Số tự nhiên, đẳng thức và sắp thứ tự dãy số

Bài giảng của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Chương 1. Số tự nhiên, phép đếm
Chương 2. Đẳng thức và thứ tự sắp được của dãy số

Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội
Khoa Toán-Cơ-Tin học, Đại Học Khoa Học Tự Nhiên
334 Nguyễn Trãi, Quận Thanh Xuân, Hà Nội

Hà Nội 06/10/2009

Nội dung

1. Bài 1. Mở đầu
2. Bài 2. Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm
3. Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số
4. Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản và bất đẳng thức liên quan
5. Bài 5. Phương trình bậc ba
6. Bài 6. Phương trình bậc bốn

Nội dung

1. Bài 1. Mở đầu
2. Bài 2. Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm
3. Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số
4. Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản và bất đẳng thức liên quan
5. Bài 5. Phương trình bậc ba
6. Bài 6. Phương trình bậc bốn

Nội dung

1. Bài 1. Mở đầu
2. Bài 2. Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm
3. Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số
4. Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản và bất đẳng thức liên quan
5. Bài 5. Phương trình bậc ba
6. Bài 6. Phương trình bậc bốn

Nội dung

1. Bài 1. Mở đầu
2. Bài 2. Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm
3. Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số
4. Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản và bất đẳng thức liên quan
5. Bài 5. Phương trình bậc ba
6. Bài 6. Phương trình bậc bốn

Nội dung

1. Bài 1. Mở đầu
2. Bài 2. Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm
3. Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số
4. Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản và bất đẳng thức liên quan
5. Bài 5. Phương trình bậc ba
6. Bài 6. Phương trình bậc bốn

Nội dung

1. Bài 1. Mở đầu
2. Bài 2. Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm
3. Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số
4. Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản và bất đẳng thức liên quan
5. Bài 5. Phương trình bậc ba
6. Bài 6. Phương trình bậc bốn

Bài 1: Mở đầu

Số tự nhiên

1. Phép đếm, tính chẵn lẻ
   - Số 0
   - Số nghiệm của phương trình
   - Tập hợp và hoán vị
2. Số học và Đại số
3. Đại số và Giải tích
4. Bài toán cơ bản
5. Bài toán ngược

Bài 1: Mở đầu

Số tự nhiên

1. Phép đếm, tính chẵn lẻ
   - Số 0
   - Số nghiệm của phương trình
   - Tập hợp và hoán vị
2. Số học và Đại số
3. Đại số và Giải tích
4. Bài toán cơ bản
5. Bài toán ngược

Bài 1: Mở đầu

Số tự nhiên

1. Phép đếm, tính chẵn lẻ
   - Số 0
   - Số nghiệm của phương trình
   - Tập hợp và hoán vị
2. Số học và Đại số
3. Đại số và Giải tích
4. Bài toán cơ bản
5. Bài toán ngược

Bài 1: Mở đầu

Số tự nhiên

1. Phép đếm, tính chẵn lẻ
   - Số 0
   - Số nghiệm của phương trình
   - Tập hợp và hoán vị
2. Số học và Đại số
3. Đại số và Giải tích
4. Bài toán cơ bản
5. Bài toán ngược

Bài 1: Mở đầu

Số tự nhiên

1. Phép đếm, tính chẵn lẻ
   - Số 0
   - Số nghiệm của phương trình
   - Tập hợp và hoán vị
2. Số học và Đại số
3. Đại số và Giải tích
4. Bài toán cơ bản
5. Bài toán ngược

Bài 2: Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm

Ví dụ

1. Tính số các số nguyên thuộc (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$
2. Xác định điều kiện đối với a, b để trong (a, b) có 2009 số nguyên.
3. Dãy $x_1.x_2, \ldots, x_n$ có bao nhiêu số 1, biết rằng
$$x_n = 1 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] \neq \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
$$x_n = 0 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
4. **Bài toán tổng quát:** Tính số phần tử từ các cấp số cộng, cấp số nhân, cấp số tổng quát trong tập đã cho.

