KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG 2021
BÀI THI: TOÁN
THỜI GIAN: 90 PHÚT

PHẦN I. ĐỀ BÀI MÃ 115

Câu 1. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=4\pi R^2$. **B.** $S=16\pi R^2$. **C.** $S=\pi R^2$. **D.** $S=\frac{4}{3}\pi R^2$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=9^x$ là:

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Câu 3. Với n là số nguyên dương bất kỳ, $n\ge 4$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $A_n^4=\frac{n!}{(n-4)!}$. **B.** $A_n^4=\frac{(n-4)!}{n!}$. **C.** $A_n^4=\frac{4!}{(n-4)!}$. **D.** $A_n^4=\frac{n!}{4!(n-4)!}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-y+2z-1=0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(3;1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(-3;1;2)$. **C.** $\overrightarrow{n_4}=(3;1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{n_2}=(3;-1;2)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Cho $a>0$ và $a\ne 1$, khi đó $\log_a\sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{-1}{4}$. **C.** -4. **D.** $\frac{1}{4}$.

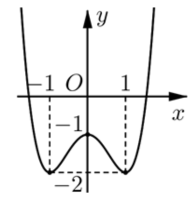
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$.

C. $\left(-\infty;0\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 9. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với $u_1=3$ và $u_2=9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 10. Nếu $\int_0^3 f\left(x\right)dx=4$ thì $\int_0^3 3f\left(x\right)dx$ bằng

A. 36. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11. Nghiệm của phương trình: $\log_3\left(5x\right)=2$ là:

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 12. Cho hàm số: $f(x)=x^2+4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+4x+C$. **B.** $\int f(x)dx=x^3+4x+C$.

C. $\int f(x)dx=2x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x^2+4x+C$.

Câu 13. Phần thực của số phức $5-2i$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** -5. **D.** 5.

Câu 14. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=5a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $5a^3$. **B.** $\frac{5}{6}a^3$. **C.** $\frac{5}{3}a^3$. **D.** $\frac{5}{2}a^3$.

Câu 15. Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là:

A. 0. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 16. Cho khối trụ có bán kính đáy $r=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 54π. **B.** 36π. **C.** 108π. **D.** 18π.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(-2;3;5\right)$. Toạ độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là

A. $\left(-2;3;5\right)$. **B.** $\left(2;-3;-5\right)$. **C.** $\left(-2;-3;5\right)$. **D.** $\left(2;-3;5\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $f\left(x\right)=e^x+2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^x-2x+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^x+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=e^{x-2}+C$.

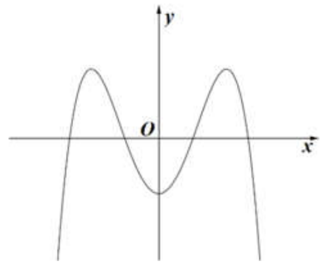
Câu 19. Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ bằng

A. $125a^3$. **B.** $25a^3$. **B.** a^3. **D.** $5a^3$.

Câu 20. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Câu 21. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=2x^4-4x^2-1$. **B.** $y=-2x^4+4x^2-1$. **C.** $y=-x^3+3x-1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(-2;4;5)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases}x=3-2t\\y=1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+3t\\y=4-t\\z=5+4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$.

Câu 23. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{2}}$ là:

A. $y'=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. **B.** $y'=\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. **C.** $y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y'=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{2}}$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x<2$ là

A. $(\log_2 3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;\log_3 2)$. **C.** $(\log_3 2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;\log_2 3)$.

Câu 25. Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $7-2i$. **B.** $1+6i$. **C.** $-1-6i$. **D.** $7+2i$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=3$.

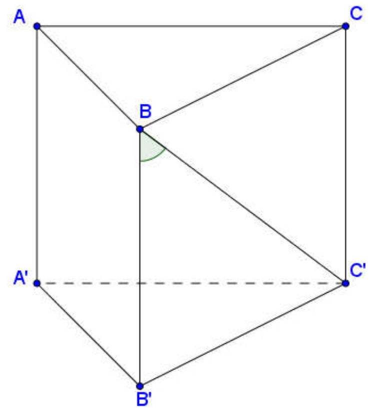
Câu 27. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_4=-3-4i$. **B.** $z_3=-3+4i$. **C.** $z_1=3-4i$. **D.** $z_2=3+4i$.

Câu 28. Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_1^4 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 1.

