**ĐỀ 04**

**Câu 1.** (2 điểm)

1. Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn a + b + c = 2023 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2023}.$ Tính giá trị biểu thức

A = $\left(a^{2021}+b^{2021}\right)\left(b^{2023}+c^{2023}\right)\left(c^{2025}+a^{2025}\right)$

1. Cho biểu thức B = $\frac{x^{5}-4x^{3}-3x+9}{x^{4}+3x^{2}+11}$ biết x thỏa mãn $\frac{x}{x^{2}+x+1}=\frac{1}{4}.$

Chứng minh 3B là số nguyên.

**Câu 2.** (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{x}{x^{2}+4x+4}+\frac{5x}{x^{2}+4}=\frac{14}{15}$
2. Cho đa thức A = $12x^{2}-3y^{2}+8xy+2x+y$ biết rằng a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn với x = a; y = b thì giá trị của đa thức A bằng 0. Chứng minh rằng: 6a + b + 1 là bình phương của một số nguyên.

**Câu 3.** (2 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n để C = $n^{4}-8n^{3}+23n^{2}-26n+10$ là số chính phương.
2. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $x^{3}+y^{3}+1=5xy.$

**Câu 4.** (3 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Gọi M là giao điểm của BF và CE.
2. Chứng minh AB.CF = AC. AE
3. So sánh diện tích tứ giác AEMF và diện tích tam giác BMC.
4. Cho tam giác ABC, điểm D trên cạnh BC sao cho DC = 4BD. Điểm M thay đổi trên đoạn thẳng AD, BM cắt AC tại E, CM cắt AB tại F. Xác định vị trí điểm M trên AD để diện tích tam giác DEF lớn nhất.

**Câu 5.** (1 điểm) Cho a, b, c là các số dương. Tìm gia trị nhỏ nhất của biểu thức:

M = $\frac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+\frac{18b+18c}{2a+b+c}+\frac{9c}{a+b}$

**--- Hết---**

**LỜI GIẢI**

**Câu 1.**

1. Theo đề bài ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2023}$ => $\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{2023}$

=> $\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$ (vì a + b + c = 2023)

=> $\left(ab+ac+bc\right)\left(a+b+c\right)=abc$

=> $a^{2}b+ab^{2}+abc+a^{2}c+abc+ac^{2}+abc+b^{2}c+bc^{2}=abc$

=> $a^{2}b+ab^{2}+abc+a^{2}c+abc+ac^{2}$ $+b^{2}c+bc^{2}$ = 0

=> $a^{2}(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c) = 0$

=> $(b+c)\left(a^{2}+ab+ac+bc\right)=0$

=> $(b+c)\left[a\left(a+c\right)+b\left(a+c\right)\right]=0$

=> $\left(b+c\right)\left(a+c\right)\left(a+b\right)=0$

=> $\left[\begin{array}{c}a=-b\\b=-c\\c=-a\end{array} =>\left[\begin{array}{c}\begin{array}{c}a^{2021}=(-b)^{2021}\\b^{2023}=\left(-c\right)^{2023}\end{array}\\c^{2025}=\left(-a\right)^{2025}\end{array}\right.\right.=>\left[\begin{array}{c}a^{2021}+b^{2021}=0\\b^{2023}+c^{2023}=0\\c^{2025}+a^{2025}=0\end{array}\right.$

Suy ra A = 0

1. Ta có $\frac{x}{x^{2}+x+1}=\frac{1}{4}$ => 4x = $x^{2}+x+1⟺ x^{2}-3x+1=0$

Ta có $x^{5}-4x^{3}-3x+9=\left(x^{2}-3x+1\right)\left(x^{3}+3x^{2}+4x+9\right)+20x=20x$

$$x^{4}+3x^{2}+11=\left(x^{2}-3x+1\right)\left(x^{2}+3x+11\right)+30x=30x$$

Do đó 3B= 3.$\frac{x^{5}-4x^{3}-3x+9}{x^{4}+3x^{2}+11}=3.\frac{20x}{30x}=2$

Vậy 3B là số nguyên

**Câu 2.**

1. $\frac{x}{x^{2}+4x+4}+\frac{5x}{x^{2}+4}=\frac{14}{15}$ Điều kiện: x $\ne -2$

Với x = 0 không phải là nghiệm của phương trình

$$\frac{x}{x^{2}+4x+4}+\frac{5x}{x^{2}+4}=\frac{14}{15}$$

Với x $\ne 0 ta có: \frac{1}{x+\frac{4}{x}+4}+\frac{5}{x+\frac{4}{x}}=\frac{14}{15}$ (\*)

