Phan Đức Minh
12A15, THPT Thái Phiên, khóa 2008 - 2011

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TỈ CỰ VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

Hải Phòng - 3/2011

Lời nói đầu

Bên cạnh các hệ tọa độ quen thuộc đã biết như hệ trục tọa độ Descartes vuông góc, tọa độ cực, hệ tọa độ Affine của hình học xạ ảnh, hình học hiện đại còn đưa ra một lý thuyết rất thú vị một lần nữa thể hiện mối quan hệ mật thiết giữa hình học và đại số mà ở đó, tọa độ của các điểm xác định nhờ một hình cơ sở thông qua các đại lượng vector, đó chính là ***tọa độ tỉ cự*** (***Barycentric Coordinates***). Nhờ có các công thức, các kết quả xây dựng từ trước mà những tính toán và biến đổi hình học thông thường đã được mô hình hóa thành một lớp các đại lượng và các quan hệ ràng buộc mang bản chất hình học giữa chúng. Khái niệm này đã được giới thiệu lần đầu tiên bởi giáo sư Toán người Đức August Ferdinand Möbius vào năm 1827. Trải qua nhiều thế hệ các nhà Toán học nghiên cứu, bổ sung và phát triển, đến nay, khái niệm tọa độ tỉ cự đã trở nên rất quen thuộc và thể hiện rõ hiệu quả của nó trong việc nghiên cứu hình học phẳng và đặc biệt là các tính chất của tam giác.

Với mong muốn cung cấp thêm một phương pháp hay và rất bổ ích để rèn luyện hình học phẳng, tôi đã giành thời gian tìm hiểu, phân tích và chọn lọc các vấn đề liên quan để trình bày chúng dưới dạng một chuyên đề nhằm có thể giới thiệu đến tất cả các bạn yêu Toán. Bên cạnh phần lý thuyết được trình bày rõ ràng và kĩ lưỡng, các phần ví dụ minh họa cũng được chọn lọc cẩn thận để các bạn có thể thấy rõ được ý nghĩa của phương pháp này. Nắm vững phương pháp này có thể chính là một con đường để chúng ta vượt qua những mối lo ngại đối với hình học phẳng và cũng có thể nhờ đó mà chúng ta tìm ra được những hướng giải quyết mới cho các bài toán hình học, thậm chí là những bài hóc búa, phức tạp. Tuy đã được đại số hóa khá nhiều nhưng ẩn chứa dưới những công thức dày đặc vẫn là mối quan hệ hình học thuần túy, những vẻ đẹp sâu sắc không thể mất đi được. Mong rằng tài liệu này sẽ thực sự có ích với các bạn, không chỉ dừng lại ở việc giải quyết được thêm nhiều bài toán thú vị và mà còn có thể mạnh dạn tìm ra những bài toán hình học mới trên cơ sở những biến đổi hệ thống và chuẩn mực!

1. Các định nghĩa và kí hiệu

1.1. Tọa độ tỉ cự

Trong mặt phẳng cho trước một tam giác ABC không suy biến được gọi là tam giác cơ sở. Với mỗi điểm P trong mặt phẳng, bộ 3 số (x, y, z) được gọi là tọa độ tỉ cự của điểm P đối với tam giác ABC nếu ta có đẳng thức vector $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ $(x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$. Trong bài viết này, nếu không có chú thích gì thêm thì tam giác cơ sở được mặc định là tam giác ABC.
Dễ thấy rằng nếu trong tọa độ tỉ cự với một tam giác bất kì, nếu (x, y, z) là tọa độ của điểm P thì $(kx, ky, kz),\ k \neq 0$ cũng là tọa độ của điểm P.

1.2. Điều kiện cần và đủ của tọa độ tỉ cự

Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một bộ 3 số (x, y, z) là tọa độ của một điểm P nào đó trong hệ tọa độ tỉ cự đối với tam giác ABC là $x + y + z \neq 0$.
Điều kiện cần.
Ta cần chứng minh nếu $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ thì $x + y + z \neq 0$.
Giả sử $x + y + z = 0$. Khi đó $z = -(x + y)$. Vì 3 số x, y, z không thể cùng đồng thời bằng 0 nên ta có thể giả sử $x \neq 0$. Suy ra

$$\begin{aligned}
& x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} - (x + y)\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & x\left(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}\right) + y\left(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}\right) = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{CA} = -\frac{y}{x} \cdot \overrightarrow{CB} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{A, B, C}
\end{aligned}$$

Vì tam giác ABC không suy biến nên không thể có $\overline{A, B, C}$. Vậy ta phải có $x + y + z \neq 0$.
Điều kiện đủ.
Ta cần chứng minh nếu $x + y + z \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm P sao cho $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.
Ta cần có một bổ đề sau: Cho hai điểm A, B phân biệt và hai số α, β không đồng thời bằng 0. Nếu $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.
Chứng minh.
Ta có

$$\begin{aligned}
& \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & -\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Vậy điểm M luôn tồn tại và được xác định duy nhất bằng hệ thức vector cuối cùng, bổ đề được chứng minh.

Quay lại việc chứng minh điều kiện đủ.
Vì $x+y+z\neq 0 \Rightarrow (x+y)+(y+z)+(z+x)\neq 0$ nên một trong 3 số $x+y, y+z, z+x$ phải khác 0. Giả sử $x+y\neq 0$.
Theo bổ đề, tồn tại duy nhất điểm M sao cho $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow\ & x\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}\right)+y\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}\right)+z\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow\ & (x+y)\overrightarrow{PM}+(x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB})+z\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow\ & (x+y)\overrightarrow{PM}+z\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

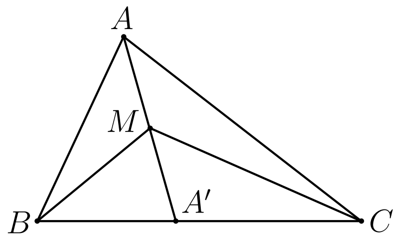
Vì $(x+y)+z\neq 0$ nên theo bổ đề, điểm P được xác định duy nhất. (đpcm)

1.3. Cách xác định tọa độ tỉ cự

Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì trong mặt phẳng tam giác. Khi đó ta có [1]

$$S_{[MBC]}\overrightarrow{MA}+S_{[MCA]}\overrightarrow{MB}+S_{[MAB]}\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$$

Chứng minh.



Trong các đường thẳng MA, MB, MC phải có ít nhất một đường thẳng không song song với BC, CA, AB theo thứ tự. Giả sử $MA\nparallel BC$. Khi đó MA cắt BC tại A'.
Ta có

$$\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{MC}$$

Suy ra

$$\overline{A'C}\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B}\right)=\overline{A'C}\cdot\overrightarrow{MB}, \overline{A'B}\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C}\right)=\overline{A'B}\cdot\overrightarrow{MC}$$

Chú ý rằng $\overline{A'C}\cdot\overrightarrow{MB}=\overline{A'B}\cdot\overrightarrow{MC}$, do đó

$$\overrightarrow{MA'}\left(\overline{A'C}-\overline{A'B}\right)=\overline{A'C}\cdot\overrightarrow{MB}-\overline{A'B}\cdot\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA'}=\frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}}\cdot\overrightarrow{MB}-\frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}}\cdot\overrightarrow{MC}$$

Mặt khác, ta có

$$-\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}=\frac{S_{[AA'C]}}{S_{[ABA']}}=\frac{S_{[MA'C]}}{S_{[MBA']}}=\frac{S_{[MCA]}}{S_{[MAB]}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'C}-\overline{A'B}}=\frac{S_{[MCA]}}{S_{[MCA]}+S_{[MAB]}}, -\frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}}=\frac{S_{[MAB]}}{S_{[MCA]}+S_{[MAB]}}$$

