b}{b^3+a}\le\frac{\frac{1}{b}+a}{a+b}$. Do đó suy ra

$$(a+b)\left(\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{a+b^3}\right)=\frac{a+b}{a^3+b}+\frac{a+b}{b^3+a}\le\frac{\frac{1}{a}+b}{a+b}+\frac{\frac{1}{b}+a}{a+b}=\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}$$

Suy ra $M\le\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}-\frac{1}{ab}=\frac{ab(a+b)+a+b-(a+b)}{(a+b)ab}=\frac{ab(a+b)}{ab(a+b)}=1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1, đạt được tại $a=b=1$.

Câu 54. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2c+2}$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2 năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2c+2}$$

Biến đổi giả thiết $ab+bc+ca+abc=2$ ta được

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)=\left(1+a\right)+\left(1+b\right)+\left(1+c\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)}+\frac{1}{\left(1+a\right)\left(1+c\right)}+\frac{1}{\left(1+b\right)\left(1+c\right)}=1$$

Đặt $x=\frac{1}{1+a};y=\frac{1}{1+b};z=\frac{1}{1+c}$, khi đó ta thu được $xy+yz+zx=1$.

Biểu thức M được viết lại thành

$$M=\frac{a+1}{\left(a+1\right)^2+1}+\frac{b+1}{\left(b+1\right)^2+1}+\frac{c+1}{\left(c+1\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1}+\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}+1}$$
$$=\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$$

Để ý ta có $x^2+1=x^2+xy+yz+zx=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$. Áp dụng tương tự ta được

$$M=\frac{x}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\frac{y}{\left(y+z\right)\left(x+y\right)}+\frac{z}{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}$$
$$=\frac{x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)+z\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2\left(xy+yz+zx\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Ta chứng minh được $9\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge 8\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$.

Vì $\left(x+y+z\right)^2\ge 3\left(xy+yz+zx\right)=3$ nên $x+y+z\le\sqrt{3}$. Nên ta được

$$M\le\frac{2}{\frac{8}{9}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)}=\frac{9}{4\left(x+y+z\right)}\le\frac{9}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, đạ được tại $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}-1$.

Câu 55. Với x, y là những số thực thỏa mãn các điều kiện $0<x\le y\le 2;2x+y\ge 2xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\mathrm{P}=\mathrm{x}^2\left(\mathrm{x}^2+1\right)+\mathrm{y}^2\left(\mathrm{y}^2+1\right)$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 1 năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $2x+y\ge 2xy$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\ge 2$. Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}\left(a+b\right)^2$ ta có

$$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\ge 2\Rightarrow\frac{1}{x^2}\ge 2-\frac{4}{y^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{x^4}+\frac{16}{y^4}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\right)^2\ge 2\Rightarrow\frac{1}{x^4}\ge 2-\frac{16}{y^4}$.

Do $0<x\le y\le 2$ nên ta có $\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(y^2-4\right)\le 0\Rightarrow y^2\le 4+x^2-\frac{4x^2}{y^2}$.

Từ đó kết hợp với $\frac{1}{x^2}\ge 2-\frac{4}{y^2}$ ta được

$$y^2\le 4+x^2-\frac{4x^2}{y^2}\Rightarrow x^2+y^2\le 4+2x^2-\frac{4x^2}{y^2}=4+x^2\left(2-\frac{4}{y^2}\right)\le 4+x^2.\frac{1}{x^2}=5$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\left(1-\frac{x^4}{y^4}\right)\left(y^4-16\right)\le 0\Rightarrow y^4\le 16+x^4-\frac{16x^4}{y^4}$.

Từ đó kết hợp với $\frac{1}{x^4}\ge 2-\frac{16}{y^4}$ ta được

$$y^4\le 16+x^4-\frac{4x^4}{y^4}\Rightarrow x^4+y^4\le 16+2x^4-\frac{16x^4}{y^4}=16+x^4\left(2-\frac{16}{y^4}\right)\le 16+x^4.\frac{1}{x^4}=17$$

Do vậy $P=x^2\left(x^2+1\right)+y^2\left(y^2+1\right)=x^4+y^4+x^2+y^2\le 17+5=22$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=1;y=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 22, đạt được tại $x=1;y=2$

Câu 56. Giả sử $x;\, y;\, z$ là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}.$$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2 năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Ta có $P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}$

$$\Leftrightarrow P=\frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}$$

$$\ge\frac{4x}{y+z-4+4}+\frac{4y}{x+z-4+4}+\frac{4z}{x+y-4+4}$$

$$=4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)\ge 6.$$

(Dễ dàng chứng minh được $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$)

Dấu = xảy ra khi $x = y = z = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$.

Câu 57. Với $(x;\, y)$ là các số thực dương thỏa mãn $x + y \le 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1 + x^2y^2}$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2 năm 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Ta có $P \ge \dfrac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1 + x^2y^2} = 2\sqrt{xy + \dfrac{1}{xy}}$.

Đặt $t = xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4}$.

Ta thu được $\dfrac{P}{2} \ge \sqrt{t + \dfrac{1}{t}} = \sqrt{16t + \dfrac{1}{t} - 15t} \ge \sqrt{2\sqrt{16} - \dfrac{15}{4}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow P \ge \sqrt{17}$.

Dấu "=" xảy ra khi

$$x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{\min} = \sqrt{17}.$$

Câu 58. Với $x;\, y$ là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} + \sqrt{\frac{4y^3}{y^3 + (x+y)^3}}.$$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2013-2014)

Hướng dẫn giải

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} = \sqrt{\frac{x^3}{(x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)}} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + 2xy)(x^2 - 2xy + 4y^2)}} \ge \frac{2x^2}{2(x^2 + 2y^2)} = \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{4y^3}{y^3 + (x+y)^3}} = \sqrt{\frac{4y^3}{(x+2y)(x^2 + xy + y^2)}} = \frac{2y^2}{\sqrt{(xy + 2y^2)(x^2 + xy + y^2)}}$$

$$\ge \frac{4y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \ge \frac{4y^2}{2x^2 + 4y^2} = \frac{2y^2}{x^2 + 2y^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $P \ge 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Vậy $P_{\min} = 1$.

Câu 59. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sqrt{2x - 1} + x\sqrt{5 - 4x^2}$, với $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012-2013)

Hướng dẫn giải

Tập xác định $\frac{1}{2} \le x \le \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $x\sqrt{5-4x^2} \le \frac{x^2+5-4x^2}{2} = \frac{5-3x^2}{2}$; $\quad 3\sqrt{2x-1} \le 3.\frac{2x-1+1}{2} = 3x \le \frac{3\left(x^2+1\right)}{2}$.

