PHÒNG GD&ĐT HẠ HÒA

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học: 2015 – 2016
Môn: Toán
Ngày thi: 4 tháng 12 năm 2015
(Thời gianlàm bài: 150 phút - Đề thi có 01 trang)

Bài 1(3 điểm):

a) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: x + xy + y = 9.

b) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2+3ab-11b^2$ chia hết cho 5 thì a^4-b^4 chia hết cho 5.

Bài 2(4 điểm):

a) Cho $f(x)=(x^3+12x-31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

b) Cho a, b, x, y là các số thực thoả mãn: $x^2+y^2=1$ và $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2016}}{a^{1008}}+\frac{y^{2016}}{b^{1008}}=\frac{2}{(a+b)^{1008}}$

Bài 3 (4 điểm):

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$

b) Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}4x^2-2y^2=2\\ x^2+xy=2\end{cases}$

Bài 4 (7 điểm):

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

a) Chứng minh rằng: AE.AB = AF.AC.

b) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.

c) Chứng minh tỷ số $\frac{AH^3}{BC.BE.CF}$ không đổi.

d) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác PEFQ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

Bài 5 (2 điểm):

Cho x;y;z dương sao cho $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3y+3z+2x}+\frac{1}{3z+3x+2y}$.

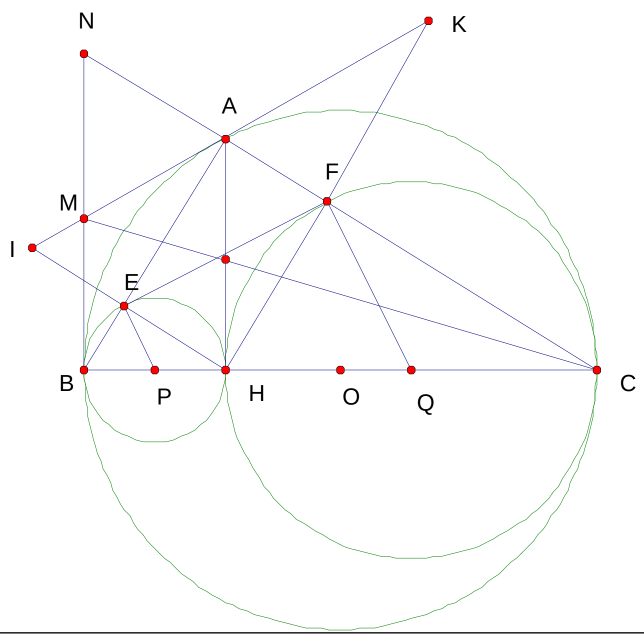
--------HẾT--------

HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2015-2016

M«n To¸n 9

C© u	Néi dung	Chia điểm
I.a	**a.1,5 điểm** - Từ (gt) ta có :(x + 1)(y + 1) = 10 ; vì 10 = 1.10 = 2.5 - Vì x,y $\in$N - Lập bảng ta tìm được 4 nghiệm (x ;y) =(0 ;9) ;(9 ;0) ;(1 ;4) ;(4 ;1)	0,75 0,75
I.b	**b.1,5 điểm** - Ta có : $4a^2+3ab-11b^2 \vdots 5 \Rightarrow \left(5a^2+5ab-10b^2\right)-\left(a^2+2ab+b^2\right)\vdots 5$ $\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \vdots 5$ $\Leftrightarrow (a+b)^2 \vdots 5$ $\Rightarrow a+b \vdots 5$ (Vì 5 là số nguyên tố) - Ta có: $a^4-b^4=\left(a^2+b^2\right)(a+b)(a-b)\vdots 5$ (đpcm)	0,5 0,25 0,5 0,25
II	**Câu a(2 điểm)** $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$ $\Rightarrow a^3=32+3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})}.(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$ $\Leftrightarrow a^3=32+3.(-4).a \Leftrightarrow a^3=32-12a \Leftrightarrow a^3+12a-32=0$ $\Leftrightarrow a^3+12a-31=1 \Rightarrow f(a)=1^{2015}=1$	0,5 0,5 0,5 0,5
	Câu b(2 điểm) Ta cã: $(x^2+y^2)^2=1$ nªn $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{(x^2+y^2)^2}{a+b}$ $\Leftrightarrow b(a+b)x^4+a(a+b)y^4=ab(x^4+2x^2y^2+y^4)$ $\Leftrightarrow b^2x^4+a^2y^4-2abx^2y^2=0$ $\Leftrightarrow (bx^2-ay^2)^2=0$ Tõ ®ã: $\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}}=\frac{y^{2016}}{b^{1008}}=\frac{1}{(a+b)^{1008}} \Rightarrow$ $\frac{x^{2016}}{a^{1008}}+\frac{y^{2016}}{b^{1008}}=\frac{2}{(a+b)^{1008}}$ KL:…	1 1
III	**Câu a(2 điểm)** Gi¶i ph¬ng tr×nh: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$	
	§K: $1,5 \le x \le 2,5$ + Sö dông bÊt ®¼ng thøc c« si hoÆc Bu nhi a ®¸nh gi¸ VT $\le$ 2 + §¸nh gi¸ VP ≥ 2 Do ®ã: PT $\Leftrightarrow \begin{cases} VT=2 \\ VP=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3}=\sqrt{5-2x} \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ KL.	0,5 0,75 0,75
III	**Câu b(2 điểm)**	

	Từ (gt) ta có :$3x^2$-xy -$2y^2$ =0 ⇔(x-y)(3x+2y)=0 ⇔ x=y hoặc x = $\frac{-2}{3}$ y - Nếu x = y thay vào (1) ta được x = 1 ;x = -1 - Nếu x = $\frac{-2}{3}$ y Thay vào hệ ta được hệ vô nghiệm KL : Hệ phương trình có 2 nghiệm (x ;y) =(1 ;1) ;(-1 ;-1).	1 1
IV		
IV	**Câu a(1 điểm)** XÐt tam gi¸c vu«ng ABH cã HE⊥AB $\Rightarrow$ AB.AE = AH^2 (1) XÐt tam gi¸c vu«ng ACH cã HF⊥AC $\Rightarrow$ AC.AF = AH^2 (2) Tõ (1) vµ (2) suy ra AE.AB = AF.AC.	0,5 0,5
IV	Gãc IAH b»ng 2 lÇn gãc BAH Gãc KAH b»ng 2 lÇn gãc CAH Suy ra gãc IAH + gãc KAH =2(gãc BAH + gãc CAH) = 180^0 Suy ra I, A vµ K th¼ng hµng	
IV	**Câu c(2 điểm)** Ta có: $AH^2 = BH.CH \Rightarrow AH^4 = BH^2 .CN^2$ = BE.BA.CF.CA = BE.CF.AH.BC $\Rightarrow AH^3$ = BE.CF.BC $\Rightarrow \frac{AH^3}{BE.CE.BC} = 1$	
IV	**Câu d(2 điểm)** $S_{PQFE} = \frac{1}{2}(PE+FQ).FE = \frac{1}{4}BC.FE$. Mà FE ≤PQ hay FE $\le \frac{BC}{2} \Rightarrow$ $S_{PQFE} \le \frac{BC^2}{8}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi A là điểm chính giữa của nửa đường tròn tâm O, đường kính BC.	
V	**(2 điểm)**	

HD Áp dụng BĐT $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ với a; b là các số dương. Ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}=\frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{(x+y)+(y+z)}\right)$$

$$\leq\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\right]=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$$

Tương tự

$$\frac{1}{3x+2y+3z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)$$

$$\frac{1}{2x+3y+3z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức ta được:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+3y+2z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)=\frac{3}{2}$$