Bài 2: Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm

Ví dụ

1. Tính số các số nguyên thuộc (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$
2. Xác định điều kiện đối với a, b để trong (a, b) có 2009 số nguyên.
3. Dãy $x_1.x_2, \ldots, x_n$ có bao nhiêu số 1, biết rằng
$$x_n = 1 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] \neq \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
$$x_n = 0 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
4. **Bài toán tổng quát:** Tính số phần tử từ các cấp số cộng, cấp số nhân, cấp số tổng quát trong tập đã cho.

Bài 2: Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm

Ví dụ

1. Tính số các số nguyên thuộc (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$
2. Xác định điều kiện đối với a, b để trong (a, b) có 2009 số nguyên.
3. Dãy $x_1.x_2, \ldots, x_n$ có bao nhiêu số 1, biết rằng
$$x_n = 1 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] \neq \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
$$x_n = 0 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
4. **Bài toán tổng quát:** Tính số phần tử từ các cấp số cộng, cấp số nhân, cấp số tổng quát trong tập đã cho.

Bài 2: Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm

Ví dụ

1. Tính số các số nguyên thuộc (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$
2. Xác định điều kiện đối với a, b để trong (a, b) có 2009 số nguyên.
3. Dãy $x_1.x_2, \ldots, x_n$ có bao nhiêu số 1, biết rằng
$$x_n = 1 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] \neq \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
$$x_n = 0 \text{ khi } \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]$$
4. **Bài toán tổng quát:** Tính số phần tử từ các cấp số cộng, cấp số nhân, cấp số tổng quát trong tập đã cho.

Bài 2: Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm

Ví dụ

1. Bài toán về gà siêu trứng:
   Cứ một con gà rưỡi, trong một ngày rưỡi cho một quả trứng rưỡi,
   Hỏi một con gà trong một tháng (30 ngày) cho bao nhieu quả trứng?
   Hỏi ba con gà trong một tuần rưỡi cho bao nhiêu quả trứng?
2. Tính chất của phân số.
   Bài toán. Cho $a, b, c > 0$, xét hàm số
   $f(t) = \frac{a^t}{b^t + c^t} + \frac{b^t}{c^t + a^t} + \frac{c^t}{a^t + b^t}$. Chứng minh rằng $f(t)$ là hàm đồng biến trong $[0, \infty)$.
3. **Bài toán.** Cho $a, b, c > 0$, Chứng minh rằng
   $$\frac{a^5}{b^5 + c^5} + \frac{b^5}{c^5 + a^5} + \frac{c^5}{a^5 + b^5} \geq \frac{a^4}{b^4 + c^4} + \frac{b^4}{c^4 + a^4} + \frac{c^4}{a^4 + b^4}.$$

Bài 2: Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm

Ví dụ

1. Bài toán về gà siêu trứng:
   Cứ một con gà rưỡi, trong một ngày rưỡi cho một quả trứng rưỡi,
   Hỏi một con gà trong một tháng (30 ngày) cho bao nhieu quả trứng?
   Hỏi ba con gà trong một tuần rưỡi cho bao nhiêu quả trứng?
2. Tính chất của phân số.
   Bài toán. Cho $a, b, c > 0$, xét hàm số
   $f(t) = \dfrac{a^t}{b^t + c^t} + \dfrac{b^t}{c^t + a^t} + \dfrac{c^t}{a^t + b^t}$. Chứng minh rằng $f(t)$ là hàm đồng biến trong $[0, \infty)$.
3. **Bài toán.** Cho $a, b, c > 0$, Chứng minh rằng
   $$\frac{a^5}{b^5 + c^5} + \frac{b^5}{c^5 + a^5} + \frac{c^5}{a^5 + b^5} \geq \frac{a^4}{b^4 + c^4} + \frac{b^4}{c^4 + a^4} + \frac{c^4}{a^4 + b^4}.$$