Đặt y = $x+\frac{4}{x}+$2 phương trình (\*) trở thành $\frac{1}{y+2}+\frac{5}{y-2}=\frac{14}{15}$

=> 7$y^{2}-45y-88=0=>(y-8)(7y+11)=0 =>\left[\begin{array}{c}y=8\\y=\frac{-11}{7}\end{array}\right.$

Với y = 8 thì $x+\frac{4}{x}+$2 = 8 => $x^{2}-6x+4=0 =>\left(x-3\right)^{2}=5$

$$⟺\left[\begin{array}{c}x-3=\sqrt{5}\\x-3=-\sqrt{5}\end{array}⟺\left[\begin{array}{c}x=3+\sqrt{5} (tm)\\x=3-\sqrt{5} (tm)\end{array}\right.\right.$$

Với y = $\frac{-11}{7}$ thì $x+\frac{4}{x}+$2 = $\frac{-11}{7}$ => $x^{2}+\frac{25}{7}x+4=0=>\left(x+\frac{25}{14}\right)^{2}=-\frac{159}{196}$

Vô lí vì $\left(x+\frac{25}{14}\right)^{2}\geq 0 ∀ x (loại)$

Vậy tập nghiệm của phương trình S = $\left\{3\pm \sqrt{5}\right\}$

1. Vì x = a, y = b thì giá trị của đa thức A bằng 0 nên ta có

 $12a^{2}-3b^{2}+8ab+2a+b$ = 0

=> $12a^{2}+b^{2}+8ab+2a+b=4b^{2}$

=> $12a^{2}+6ab+b^{2}+2ab+2a+b=4b^{2}$

=> 6a(2a + b) + b(2a + b) + (2a + b) = $4b^{2}$

=> (6a + b +1)(2a + b) = $4b^{2}$

Đặt (6a + b +1, 2a + b) = d (d $\in N$\*)

=>$\left\{\begin{array}{c}6a + b +1\vdots d\\2a + b \vdots d\end{array}\right.=>\left\{\begin{array}{c}6a + b +1\vdots d\\3(2a+b) \vdots d\end{array}\right.$

$$=>\left\{\begin{array}{c}6a + b +1\vdots d\\6a+3b\vdots d\end{array} =>2b-1\vdots d\right.$$

Vì $\left\{\begin{array}{c}6a + b +1\vdots d\\2a + b \vdots d\end{array}\right.$ suy ra $4b^{2}$ = (6a + b +1)(2a + b) $\vdots d^{2} =>2b\vdots $ $d$

Suy ra $1\vdots d$ => d = 1

Do đó (6a + b +1, 2a + b) = 1

Mà (6a + b +1)(2a + b) =$\left(2b\right)^{2}$ là số chính phương.

Suy ra 6a + b +1 là bình phương của một số nguyên.

**Câu 3.**

1. C = $n^{4}-8n^{3}+23n^{2}-26n+10$

= ($n^{4}-2n^{2}+1)-8n(n^{2}-2n+1)+9n^{2}-18n+9$

= $(n^{2}-1)^{2}$-8n$(n-1)^{2}$ + 9$(n-1)^{2}$

= $(n-1)^{2}\left[\left(n+1\right)^{2}-8n+9\right]$

= $(n-1)^{2}\left[\left(n-3\right)^{2}+1\right]$

TH1: $(n-1)^{2}$ = 0 => n - 1 = 0 => n = 1 (thỏa mãn)

TH2: $(n-1)^{2}\ne 0$ suy ra $\left(n-3\right)^{2}+1$ là số chính phương

Đặt $\left(n-3\right)^{2}+1$ = $k^{2} (k \in $ N)

$$⟺k^{2}-\left(n-3\right)^{2}=1$$

$$⟺(k-n+3)(k+n-3)=1$$

TH1: $\left\{\begin{array}{c}k-n+3=1\\k+n-3=1\end{array}⟺\right.\left\{\begin{array}{c}k-n=2\\k+n=4\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}k=1\\n=3\end{array} \right.\right.(thỏa mãn)$

TH2: $\left\{\begin{array}{c}k-n+3=-1\\k+n-3=-1\end{array}⟺ \right.\left\{\begin{array}{c}k=-1\\n=3\end{array} \right.$(không TM k $\in $ N)

Vậy n = 1; n = 3.