Cộng hai bất đẳng thức trên ta thu được

$$y = 3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-4x^2} \le 4.$$

Vậy $y_{max} = 4$ khi $x = 1$.

Chú ý: *Để giải được bài toán trên ta phải sử dụng phương pháp tham số hóa:*

$$2x-1+\alpha \ge 2\sqrt{\alpha(2x-1)} \Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1} \le \frac{3(2x-1+\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$mx.n\sqrt{5-4x^2} \le \frac{m^2x^2+n^2\left(5-4x^2\right)}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{5-4x^2} \le \frac{\left(m^2-4n^2\right)x^2+5n^2}{2mn}$$

Do đó, suy ra $P \le \frac{3(2x-1+\alpha)}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\left(m^2-4n^2\right)x^2+5n^2}{2mn}$. *Bây giờ, ta sẽ có hướng tư duy là sử dụng đánh giá nào đó để khử hết biến. Biểu thức cuối có sự xuất hiện của* $x;x^2$ *do đó ta sẽ nghĩ là nên đánh giá* x *về* x^2 *hay ngược lại. Và ta sẽ chọn giải pháp đầu tiên* $x^2+k^2 \ge 2kx \Leftrightarrow 2x \le \frac{x^2+k^2}{2k}$.

Khi đó, ta có: $P \le \frac{3\left(x^2+k^2-k+k\alpha\right)}{2k\sqrt{\alpha}} + \frac{\left(m^2-4n^2\right)x^2+5n^2}{2mn}$. *Và nếu muốn khử được hết biến thì đầu tiên ta quan sát được là hai mẫu số phải bằng nhau và tổng hệ số của* x^2 *bằng 0. Chính vì thế, ta được:*

$$\begin{cases} k\sqrt{\alpha} = mn;\ 4n^2-m^2 = 3 \\ 2x-1 = \alpha;\ m^2x^2 = n^2\left(5-4x^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n = k = \alpha = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Và từ đó, ta có đánh giá sau:

$$P = 3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-4x^2} \le 3.\frac{2x-1+1}{2} + \frac{x^2+5-4x^2}{2}$$

$$= 3x + \frac{5-3x^2}{2} \le \frac{3x^2+3}{2} + \frac{5-3x^2}{2} = 4 \Rightarrow P_{\max} = 4.$$

Câu 60. Với $x;\ y;\ z$ là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy+yz+zx = 5$, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6\left(x^2+5\right)} + \sqrt{6\left(y^2+5\right)} + \sqrt{6\left(z^2+5\right)}}$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2011-2012)

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{6\left(x^2+5\right)} + \sqrt{6\left(y^2+5\right)} + \sqrt{z^2+5}$

$$=\sqrt{6(x+y)(x+z)}+\sqrt{6(y+z)(y+x)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}$$

$$\le \frac{3(x+y)+2(x+z)}{2}+\frac{3(x+y)+2(y+z)}{2}+\frac{(z+x)+(z+y)}{2}$$

$$\le \frac{9x+9y+6z}{2}=\frac{3}{2}(3x+3y+2z),$$

suy ra $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{6(z^2+5)}}\ge \dfrac{2}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1; z=2$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{2}{3}$.

Ý tưởng: Quan sát thấy, bài toán có sự đối xứng giữa hai kiến $x; y$ nên điểm rơi sẽ xảy ra tại $x=y=kz$. Thế lại giả thiết ta sẽ tìm được $x=y=1; z=2$. Giả thiết cho $xy+yz+zx=5$ đồng thời số 5 này cũng xuất hiện ở biểu thức P nên ta sẽ nghĩ đến chuyện thế giả thiết vào P. Khi đó ta có:

$$P=\frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x+y)(x+z)}+\sqrt{6(y+z)(y+z)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

Và điều ta cần là sử dụng đánh giá nào đó để triệt tiêu tử số và mẫu số, tức là tìm số m thỏa mãn:

$$\sqrt{6(x+y)(x+z)}+\sqrt{6(y+z)(y+z)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}\le m(3x+3y+2z).$$

Thì lúc đó $P\ge \dfrac{1}{m}$. Câu chuyện tiếp theo là tìm m, quan sát thấy các biểu thức trong căn đều là tích của hai thừa số dương, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số thực dương nhưng phải thỏa mãn điều kiện điểm rơi. Với căn thức cuối, với điểm rơi $x=y\Leftrightarrow z+x=z+y$ thì ta có ngay rằng

$$\sqrt{(z+x)(z+y)}\le \frac{x+y+2z}{2}.$$

Cũng với tư duy đó, ta sẽ thấy:

$$\sqrt{6(x+y)(x+z)}\le \frac{3(x+y)+2(x+z)}{2}$$

$$\sqrt{6(y+z)(y+x)}\le \frac{3(y+z)+2(y+x)}{2}$$

Nên $\sqrt{6(x+y)(x+z)}+\sqrt{6(y+z)(y+z)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}\le \dfrac{3}{2}(3x+3y+2z)$.

Tức là $P\ge \dfrac{2}{3}\Rightarrow P_{\min}=\dfrac{2}{3}$ tại $x=y=1;\ z=2$.

Câu 61. Giả sử x, y, z là những số thực dương thỏa mãn điều kiện x + y + z = 1.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}} \ge 1.$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2 năm 2010-2011)

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}} \ge \frac{\sqrt{xy+z\left(x+y+z\right)}+x+y}{1+\sqrt{xy}}$$

$$\ge \frac{\sqrt{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}+x+y}{1+\sqrt{xy}} \ge \frac{\sqrt{xy}+z+x+y}{1+\sqrt{xy}} = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Câu 62. Cho các số thực không âm a,b thỏa mãn: $\left(a-b\right)^2 = a+b+2$.

Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{a^3}{\left(b+1\right)^3}\right)\left(1+\dfrac{b^3}{\left(a+1\right)^3}\right) \le 9$

(Trích đề thi Chuyên Đại học Vinh năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left(a-b\right)^2 = a+b+2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 = a+b+2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 = a+b+2+2ab \Leftrightarrow \left(a^2+a\right)+\left(b^2+b\right) = 2\left(ab+a+b+1\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(a+1\right)+b\left(b+1\right) = 2\left(a+1\right)\left(b+1\right) \Leftrightarrow \frac{a\left(a+1\right)+b\left(b+1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1} = 2$$

Đặt $x = \dfrac{a}{b+1}; y = \dfrac{b}{a+1} \Rightarrow x+y = 2$

Ta có:

$$\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right) \le 9$$

$$\Leftrightarrow 1+\left(xy\right)^3+x^3+y^3 \le 9$$

$$\Leftrightarrow \left(xy\right)^3+\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^2-3xy\right] \le 8$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^2y^2-6\right) \le 0$$

(do $0 \le xy \le \dfrac{\left(x+y\right)^2}{4} = 1$)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0; b = 2 \\ a = 2; b = 0 \end{array}\right.$

Câu 63. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{ab + bc + ca}{2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

(Trích đề thi Chuyên Đại học Vinh năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ta có $t \le a + b + c = 2$. Mặt khác

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{4}{3} > 1.$$

Suy ra $t > 1$. Do đó

$$\begin{aligned}
&(t-2)(t-1) \le 0 \Leftrightarrow 3t \ge t^2 + 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ge a^2 + b^2 + c^2 + 2 \\
&\Leftrightarrow 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ge (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) + 2 \\
&\Leftrightarrow 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ge 6 - 2(ab + bc + ca) \\
&\Leftrightarrow 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 2(ab + bc + ca) \ge 6.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
4P &= 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 2(ab + bc + ca) + \frac{4}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} \\
&\ge 6 + 3 = 9.
\end{aligned}$$

Suy ra $P \ge \frac{9}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 2, b = c = 0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$, đạt được khi $a = 2, b = c = 0$ hoặc các hoán vị.

Câu 64. Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2 + 4y = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + \frac{10}{x + y}$.

(Trích đề thi Chuyên Đại học Vinh năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết của bài toán ta có $4x + 4y \le 4 + x^2 + 4y = 4 + 8 = 12$.

Suy ra $0 < x + y \le 3$.

Khi đó, áp dụng BĐT Cô si ta được

$$P=x+y+\frac{9}{x+y}+\frac{1}{x+y}\ \geq 6+\frac{1}{x+y}\geq 6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=2,\ y=1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{19}{3}$, đạt khi $x=2, y=1.$

Câu 65. Với các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$

(Trích đề thi Chuyên Tin Lam Sơn năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bunyakovsky ta có :

$(a.1 + b.1 + c.1)^2 \leq (a^2 + 1^2 + 1^2)(b^2 + c^2 + 1) = (a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2)$ (1)

Do vai trò của a, b, c là như nhau theo nguyên lý Dirichlet thì trong 3 số $a^2 - 1$, $b^2 - 1$, $c^2 - 1$ luôn tồn tại 2 số cùng dấu, giả sử $b^2 - 1$; $c^2 - 1$

$\Rightarrow (b^2-1)(c^2-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow b^2c^2-b^2-c^2+1\geq 0$

$\Leftrightarrow b^2c^2+2b^2+2c^2+4\geq 3+3b^2+3c^2$

$\Leftrightarrow (b^2+2)(c^2+2)\geq 3(1+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a^2+2)(1+b^2+c^2)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $S = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2 = 3.9 = 27$

Vậy GTNN của S = 27 khi và chỉ khi a = b = c = 1

Câu 66. Cho *x, y, z* là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{z^4}{1+z^4\left(x^4+y^4\right)}$.

(Trích đề thi Chuyên Tin Lam Sơn năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Ta có: $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2\Rightarrow x.y^2+x^2.\frac{1}{z}+y.\frac{1}{z^2}=3$

Đặt $x=a, y=b, \frac{1}{z}=c\Rightarrow ab^2+a^2c+bc^2=3$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a^4+a^4+c^4+1\geq 4a^2c\Rightarrow 2a^4+c^4+1\geq 4a^2c$

Tương tự: $2b^4+a^4+1\geq 3ab^2$; $2c^4+b^4+1\geq 3c^2b$

Cộng theo vế ta được: $3\left(a^4+b^4+c^4\right)+3\geq 4\left(ab^2+a^2c+bc^2\right)=12\Rightarrow a^4+b^4+c^4\geq 3$

Ta có: $M=\frac{z^4}{1+z^4\left(x^4+y^4\right)}=\frac{1}{\frac{1}{z^4}+x^4+y^4}=\frac{1}{a^4+b^4+c^4}\leq\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{1}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1.

Câu 67. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn x + y + z $\leq \frac{3}{2}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)} + \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}$

(Trích đề thi Chuyên Lam Sơn năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Ta có

$$P = \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)} + \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}$$

$$P = \frac{\frac{(yz+1)^2}{z^2}}{\frac{(zx+1)}{x}} + \frac{\frac{(zx+1)^2}{x^2}}{\frac{(xy+1)}{y}} + \frac{\frac{(xy+1)^2}{y^2}}{\frac{(yz+1)}{z}}$$

$$P = \frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{z+\frac{1}{x}} + \frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{y}} + \frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{y+\frac{1}{z}}.$$

Áp dụng BĐT: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$. Dấu = xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$$P = \frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{z+\frac{1}{x}} + \frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{y}} + \frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{y+\frac{1}{z}} \geq \frac{\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$$

$$P \geq \left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Áp dụng BĐT : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

=> $P \geq x+y+z+\frac{9}{x+y+z} = \left[x+y+z+\frac{9}{4(x+y+z)}\right] + \frac{27}{4(x+y+z)}$

Ta có: $\left[x+y+z+\frac{9}{4(x+y+z)}\right] \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3$; $\frac{27}{4(x+y+z)} = \frac{27}{4.\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}$

=> $P \ge 3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$. Vậy $P\min=\frac{15}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Câu 68. Cho ba số thực x, y, x thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{xy}{z^2x+z^2y}+\frac{yz}{x^2y+x^2z}+\frac{zx}{y^2z+y^2z}$$

(Trích đề thi Chuyên Lam Sơn năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Ta có

$$T=\frac{xy}{z^2x+z^2y}+\frac{yz}{x^2y+x^2z}+\frac{zx}{y^2z+y^2z}=\frac{(xy)^2}{xy\left(z^2x+z^2y\right)}+\frac{(yz)^2}{yz\left(x^2y+x^2z\right)}+\frac{(zx)^2}{zx\left(y^2z+y^2z\right)}$$

$$=\frac{(xy)^2}{xyz(zx+zy)}+\frac{(yz)^2}{xyz(xy+xz)}+\frac{(zx)^2}{zxy(yz+yz)}=\frac{(xy)^2}{xz+yz}+\frac{(yz)^2}{xy+xz}+\frac{(zx)^2}{xy+yz}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(xy)^2}{xz+yz}+\frac{(yz)^2}{xy+xz}+\frac{(zx)^2}{xy+yz}\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{2(xy+yz+xz)}=\frac{xy+yz+zx}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2}=\frac{3}{2}$$

Do đó $T\ge\frac{3}{2}$ hay giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{3}{2}$. Dấu bằng xẩy ra khi $x=y=z=1$

Câu 69. Cho ba số dương a,b,c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{2011}.$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2011}{2}}.$

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thanh Hóa năm 2010-2011)

Hướng dẫn giải

Ta có $2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$.