Câu 29. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

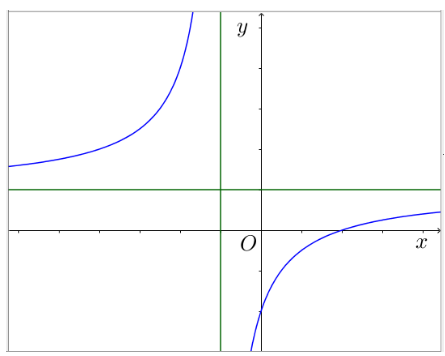


A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Câu 30. Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

A. $\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{7}{44}$. **D.** $\frac{1}{22}$.

Câu 31. Biết hàm số $y=\frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'<0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **D.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, AB=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $\sqrt{2}a$.

Câu 33. Với mọi a,b thỏa mãn $\log_2 a^3+\log_2 b=6$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b=36$. **B.** $a^3+b=36$. **C.** $a^3b=64$. **D.** $a^3+b=64$.

Câu 34. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $iz=5+4i$. số phức liên hợp của z là:

A. $\overline{z}=4-5i$. **B.** $\overline{z}=4+5i$. **C.** $\overline{z}=-4-5i$. **D.** $\overline{z}=-4+5i$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(4;1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

A. $3x+y+2z-17=0$. **B.** $3x+y+2z-3=0$.

C. $5x+y+2z-5=0$. **D.** $5x+y+2z-25=0$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+4z+1=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{4}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+2}{4}$.

Câu 38. Nếu $\int_0^2 f(x)dx=5$ thì $\int_0^2 [2f(x)-1]dx$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

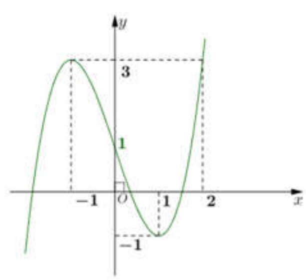
Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & khi\ x\ge 1\\ 3x^2+4 & khi\ x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 33. **C.** 12. **D.** 29.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** 26. **C.** 25. **D.** Vô số.

Câu 41. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 42. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=7$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 43. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là 30^o. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các hệ số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 18$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $\ln 3$. **D.** $2\ln 3$.

Câu 45. Xét các số phức z,w thỏa $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **D.** 3.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy).27^{9x}$?

A. 12. **B.** 27. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$.

C. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$. **D.** $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 48. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng một góc bằng $60°$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $4\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{7}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 49. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và điểm $B(-2;1;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=2$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{53}$. **D.** $\sqrt{61}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)(x^2-9),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x^3+5x|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

HẾT

PHẦN II. BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.C**	**3.A**	**4.D**	**5.D**	**6.D**	**7.A**	**8.A**	**9.D**	**10.B**
11.A	**12.A**	**13.D**	**14.C**	**15.B**	**16.C**	**17.A**	**18.A**	**19.A**	**20.B**
21.B	**22.B**	**23.C**	**24.B**	**25.A**	**26.A**	**27.B**	**28.B**	**29.A**	**30.C**
31.C	**32.B**	**33.C**	**34.C**	**35.B**	**36.B**	**37.A**	**38.C**	**39.A**	**40.B**
41.B	**42.C**	**43.C**	**44.B**	**45.B**	**46.C**	**47.B**	**48.A**	**49.C**	**50.C**

PHẦN III. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=4\pi R^2$. **B.** $S=16\pi R^2$. **C.** $S=\pi R^2$. **D.** $S=\frac{4}{3}\pi R^2$.

Lời giải

Ta có công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là: $S=4\pi R^2$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=9^x$ là:

A. $\left(0;+\infty\right)$. **B.** $\left[0;+\infty\right)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Lời giải

Do hàm số $y=9^x$ xác định $\forall x$ nên tập xác định hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Câu 3. Với n là số nguyên dương bất kỳ, $n\ge 4$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $A_n^4=\dfrac{n!}{\left(n-4\right)!}$. **B.** $A_n^4=\dfrac{\left(n-4\right)!}{n!}$. **C.** $A_n^4=\dfrac{4!}{\left(n-4\right)!}$. **D.** $A_n^4=\dfrac{n!}{4!\left(n-4\right)!}$.

Lời giải

Ta có công thức số chỉnh hợp chập k của n phần tử: $A_n^k=\dfrac{n!}{\left(n-k\right)!}$ nên $A_n^4=\dfrac{n!}{\left(n-4\right)!}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-y+2z-1=0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\overrightarrow{n_3}=\left(3;1;2\right)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=\left(-3;1;2\right)$. **C.** $\overrightarrow{n_4}=\left(3;1;-2\right)$. **D.** $\overrightarrow{n_2}=\left(3;-1;2\right)$.

Lời giải

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}=\left(3;-1;2\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Hàm số đã cho có hai điểm cực đại là $x_{CD}=-1; x_{CD}=4$ và hai điểm cực tiểu là $x_{CT}=-2$ $x_{CT}=1$ nên có 4 điểm cực trị.