[1] $S_{[A_1A_2\ldots A_n]}$ kí hiệu diện tích đại số của đa giác $A_1A_2\ldots A_n$

Vì vậy
$$\overrightarrow{MA'} = \frac{S_{[MCA]}}{S_{[MCA]} + S_{[MAB]}} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{S_{[MAB]}}{S_{[MCA]} + S_{[MAB]}} \cdot \overrightarrow{MC}$$
Lại có
$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{MA}} = \frac{S_{[MCA']}}{S_{[MCA]}} = \frac{S_{[MA'B]}}{S_{[MAB]}} = \frac{S_{[MCA']} + S_{[MA'B]}}{S_{[MCA]} + S_{[MAB]}} = -\frac{S_{[MBC]}}{S_{[MCA]} + S_{[MAB]}}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = -\frac{S_{[MBC]}}{S_{[MCA]} + S_{[MAB]}} \cdot \overrightarrow{MA}$$
Vậy
$$-S_{[MBC]}\overrightarrow{MA} = S_{[MCA]}\overrightarrow{MB} + S_{[MAB]}\overrightarrow{MC} \Rightarrow S_{[MBC]}\overrightarrow{MA} + S_{[MCA]}\overrightarrow{MB} + S_{[MAB]}\overrightarrow{MC}$$

1.4. Tọa độ tỉ cự tuyệt đối (Absolute Barycentric Coordinates)

Từ các mục **1.1** và **1.2**, ta thấy rằng nếu điểm P có tọa độ (x, y, z) thì cũng có tọa độ (x', y', z') với $x' + y' + z' = 1$. Khi đó ta gọi (x', y', z') là tọa độ tỉ cự tuyệt đối của điểm P.

1.5. Các kí hiệu dùng trong bài viết

Với hai bộ số (a, b, c) và (d, e, f), nếu hai bộ số này tỉ lệ với nhau thì được kí hiệu là $(a, b, c) = (d, e, f)$. Trong trường hợp ngược lại, hai bộ không tỉ lệ với nhau, kí hiệu $(a, b, c) \neq (d, e, f)$.
Độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC được kí hiệu a, b, c theo thứ tự, p là nửa chu vi tam giác.
Các kí hiệu Conway[2]:

- S kí hiệu hai lần diện tích tam giác ABC
- Với mỗi số thực θ, $S\cot\theta$ được kí hiệu S_θ. Từ đó ta có

$$S_A = bc\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, S_B = ca\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, S_C = ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

Trong bài viết, nếu không chú thích gì thêm, tọa độ của một điểm A bất kì được kí hiệu là (x_A, y_A, z_A).

[2]Weisstein, Eric W., "Conway Triangle Notation." từ MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ConwayTriangleNotation.html

2. Thiết lập các công thức trong tọa độ tỉ cự

2.1. Phương trình đường thẳng

Ta sẽ chứng minh rằng đường thẳng đi qua hai điểm $P(a_1, b_1, c_1)$ và $Q(a_2, b_2, c_2)$ có phương trình $D_a x + D_b Y + D_c z = 0$. Trong đó $D_a = b_1c_2 - b_2c_1, D_b = c_1a_2 - c_2a_1, D_c = a_1b_2 - a_2b_1$.
Chọn một điểm O bất kì cố định trong mặt phẳng. Đặt $S_i = a_i + b_i + c_i$ $(i \in \{1; 2\})$
Ta có $P(a_1, b_1, c_1) \Rightarrow a_1\overrightarrow{PA} + b_1\overrightarrow{PB} + c_1\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{a_1\overrightarrow{OA} + b_1\overrightarrow{OB} + c_1\overrightarrow{OC}}{S_1}$.
Tương tự, ta có $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{a_2\overrightarrow{OA} + b_2\overrightarrow{OB} + c_2\overrightarrow{OC}}{S_2}$.
Ta đã biết rằng với điểm X bất kì, ta có

$$X \in PQ, k \not\equiv Q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \overrightarrow{XP} = k\overrightarrow{XQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OP} - k\overrightarrow{OQ}}{1-k}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&X \in PQ \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \overrightarrow{OX} = \frac{\dfrac{a_1\overrightarrow{OA} + b_1\overrightarrow{OB} + c_1\overrightarrow{OC}}{S_1} - k \cdot \dfrac{a_2\overrightarrow{OA} + b_2\overrightarrow{OB} + c_2\overrightarrow{OC}}{S_2}}{1-k} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = \frac{(a_1S_2 - ka_2S_1)\overrightarrow{OA} + (b_1S_2 - kb_2S_1)\overrightarrow{OB} + (c_1S_2 - kc_2S_1)\overrightarrow{OC}}{(1-k)S_1S_2}
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$(a_1S_2 - ka_2S_1) + (b_1S_2 - kb_2S_1) + (c_1S_2 - kc_2S_1) = (1-k)S_1S_2 \neq 0$$

Do đó tọa độ của X là

$$(a_1S_2 - ka_2S_1, b_1S_2 - kb_2S_1, c_1S_2 - kc_2S_1) = (a_1 + ma_2, b_1 + mb_2, c_1 + mc_2), m \neq -\frac{S_1}{S_2}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\exists m \neq -\frac{S_1}{S_2}, (x, y, z) = (a_1 + ma_2, b_1 + mb_2, c_1 + mc_2) \Leftrightarrow D_a x + D_b Y + D_c z = 0, x + y + z \neq 0 (1)$$

Phần thuận là khá hiển nhiên nên chỉ cần chứng minh phần đảo.
Vì P và Q là hai điểm phân biệt nên $(a_1, b_1, c_1) \neq (a_2, b_2, c_2)$, suy ra $(D_a, D_b, D_c) \neq (1, 1, 1)$ $(*)$;
X và Q là hai điểm phân biệt nên $(x, y, z) \neq (a_2, b_2, c_2)$ $(**)$
Ta cần chứng minh nếu các số x, y, z thỏa mãn $D_a x + D_b Y + D_c z = 0, x + y + z \neq 0$ thì tồn tại một số $m \neq -\dfrac{S_1}{S_2}$ sao cho $(x, y, z) = (a_1 + ma_2, b_1 + mb_2, c_1 + mc_2)$.
Xét trong hệ tọa độ Descartes, điều cần chứng minh tương đương với: Cho hai mặt phẳng $(P) : D_a x + D_b Y + D_c z = 0$ và $(Q) : x + y + z = 0$, với mọi điểm $D(x, y, z)$ nằm trên (P) và D không nằm trên giao tuyến l của (P) và (Q) (chú ý rằng (P) và (Q) không song song do

(∗) nên l tồn tại), tồn tại một điểm E trên đường thẳng $\begin{cases} x = a_1 + ma_2 \\ y = b_1 + mb_2 \\ z = c_1 + mc_2 \end{cases}$ $, m \neq -\dfrac{S_1}{S_2}$ sao cho O, D, E thẳng hàng.

Ta có $OD \nparallel d$ do vector $\overrightarrow{OD} = (x, y, z)$ và vector chỉ phương của $d : \overrightarrow{u_d} = (a_2, b_2, c_2)$ không cùng phương (do (∗∗)). Suy ra OD luôn cắt d tại một điểm $E(a_1 + ma_2, b_1 + mb_2, c_1 + mc_2)$. Mặt khác, vì $D \notin l$ nên $E \notin l$, suy ra $a_1 + ma_2 + b_1 + mb_2 + c_1 + mc_2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{S_1}{S_2}$.