Suy ra $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}$

Đặt $x=\sqrt{b^2+c^2}$, $y=\sqrt{c^2+a^2}$, $z=\sqrt{a^2+b^2}$,

suy ra $VT\ge\frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$

$$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}-x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}-y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}-z\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]$$

$$\ge \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2(y+z)-3x\right)+\left(2(z+x)-3y\right)+\left(2(x+y-3z)\right)\right]$$

Suy ra $VT \ge \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2011}{2}}$

Câu 70. Xét các số thực $a;b;c$ $(a \ne 0)$ sao cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $m;n$ thỏa mãn: $0 \le m \le 1; 0 \le n \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{2a^2-ac-2ab+bc}{a^2-ab+ac}$$

(Trích đề thi Chuyên tin Thái Bình năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

$ax^2+bx+c=0$ Có nghiệm *m, n* nên $\begin{cases} m+n=\frac{-b}{a} \\ mn=\frac{c}{a} \end{cases}$

$$Q=\frac{2a^2-ac-2ab+bc}{a^2-ab+ac}=\frac{(a-b)(2a-c)}{a^2-ab+ac}=\frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{c}{a}\right)}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}$$

Do $0 \le m \le 1; 0 \le n \le 1 \Rightarrow \begin{cases} mn \le 1 \\ m(n-1)+n(m-1)+(mn-1) \le 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} mn \le 1 \\ mn \le \frac{1}{3}(1+m+n) \end{cases} \Rightarrow Q \ge \frac{1+m+n}{1+m+n+\frac{1}{3}(1+m+n)} \Leftrightarrow Q \ge \frac{3}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{3}{4}$ khi $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a=c \end{cases}$

Câu 71. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} 0<a,\mathrm{b},\mathrm{c}<\frac{1}{2} \\ 2a+3b+4c=3 \end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2}{a(3b+4c-2)}+\frac{9}{b(4a+8c-3)}+\frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

(Trích đề thi Chuyên toán tin Thái Bình năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Ta có: $P=\frac{2}{a(1-2a)}+\frac{3}{b(1-2b)}+\frac{4}{c(1-2c)}=\frac{2a}{a^2(1-2a)}+\frac{3b}{b^2(1-2b)}+\frac{4c}{c^2(1-2c)}$

Áp dụng bất đẳng thức AG – GM ta có: $a^2(1-2a) \le \left[\dfrac{a+a+1-2a}{3}\right]^3 = \dfrac{1}{27}$

Tương tự : $b^2(1-2b) \le \dfrac{1}{27}; c^2(1-2c) \le \dfrac{1}{27}$

Suy ra: $P \ge 27(2a+3b+4c) = 81$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 81.

Câu 72. Cho x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn :$12x+10y+15z \le 60$.Tìm giá trị lớn nhất của $T = x^2+y^2+z^2-4x-4y-z$.

(Trích đề thi Chuyên Thái Bình năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Do x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn :$12x+10y+15z \le 60$.

Ta có $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x \le 5 \\ y \le 6 \\ z \le 4 \end{cases}$ (*)

Từ điều kiện trên ta có $T = x^2+y^2+z^2-4x-4y-z$

$$= x(x-5)+y(y-6)+z(z-4)+x+2y+3z$$

$$\le x+2y+3z \le \frac{12x}{5}+2y+3z \le \frac{60}{5} = 12$$

Vậy GTLN của T bằng 12 đạt được khi $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \\ z=0 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$

Câu 73. Cho các số thực $x \ge 1, y \ge 1, z \ge 1$ và thỏa mãn $3x^2+4y^2+5z^2=52$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức F = x + y + z.

(Trích đề thi Chuyên Thái Bình năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Bài bất đẳng thức này việc đầu tiên cũng như quan trọng nhất là phải tìm được dấu bằng từ đó sẽ tìm ra lời giải.

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 1 và z = 3.

Ta có $5\left(x^2+y^2+z^2\right) = 52+2x^2+y^2 \ge 52+2+1 = 55 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \ge 11$ (1)

Lại có $(x-1)(y-1) \ge 0 \Leftrightarrow xy+1 \ge x+y$

Chứng minh tường tự: $yz+1 \ge y+z$; $xz+1 \ge x+z$

Cộng lại theo vế ta được: $2\left(xy+yz+zx\right)+6\ge 4\left(x+y+z\right)\qquad (2)$

Lấy (1) + (2) ta được: $\left(x+y+z\right)^2\ge 5+4\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow x+y+z\ge 5$

Câu 74. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=a+b+c+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$.

(Trích đề thi Chuyên Nghệ An năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Từ đẳng thức $abc=a+b+c+2\Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{abc}=1$

Đặt $\frac{1}{a}=\frac{x}{y+z};\frac{1}{b}=\frac{y}{z+x};\frac{1}{c}=\frac{z}{x+y}(x,y,z>0)$

Ta có: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}\le \frac{1}{\sqrt{2ab}}+\frac{1}{\sqrt{2bc}}+\frac{1}{\sqrt{2ca}}$

Mặt khác: $\frac{1}{\sqrt{2ab}}=\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}.\frac{1}{\sqrt{2}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}$

Tương tự thì ta cũng có:

$$\frac{1}{\sqrt{2bc}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right).\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad \frac{1}{\sqrt{2ca}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z}+\frac{x}{y+x}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cộng vế theo vế ta có: $P\le \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$. Hay là $a=b=c=2$

Câu 75. Cho a,b,c thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab-2}}+\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}+\frac{1}{\sqrt{c^4+c^3+ac+2}}\le \sqrt{3}$$

(Trích đề thi Chuyên Nghệ An năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left(a-1\right)^2\left(a^2+a+1\right)\ge 0\Leftrightarrow \left(a^2-2a+1\right)\left(a^2+a+1\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^4-a^3-a+1\ge 0\Leftrightarrow a^4-a^3+1\ge a$$
$$\Leftrightarrow a^4-a^3+ab+2\ge ab+a+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab+2}}\le \frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}\le\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}};\frac{1}{\sqrt{c^4-c^3+ac+2}}\le\frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}$$

Như vậy

$$VT\le\frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}}+\frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}\le\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}$$

(Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho 3 số)

Lại có

$$\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{a^2bc+abc+ab}\right)}$$

$$=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{ab}{a+ab+1}\right)}=\sqrt{3}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 76. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{\left(a+b\right)^2}+\frac{b^2}{\left(b+c\right)^2}+\frac{c}{4a}$$

(Trích đề thi Chuyên Nghệ An năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Ta có: $P=\frac{a^2}{\left(a+b\right)^2}+\frac{b^2}{\left(b+c\right)^2}+\frac{c}{4a}=\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{c}{4a}$

Đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b}\ \left(x,y>0\right)$.