Câu 6. Cho $a>0$ và $a\ne 1$, khi đó $\log_a\sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{-1}{4}$. **C.** -4. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_a a = \frac{1}{4}.1 = \frac{1}{4}$

Câu 7. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

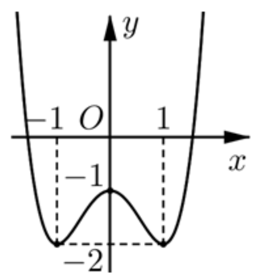
Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho: $y_{CT} = -3$

Câu 8. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$.

C. $\left(-\infty;0\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Trong $\left(0;1\right)$ thì đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ đi xuống nên hàm số nghịch biến trong khoảng $\left(0;1\right)$.

Câu 9. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $u_2 = u_1.q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{9}{3} = 3$.

Câu 10. Nếu $\int_0^3 f\left(x\right)dx = 4$ thì $\int_0^3 3f\left(x\right)dx$ bằng

A. 36. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\int_0^3 3f\left(x\right)dx = 3\int_0^3 f\left(x\right)dx = 3.4 = 12$.

Câu 11. Nghiệm của phương trình: $\log_3\left(5x\right) = 2$ là:

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$. Với $x > 0$ ta có: $\log_3\left(5x\right) = 2 \Leftrightarrow 5x = 3^2 \Leftrightarrow 5x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$

Câu 12. Cho hàm số: $f(x)=x^2+4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\dfrac{x^3}{3}+4x+C$. **B.** $\int f(x)dx=x^3+4x+C$.

C. $\int f(x)dx=2x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x^2+4x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx=\int (x^2+4)dx=\dfrac{x^3}{3}+4x+C$.

Câu 13. Phần thực của số phức $5-2i$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** -5. **D.** 5.

Lời giải

Phần thực của số phức $5-2i$ là 5.

Câu 14. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=5a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $5a^3$. **B.** $\dfrac{5}{6}a^3$. **C.** $\dfrac{5}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{5}{2}a^3$.

Lời giải

Thể tích khối chóp đã cho là: $V=\dfrac{1}{3}S.h=\dfrac{1}{3}.5a^2.a=\dfrac{5}{3}a^3$.

Câu 15. Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là:

A. 0. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có giao điểm của đồ thị hàm số: $y=-x^4+4x^2-3$ với trục tung là:

Cho $x=0\Rightarrow y=-3$.

Câu 16. Cho khối trụ có bán kính đáy $r=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 54π. **B.** 36π. **C.** 108π. **D.** 18π.

Lời giải

Thể tích của khối trụ đã cho là: $V=\pi r^2h=\pi.6^2.3=108\pi$.

Câu 17. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-2;3;5)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là

A. $(-2;3;5)$. **B.** $(2;-3;-5)$. **C.** $(-2;-3;5)$. **D.** $(2;-3;5)$.

Lời giải

Ta có $A(-2;3;5)$ nên toạ độ của vectơ là $\overrightarrow{OA}=(-2;3;5)$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=e^x+2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-2}+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int (e^x+2)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$.

Câu 19. Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ bằng

A. $125a^3$. **B.** $25a^3$. **B.** a^3. **D.** $5a^3$.

Lời giải

Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ là $V=(5a)^3=125a^3$.

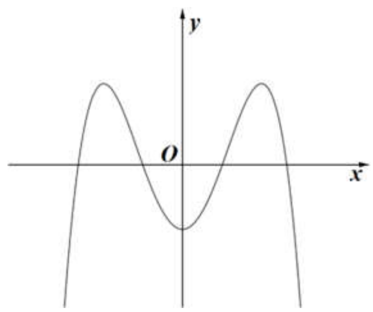
Câu 20. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 21. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=2x^4-4x^2-1$. **B.** $y=-2x^4+4x^2-1$. **C.** $y=-x^3+3x-1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Lời giải

Đường cong đã cho:

- Là dạng đồ thị của hàm bậc bốn trùng phương $\Rightarrow$ Loại C, **D.**

- Hệ số của x^4 mang dấu âm $\Rightarrow$ Loại **A.**

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(-2;4;5)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases}x=3-2t\\y=1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+3t\\y=4-t\\z=5+4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(-2;4;5)$ là

$$\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}.$$

Câu 23. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{2}}$ là:

A. $y'=\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. **B.** $y'=\dfrac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. **C.** $y'=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y'=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

A. $(\log_2 3; +\infty)$. **B.** $(-\infty; \log_3 2)$. **C.** $(\log_3 2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; \log_2 3)$.

Lời giải

Bất phương trình $3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$.