Vậy khẳng định (1) được chứng minh. Do đó phương trình của một đường thẳng bất kì trong tọa độ tỉ cự có dạng $mx + ny + pz = 0$ với m, n, p là các số thực không đồng thời bằng nhau.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(a_1, b_1, c_1)$ và $Q(a_2, b_2, c_2)$ còn được viết dưới dạng $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$. Từ đó ta thấy rằng 3 điểm có tọa độ (x_i, y_i, z_i) $(i = \overline{1,3})$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

2.2. Giao điểm của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $p_1x + q_1y + r_1z = 0$ và $p_2x + q_2y + r_2z = 0$. Khi đó tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} p_1x + q_1y + r_1z = 0 \\ p_2x + q_2y + r_2z = 0 \\ x + y + z \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (q_1r_2 - q_2r_1, r_1p_2 - r_2p_1, p_1q_2 - p_2q_1)$$

Từ đó ta suy ra điều kiện để các đường thẳng $p_ix + q_iy + r_iz = 0$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ đồng quy là:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

2.3. Khoảng cách giữa hai điểm

Cho trước hai điểm $P(a_1, b_1, c_1)$ và $Q(a_2, b_2, c_2)$ và một điểm O cố định. Sử dụng các kí hiệu như ở mục **2.1**. Ta có

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{a_2\overrightarrow{OA} + b_2\overrightarrow{OB} + c_2\overrightarrow{OC}}{S_2} - \frac{a_1\overrightarrow{OA} + b_1\overrightarrow{OB} + c_1\overrightarrow{OC}}{S_1}$$
$$= \frac{(a_2S_1 - a_1S_2)\overrightarrow{OA} + (b_2S_1 - b_1S_2)\overrightarrow{OB} + (c_2S_1 - c_1S_2)\overrightarrow{OC}}{S_1S_2}$$

Đặt $\dfrac{a_2S_1-a_1S_2}{S_1S_2}=u, \dfrac{b_2S_1-b_1S_2}{S_1S_2}=v, \dfrac{c_2S_1-c_1S_2}{S_1S_2}=w$ thì $u+v+w=0$
Suy ra

$$\begin{aligned}
PQ^2 &= \left(u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}+w\overrightarrow{OC}\right)^2\\
&= u^2OA^2+v^2OB^2+w^2OC^2+2uv\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2vw\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2wu\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\
&= u^2OA^2+v^2OB^2+w^2OC^2+uv\left(OA^2+OB^2-c^2\right)\\
&\quad +vw\left(OB^2+OC^2-a^2\right)+wu\left(OC^2+OA^2-b^2\right)\\
&= (u+v+w)\left(uOA^2+vOB^2+wOC^2\right)-\left(a^2vw+b^2wu+c^2uv\right)\\
&= -\left(a^2vw+b^2wu+c^2uv\right)
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $a_2S_1-a_1S_2=a_2(a_1+b_1+c_1)-a_1(a_2+b_2+c_2)=a_2b_1+a_2c_1-a_1b_2-a_1c_2=D_b-D_c$. Do đó $\vec{v}=(D_b-D_c)\overrightarrow{OA}+(D_c-D_a)\overrightarrow{OB}+(D_a-D_b)\overrightarrow{OC}$ là một vector chỉ phương của đường thẳng PQ. Suy ra điều kiện để hai đường thẳng $\Delta_1: m_1x+n_1y+p_1z=0$ và $\Delta_2: m_2x+n_2y+p_2z=0$ song song là $(m_1-n_1,n_1-p_1,p_1-m_1)=(m_2-n_2,n_2-p_2,p_2-m_2)$

2.4. Phương trình đường tròn

2.4.1. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác cơ sở

Gọi $(O;R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; $M(x,y,z)$.
Ta có $\overrightarrow{OM}=\dfrac{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}}{x+y+z}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
OM^2 &= \left(\frac{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}}{x+y+z}\right)^2\\
&= \frac{1}{(x+y+z)^2}\cdot\left((x^2+y^2+z^2)R^2+xy\left(2R^2-c^2\right)+yz\left(2R^2-a^2\right)+zx\left(2R^2-b^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{(x+y+z)^2}\cdot\left((x+y+z)R^2-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)\right)\\
&= R^2-\frac{a^2yz+b^2zx+c^2xy}{(x+y+z)^2}
\end{aligned}$$

Do đó $M\in(O)\Leftrightarrow a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$.
Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$.

2.4.2. Phương trình đường tròn bất kì

Gọi $(I;r)$ là đường tròn cần lập phương trình; $M(x,y,z)$. Ta có

$$\begin{aligned}
IM^2 &= \left(\frac{x\overrightarrow{IA}+y\overrightarrow{IB}+z\overrightarrow{IC}}{x+y+z}\right)^2\\
&= \frac{1}{(x+y+z)^2}\cdot\left((x+y+z)\left(xIA^2+yIB^2+zIC^2\right)-\left(a^2yz+b^2zx+c^2xy\right)\right)
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
M \in (I) &\Leftrightarrow r^2 = IM^2 \\
&\Leftrightarrow (x+y+z)^2 r^2 = (x+y+z)\left(xIA^2 + yIB^2 + zIC^2\right) - \left(a^2yz + b^2zx + c^2xy\right) \\
&\Leftrightarrow a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x+y+z)(ux+vy+wz) = 0
\end{aligned}$$

Với $r^2 - IA^2 = u, r^2 - IB^2 = v, r^2 - IC^2 = w$.Vậy phương trình tổng quát của một đường tròn trong tọa độ tỉ cự là

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x+y+z)(ux+vy+wz) = 0$$

Cho trước 3 điểm với tọa độ (x_i, y_i, z_i) $(i = \overline{1,3})$, ta giải hệ phương trình $a^2y_iz_i + b^2z_ix_i + c^2x_iy_i + (x_i+y_i+z_i)(ux_i+vy_i+wz_i) = 0$ để tìm u, v, w, từ đó suy ra phương trình đường tròn.

2.5. Phương tích của một điểm đối với đường tròn ngoại tiếp tam giác cơ sở

Từ đẳng thức đã thiết lập ở mục **2.3.1**, ta suy ra phương tích của điểm $M(d,e,f)$ đối với đường tròn (ABC) là

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2 = -\frac{a^2ef + b^2fd + c^2de}{(d+e+f)^2}$$

2.6. Phương trình đường đối cực

Ta sẽ viết phương trình đường đối cực d của một điểm $M(d,e,f)$ đối với đường tròn $(O;R)$ ngoại tiếp tam giác cơ sở. Gọi $P(x,y,z)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP} &= \frac{d\overrightarrow{OA} + e\overrightarrow{OB} + f\overrightarrow{OC}}{d+e+f}\cdot\frac{x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}}{x+y+z} \\
&= \frac{1}{(d+e+f)(x+y+z)}\cdot\Bigg((dx+ey+fz)R^2 + \frac{1}{2}\left(dy\left(2R^2-c^2\right) + dz\left(2R^2-b^2\right)\right. \\
&\quad \left. + ex\left(2R^2-c^2\right) + ez\left(2R^2-a^2\right) + fx\left(2R^2-b^2\right) + fy\left(2R^2-a^2\right)\right)\Bigg) \\
&= R^2 - \frac{x\left(b^2f+c^2e\right) + y\left(c^2d+a^2f\right) + z\left(a^2e+b^2d\right)}{(d+e+f)(x+y+z)}
\end{aligned}$$

Ta có $P \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP} = R^2 \Leftrightarrow x\left(b^2f+c^2e\right) + y\left(c^2d+a^2f\right) + z\left(a^2e+b^2d\right) = 0$
Vậy phương trình đường đối cực của điểm $M(d,e,f)$ đối với đường trong $(O;R)$ là

$$x\left(b^2f+c^2e\right) + y\left(c^2d+a^2f\right) + z\left(a^2e+b^2d\right) = 0$$