Bài 2: Số tự nhiên, số nguyên và phép đếm

Ví dụ

1. Bài toán về gà siêu trứng:
   Cứ một con gà rưỡi, trong một ngày rưỡi cho một quả trứng rưỡi,
   Hỏi một con gà trong một tháng (30 ngày) cho bao nhieu quả trứng?
   Hỏi ba con gà trong một tuần rưỡi cho bao nhiêu quả trứng?
2. Tính chất của phân số.
   Bài toán. Cho $a, b, c > 0$, xét hàm số
   $f(t) = \dfrac{a^t}{b^t + c^t} + \dfrac{b^t}{c^t + a^t} + \dfrac{c^t}{a^t + b^t}$. Chứng minh rằng $f(t)$ là hàm đồng biến trong $[0, \infty)$.
3. **Bài toán.** Cho $a, b, c > 0$, Chứng minh rằng
   $$\frac{a^5}{b^5 + c^5} + \frac{b^5}{c^5 + a^5} + \frac{c^5}{a^5 + b^5} \geq \frac{a^4}{b^4 + c^4} + \frac{b^4}{c^4 + a^4} + \frac{c^4}{a^4 + b^4}.$$

Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số

So sánh

1. Sắp xếp cặp số dương (biểu đồ hình thang)

$$\min\{a,b\} \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \max\{a,b\}$$

$$\min\{a,b\} \le \left(\frac{a^q+b^q}{2}\right)^{1/q} \le \max\{a,b\}$$

2. So sánh và sắp thứ tự: $2^{\sqrt{2}}, 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, 3$
3. Xác định $\min, \max, \mathrm{med}$, khái niệm thứ tự gần đều
4. Khái niệm sắp thứ tự dần đều, xa đều

Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số

So sánh

1. Sắp xếp cặp số dương (biểu đồ hình thang)
$$\min\{a,b\} \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \max\{a,b\}$$
$$\min\{a,b\} \le \left(\frac{a^q+b^q}{2}\right)^{1/q} \le \max\{a,b\}$$
2. So sánh và sắp thứ tự: $2^{\sqrt{2}}, 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, 3$
3. Xác định min, max, med, khái niệm thứ tự gần đều
4. Khái niệm sắp thứ tự dần đều, xa đều

Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số

So sánh

1. Sắp xếp cặp số dương (biểu đồ hình thang)
$$\min\{a,b\} \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \max\{a,b\}$$
$$\min\{a,b\} \le \left(\frac{a^q+b^q}{2}\right)^{1/q} \le \max\{a,b\}$$
2. So sánh và sắp thứ tự: $2^{\sqrt{2}}, 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, 3$
3. Xác định $\min, \max, \mathrm{med}$, khái niệm thứ tự gần đều
4. Khái niệm sắp thứ tự dần đều, xa đều

Bài 3. So sánh, sắp thứ tự bộ số

So sánh

1. Sắp xếp cặp số dương (biểu đồ hình thang)

$$\min\{a, b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max\{a, b\}$$

$$\min\{a, b\} \leq \left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{1/q} \leq \max\{a, b\}$$

2. So sánh và sắp thứ tự: $2^{\sqrt{2}}, 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, 3$
3. Xác định $\min, \max, \mathrm{med}$, khái niệm thứ tự gần đều
4. Khái niệm sắp thứ tự dần đều, xa đều

Sắp thứ tự dãy số

1. Cho $a, b, c > 0$, xét biểu thức
$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + 3p_1x^2 + 3p_2^2x + p_3^3,$$
trong đó $p_1, p_2, p_3 > 0$.
Chứng minh các bất đẳng thức
$$p_1 \geq p_2 \geq p_3.$$
Tổng quát hóa.