Câu 25. Cho hai số phức $z = 4 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

A. $7 - 2i$. **B.** $1 + 6i$. **C.** $-1 - 6i$. **D.** $7 + 2i$.

Lời giải

Ta có $z + w = (4 + 2i) + (3 - 4i) = 7 - 2i$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$. **B.** $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$. **D.** $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3 có phương trình của (S) là:

$(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.

Câu 27. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_4 = -3 - 4i$. **B.** $z_3 = -3 + 4i$. **C.** $z_1 = 3 - 4i$. **D.** $z_2 = 3 + 4i$.

Lời giải

Điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_3 = -3 + 4i$.

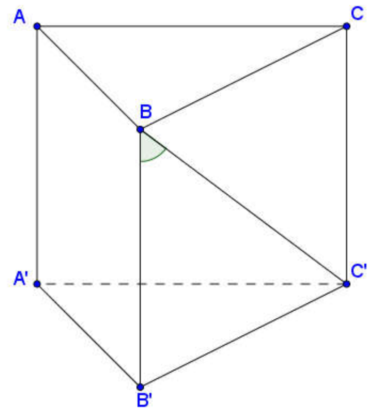
Câu 28. Nếu $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 - (-2) = 5$.

Câu 29. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Ta có $AA' // BB' \Rightarrow \left(\widehat{AA', BC'}\right) = \left(\widehat{BB', BC'}\right) = \widehat{B'BC'}$.

Xét $\Delta B'BC'$ vuông tại B', khi đó $\tan B'BC' = \dfrac{B'C'}{BB'} = 1 \Rightarrow \widehat{B'BC'} = 45°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng $45°$.

Câu 30. Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

A. $\dfrac{2}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{12}$. **C.** $\dfrac{7}{44}$. **D.** $\dfrac{1}{22}$.

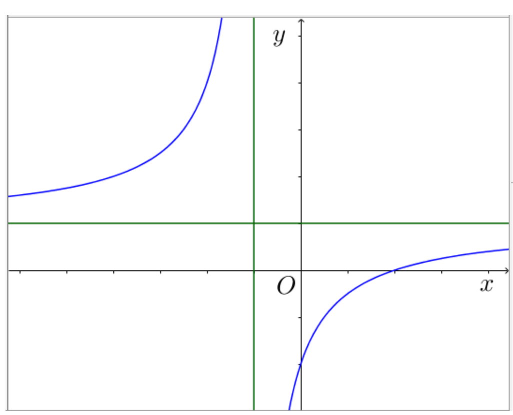
Lời giải

Số cách lấy đồng thời 3 quả bóng từ 12 quả bóng là: $n(\Omega) = C_{12}^{3} = 220$.

Số cách lấy được 3 quả màu xanh là: $n(A) = C_{7}^{3} = 35$.

Vậy xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{220} = \dfrac{7}{44}$.

Câu 31. Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' < 0, \forall x \neq -1$. **C.** $y' > 0, \forall x \neq -1$. **D.** $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Xét $y = \dfrac{x+a}{x+1}$.

Ta có $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

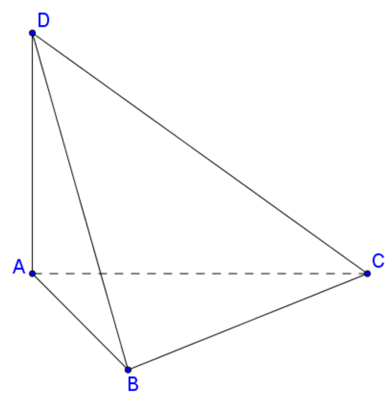
Đồ thị hàm số nằm ở góc phần tư thứ II và IV nên $y' > 0$.

Vậy $y' > 0, \forall x \neq -1$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $\sqrt{2}a$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \left(\text{do } SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.

Khi đó $d\left(C,(SAB)\right) = CB = AB = 2a$.

Câu 33. Với mọi a,b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b = 36$. **B.** $a^3 + b = 36$. **C.** $a^3b = 64$. **D.** $a^3 + b = 64$.

Lời giải

Ta có: $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6 \Leftrightarrow \log_2\left(a^3b\right) = 6 \Leftrightarrow a^3b = 2^6 = 64$.

Câu 34. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x = 3$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Ta có hàm số $y = -x^3 + 3x$ liên tục và xác định trên $[0;3]$.

$$y' = -3x^2 + 3; y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;3] \\ x = -1 \notin [0;3] \end{array}\right.$$

Khi đó, $y(0) = 0; y(1) = 2; y(3) = -18$.

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $iz = 5 + 4i$. số phức liên hợp của z là:

A. $\overline{z} = 4 - 5i$. **B.** $\overline{z} = 4 + 5i$. **C.** $\overline{z} = -4 - 5i$. **D.** $\overline{z} = -4 + 5i$.