Thay vào ta được: $P=\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}+\frac{xy}{4}$

Ta chứng minh: $\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}\ge\frac{1}{1+xy}\qquad\left(*\right)$

Thật vậy: $\left(*\right)\Leftrightarrow\left(1-xy\right)^2+x\left(x-y\right)^2\ge0$ (luôn đúng với $\forall x,y>0$)

Từ (*) suy ra: $P\ge\frac{1}{1+xy}+\frac{xy}{4}\Rightarrow P\ge\left(\frac{1}{1+xy}+\frac{1+xy}{4}\right)-\frac{1}{4}\ge2\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

$$P=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy giá khi nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ khi $a=b=c.$

Câu 77. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x \geq z$. Chứng minh rằng: $\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z} \geq \frac{5}{2}$.

(Trích đề thi HSG Thanh Hóa năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Ta có $P = \frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z} = \frac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1}+\frac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1}+\frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$

$$= \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1}+\frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1}+\frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}} = \frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1}+\frac{1+2c^2}{1+c^2},$$

trong đó $a^2 = \frac{x}{y}, b^2 = \frac{y}{z}, c^2 = \frac{z}{x}$ $(a,b,c>0)$

Nhận xét rằng $a^2.\,b^2 = \frac{x}{z} = \frac{1}{c^2} \geq 1$ $(do\ x \geq z)$.

Xét $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1}-\frac{2ab}{ab+1} = \frac{a^2(a^2+1)(ab+1)+b^2(b^2+1)(ab+1)-2aba^2(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)}$

$$= \frac{ab(a^2-b^2)^2+(a-b)(a^3-b^3)+(a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0$$

Do đó $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1} \geq \frac{2ab}{ab+1} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1} = \frac{2}{1+c}$ (1). Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Khi đó $\frac{2}{1+c}+\frac{1+2c^2}{c^2+1}-\frac{5}{2} = \frac{2\left(2(1+c^2)+(1+c)(1+2c^2)\right)-5(1+c)(1+c^2)}{2(1+c)(1+c^2)}$

$$= \frac{1-3c+3c^2-c^3}{2(1+c)(1+c^2)} = \frac{(1-c)^3}{2(1+c)(1+c^2)} \geq 0 \quad (do\ c \leq 1)\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi $a = b,\ c = 1 \Leftrightarrow x = y = z.$

Câu 78. Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}$.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thanh Hóa năm 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Ta có: $B=\dfrac{1}{(x+y)^3-3xy(x+y)}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{1-3xy}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1-2xy}{xy(1-3xy)}$.

Theo Côsi: $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$.

Gọi B_o là một giá trị của B, khi đó, ∃x, y để:

$B_o=\dfrac{1-2xy}{xy(1-3xy)} \Leftrightarrow 3B_o(xy)^2-(2+B_o)xy+1=0$ (1)

Để tồn tại x, y thì (1) phải có nghiệm xy $\Leftrightarrow \Delta = B_o^2-8B_o+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B_o\ge 4+2\sqrt{3}\\ B_o\le 4-2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Để ý rằng với giả thiết bài toán thì B > 0. Do đó ta có: $B_o\ge 4+2\sqrt{3}$.

Với $B_o=4+2\sqrt{3}\Rightarrow xy=\dfrac{2+B_o}{6B_o}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}\Rightarrow x(1-x)=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}$

$\Leftrightarrow x^2-x+\dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, x=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$.

Vậy, $B_{min}=4+2\sqrt{3}$, đạt được khi $x=\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$ hoặc

$x=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$, $y=\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$.

Câu 79. Tìm GTNN và GTLN của xy biết x và y là nghiệm của phương trình :

$$x^4+y^4-3=xy\left(1-2xy\right) \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^4+y^4-3=xy\left(1-2xy\right) \Leftrightarrow xy+3=\left(x^2+y^2\right)^2\ge 4x^2y^2$

Đặt t = xy bất phương trình trở thành:

$$4t^2-t-3\le 0\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(4t+3\right)\le 0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le t\le 1.$$

Vậy GTNN của xy là $-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2\\ xy=-\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=-y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

GTLN của xy là $1\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow x=-y=\pm 1$

Câu 80. Tìm GTNN và GTLN của A = xyz biết x, y và z là nghiệm của phương trình :

$$x^2+2y^2+2x^2z^2+y^2z^2+3x^2y^2z^2=9 \qquad (2)$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \left(x^2+y^2z^2\right)+2\left(y^2+x^2z^2\right)+3x^2y^2z^2=9$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$2|A|+4|A|+3A^3 \le 9 \Leftrightarrow A^2+2|A|-3 \le 0 \Leftrightarrow \left(|A|-1\right)\left(|A|+3\right) \le 0 \Leftrightarrow |A| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le A \le 1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -1 khi 2 trong 3 số x, y, z đều bằng 1 (hoặc đều bằng -1), số còn lại bằng -1.

Giá trị lớn nhất của A là 1 khi hai trong ba số x, y, z đều bằng 1 (hoặc đều bằng -1), số còn lại bằng 1.

Câu 81. Cho x, y là các số thực thoả mãn $x^2\left(x^2+2y^2-3\right)+\left(y^2-2\right)^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=x^2+y^2$.