2.7. Hình chiếu vuông góc và phép đối xứng trục đối với đường cạnh của tam giác cơ sở

Giả sử điểm $M(d,e,f)$; I, J, K là các hình chiếu vuông góc của M lên BC, CA, AB; X, Y, Z là ảnh của M qua phép đối xứng trục là các đường thẳng BC, CA, AB.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Ta có $S_C\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow a^2\overrightarrow{ID} = S_C\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.
Vì $d\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{MB} + f\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ nên $d\overrightarrow{ID} + e\overrightarrow{IB} + f\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$. Từ đó ta có

$$\begin{cases} a^2\overrightarrow{ID} = S_C\overrightarrow{IB} + S_B\overrightarrow{IC} \\ d\overrightarrow{MA} = -e\overrightarrow{MB} - f\overrightarrow{MC} \end{cases}$$
$$\Rightarrow (dS_C + ea^2)\overrightarrow{IB} + (dS_B + fa^2)\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow I(0, dS_C + ea^2, dS_B + fa^2)$$

Tương tự, ta có $J(eS_C + db^2, 0, eS_A + fb^2), K(fS_B + dc^2, fS_A + ec^2, 0)$.
Vì I là trung điểm MX nên $\overrightarrow{XM} = 2\overrightarrow{XI} \Rightarrow X(-da^2, 2dS_C + ea^2, 2dS_B + fa^2)$.
Tương tự, ta có $Y(2eS_C + db^2, -eb^2, 2eS_A + fb^2), Z(2fS_B + dc^2, 2fS_A + ec^2, -fc^2)$.

2.8. Định lý Ceva dạng vector

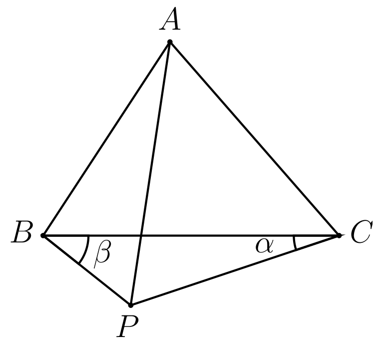
Cho các điểm $M(0, v, w), N(u, 0, w), P(u, v, 0)$ với $u + v + w \neq 0$. Khi đó AM, BN, CP đồng quy tại điểm $G(u, v, w)$.
Chứng minh.
Gọi $G(u, v, w)$. Theo chứng minh điều kiện đủ ở mục **1.2**, ta suy ra $\overline{A, M, G}, \overline{B, N, G}, \overline{C, P, G}$.
Vậy ta có điều cần chứng minh.

2.9. Hai điểm liên hợp đẳng giác

Cho điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ $(x_M, y_M, z_M \neq 0)$. Khi đó điểm liên hợp đẳng giác của M đối với tam giác ABC là $N\left(\dfrac{a^2}{x_M}, \dfrac{b^2}{y_M}, \dfrac{c^2}{z_M}\right)$.
Chứng minh.
Gọi N là điểm liên hợp đẳng giác của M đối với tam giác ABC; P, Q là giao điểm của AM, AN với BC.
Ta có $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{JC}} = \dfrac{S_{[AIB]}}{S_{[AJC]}} = -\dfrac{AB \cdot AI}{AC \cdot AJ}$. Tương tự: $\dfrac{\overline{JB}}{\overline{IC}} = -\dfrac{AB \cdot AJ}{AC \cdot AI}$.
Suy ra $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{JC}} \cdot \dfrac{\overline{JB}}{\overline{IC}} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \dfrac{z_M}{y_M} \cdot \dfrac{z_N}{y_N} = \dfrac{c^2}{b^2}$.
Tương tự, ta có $\dfrac{y_M y_N}{x_M x_N} = \dfrac{b^2}{a^2}; \dfrac{x_M x_N}{z_M z_N} = \dfrac{a^2}{b^2}$.
$\Rightarrow (x_M x_N, y_M y_N, z_M z_N) = (a^2, b^2, c^2) \Rightarrow (x_N, y_N, z_N) = \left(\dfrac{a^2}{x_M}, \dfrac{b^2}{y_M}, \dfrac{c^2}{z_M}\right)$

2.10. Công thức Conway

Cho tam giác ABC và P là một điểm thỏa mãn $\widehat{BCP} = \alpha, \widehat{CBP} = \beta$ với $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha, \beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Góc α mang dấu dương hoặc âm phụ thuộc các góc $\widehat{BCP}$ và $\widehat{BCA}$ cùng hướng hay ngược hướng. Khi đó tọa độ của P là $(-a^2, S_C + S_\alpha, S_B + S_\beta)$.
Chứng minh.



Ta có

$$\frac{S_{[PCA]}}{S_{[PBC]}} = \frac{CP \cdot CA \cdot \sin\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}\right)}{CP \cdot CB \cdot \sin\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}\right)} = -\frac{b\sin(C+\alpha)}{a\sin\alpha}$$

Tương tự

$$\frac{S_{[PAB]}}{S_{[PBC]}} = -\frac{c\sin(B+\beta)}{a\sin\beta}$$

Do đó tọa độ của điểm P là

$$\begin{aligned}\left(-a, \frac{b\sin(C+\alpha)}{\sin\alpha}, \frac{c\sin(B+\beta)}{\sin\beta}\right) &= \left(-a^2, \frac{ab\sin C\sin(C+\alpha)}{\sin C\sin\alpha}, \frac{ac\sin B\sin(B+\beta)}{\sin B\sin\beta}\right) \\ &= \left(-a^2, S_C + S_\alpha, S_B + S_\beta\right)\end{aligned}$$

2.11. Diện tích tam giác

Cho tam giác $P_1P_2P_3$ với các đỉnh có tọa độ (x_i, y_i, z_i) $(i = \overline{1,3})$. Khi đó diện tích tam giác $P_1P_2P_3$ được tính theo công thức:

$$\frac{S_{[P_1P_2P_3]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\prod\limits_{i=1}^{3}(x_i + y_i + z_i)}$$

Từ đó ta cũng suy ra được điều kiện để 3 điểm (x_i, y_i, z_i) thẳng hàng là $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

Chứng minh.

Đặt $S_i = x_i + y_i + z_i$ $(i = \overline{1,3})$; $u = \dfrac{x_2S_1 - x_1S_2}{S_1S_2}, v = \dfrac{y_2S_1 - y_1S_2}{S_1S_2}, w = \dfrac{z_2S_1 - z_1S_2}{S_1S_2},$
$u' = \dfrac{x_3S_1 - x_1S_3}{S_1S_3}, v' = \dfrac{y_3S_1 - y_1S_3}{S_1S_3}, \dfrac{z_{S1} - z_1S_3}{S_1S_3}$; O là một điểm bất kì trong mặt phẳng.
Theo công thức đã thiết lập ở mục **2.2**, ta có

$$\overrightarrow{P_1P_2} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{P_1P_3} = u'\overrightarrow{OA} + v'\overrightarrow{OB} + w'\overrightarrow{OC}$$

Chú ý rằng $u + v + w = u' + v' + w' = 0$ nên ta có

$$\overrightarrow{P_1P_2} = u\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) + v\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = u\overrightarrow{CA} + v\overrightarrow{CB}$$