Lời giải

Ta có $iz = 5 + 4i \Rightarrow z = \dfrac{5 + 4i}{i} = 4 - 5i \Rightarrow \overline{z} = 4 + 5i$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(4;1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

A. $3x + y + 2z - 17 = 0$. **B.** $3x + y + 2z - 3 = 0$.

C. $5x + y + 2z - 5 = 0$. **D.** $5x + y + 2z - 25 = 0$.

Lời giải

Ta có: mặt phẳng vuông góc với AB nên $\overrightarrow{AB} = (3;1;2)$ là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Khi đó, mặt phẳng đi qua $A(1;0;0)$ và vuông góc với AB có phương trình là:

$3(x-1) + 1(y-0) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 2z - 3 = 0$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là:

A. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+2}{4}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua $M(-1;3;2)$ và vuông góc với (P) nên nhận véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1;-2;4)$ của mặt phẳng (P) làm 1 véctơ chỉ phương có phương trình là:

$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$.

Câu 38. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Ta có: $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx = 2\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 1dx = 2.5 - 2 = 8$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & khi\ x \ge 1 \\ 3x^2 + 4 & khi\ x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 33. **C.** 12. **D.** 29.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int f(x)dx \Rightarrow F(x)=\begin{cases} x^2+5x+c_1 \ \ khi \ \ x\ge 1 \\ x^3+4x+c_2 \ \ khi \ \ x<1 \end{cases}$.

Mà $F(0)=2 \Rightarrow c_2=2$.

Nhận xét: Hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên: $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=F(1) \Leftrightarrow c_1=1$.

Vậy: $F(-1)+2F(2)=\left[(-1)^3+4(-1)+2\right]+2\left[2^2+5.2+1\right]=27$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** 26. **C.** 25. **D.** Vô số.

Lời giải

Xét hàm số: $f(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]$, với $x>-25$.

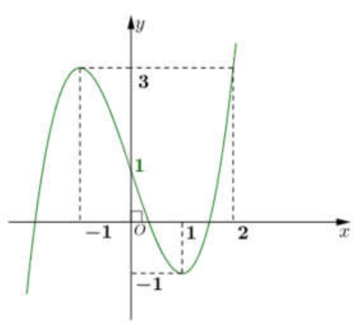
$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}-9^x=0 \\ \log_3(x+25)-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}=3^{2x} \\ \log_3(x+25)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Xét dấu $f(x)$:

x	-25		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-25;0]\cup\{2\}$. Mặt khác $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{2;0;-1;-2;...;-24\}$.

Câu 41. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta có: $f(f(x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=b\,(b<-1) \\ f(x)=0 \\ f(x)=a\,(1<a<2) \end{array}\right.$.

Phương trình $f(x)=b(b<-1)$ có một nghiệm duy nhất.

Phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=a(1<a<2)$ có ba nghiệm phân biệt.

Dựa vào đồ thị, nhận thấy 7 nghiệm này đều khác nhau, nên phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 42. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=7$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (1) có $\Delta'=2m+1$.

+Trường hợp 1: $\Delta'\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=7$ suy ra $z_o=7$ hoặc $z_o=-7$.

Nếu $z_o=7$ suy ra $49-14(m+1)+m^2=0 \Leftrightarrow m^2-14m+35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7+\sqrt{14} \\ m=7-\sqrt{14} \end{array}\right.$, (chọn).

Nếu $z_o=-7$ suy ra $49+14(m+1)+m^2=0 \Leftrightarrow m^2+14m+63=0$ vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $z_o=z_1=\overline{z_2}$.

Suy ra $|z_o|=7 \Leftrightarrow z_o.\overline{z_o}=49 \Leftrightarrow z_1.z_2=49 \Leftrightarrow m^2=49 \Leftrightarrow m=\pm 7$.

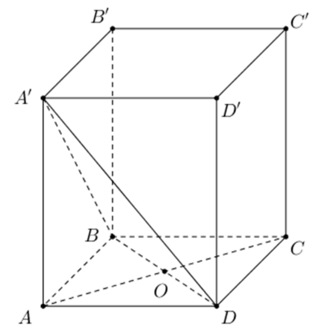
Kết hợp điều kiện $m<-\frac{1}{2}$ suy ra $m=-7$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 43. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là 30^o. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $BD = 2a \Rightarrow AO = a; AB = a\sqrt{2}$.

$\left.\begin{array}{l} AO \perp BD \\ A'A \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow A'O \perp BD$ (hệ quả).

Do đó:

$$\left.\begin{array}{l} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ AO \perp BD \\ A'O \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(A'BD);(ABCD)}\right) = \widehat{AOA'} = 30^o.$$

$\tan \widehat{AOA'} = \dfrac{AA'}{AO} \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $\ln 18$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $\ln 3$. **D.** $2\ln 3$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$f''(x) = 6x + 2a; f'''(x) = 6$.