(Trích đề thi Chuyên Ninh Bình năm 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^2\left(x^2+2y^2-3\right)\left(y^2-2\right)^2=1 \Leftrightarrow x^4+2x^2y^2-3x^2+y^4-4y^2+4=1$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^2y^2+y^4-4\left(x^2+y^2\right)+x^2+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+3=-x^2 \le 0\ \forall x$$

Với $x^2+y^2=C$ thì ta có $C^2-4C+3 \le 0 \Leftrightarrow C^2-4C+4 \le 1 \Leftrightarrow (C-2)^2 \le 1$

$$\Leftrightarrow |C-2| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le C-2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le C \le 3$$

$$C=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases};\ C=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $\min C=1$ khi $x=0$ và $y=\pm 1$; $\max C=3$ khi $x=0$ và $y=\pm\sqrt{3}$.

Câu 82. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \ge 3.$$

(Trích đề thi Chuyên Nam Định năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2(2a^2+b^2+c^2)-(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=2-\dfrac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$

Làm tương tự và cộng lại ta được bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \le 3.$$

Áp dụng BĐT AM-GM – Schwarz cho 4 số dương $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}\ge\frac{\left(x+y\right)^2}{m+n}$, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\le\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Ta có hai BĐT tương tự, cộng từng vế ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}$$

$$\le\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)+\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)$$

$$=\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

$=3$

$\Rightarrow$ BĐT đã cho được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 83. Cho $a,b,c>0;\ a+b+c\ge 9$, tìm GTNN của: $A=2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}+3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}$

(Trích đề thi Chuyên Hải Phòng năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta được:

$$\left(a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}\right)\left(1+3+5\right)\ge\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)}{3}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}\ge\frac{\left(1+3+5\right)^2}{a+b+c}=\frac{81}{a+b+c}\Rightarrow 3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}\ge\frac{27}{\sqrt{a+b+c}}$$

Do đó:

$$A=2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}+3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)}{3}+\frac{27}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$=\frac{a+b+c}{6}+\frac{a+b+c}{2}+\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}+\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}\ge\frac{9}{6}+3\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{2}.\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}.\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}}$$

$$=\frac{9}{6}+3.\frac{9}{2}=\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=15$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1,\ b=3,\ c=5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 15.

Câu 84. Cho a, b, c dương và thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{4x^2-yz+2}+\frac{1}{4y^2-zx+2}+\frac{1}{4z^2-xy+2}$$

(Trích đề thi Chuyên Nam Định năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\frac{1}{4x^2-yz+2}=\frac{1}{4x^2-yz+2(xy+yz+zx)}=\frac{1}{4x^2+2xy+yz+2zx}=\frac{1}{(2x+y)(2x+z)}.$$

Tương tự, ta có $S=\frac{1}{(2x+y)(2x+z)}+\frac{1}{(2y+z)(2y+x)}+\frac{1}{(2z+x)(2z+y)}$

$$\Leftrightarrow S=\frac{yz}{(2xz+yz)(2xy+yz)}+\frac{xz}{(2xy+xz)(2yz+xz)}+\frac{xy}{(2yz+xy)(2xz+xy)}$$

Với mọi a,b ta có $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Rightarrow ab\le \frac{(a+b)^2}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$S\ge \frac{yz}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}+\frac{xz}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}+\frac{xy}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow S\ge \frac{xy+yz+zx}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}=\frac{1}{xy+yz+zx}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 1.

Câu 85. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x-y)(x-z)=1$ và $y\ne z$. Chứng minh: $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge 4$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}=\frac{(y-z)^2+2(x-y)(x-z)}{(x-y)^2(x-z)^2}$

$$=\frac{(y-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}+2.\frac{1}{(x-y)(x-z)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge \frac{(y-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}+2.\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(z-x)^2}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq} \frac{4}{(x-y)(x-z)} = 4$$

Câu 86. Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y} - \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{1}{4}$

(Trích đề thi Chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x + \frac{1}{4} \geq \sqrt{x} \quad (1);$$

$$y + \frac{1}{4} \geq \sqrt{y} \quad (2);$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (3).$$

Cộng theo vế (1) và (2): $x + y + \dfrac{1}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (4)$

Nhân theo vế (3) và (4):

$$(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x+y) \geq 2\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \quad (5)$$

Chia của 2 vế của (5) cho $2(x+y)$ được:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} \Rightarrow \frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{4} \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{4}$.

Câu 87. Cho các số x, y dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{(x+2y)^2+1}-1} + \frac{(2x+y)(x+2y)}{4} - \frac{8}{3(x+y)}$$

(Trích đề thi Chuyên Phú Thọ năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Đặt $2x+y=a,\ x+2y=b$ và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P = \frac{2}{\sqrt{a^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{b^3+1}-1} + \frac{ab}{4} - \frac{8}{a+b}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}-1} + \frac{2}{\sqrt{(b+1)(b^2-a+1)}-1} + \frac{ab}{4} - \frac{8}{a+b}$$

$$\geq \frac{2}{\frac{a+1+a^2-a+1}{2}-1} + \frac{2}{\frac{b+1+b^2-a+1}{2}-1} + \frac{ab}{4} - \frac{4}{\sqrt{ab}} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{ab}{4} - \frac{4}{\sqrt{ab}}$$

$$\geq \frac{8}{ab} + \frac{ab}{4} - \frac{4}{\sqrt{ab}}$$

Đặt $t=\sqrt{ab}$. Ta sẽ chứng minh: $\frac{8}{t^2}+\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t}\ge 1$ (*)

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow (t-2)^2(t^2+4t+8)\ge 0$

Vậy $P\ge 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 88. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}+\frac{yz}{y^2+zx+xy}+\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

(Trích đề thi Chuyên Bình Thuận năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta có:

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}\le\frac{xy(y^2+yz+zx)}{(x^2+yz+zx)(y^2+yz+zx)}\le\frac{xy(y^2+yz+zx)}{(xy+yz+zx)^2}$$

Tương tự: $\frac{yz}{y^2+zx+xy}\le\frac{yz(z^2+zx+xy)}{(xy+yz+zx)^2}$; $\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{zx(x^2+xy+yz)}{(xy+yz+zx)^2}$

Suy ra $\frac{xy}{x^2+yz+zx}+\frac{yz}{y^2+zx+xy}+\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}{(xy+yz+zx)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Câu 89. Cho hai số thực *a, b* đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}+\sqrt{3ab+4}\ge\frac{11}{2}.$$

(Trích đề thi Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Ta có: $a\sqrt{b-1}\le a.\frac{b-1+1}{2}=\frac{ab}{2}$.

Tương tự: $b\sqrt{a-1}\le b.\frac{a-1+1}{2}=\frac{ab}{2}\Rightarrow\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}\ge\frac{6}{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=2$.