1. $x^{3}+y^{3}+1=5xy$

=> $\left(x+y\right)^{3}-3xy(x+y)+1=5xy$

Đặt x + y = a, xy = b ta được $a^{3}-3ab+1=5b$

=> $a^{3}$ + 1 = b(3a + 5)

Vì 3a + 5 $\ne 0 ∀$ a $\in $Z suy ra b = $\frac{a^{3}+1}{3a+5}$

Ta có $a^{2}-4b=(x-y)^{2}\geq $ 0 $∀ x, y$

Suy ra $a^{2}-\frac{4a^{3}+4}{3a+5}\geq $ 0 => $\frac{-a^{3}+5a^{2}-4}{3a+5}\geq $ 0

Nếu a $\geq $ 5 => $-a^{3}+5a^{2}-4$ = $a^{2}(5-a)-4<0 và 3a+5>0$

Suy ra $\frac{-a^{3}+5a^{2}-4}{3a+5}$ < 0 (Loại)

Nếu a $\leq -2 =>a^{2}(5-a)$ $\geq 28 =>-a^{3}+5a^{2}-4$ > 0 và $3a+5<0$

Suy ra $\frac{-a^{3}+5a^{2}-4}{3a+5}$ < 0 (Loại)

Nếu -2 < a < 5 mà a là số nguyên suy ra a $\in \left\{-1;0;1;2;3;4\right\}$

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| b | 0 | $$\frac{1}{5}$$ | $$\frac{1}{4}$$ | $$\frac{9}{11}$$ | 2 | $$\frac{65}{17}$$ |
| Kết quả | TM | Loại | Loại | Loại | TM | Loại |

Với a = -1 suy ra b = 0 => x + y = -1, xy = 0 => $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x=0\\y=-1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x=-1\\y=0\end{array}\right.\end{array} (thỏa mãn)\right.$

Với a = 3 suy ra b = 2 => x + y = 3, xy = 2 => $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x=1\\y=2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x=2\\y=1\end{array}\right.\end{array} (thỏa mãn)\right.$

Vậy các cặp số nguyên (x;y) cần tìm (0;-1); (-1;0); (1;2); (2;1)

**Câu 4.**

****

**1a)** Vì HF $∥AB$ (cùng vuông góc với AC)

Suy ra $\frac{CF}{AC}=\frac{CH}{BC}$ (1)

Vì HE $∥AC $(cùng vuông góc với AB)

Suy ra $\frac{AE}{AB}=\frac{CH}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CF}{AC}$ = $\frac{AE}{AB}$ => AB.CF = AC.AE

**1b)** Ta có $\frac{S\_{BEC}}{S\_{ABC}}=\frac{BE}{BA}$

Mà HE $∥AC$ => $\frac{BE}{BA}$ = $\frac{BH}{BC}$ suy ra $\frac{S\_{BEC}}{S\_{ABC}}=\frac{BH}{BC}$

Tương tự ta có $\frac{S\_{BFC}}{S\_{ABC}}=\frac{CH}{BC}$

Do đó $\frac{S\_{BFC}}{S\_{ABC}}$ + $\frac{S\_{BEC}}{S\_{ABC}}=$ $\frac{CH+BH}{BC}=1$

$S\_{ABC}$ = $S\_{BFC}+S\_{BEC}$ => $S\_{ABF}=S\_{BEC}=>S\_{AEMF}=S\_{BMC}$

**2)**



Đặt $\frac{AF}{BF}=x, \frac{BD}{DC}=y, \frac{CE}{EA}=z$ (x, y, z > 0)

Ta có $\frac{AF}{BF}=\frac{S\_{AMC}}{S\_{BMC}}, \frac{BD}{DC}=\frac{S\_{AMH}}{S\_{AMC}}, \frac{CE}{EA}=\frac{S\_{BMC}}{S\_{AMB}}$

=> xyz = $\frac{S\_{AMC}}{S\_{BMC}}$ . $\frac{S\_{AMH}}{S\_{AMC}}$ . $\frac{S\_{BMC}}{S\_{AMB}}$ = 1