2. Cho $a, b > 0$, xét hàm số $g(q) = \left(\dfrac{a^q + b^q}{2}\right)^{1/q}$.
Kiểm chứng
$$g(-\infty) \leq g(-2) \leq g(-1) \leq g(0) \leq g(1) \leq g(2) \leq g(\infty).$$

Sắp thứ tự dãy số

1. Cho $a, b, c > 0$, xét biểu thức
$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + 3p_1x^2 + 3p_2^2x + p_3^3,$$
trong đó $p_1, p_2, p_3 > 0$.
Chứng minh các bất đẳng thức
$$p_1 \geq p_2 \geq p_3.$$
Tổng quát hóa.

2. Cho $a, b > 0$, xét hàm số $g(q) = \left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{1/q}$.
Kiểm chứng
$$g(-\infty) \leq g(-2) \leq g(-1) \leq g(0) \leq g(1) \leq g(2) \leq g(\infty).$$

Phân thức chính quy

1. Cho các số $a, b, c, d > 0$, xét các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ thỏa mãn hệ thức
$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0.$$
Chứng minh bất đẳng thức
$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + dx^{\delta} \geq a + b + c + d, \quad \forall x > 0.$$
Tổng quát hóa.

2. Cho các số $a, b, c, d > 0$, xét các số $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ thỏa mãn hệ thức
$$a\alpha_k + b\beta_k + c\gamma_k + d\delta_k = 0, \quad k = 1, 2.$$
Chứng minh bất đẳng thức
$$ax^{\alpha_1}y^{\alpha_2} + bx^{\beta_1}y^{\beta_2} + cx^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + dx^{\delta_1}y^{\delta_2} \geq a + b + c + d, \quad \forall x, y > 0.$$
Tổng quát hóa.

Phân thức chính quy

1. Cho các số $a, b, c, d > 0$, xét các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ thỏa mãn hệ thức
$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0.$$
Chứng minh bất đẳng thức
$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + dx^{\delta} \geq a + b + c + d, \quad \forall x > 0.$$
Tổng quát hóa.

2. Cho các số $a, b, c, d > 0$, xét các số $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ thỏa mãn hệ thức
$$a\alpha_k + b\beta_k + c\gamma_k + d\delta_k = 0, \quad k = 1, 2.$$
Chứng minh bất đẳng thức
$$ax^{\alpha_1}y^{\alpha_2} + bx^{\beta_1}y^{\beta_2} + cx^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + dx^{\delta_1}y^{\delta_2} \geq a + b + c + d, \quad \forall x, y > 0.$$
Tổng quát hóa.

Sắp thứ tự dãy số, Hoán vị

1. Bài toán về "Cô gái bán xăng": Sắp hàng mua xăng tối ưu thời gian.
2. Giả sử
$$B = \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2008} + a_{2009}}{2}, \frac{a_{2009} + a_1}{2} \right\}$$
là một hoán vị của $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2009}\}$. Chứng minh rằng $a_{2009} = a_1$.
3. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ có $a + b + c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $M = abc$.
4. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của
$$T = a! + b! + c!.$$
5. Giả sử $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 2009\}$. Xác định điều kiện đối với a, b để
$$C_{2009}^{a} \geq C_{2009}^{b}.$$

Sắp thứ tự dãy số, Hoán vị

1. Bài toán về "Cô gái bán xăng": Sắp hàng mua xăng tối ưu thời gian.
2. Giả sử
$$B = \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2008} + a_{2009}}{2}, \frac{a_{2009} + a_1}{2} \right\}$$
là một hoán vị của $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2009}\}$. Chứng minh rằng $a_{2009} = a_1$.
3. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ có $a + b + c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $M = abc$.
4. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của
$$T = a! + b! + c!.$$
5. Giả sử $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 2009\}$. Xác định điều kiện đối với a, b để
$$C_{2009}^a \geq C_{2009}^b.$$