Tương tự
$$\overrightarrow{P_1P_3} = u'\overrightarrow{CA} + v'\overrightarrow{CB}$$
Từ đó thì
$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3} &= \left(u\overrightarrow{CA} + v\overrightarrow{CB}\right) \wedge \left(u'\overrightarrow{CA} + v'\overrightarrow{CB}\right) \\ &= (uv' - vu')\left(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right)\end{aligned}$$
Mặt khác, ta có
$$uv' - u'v = \frac{1}{S_1^2S_2S_3} \cdot \big((x_2S_1 - x_1S_2)(y_3S_1 - y_1S_3) - (x_3S_1 - x_1S_3)(y_2S_1 - y_1S_2)\big)$$
$$\begin{aligned}&(x_2S_1 - x_1S_2)(y_3S_1 - y_1S_3) - (x_3S_1 - x_1S_3)(y_2S_1 - y_1S_2) \\ =\ &x_2y_3S_1^2 - x_2y_1S_1S_3 - x_1y_3S_1S_2 + x_1y_1S - 2S_3 \\ &- x_3y_2S_1^2 + x_3y_1S_1S_2 + x_1y_2S_1S_3 - x_1y_1S_2S_3 \\ =\ &S_1\big(S_1(x_2y_3 - x_3y_2) + S_2(x_3y_1 - x_1y_3) + S_3(x_1y_2 - x_2y_1)\big)\end{aligned}$$
Lại có
$$\begin{aligned}&S_1(x_2y_3 - x_3y_2) + S_2(x_3y_1 - x_1y_3) + S_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ =\ &x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 \\ =\ &\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$
Kết hợp các điều trên, ta có
$$\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{S_1S_2S_3} \cdot \left(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right)$$
Chú ý rằng
$$\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3} = 2S_{[P_1P_2P_3]}, \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = 2S_{[ABC]}$$
Ta có điều phải chứng minh.

2.12. Tọa độ tỉ cự của một số điểm đặc biệt trong tam giác

Dưới đây là tọa độ tỉ cự của một số điểm đặc biệt trong tam giác, các điểm được sắp thứ tự từ X_1 đến X_{10} trong [5].

Điểm	Tọa độ tỉ cự
Tâm đường tròn nội tiếp	(a, b, c)
Trọng tâm	$(1, 1, 1)$
Tâm đường tròn ngoại tiếp	$(a^2 S_A, b^2 S_B, c^2 S_C)$
Trực tâm	$(S_B S_C, S_C S_A, S_A S_B)$
Tâm đường tròn 9 điểm (tâm Euler)	$(a\cos(B-C), b\cos(C-A), c\cos(A-B))$
Điểm symmedian (điểm Lemoine) K	(a^2, b^2, c^2)
Điểm Gergonne	$((p-b)(p-c), (p-c)(p-a), (p-a)(p-b))$
Điểm Nagel	$(p-a, p-b, p-c)$
Điểm Mittenpunkt	$(a(p-a), b(p-b), c(p-c))$
Tâm Spieker	$(b+c, c+a, a+b)$

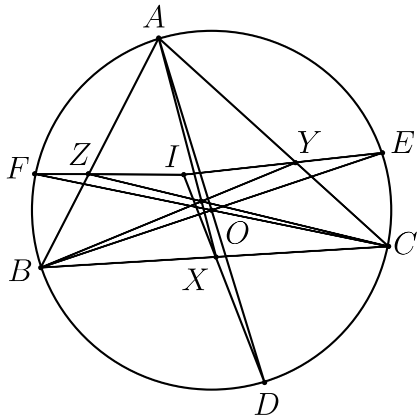
Chi tiết về các điểm đặc biệt trên các bạn có thể xem tại địa chỉ:
http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=4986

3. Các bài toán

3.1. Các bài toán chứng minh đồng quy

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Các đường thẳng AO, BO, CO cắt (O) tại D, E, F. ID, IE, IF cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z theo thứ tự. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Lời giải.



Nếu tam giác ABC vuông, chẳng hạn tại A. Khi đó $BY, CZ \equiv BC$, bài toán hiển nhiên đúng. Vì vậy ta chỉ cần xét với tam giác không vuông, khi đó $S_A, S_B, S_C \neq 0$.

Phương trình đường thẳng $AD : c^2S_Cy = b^2S_Bz \Rightarrow z = \dfrac{c^2S_C}{b^2S_B} \cdot y$.

$\Rightarrow$ tọa độ của D là nghiệm của hệ $\begin{cases} z = \dfrac{c^2S_C}{b^2S_B} \cdot y \\ a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0 \end{cases}$.

Cho $x = 1$, ta có hệ:

$$\begin{cases} z = \dfrac{c^2S_C}{b^2S_B} \cdot y \\ a^2yz + b^2z + c^2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y^2a^2 \cdot \frac{c^2S_C}{b^2S_B} + y \cdot \frac{c^2S_C}{S_B} + yc^2 \cdot \frac{c^2S_C}{b^2S_B} = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2a^2c^2S_C + yb^2c^2\left(S_B + S_C\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{b^2c^2\left(S_B + S_C\right)}{a^2c^2S_C} = -\frac{b^2}{S_C} \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $z = -\dfrac{c^2}{S_B} \Rightarrow D\left(1, -\dfrac{b^2}{S_C}, -\dfrac{c^2}{S_B}\right) = (-S_BS_C, b^2S_B, c^2S_B)$.

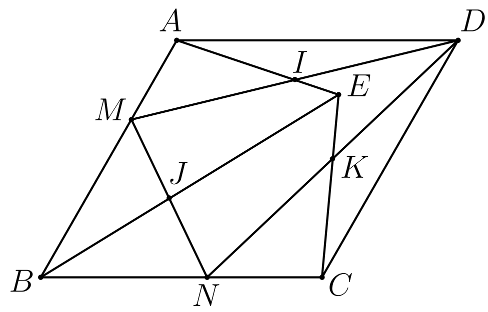
Suy ra đường thẳng ID có phương trình

$$bc\left(cS_C - bS_B\right)x - cS_C\left(S_B + ca\right)y + bS_B\left(S_C + ab\right)z = 0$$

Phương trình đường thẳng $BC : x = 0 \Rightarrow X = BC \cap ID = \left(0, \dfrac{bS_B}{S_B + ca}, \dfrac{cS_C}{S_C + ab}\right)$

Bằng cách hoán vị vòng quanh a, b, c, ta tìm được tọa độ của Y, Z. Suy ra AX, BY, CZ đồng quy tại $J\left(\dfrac{aS_A}{S_A+bc}, \dfrac{bS_B}{S_B+ca}, \dfrac{cS_C}{S_C+ab}\right)$. ❐

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$, các điểm M, N nằm trên các đường thẳng AB, BC. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm DM, MN, DN. Chứng minh rằng AI, BJ, CK đồng quy.
Lời giải.



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB} \Rightarrow D(1,-1,1)$.
$M \in AB \Rightarrow M(x_M, y_M, 0); N \in AC \Rightarrow N(0, y_N, z_N)$.
I là trung điểm $AB \Leftrightarrow I$ chia đoạn AB theo tỉ số -1, suy ra $I(2x_M+y_N, -x_M, x_M+y_M)$.
Phương trình đường thẳng AI

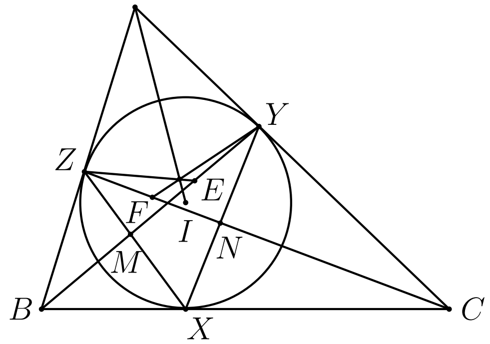
$$y(x_M+y_M)+zx_M=0 \Leftrightarrow y=\frac{-zx_M}{x_M+y_M}$$

Tương tự, phương trình đường thẳng CK

$$xz_N+y(y_N+z_N)=0 \Leftrightarrow y=\frac{-xz_N}{y_N+z_N}$$

Gọi $G(x_G, y_G, z_G)$ là giao điểm của AI và CK, ta có $\dfrac{x_Gz_N}{y_N+z_N}=-y_G=\dfrac{z_Gx_M}{x_M+y_M}$
$\Rightarrow x_Gz_N(x_M+y_M)=z_Gx_M(y_N+z_N)$
J là trung điểm MN, suy ra $J(x_M(y_N+z_N), y_M(y_N+z_N)+y_N(x_M+y_M), z_N(x_M+y_M))$. Do đó, đường thẳng BJ có phương trình $xz_N(x_M+y_M)=zx_M(y_N+z_N)$.
Từ đó suy ra $G \in BJ$ hay AI, BJ, CK đồng quy. ❐

Bài 3. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại X, Y, Z. Đặt $M=BY\cap XZ, N=CZ\cap XY$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của MY, NZ. Chứng minh rằng AI, YF, ZE đồng quy.
Lời giải.