$Q=\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}+\sqrt{3ab+4}\ge\frac{6}{ab}+\sqrt{3ab+4}=\frac{18}{3ab}+\sqrt{3ab+4}$.

Đặt $y=\sqrt{3ab+4}\Rightarrow 3ab=y^2-4$. Khi đó:

$Q\ge\frac{18}{y^2-4}+y=\frac{18}{(y+2)(y-2)}+\frac{3}{4}(y-2)+\frac{1}{4}(y+2)+1\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{18.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}}+1=\frac{11}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $y = 2$ hay $a = b = 2$.

Câu 90. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a^2+6a+3}{a^2+a} + \frac{b^2+6b+3}{b^2+b} + \frac{c^2+6c+3}{c^2+c}$$

(Trích đề thi Chuyên Bắc Ninh năm 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a^2+6a+3}{a^2+a} = \frac{(3a^2+3)+6a-2a^2}{a^2+a} \overset{AM-GM}{\ge} \frac{6a+6a-2a^2}{a^2+a} = \frac{12a-2a^2}{a^2+a} = \frac{14}{a+1} - 2$$

Tương tự: $\frac{b^2+6b+3}{b^2+b} \ge \frac{14}{b+1} - 2$; $\frac{c^2+6c+3}{c^2+c} \ge \frac{14}{c+1} - 2$

Cộng theo vế và sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng cộng mẫu số ta được:

$$M = \frac{a^2+6a+3}{a^2+a} + \frac{b^2+6b+3}{b^2+b} + \frac{c^2+6c+3}{c^2+c} \ge 14\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) - 6$$

$$\ge 14.\frac{9}{a+b+c+3} - 6 \ge 14.\frac{9}{3+3} - 6 = 15$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 91. Cho x, y là số thực dương nhỏ hơn 1.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$$

(Trích đề thi Chuyên Tây Ninh năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{Q} = \frac{(x+y)(1-x)(1-y)}{xy(1-x-y)} = \frac{(x+y)(1-x-y+xy)}{xy(1-x-y)} = \frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{1-x-y} = \frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{1-(x+y)}$$

Đặt t = x + y, ta được:

$$\frac{1}{Q} = \frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{1-(x+y)} \ge \frac{4(x+y)}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{1-(x+y)} = \frac{4}{x+y} + \frac{x+y}{1-(x+y)} = \frac{4}{t} + \frac{t}{1-t}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$\frac{1}{Q} = \frac{4}{t} + \frac{t}{1-t} = \frac{2^2}{t} + \frac{1}{1-t} - 1 \ge \frac{(2+1)^2}{t+1-t} - 1 = \frac{9}{1} - 1 = 8 \Rightarrow Q \le \frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\frac{1}{8}$

Câu 92. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{2017}{2017+b} + \frac{2018}{2018+c} \le 1$

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = abc$.

(Trích đề thi Chuyên Hà Tĩnh năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}+\frac{2018}{2018+c}\le 1 \Rightarrow 1-\frac{2018}{2018+c}\ge \frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2018+c}\ge \frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}\overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{\frac{1}{1+a}.\frac{2017}{2017+b}}$$

Tương tự: $\dfrac{b}{2017+b}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{1+a}.\dfrac{2018}{2018+c}}$; $\dfrac{a}{1+a}\ge 2\sqrt{\dfrac{2017}{2017+b}.\dfrac{2018}{2018+c}}$

Nhân theo vế ta được:

$$\frac{abc}{(a+1)(2017+b)(2018+c)}\ge 8\frac{2017.2018}{(a+1)(2017+b)(2018+c)} \Leftrightarrow abc \ge 8.2017.2018$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1, b = 2017, c = 2018$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 8.2017.2018

Câu 93. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $2\sqrt{xy}+\sqrt{\dfrac{x}{3}}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức: $P=\dfrac{x}{y}+\dfrac{4x}{3y}+15xy$.

(Trích đề thi Chuyên Bắc Giang năm 2017-2018)

Hướng dẫn giải

Tách và áp dụng BĐT AM-GM ta được:

$$P=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{3y}+3xy+12xy+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+2.\sqrt{\frac{x}{3y}.3xy}+2\sqrt{12xy.\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}$$

$$\ge 2+2x+8\sqrt{xy}-\frac{4}{3}=2x+\frac{2}{3}+8\sqrt{xy}\ge 2\sqrt{2x.\frac{2}{3}}+8\sqrt{xy}=4\sqrt{\frac{x}{3}}+8\sqrt{xy}=4$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{3}$

Câu 94. Cho x, y, z là số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\dfrac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $x+2xy+4xyz\le 2$

(Trích đề thi Chuyên Nam Định năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$x+2xy+4xyz=x+x.4y\left(z+\frac{1}{2}\right)$$
$$\le x+x.\left(y+z+\frac{1}{2}\right)^2=x+x\left(\frac{3}{2}-x+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=x+x(2-x)^2=x-2+x(2-x)^2+2$$
$$=(x-2)(1+x^2-2x)+2$$
$$=(x-2)(x-1)^2+2$$

Do $x+y+z=\frac{3}{2}\Rightarrow 0<x<2\Rightarrow x-2<0$. Vì thế:

$x+2xy+4xyz\le(x-2)(x-1)^2+2\le 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x=1, y=\frac{1}{2}, z=0$

Câu 95. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge 4$.

(Trích đề thi Chuyên Hà Nam năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VT=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+2+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta được:

$$VT\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}}+\frac{1}{2}+2$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2=4\ (\text{dpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 96. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $abc\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

(Trích đề thi Chuyên Vĩnh Phúc năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$b+\sqrt{ac}\le b+\frac{a+c}{2}=\frac{a+2b+c}{2}\Rightarrow\sqrt{b+\sqrt{ac}}\le\sqrt{\frac{a+2b+c}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{4(a+2b+c)}}\ge\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}$$

Mặt khác:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\Rightarrow\frac{4}{3}(a+b+c)\ge 4\Rightarrow\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}\ge\frac{12\sqrt{2}a}{7a+10b+7c}$$

Do đó:

$$VT\ge 12\sqrt{2}\left(\frac{a}{7a+10b+7c}+\frac{b}{7b+10c+7a}+\frac{c}{10a+7b+7c}\right)$$

$$\ge 12\sqrt{2}\frac{(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)}$$

Mặt khác:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow 7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)\le 8(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)}\ge\frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{8(a+b+c)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\ (dpcm)$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 97. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}$$

(Trích đề thi Chuyên Quảng Nam năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}=\frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4}\ge\frac{2ab+2a+6}{ab+a+4}=\frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4}=2-\frac{2}{ab+a+4}$$

Tương tự: $\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}\ge 2-\frac{2}{bc+b+4}$; $\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}\ge 2-\frac{2}{ca+c+4}$

Do đó: $P\ge 6-2\left(\frac{1}{ab+a+4}+\frac{1}{bc+b+4}+\frac{1}{ca+c+4}\right)=6-2Q$

Với x, y dương ta có:

$$(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{ab+a+4}=\frac{1}{(ab+a+1)+3}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{3}\right)$.