Sắp thứ tự dãy số, Hoán vị

1. Bài toán về "Cô gái bán xăng": Sắp hàng mua xăng tối ưu thời gian.
2. Giả sử
$$B = \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2008} + a_{2009}}{2}, \frac{a_{2009} + a_1}{2} \right\}$$
là một hoán vị của $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2009}\}$. Chứng minh rằng $a_{2009} = a_1$.
3. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ có $a + b + c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $M = abc$.
4. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của
$$T = a! + b! + c!.$$
5. Giả sử $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 2009\}$. Xác định điều kiện đối với a, b để
$$C_{2009}^a \geq C_{2009}^b.$$

Sắp thứ tự dãy số, Hoán vị

1. Bài toán về "Cô gái bán xăng": Sắp hàng mua xăng tối ưu thời gian.
2. Giả sử
$$B = \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{2008} + a_{2009}}{2}, \frac{a_{2009} + a_1}{2} \right\}$$
là một hoán vị của $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2009}\}$. Chứng minh rằng $a_{2009} = a_1$.
3. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ có $a + b + c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $M = abc$.
4. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của
$$T = a! + b! + c!.$$
5. Giả sử $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 2009\}$. Xác định điều kiện đối với a, b để
$$C_{2009}^a \geq C_{2009}^b.$$

Sắp thứ tự dãy số, Hoán vị

1. Bài toán về "Cô gái bán xăng": Sắp hàng mua xăng tối ưu thời gian.
2. Giả sử
$$B = \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{2008} + a_{2009}}{2}, \frac{a_{2009} + a_1}{2} \right\}$$
là một hoán vị của $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2009}\}$. Chứng minh rằng $a_{2009} = a_1$.
3. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ có $a + b + c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $M = abc$.
4. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của
$$T = a! + b! + c!.$$
5. Giả sử $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 2009\}$. Xác định điều kiện đối với a, b để
$$C_{2009}^{a} \geq C_{2009}^{b}.$$

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc hai

1. Với $f(x) = x^2$, thì $a^2 = [b + (a - b)]^2$
$$= b^2 + 2(a-b)b + (a-b)^2 \geq b^2 + 2b(a-b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
2. **Bài toán A.** Giả thiết
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq 35 (= 5^2 + 3^2 + 1^2)$.
3. **Bài toán B.** Phát biểu và chứng minh bài toán ngược của Bt A.
4. **Bài toán tổng quát.** Giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$ và
$$\begin{cases} x \geq a \\ x + y \geq a + b \\ x + y + z = a + b + c \end{cases}$$
Chứng minh rằng $\quad x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc hai

1. Với $f(x) = x^2$, thì $a^2 = [b + (a - b)]^2$
$$= b^2 + 2(a - b)b + (a - b)^2 \geq b^2 + 2b(a - b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
2. **Bài toán A.** Giả thiết
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq 35 (= 5^2 + 3^2 + 1^2)$.
3. **Bài toán B.** Phát biểu và chứng minh bài toán ngược của Bt A.
4. **Bài toán tổng quát.** Giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$ và
$$\begin{cases} x \geq a \\ x + y \geq a + b \\ x + y + z = a + b + c \end{cases}$$
Chứng minh rằng $\quad x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc hai

1. Với $f(x) = x^2$, thì $a^2 = [b + (a - b)]^2$
$$= b^2 + 2(a-b)b + (a-b)^2 \geq b^2 + 2b(a-b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
2. **Bài toán A.** Giả thiết
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq 35 (= 5^2 + 3^2 + 1^2)$.
3. **Bài toán B.** Phát biểu và chứng minh bài toán ngược của Bt A.
4. **Bài toán tổng quát.** Giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$ và
$$\begin{cases} x \geq a \\ x + y \geq a + b \\ x + y + z = a + b + c \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc hai