Ta có $I(a,b,c), X\left(0,\dfrac{1}{p-b},\dfrac{1}{p-c}\right), Y\left(\dfrac{1}{p-a},0,\dfrac{1}{p-c}\right), Z\left(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{1}{p-b},0\right)$.
Suy ra phương trình đường thẳng BY

$$(p-a)x=(p-c)z$$

Phương trình đường thẳng XZ

$$(p-a)x-(p-b)y+(p-c)z=0$$

Do đó M có tọa độ thỏa mãn $2(p-a)x=(p-b)y=2(p-c)z \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{2}{p-b},\dfrac{1}{p-c}\right)$.
Đặt $\mathcal{T}_y=\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-c}, \mathcal{T}=\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}$.
E là trung điểm $MY \Rightarrow E\left(\dfrac{\mathcal{T}}{p-a},\dfrac{\mathcal{T}_y}{p-b},\dfrac{\mathcal{T}}{p-c}\right)$.
Suy ra phương trình đường thẳng ZE

$$-x\cdot\frac{\mathcal{T}}{(p-b)(p-c)}+y\cdot\frac{\mathcal{T}}{(p-a)(p-c)}+z\cdot\frac{1}{(p-a)(p-b)^2}=0$$

Tương tự, ta có phương trình đường thẳng YF

$$-x\cdot\frac{\mathcal{T}}{(p-b)(p-c)}+y\cdot\frac{1}{(p-a)(p-c)^2}+z\cdot\frac{\mathcal{T}}{(p-a)(p-b)}=0$$

Gọi J là giao điểm của YF và ZE thì tọa độ của J thỏa mãn hệ

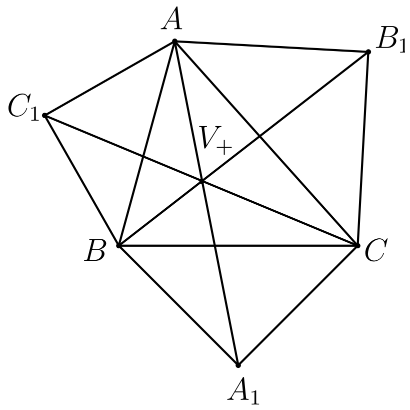
$$\begin{cases}-x_J\cdot\dfrac{\mathcal{T}}{(p-b)(p-c)}+y_J\cdot\dfrac{\mathcal{T}}{(p-a)(p-c)}+z_J\cdot\dfrac{1}{(p-a)(p-b)^2}=0\\ -x_J\cdot\dfrac{\mathcal{T}}{(p-b)(p-c)}+y_J\cdot\dfrac{1}{(p-a)(p-c)^2}+z_J\cdot\dfrac{\mathcal{T}}{(p-a)(p-b)}=0\end{cases}$$

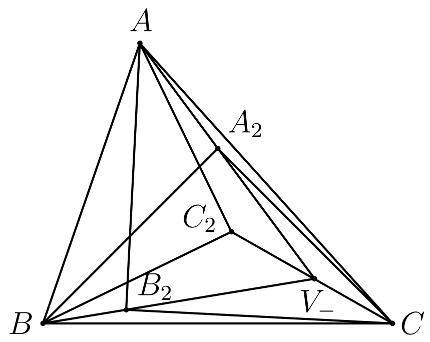
Từ hệ suy ra

$$\begin{aligned}&y_J\cdot\frac{\mathcal{T}}{(p-a)(p-c)}+z_J\cdot\frac{1}{(p-a)(p-b)^2}=y_J\cdot\frac{1}{(p-a)(p-c)^2}+z_J\cdot\frac{\mathcal{T}}{(p-a)(p-b)}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{y_J}{(p-a)(p-c)}\left(\mathcal{T}-\frac{1}{p-c}\right)=\frac{z_J}{(p-a)(p-b)}\left(\mathcal{T}-\frac{1}{p-b}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{y_J}{p-c}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right)=\frac{z_J}{p-b}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c}\right)\\ \Leftrightarrow\ &cy_J=bz_J\end{aligned}$$

Mặt khác, đường thẳng AI có phương trình $cy-bz=0$. Suy ra $J\in AI$ hay AI, YF, ZE đồng quy. ❐

Bài 4. (bài toán về điểm Vecten) Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài (vào trong) 3 hình vuông trên các cạnh tam giác. Khi đó các đường nối một đỉnh của tam giác với tâm hình vuông dựng trên cạnh đối diện đồng quy tại điểm Vecten của tam giác ABC.
Lời giải.





Xét trường hợp các hình vuông dựng phía ngoài tam giác. Gọi tâm các hình vuông như hình vẽ. Áp dụng công thức Conway, ta có

$$A_1(-a^2, S_C+S, S_B+S), B_1(S_C+S, -b^2, S_A+S), C_1(S_B+S, S_A+S, -c^2)$$

Nếu $\triangle ABC$ có một góc bằng $45°$ hoặc $135°$ thì bài toán hiển nhiên đúng. Ta chỉ xét với tam giác không có góc nào bằng $45°$ hoặc $135°$. Khi đó $S_\alpha \pm S \neq 0$ với $\alpha = A, B, C$.
Do đó ta có

$$A_1(-a^2(S_A+S), (S_C+S)(S_A+S), (S_A+S)(S_B+S)), \ldots$$

Suy ra các đường nối một đỉnh của tam giác với tâm hình vuông dựng phía ngoài đồng quy tại điểm Vecten ngoài (dương) V_+ có tọa độ

$$\begin{aligned}
&((S_B+S)(S_C+S), (S_C+S)(S_A+S), (S_A+S)(S_B+S)) \\
=&\left(\frac{1}{S_A+S}, \frac{1}{S_B+S}, \frac{1}{S_C+S}\right) \\
=&((\cot B+1)(\cot C+1), (\cot C+1)(\cot A+1), (\cot A+1)(\cot B+1))
\end{aligned}$$

Tương tự ta có điểm Vecten trong (âm) V_- với tọa độ

$$\begin{aligned}
&((S_B-S)(S_C-S), (S_C-S)(S_A-S), (S_A-S)(S_B-S)) \\
=&\left(\frac{1}{S_A-S}, \frac{1}{S_B-S}, \frac{1}{S_C-S}\right) \\
=&((\cot B-1)(\cot C-1), (\cot C-1)(\cot A-1), (\cot A-1)(\cot B-1))
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$(\cot B+1)(\cot C+1)+(\cot B-1)(\cot C-1) = 2(\cot B\cot C+1) = 2\cdot\frac{\cos(B-C)}{\sin B\sin C}$$

Do đó đường thẳng nối hai điểm Vecten đi qua điểm có tọa độ

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\cos(B-C)}{\sin B\sin C}, \frac{\cos(C-A)}{\sin C\sin A}, \frac{\cos(A-B)}{\sin A\sin B}\right) \\
=&(\sin A\cos(B-C), \sin B\cos(C-A), \sin C\cos(A-B)) \\
=&(a\cos(B-C), b\cos(C-A), c\cos(A-B))
\end{aligned}$$

chính là tâm Euler của tam giác ABC. Vậy ta có một tính chất của hai điểm Vecten: hai điểm Vecten thẳng hàng với tâm Euler của tam giác ABC. ❒

Ta có bài toán tổng quát hơn sau: Cho tam giác ABC, dựng các tam giác cân cùng hướng XBC, YCA, ZAB và các góc ở đáy bằng nhau và bằng θ. Khi đó các đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại điểm

$$K_\theta = \left(\frac{1}{S_A + S_\theta}, \frac{1}{S_B + S_\theta}, \frac{1}{S_C + S_\theta}\right)$$

Tam giác XYZ được gọi là tam giác Kiepert và K_θ được gọi là tâm thấu xạ Kiepert với tham số θ.