Tương tự: $\frac{1}{bc+b+4}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{ca+c+4}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ca+c+1}+\frac{1}{3}\right)$

Do đó:

$$Q\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)\Rightarrow 2Q=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$\Rightarrow P\ge 6-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{ac}{bc.ac+abc+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ca+c+1}+\frac{ac}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}.2$$

$$=5$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

Câu 98. Cho $x;y;z$ là ba số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{x^2+z^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$

(Trích đề thi Chuyên Hải Phòng năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{x^3}{x^2+z^2}=x-\frac{xz^2}{x^2+z^2}\ge x-\frac{xz^2}{2xz}=x-\frac{z}{2}$.

Tương tự $\frac{y^3}{y^2+z^2}\ge y-\frac{z}{2}$. Suy ra $P\ge x+y-z+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Theo gt $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}\Rightarrow P\ge x+y+\frac{4}{x+y}\ge 4$.

Vậy $P_{min}=4\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 99. Với x, y là cá số thực thỏa mãn $(2+x)(y-1)=\frac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$.

(Trích đề thi Chuyên Hưng Yên năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$
$=\sqrt{1+(x+1)^4}+\sqrt{1+(y-2)^4}$

Đặt $a=x+1,\ b=y-2$, ta được $A=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$

Từ giả thiết ta được: $(a+1)(b+1)=\frac{9}{4}\Leftrightarrow a+b+ab=\frac{5}{4}$

Theo AM – GM ta có:

$\begin{cases}4a^2+1\ge 4a\\4b^2+1\ge 4b\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2\ge a+b-\frac{1}{2}\quad (1)$

$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow \frac{1}{2}(a^2+b^2)\ge ab\qquad (2)$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được: $\frac{3}{2}(a^2+b^2)\ge a+b+ab-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Minicopski ta được:

$A=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}\ge\sqrt{(1+1)^2+(a^2+b^2)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)^2+4}$
$\ge\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2},y=\frac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Câu 100. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}+\frac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx}+\frac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy}\ge 4xyz.$

(Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Chứng minh được: $2x^2+y^2+z^2\ge 2x(y+z)$.

Tương tự ta có $2y^2+z^2+x^2\ge 2y(z+x),\ 2z^2+x^2+y^2\ge 2z(x+y)$.

Do đó ta sẽ chứng minh $\frac{x(y+z)}{4-yz}+\frac{y(z+x)}{4-zx}+\frac{z(x+y)}{4-xy}\ge 2xyz$.

Bất đẳng thức này tương đương với $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge 1.$

Ta có $\frac{y+z}{(4-yz)2yz} \ge \frac{2\sqrt{yz}}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\left(2+\sqrt{yz}\right)2yz} = \frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)}$, dễ có

$0 < \left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz} = -\left(\sqrt{xy}-1\right)^2 + 1 \le 1$ nên $\frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)} \ge \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$.

Vậy nên $\frac{y+z}{(4-yz)2yz} \ge \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$, tương tự có $\frac{z+x}{(4-zx)2zx} \ge \frac{1}{2+\sqrt{zx}}$ và

$\frac{x+y}{(4-xy)2xy} \ge \frac{1}{2+\sqrt{xy}}$.

Do đó $\frac{y+z}{(4-yz)2yz} + \frac{z+x}{(4-zx)2zx} + \frac{x+y}{(4-xy)xy} \ge \frac{1}{2+\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+\sqrt{zx}}$.

Với $a, b, c>0$ có

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \ge 3+2+2+2 = 9$ nên

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ (*).

Áp dụng (*) ta có $\frac{1}{2+\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+\sqrt{zx}} \ge \frac{9}{6+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}} \ge 1$;

(Vì $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \le \frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2} = x+y+z = 3$).

Vậy $\frac{y+z}{(4-yz)2yz} + \frac{z+x}{(4-zx)2zx} + \frac{x+y}{(4-xy)xy} \ge 1$.

Do vậy ta có $\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz} + \frac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx} + \frac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy} \ge 4xyz$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

CẨM NANG BẤT ĐẲNG THỨC

Mục lục

TÀI LIỆU KHAM KHẢO

1. EE. Vrosovo, NS Denisova, *Thực hành giải toán sơ cấp*, người dịch Hoàng Thị Thanh Liêm, Nguyễn Thị Ninh, Nguyễn Văn Quyết, NXBGD, 1986.
2. Lê Duy Thiện , *Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski để giải một bài toán cực trị đại số*, Sáng kiến kinh nghiệm 2009, Trường THPT Lang Chánh, Thanh Hóa.
3. Nguyễn Ngọc Duy – Nguyễn Tăng Vũ, *Bất đẳng thức AM - GM*, Trung tâm bồi dưỡng kiến thức Quang Minh, Thành phố Hồ Chí Minh.
4. Nguyễn Việt Hải, *Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM-GM (AM - GM)*, Trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.
5. Nguyễn Văn Mậu, *Bài giảng Chuyên đề đẳng thức và bất đẳng thức*, Chương trình bồi dưỡng chuyên đề toán, Hà Nội, 11/12/2009.
6. Nguyễn Ngọc Sang, *Phương pháp chứng minh bất đẳng thức AM - GM*, Sáng kiến kinh nghiệm 2009, Trường THPT Nguyễn Huệ, Thanh Hóa.
7. Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri thức.
8. Tạp chí Toán học Tuổi trẻ.
9. Trần Phương – Nguyễn Đức Tấn, *Sai lầm thường gặp và sáng tạo khi giải toán*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2004.
10. Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Phương pháp giải toán bất đẳng thức, cực trị*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.
11. www.tailieumontoan.com

TỦ SÁCH TOÁN CẤP 2

MỌI Ý KIẾN THẮC MẮC XIN VUI LÒNG GỬI VỀ ĐỊA CHỈ

NGUYỄN QUỐC BẢO

Zalo: 039.373.2038

Tailieumontoan.com@gmail.com

Website: Tailieumontoan.com