Giả sử x_1, x_2 là hai điểm cực trị của $g(x)$ $g'(x_1) = 0, g'(x_2) = 0$ và $g(x_2) = 6; g(x_1) = -3$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 6$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$.

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)+6 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right..$$

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right|dx=\left|\int_{x_1}^{x_2}-\frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6}dx\right|$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{d(g(x)+6)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln(g(x)+6)\right|\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$=\left|\ln(g(x_2)+6)\right|-\left|\ln(g(x_1)+6)\right|=\ln 4=2\ln 2$$

Câu 45. Xét các số phức z,w thỏa $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Gọi: $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Điểm biểu diễn của số phức z là $M(x;y)$.

$|z|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra M thuộc đường tròn (C_1) tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=1$.

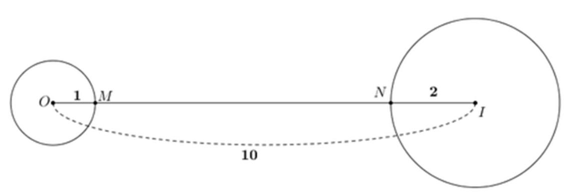
Ta lại có $|w|=2 \Rightarrow |i\overline{w}|=2$.

Đặt $t=-i\overline{w}+6+8i \Rightarrow i\overline{w}=-t+6+8i$.

$|i\overline{w}|=2 \Rightarrow |-t+6+8i|=2$.

Gọi: $t=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$. Điểm biểu diễn của số phức t là $N(a;b)$.

$|-t+6+8i|=2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-8)^2=4$. Suy ra N thuộc đường tròn (C_2) tâm $I(6;8)$, bán kính $R_2=2$.



Ta có $|z+i\overline{w}-6-8i|=|z-t|=MN$.

$Min|z+i\overline{w}-6-8i|=MinMN=OI-R_1-R_2$. (Do $OI=10>R_1+R_2$).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OI} = 10.\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OI} = -5.\overrightarrow{IN} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow z = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i \\ N\left(\dfrac{24}{5};\dfrac{32}{5}\right) \Rightarrow w = \dfrac{8}{5} + \dfrac{6}{5}i \end{cases}$.

Suy ra $|z - w| = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

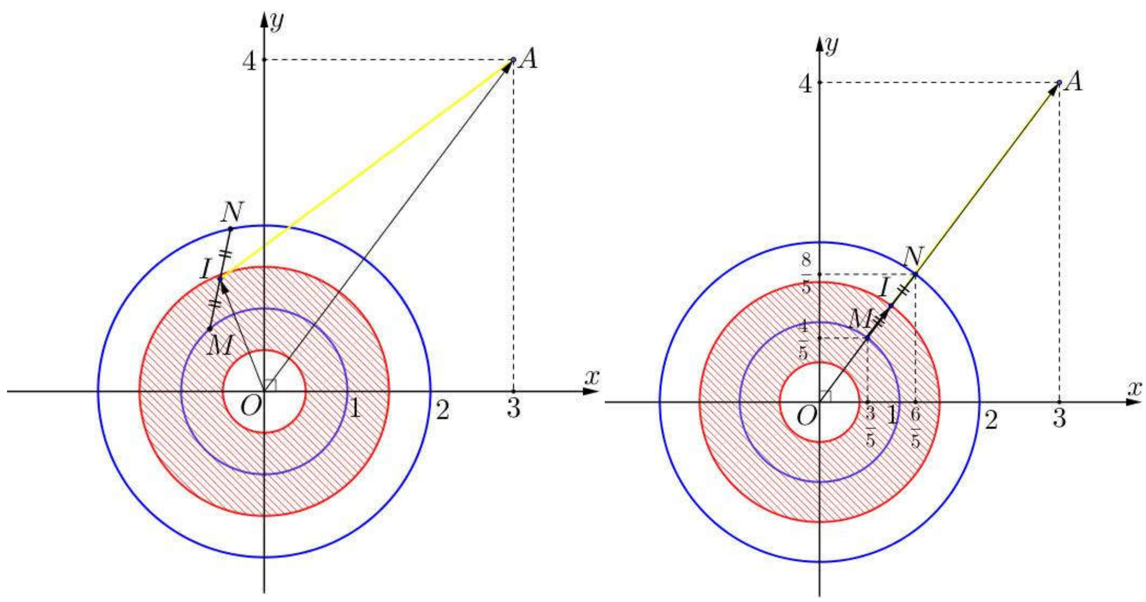
Cách 2

Ta có $|w| = 2 \Rightarrow |i\overline{w}| = 2$.