3.2. Các bài toán về diện tích

Bài 1. (Định lý Routh) Cho tam giác ABC, các điểm M, N, P nằm trên BC, CA, AB và chia các đoạn BC, CA, AB theo các tỉ số $m : 1, n : 1, p : 1$. Gọi S_1 là tam giác tạo bởi giao điểm của các đường AM, BN, CP; S_2 là diện tích tam giác MNP. Khi đó:

1. $S_1 = \dfrac{(mnp-1)^2}{(mn+m+1)(np+n+1)(pm+p+1)} S_{ABC}$
2. $S_2 = \dfrac{mnp+1}{(m+1)(n+1)(p+1)} S_{ABC}$

Lời giải.
Ta có $D(0,1,m), E(n,0,1), F(1,p,0)$.
Gọi I là giao điểm của BN, CP, các điểm J, K được xác định tương tự. Ta tìm được $I(n, np, 1)$, $J(1, p, pm), K(mn, 1, m)$. Suy ra:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\begin{vmatrix} n & np & 1 \\ 1 & p & pm \\ mn & 1 & m \end{vmatrix}}{(mn+m+1)(np+n+1)(pm+p+1)} \cdot S_{ABC} \\ &= \frac{(mnp-1)^2}{(mn+m+1)(np+n+1)(pm+p+1)} S_{ABC} \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ n & 0 & 1 \\ 1 & p & 0 \end{vmatrix}}{(m+1)(n+1)(p+1)} \cdot S_{ABC} = \frac{mnp+1}{(m+1)(n+1)(p+1)} S_{ABC}$$

Định lý Routh chính là một tổng quát của định lý Ceva và Menelaus: Nếu $mnp = 1$ thì $S_1 = 0 \Rightarrow AM, BN, CP$ đồng quy. Nếu $mnp = -1$, $S_2 = 0 \Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng. ❒

Bài 2. (Công thức Euler) Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên BC, CA, AB. Khi đó ta có $\dfrac{S_{[A_1B_1C_1]}}{S_{[ABC]}} = -\dfrac{\mathcal{P}_{M/(O)}}{4R^2}$.

Lời giải.
Ta có $A_1(0, x_M S_C + y_M a^2, x_M S_B + z_M a^2), B_1(y_M S_C + x_M b^2, 0, y_M S_A + z_M b^2)$,
$C_1(z_M S_B + x_M c^2, z_M S_A + y_M c^2, 0)$. Chú ý rằng ta có

$$x_M S_C + y_M a^2 + x_M S_B + z_M a^2 = a^2(x_M + y_M + z_M)$$

và hai đẳng thức tương tự. Suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{S_{[A_1B_1C_1]}}{S_{[ABC]}} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_M S_C + y_M a^2 & x_M S_B + z_M a^2 \\ y_M S_C + x_M b^2 & 0 & y_M S_A + z_M b^2 \\ z_M S_B + x_M c^2 & z_M S_A + y_M c^2 & 0 \end{vmatrix}}{a^2b^2c^2(x_M + y_M + z_M)^3} \\
&= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{a^2 y_M z_M + b^2 z_M x_M + c^2 x_M y_M}{(x_M + y_M + z_M)^2} \\
&= \frac{4S^2_{[ABC]}}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{a^2 y_M z_M + b^2 z_M x_M + c^2 x_M y_M}{(x_M + y_M + z_M)^2} \\
&= -\frac{\mathcal{P}_{M/(O)}}{4R^2}
\end{aligned}$$

❒

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên đường thẳng BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Lấy các điểm A'', B'', C'' sao cho $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AA''}, \overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BB''}, \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CC''}$ (k là số thực khác 0). Khi đó $k^2 S_{[A''B''C'']} = S_{[A'B'C']} + (k-1)(k-2)S_{[ABC]}$.
Lời giải.
Gọi $A'(0, y_1, z_1), B'(x_2, 0, z_2), C'(x_3, y_3, 0)$.
Ta có $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AA''} \Leftrightarrow \overrightarrow{A''A'} = (1-k)\overrightarrow{A''A}$. Suy ra $A''((k-1)(y_1+z_1), y_1, z_1)$. Tương tự, ta có $B''(x_2, (k-1)(x_2+z_2), z_2), C''(x_3, y_3, (k-1)(x_3+y_3))$.
Đặt $\mathcal{P} = (y_1+z_1)(z_2+x_2)(x_3+y_3), \mathcal{Q} = y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3, \mathcal{R} = y_3z_2(y_1+z_1) + x_2y_1(x_3+y_3) + z_1x_3(x_2+z_2)$ thì $\mathcal{P} = \mathcal{Q} + \mathcal{R}$. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$k^2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} (k-1)(y_1+z_1) & y_1 & z_1 \\ x_2 & (k-1)(x_2+z_2) & z_2 \\ x_3 & y_3 & (k-1)(x_3+y_3) \end{vmatrix}}{k^3\mathcal{P}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 \\ x_2 & 0 & z_2 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix}}{\mathcal{Q}} + (k-1)(k-2)$$

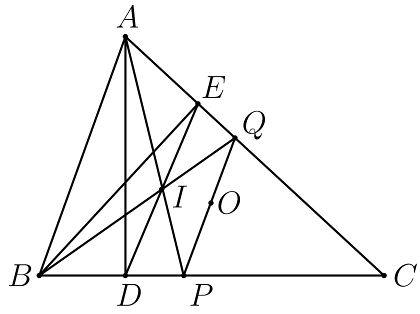
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow k^2 \cdot \frac{(k-1)^3\mathcal{P} + \mathcal{Q} - (k-1)\mathcal{R}}{k^3\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{P}} + (k-1)(k-2) \\
&\Leftrightarrow (k-1)^3\mathcal{P} + \mathcal{Q} - (k-1)\mathcal{R} = k\mathcal{Q} + k(k-1)(k-2)\mathcal{P} \\
&\Leftrightarrow (k-1)^3\mathcal{P} - (k-1)(\mathcal{Q} + \mathcal{R}) = k(k-1)(k-2)\mathcal{P} \\
&\Leftrightarrow (k-1)^3\mathcal{P} - (k-1)\mathcal{P} = k(k-1)(k-2)\mathcal{P}
\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối đúng do ta có $(k-1)^3 - (k-1) = (k-1)\left((k-1)^2 - 1\right) = k(k-1)(k-2)$.
Vì vậy $k^2 S_{[A''B''C'']} = S_{[A'B'C']} + (k-1)(k-2)S_{[ABC]}$. ❒

3.3. Các bài toán khác

Bài 1. Cho tam giác ABC không vuông tại C, AD, BE là các đường cao và AP, BQ là các đường phân giác trong ($D, P \in BC$ và $E, Q \in CA$). Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng D, E, I thẳng hàng khi và chỉ khi P, Q, O thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $O(a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C), I(a,b,c), D(0, S_C, S_B), E(S_C, 0, S_A), P(0,b,c), Q(a,0,c)$. Điều cần chứng minh tương đương với

$$D_1 = \begin{vmatrix} a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & S_C & S_B \\ S_C & 0 & S_A \end{vmatrix} = 0$$

Ta có $D_1 = abc(aS_A + bS_B - cS_C), D_2 = S_C(aS_A + bS_B - cS_C)$. Vì tam giác ABC không vuông tại C nên $S_C \neq 0$. Do đó $D_1 = 0 \Leftrightarrow aS_A + bS_B - cS_C = 0 \Leftrightarrow D_2 = 0$. ❒

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F là ảnh của A, B, C qua phép đối xứng trục BC, CA, AB theo thứ tự. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH = 2R$ với H là trực tâm và $(O; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $D(-a^2, 2S_C, 2S_B), E(2S_C, -b^2, 2S_A), F(2S_B, 2S_A, -c^2)$.