Từ $\frac{AF}{BF}=x$, $\frac{CE}{EA}=z$ => $\frac{AF}{AB}=\frac{x}{x+1},$ $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{z+1}$

Suy ra $\frac{S\_{AEF}}{S\_{ABC}}=\frac{S\_{AEF}}{S\_{ABE}}.\frac{S\_{ABE}}{S\_{ABC}}=\frac{AF}{AB}.\frac{AE}{AC}=\frac{x}{(x+1)(z+1)}$

Tương tự $\frac{S\_{BDE}}{S\_{ABC}}=\frac{y}{(y+1)(x+1)};$ $\frac{S\_{CDE}}{S\_{ABC}}=\frac{z}{(z+1)(y+1)}$

Từ đó ta có:

$\frac{S\_{DEF}}{S\_{ABC}}=1-\frac{S\_{AEF}}{S\_{ABC}}-$ $\frac{S\_{BDE}}{S\_{ABC}}-\frac{S\_{CDE}}{S\_{ABC}}$ = 1 - $\frac{x}{(x+1)(z+1)}$ - $\frac{y}{(y+1)(x+1)}$ - $\frac{z}{(z+1)(y+1)}$

= $\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-x(y+1)-y(z+1)-z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

= $\frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

Vì CD = 4BD suy ra y = $\frac{1}{4} suy ra xz =4$

Suy ra $\frac{S\_{DEF}}{S\_{ABC}}=\frac{2}{\frac{5}{4}(x+1)(z+1)}=\frac{8}{5(xz+x+z+1)}=\frac{8}{5(5+x+z)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có x + z $\geq 2\sqrt{xz}$ = 4

=> $5(5+x+z)$ $\geq 45 =>\frac{8}{5(5+x+z)}$ $\leq \frac{8}{45}$

Suy ra $\frac{S\_{DEF}}{S\_{ABC}}$ $\leq \frac{8}{45}$ => $S\_{DEF}$ $\leq \frac{8}{45}S\_{ABC}$ (không đổi)

Dấu “=” xảy ra khi x = z = 2

$⟺$ $\frac{S\_{AMC}}{S\_{BMC}}$ = 2 $⟺\frac{S\_{AMC}}{\frac{5}{4}S\_{DMC}}=2⟺$ $\frac{S\_{AMC}}{S\_{DMC}} = \frac{5}{2}$ (Vì $S\_{BMC}$ = $\frac{5}{4}S\_{DMC}$)

$$⟺\frac{AM}{MD}=\frac{5}{2}$$

Vậy để diện tích của tam giác DEF lớn nhất thì M thuộc đoạn AD thỏa mãn $\frac{AM}{MD}=\frac{5}{2}$.

**Câu 5.**

 M = $\frac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+\frac{18b+18c}{2a+b+c}+\frac{9c}{a+b}$

=> M + 43 = $\left(\frac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+16\right)+\left(\frac{18b+18c}{2a+b+c}+18\right)+\left(\frac{9c}{a+b}+9\right)$

=> M + 43 = $\frac{49(a+b+c)}{a+2b+3c}+\frac{36(a+b+c)}{2a+b+c}+\frac{9(a+b+c)}{a+b}$

=> M + 43 = $(a+b+c)\left(\frac{49}{a+2b+3c}+\frac{36}{2a+b+c}+\frac{9}{a+b}\right)$

Chứng minh $\frac{a^{2}}{x}+\frac{b^{2}}{y}+\frac{c^{2}}{z}\geq \frac{(a+b+c)^{2}}{x+y+z} ∀$ $x$, y, z > 0

Áp dụng ta có $\frac{7^{2}}{a+2b+3c}+\frac{6^{2}}{2a+b+c}+\frac{3^{2}}{a+b}\geq \frac{(7+6+3)^{2}}{4a+4b+4c}=\frac{64}{a+b+c}$

=> M + 43 $\geq 64 =>M\geq 2$1

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{7}{a+2b+3c}=\frac{6}{2a+b+c}=\frac{3}{a+b}$

=> $\frac{7}{a+2b+3c}=\frac{6}{2a+b+c}=\frac{3}{a+b}$ = $\frac{6-3}{a+c}$ => $\left\{\begin{array}{c}b=c\\a=2b\end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 21 khi a = 2b = 2c