Gọi M, N là điểm biểu diễn của các số phức $z, i\overline{w}$ và $A(3;4)$.

Khi đó $\left|z + i\overline{w} - 6 - 8i\right| = \left|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OA}\right| = 2\left|\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA}\right| = 2AI$, với I là trung điểm MN.

Do M, N thuộc hai đường tròn tâm O, bán kính 1 và 2 nên I thuộc hình vành tròn được giới hạn bởi hai đường tròn bán kính $\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{3}{2}$.



Suy ra AI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ O, M, N, A thẳng hàng.

Khi đó $M\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right), N\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{8}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i \\ i\overline{w} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{8}{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i \\ w = \dfrac{8}{5} + \dfrac{6}{5}i \end{cases}$.

Vậy $|z - w| = \left|-1 - \dfrac{2}{5}i\right| = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\dfrac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy).27^{9x}$?

A. 12. **B.** 27. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

+) Ta có $(1) \Leftrightarrow 3x^2 + xy = \log_{27}(1+xy) + 9x$

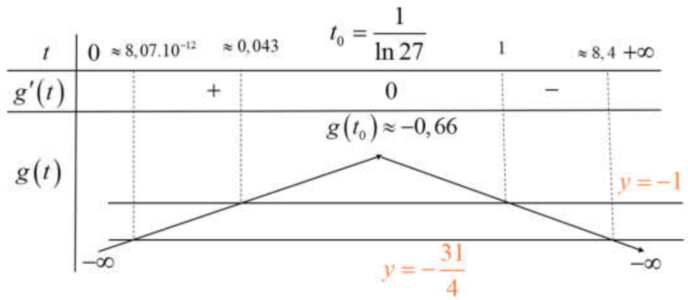
$\Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 1 = \log_{27} t - t$, với $t = 1 + xy > 0$.

+) Xét hàm số $f(x)=3x^2-9x-1$.

Ta có $-\frac{31}{4}\le f(x)<-1\ \forall x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

+) Xét hàm số $g(t)=\log_{27}t-t,\ t>0$.

$g'(t)=\frac{1}{t\ln 27}-1;\ g'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\ln 27}$



Ta có $-\frac{31}{4}\le f(x)<-1\ \forall x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$. Suy ra $-\frac{31}{4}\le g(t)<-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\in(\approx 8,07.10^{-12};\approx 0,04)\\ t\in(1;\approx 8,4)\end{array}\right.$

hay $\left[\begin{array}{l}\approx 8,07.10^{-12}<1+xy<\approx 0,04\\ 1<1+xy<\approx 8,4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\approx\frac{-1+8,07.10^{-12}}{x}<y<\approx\frac{-1+0,04}{x}\\ 0<y<\approx\frac{7,4}{x}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-3<y<-\frac{1}{3}\\ 0<y\le 22\end{array}\right.$, $(x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$, y nguyên).

+) Nhận thấy $y=-2;y=-1$ thỏa mãn đề.

+) Với $0<y\le 22$, ta có $(1)\Leftrightarrow 3x^2-9x-1-\log_{27}(1+xy)+(1+xy)=0$.

Nhập hàm, thay các giá trị nguyên của y, kiểm tra nghiệm $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$ dẫn đến chọn $1\le y\le 9$.

(Chú ý hàm số $f(t)-t$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ nên $\forall y\ge 10$, ta có:

$3x^2-9x-1-\log_{27}(1+xy)+(1+xy)\le 3x^2-9x-1-\log_{27}(1+10x)+(1+10x)<0\ \ \forall x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Do đó loại $y\ge 10$.

Vậy $y\in\{-2;-1;1;2;...;9\}$ nên có 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn đề.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

B. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-4}$.

C. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$. **D.** $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải

Giả sử $d\cap(P)=\{M\}\Rightarrow M(t;t+1;-t+2)$.

Do điểm $M\in(P)\Rightarrow t+2(t+1)+(-t+2)-4=0\Rightarrow t=0\Rightarrow M(0;1;2)$.

Lấy điểm N tùy ý thuộc đường thẳng $d\Rightarrow N(1;2;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm N và vuông góc với mặt phẳng $(P)\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1+t\end{cases}$.

Gọi $\Delta\cap(P)=\{Q\}\Rightarrow Q(1+t;2+2t;1+t)$.

Do điểm $Q\in(P)\Rightarrow 1+t+2(2+2t)+1+t-4=0\Rightarrow t=\dfrac{-1}{3}\Rightarrow Q\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P), suy ra d' sẽ đi qua điểm M và điểm Q

$\Rightarrow \vec{u}_{d'}=\overrightarrow{MQ}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(2;1;-4)$.