Do đó D, E, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -a^2 & 2S_C & 2S_B \\ 2S_C & -b^2 & 2S_A \\ 2S_B & 2S_A & -c^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)\left(2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)\right) - 5a^2b^2c^2 = 0$

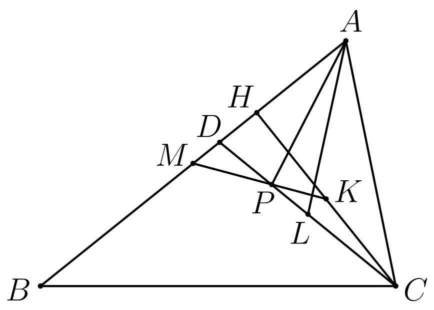
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = \dfrac{5a^2b^2c^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)} = \dfrac{5a^2b^2c^2}{16S_{ABC}^2} = 5R^2$

$\Leftrightarrow 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) = 4R^2$

$\Leftrightarrow OH^2 = 4R^2 \Leftrightarrow OH = 2R$ ❒

Bài 3. Cho tam giác ABC không cân tại C, M là trung điểm AB, CH, CD tương ứng là đường cao và đường phân giác trong của tam giác ABC. K, L là trung điểm CH, CD. P là giao điểm của CD và MK. Chứng minh rằng P, L là 2 điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.

Lời giải.



Ta có $H(S_B, S_A, 0), D(a, b, 0), M(1, 1, 0)$. Suy ra $K(S_B, S_A, c^2), L(a, b, a+b)$.
Phương trình đường thẳng MK

$$-xc^2 + yc^2 + (b^2 - a^2)z = 0$$

Phương trình đường thẳng CD

$$bx = ay$$

Từ đó ta có

$$\begin{cases} bx_P = ay_P \\ -x_Pc^2 + y_Pc^2 + (a^2 - b^2)z_P = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_P = \dfrac{b}{a} \cdot x_P \\ x_Pc^2 \left(1 - \dfrac{b}{a}\right) = (a^2 - b^2)z_P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_P = \dfrac{b}{a} \cdot x_P \\ x_Pc^2 = a(b+a)z_P \end{cases}$$

Do đó $(x_P, y_P, z_P) = (a(a+b), b(a+b), c^2) = \left(a, b, \dfrac{c^2}{a+b}\right)$.
Suy ra $(x_Px_L, y_Py_L, z_Pz_L) = (a^2, b^2, c^2)$ hay P và L là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. ❒

4. Các bài tập đề nghị

Bài 1. Cho tam giác $ABC, AB < AC$, đường phân giác trong AD ($d \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy E sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{BCA}$, MD cắt AB tại K. Chứng minh rằng $EK \parallel AD$.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. M là trung điểm BC. Chứng minh rằng AM, EF, ID đồng quy.

Bài 3. Các phân giác trong của các góc A, B, C của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác ABC. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). S là một điểm di động trên đường tròn, SB cắt AC tại M, SC cắt AB tại N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên (O).

Bài 5. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm di động trên đường tròn (O). Đường thẳng AM cắt BC tại A_1, A_2 là điểm đối xứng với A_1 qua trung điểm BC. Tương tự ta xác định các điểm B_2, C_2. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm N (M và N được gọi là cặp điểm "isotomic conjugate" trong tam giác ABC). Chứng minh rằng N luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên (O).

Bài 6. (VMO 1980) Cho P là một điểm nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Đường thẳng PA_i cắt cạnh đối diện tại B_i. Gọi C_i là trung điểm của A_iB_i và D_i là trung điểm PB_i. Hãy so sánh diện tích hai tam giác $C_1C_2C_3$ và $D_1D_2D_3$. (chỉ số i nhận giá trị trong tập $\{1, 2, 3\}$)

Bài 7. (IMO 2007) Trong tam giác ABC, đường phân giác của góc $\widehat{BCA}$ cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác tại R, cắt đường trung trực của BC tại P, và đường trung trực của AC tại Q. Trung điểm của BC là K và trung điểm của AC là L. Chứng minh rằng tam giác RPK và tam giác RQL có diện tích bằng nhau.

Phụ lục: Định thức của ma trận 3×3

Ma trận có thể được xem như một bảng của những số thực. Nếu ma trận có m dòng, n cột thì nó còn được kí hiệu là $A_{m \times n}$. Một ma trận có số hàng bằng số cột được gọi là ma trận vuông. Định thức của ma trận vuông chính là một giá trị đặc trưng cho ma trận đó, thể hiện một vai trò rất quan trọng trong nhiều dạng Toán có liên quan đến ma trận và một trong số đó là việc ứng dụng trong tọa độ tỉ cự đang đề cập.
Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

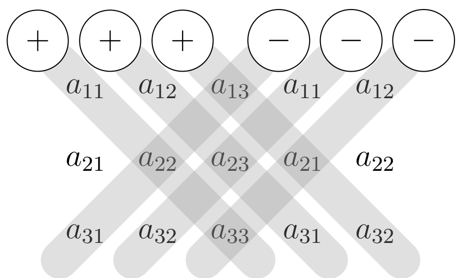
Chúng ta định nghĩa định thức (determinant) của A, kí hiệu $\det(A)$ hoặc $|A|$ là

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Định thức này được xác định bằng cách xét các số hạng của hàng đầu tiên và mỗi số nhân với phần bù đại số của nó rồi cộng các tích lại với nhau. Phần bù đại số của một phần tử a_{ij} là định thức của ma trận còn lại sau khi bỏ đi hàng i và cột j của A và nhân với $(-1)^{i+j}$.
Nếu chúng ta đã tính toán thuần thục với biểu thức này rồi, ta có thể nhớ định thức trên bởi công thức khai triển sau

$$|A| = \big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{33}\big) - \big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{31}\big)$$

Ta có quy tắc Sarrus (đặt theo tên nhà toán học Pháp Pierre Frédéric Sarrus) để tính nhanh định thức: Ghép thêm cột thứ nhất và cột thứ hai vào bên phải định thức rồi lấy tích các phần tử trên các đường chéo, sau đó cộng hoặc trừ các tích như thể hiện trên hình



Tài liệu tham khảo

[1] Weisstein, Eric W., "Barycentric Coordinates." từ MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html

[2] Paul Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle.*

[3] Tom Lovering, *Areal Co-ordinate Methods in Euclidean Geometry.* http://www.bmoc.maths.org/home/areals.pdf

[4] Paul Yiu, *The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry.* http://math.fau.edu/yiu/barycentricpaper.pdf

[5] Clark Kimberling, *The Encyclopedia of Triangle Centers.* http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[6] Nguyễn Minh Hà, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10*, NXB Giáo dục.

[7] *Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, NXB Giáo dục, 2000.

[8] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

[9] Diễn đàn MathScope: http://forum.mathscope.org/index.php

[10] Diễn đàn Math.vn: http://math.vn/index.php

[11] Diễn đàn Art of Problem Solving: http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php?