1. Với $f(x) = x^2$, thì $a^2 = [b + (a - b)]^2$
$$= b^2 + 2(a - b)b + (a - b)^2 \geq b^2 + 2b(a - b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
2. **Bài toán A.** Giả thiết
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq 35 (= 5^2 + 3^2 + 1^2)$.
3. **Bài toán B.** Phát biểu và chứng minh bài toán ngược của Bt A.
4. **Bài toán tổng quát.** Giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$ và
$$\begin{cases} x \geq a \\ x + y \geq a + b \\ x + y + z = a + b + c \end{cases}$$
Chứng minh rằng $\quad x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc α

1. Với $f(x) = x^\alpha,\ x > 0,\ \alpha > 1$, thì
$$a^\alpha \geq b^\alpha + 2b^{\alpha-1}(a-b),\ \forall a, b \in \mathbb{R}^+. \qquad (*)$$
2. **Bài toán C.** Giả thiết $x, y, z > 0$ và
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \geq= 5^\alpha + 3^\alpha + 1^\alpha$.
3. **Bài toán D.** Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức (*) để dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 1$.

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc α

1. Với $f(x) = x^\alpha, \; x > 0, \; \alpha > 1$, thì
$$a^\alpha \geq b^\alpha + 2b^{\alpha-1}(a-b), \; \forall a, b \in \mathbb{R}^+. \qquad (*)$$
2. **Bài toán C.** Giả thiết $x, y, z > 0$ và
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \geq= 5^\alpha + 3^\alpha + 1^\alpha$.
3. **Bài toán D.** Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức (*) để dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 1$.

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc α

1. Với $f(x) = x^\alpha,\ x > 0,\ \alpha > 1$, thì
$$a^\alpha \geq b^\alpha + 2b^{\alpha-1}(a-b),\ \forall a, b \in \mathbb{R}^+. \qquad (*)$$
2. **Bài toán C.** Giả thiết $x, y, z > 0$ và
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \geq= 5^\alpha + 3^\alpha + 1^\alpha$.
3. **Bài toán D.** Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức (*) để dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 1$.

Bài 4. Một số đồng nhất thức cơ bản

Hàm số lũy thừa bậc α

1. Với $f(x) = x^{\alpha},\ x > 0,\ \alpha > 1$, thì
$$a^{\alpha} \geq b^{\alpha} + 2b^{\alpha-1}(a-b),\ \forall a, b \in \mathbb{R}^{+}. \qquad (*)$$
2. **Bài toán C.** Giả thiết $x, y, z > 0$ và
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x + y \geq 8 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $x^{\alpha} + y^{\alpha} + z^{\alpha} \geq= 5^{\alpha} + 3^{\alpha} + 1^{\alpha}$.
3. **Bài toán D.** Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức (*) để dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 1$.

Bài 5. Methods of solving problems

1. Understand the problem
   The first step is to read the problem and make sure that you understand it clearly.
   Ask yourself the following questions:
   What is the unknown, What are the given quantities, What are the given conditions
   For many problems it is useful to draw a diagram and identify the given and required quantities on the diagram
2. Think of a plan
3. Carry out the plan
4. Look back

Bài 5. Methods of solving problems

1. Understand the problem
   The first step is to read the problem and make sure that you understand it clearly.
   Ask yourself the following questions:
   What is the unknown, What are the given quantities, What are the given conditions
   For many problems it is useful to draw a diagram and identify the given and required quantities on the diagram
2. Think of a plan
3. Carry out the plan
4. Look back

Bài 5. Methods of solving problems

1. Understand the problem

   The first step is to read the problem and make sure that you understand it clearly.

   Ask yourself the following questions:

   What is the unknown, What are the given quantities, What are the given conditions

   For many problems it is useful to draw a diagram and identify the given and required quantities on the diagram
2. Think of a plan
3. Carry out the plan
4. Look back

Bài 5. Methods of solving problems

1. Understand the problem
   The first step is to read the problem and make sure that you understand it clearly.
   Ask yourself the following questions:
   What is the unknown, What are the given quantities, What are the given conditions
   For many problems it is useful to draw a diagram and identify the given and required quantities on the diagram
2. Think of a plan
3. Carry out the plan
4. Look back