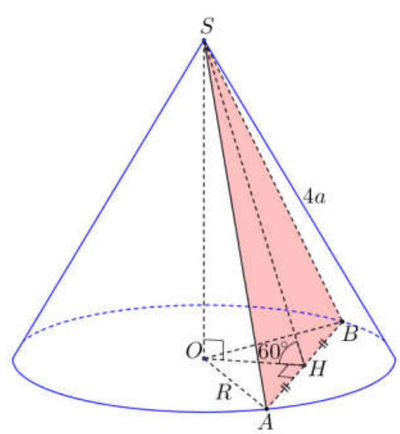
Đường thẳng d' đi qua điểm $M(0;1;2)$ và có 1 véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{d'}}=(2;1;-4)$

có phương trình là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$.

Câu 48. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng một góc bằng $60°$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $4\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{7}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn đáy và thiết diện là ΔSAB đều cạnh $4a$.

Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $SH = SA.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (OAB) là $\widehat{SHO} \Rightarrow \widehat{SHO} = 60°$.

Trong tam giác SHO có $\sin 60° = \dfrac{SO}{SH} \Rightarrow SO = SH\sin 60° = 3a$.

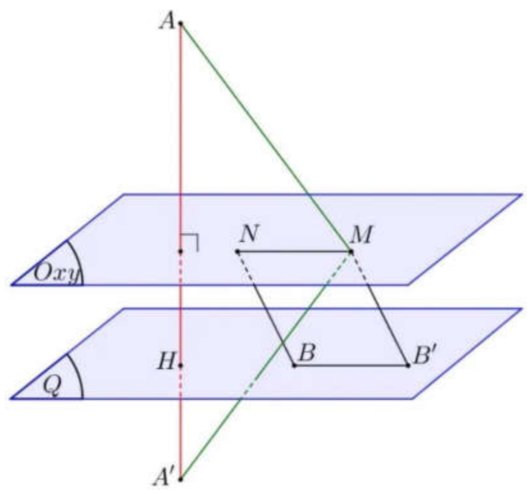
Trong tam giác SOA có $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = a\sqrt{7}$.

Vậy diện tích xung quanh của (N) là $S_{xq} = \pi rl = 4\pi\sqrt{7}a^2$.

Câu 49. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và điểm $B(-2;1;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{53}$. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải



Ta thấy: A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy). Suy ra $A'(1;-3;4)$.

Dựng $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{NM}$. Khi đó B' thuộc mặt phẳng (Q) qua B và song song (Oxy).

Phương trình $(Q): z = 2$. Và $BB' = 2$.

Suy ra B' thuộc đường tròn tâm B, bán kính $R = 2$ trong (Q).

Ta có: $|AM - BN| = |A'M - MB'| \le A'B'$. Trong đó $A';B'$ cùng phía so với (Oxy).

Gọi H là hình chiếu của A' trên (Q). Suy ra $H(1;-3;2)$.

Suy ra $A'H = 2; HB' \le HB + BB' = 5 + 2 = 7$.

Khi đó $A'B' = \sqrt{A'H^2 + HB'^2} \le \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$.

Dấu bằng xảy ra khi B nằm giữa B' và H và $M = A'B' \cap (Oxy)$ và $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{NM}$.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(|x^3 + 5x| + m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

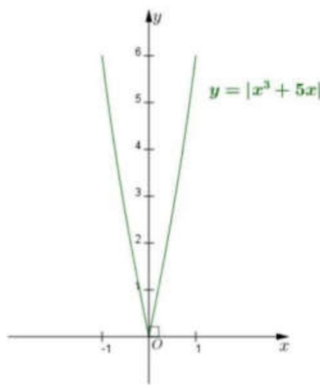
Ta cpó: $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-7)(x^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

$$g'(x)=\frac{(x^3+5x)(3x^2+5)}{|x^3+5x|}f'(|x^3+5x|+m)=\frac{x(x^2+5)(3x^2+5)}{|x^3+5x|}f'(|x^3+5x|+m).$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|x^3+5x|+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x|+m=7 \\ |x^3+5x|+m=3 \\ |x^3+5x|+m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x|=7-m \\ |x^3+5x|=3-m \\ |x^3+5x|=-3-m \end{array}\right..$$

$g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Xét hàm số $h(x)=|x^3+5x|$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)$ luôn có một điểm cực trị $x=0$ nên để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì hàm số $f'(|x^3+5x|+m)$ cần có ít nhất 2 điểm cực trị.

Suy ra phương trình $f'(|x^3+5x|+m)=0$ cần có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Từ đồ thị ta có m cần thỏa mãn điều kiện: $7-m>0 \Leftrightarrow m<7$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.