CĐ13: NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Dạng 1: Sử dụng trong bài toán chia hết
Dạng 2: Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp
Dạng 3: Sử dụng trong một số bài toán thực tế
Dạng 4: Sử dụng trong một số bài toán về hình học

Dạng 1. Sử dụng trong bài toán chia hết

Câu 1. **(HSG 7 TRƯỜNG THCS VÕ THỊ SÁU 2022 - 2023)**

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố $(n > 2)$ thì $2^n + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $2^n - 1$; 2^n; $2^n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp theo Dirichlet có một trong ba số sẽ chia hết cho 3

Mà $2^n - 1$ là số nguyên tố $(n > 2)$ nên $2^n - 1$ không chia hết cho 3.

Mặt khác: với $n > 2$ thì 2^n không là bội của 3, nên 2^n không chia hết cho 3.

Suy ra: $2^n + 1$ chia hết cho 3 và $2^n + 1 > 3$ với mọi $n > 2$.

Vậy $2^n + 1$ là hợp số (đpcm).

Câu 2. **(HSG 7 LIÊN TRƯỜNG 2022 - 2023)**

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2007.

Lời giải

Xét 2008 số sau: $1;\ 11;\ 111;\cdots;\underbrace{11\ldots1}_{2008}$

Theo Dirichle tồn tại ít nhất 2 số chia cho 2007 có cùng số dư

Giả sử hai số đó là

$A = \underbrace{11\ldots1}_{n}$

$B = \underbrace{11\ldots1}_{k}\ (n > k)$

$\Rightarrow A - B = \underbrace{11\ldots1}_{n} - \underbrace{11\ldots1}_{k} = 10^k.\underbrace{11\ldots1}_{n-k} \vdots 2007$

Mà $(10^k;2007) = 1 \Rightarrow \underbrace{11\ldots1}_{n-k} \vdots 2007$

Câu 3. **(HSG 7 TP Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên có dạng $20232023...2023$ chia hết cho 23.

Lời giải

Xét 23 số tự nhiên trong đó mỗi số được viết liên tiếp từ n số 2023 lại với nhau ($n = 1; 2; 3; ...; 23$)

Ta được các số: $2023; 20232023; 202320232023; ...; 20232023...2023$.

+ Nếu trong dãy có một số chia hết cho 23 thì ta có điều cần chứng minh.

+ Nếu trong dãy trên không có số nào chia hết cho 23, thì đem các số đó chia cho 23 có ít nhất 2 số có cùng số dư.

+ Giả sử hai số đó là: $a = \underbrace{2023...2023}_{m \text{ so } 2023}$ và $b = \underbrace{2023...2023}_{n \text{ so } 2023}$ với $m > n$

Khi đó $a - b$ chia hết cho 23

Þ $2023...202300...0$ chia hết cho 23 (có $m - n$ số 2023 và $4n$ chữ số 0)

Þ $2023...2023.10^{4n}$ chia hết cho 23.

Do 23 là số nguyên tố và 10^{4n} không chia hết cho 23

Þ $20232023...2023$ chia hết cho 23.

Câu 4. **(HSG 7 huyện, tỉnh, trường Nông Cống 2022 - 2023)**

Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con xúc xắc. Chứng tỏ rằng khi ta gieo xúc xắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên các mặt đó chia hết cho 5.

Lời giải

Gọi các số trên 5 mặt là $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5$.

Xét 5 tổng: $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$;

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$; $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

+ Nếu một trong 5 tổng đó chia hết cho 5 thì bài toán đã giải xong.

+ Nếu không có tổng nào chia hết cho 5 thì tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 5 (vì có 5 tổng mà có 4 số dư khác 0 là $1; 2; 3; 4$). Nên hiệu của hai tổng đó chia hết cho 5.

+ Gọi 2 tổng đó là S_m và S_n ($1 \le m < n \le 5$) thì $(S_m - S_n) \vdots 5$

hay $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m) \vdots 5$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5. **(HSG 7 tp Vũng Tàu 2021 - 2022)**

Chứng tỏ rằng tồn tại một số tự nhiên tận cùng là 2022 và chia hết cho 2021.

Lời giải

Xét 2022 số có dạng 2022, 20222022, …, $2022...2022$

Theo nguyên tắc Dirichlet thì có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2021

Giả sử hai số đó là $A = 2022...2022$ (n số 2022) và $B = 2022...2022$ (k số 2022); $n < k$

$B - A = \underbrace{2022...2022}_{k-n \text{ số } 2022}.10^n$ chia hết 2021

Mà $(2021, 10^n) = 1$

Suy ra $B - A = \underbrace{2022...2022}_{k-n \text{ số } 2022}$ chia hết cho 2021

Vậy luôn tồn tại một số tự nhiên tận cùng là 2022 và chia hết cho 2021.

Câu 6. **(HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2022 - 2023)**

Mỗi ô vuông đơn vị của bảng kích thước $10x10$ (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

Lời giải

Trên mỗi hình vuông con, kích thước $2x2$ chỉ có không quá 1 số chia hết cho 2. Cũng vậy, có không quá 1 số chia hết cho 3. Lát kín bảng bởi 25 hình vuông, kích thước $2x2$, ta thấy có nhiều nhất 25 số chia hết cho 2 và có nhiều nhất 25 số chia hết cho 3. Do đó, có ít nhất 50 số còn lại không chia hết cho 2, cũng không chia hết cho 3. Vì vậy, chúng phải là một trong các số $1; 5; 7$. Từ đó, theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất một số trong các số $1; 5; 7$ xuất hiện ít nhấ 17 lần.

Câu 7. **(HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Chứng minh rằng: Trong 45 số tự nhiên liên tiếp tồn tại 9 số có tổng chia hết cho 45.

Lời giải

Ta có 45 số tự nhiên liên tiếp chia cho 45 ta được các số dư là $0, 1, 2, 3, ..., 44$

Do $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$

Suy ra các số chia cho 45 theo thứ tự dư: $1, 2, 3, ..., 9$ thì tổng của 9 số này chia hết cho 45.

Câu 8.

Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

Lời giải:

Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$S_1 = a_1$.

$S_2 = a_1 + a_2$.

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$.

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Nếu một trong các số $S_i\,(i = 1;2;3;4;5)$ chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số S_i cho 5 sẽ được số dư có giá trị từ 1 đến 4.

Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lồng). Theo nguyên tắc Điriclê ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5. Hiệu này chính là tổng các a_i liên tiếp nhau hoặc là a_i nào đó.

Câu 9.

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2016.

Lời giải:

Xét 2017 số có dạng $1;11;...;11...111;\ 11...11$. Theo nguyên tắc Đirichlê thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2016.

Giả sử hai số đó là: $A = 11...1$ (n chữ số 1); $B = 11...1$ (k chữ số 1) (với $k < n$)

Khi đó $A - B = 11...1.10^k$ ($n - k$ chữ số 1)

$A - B$ chia hết cho 2016. Do $(2016;10k) = 1$

Nên $C = 11...1$ ($n - k$ chữ số 1) chia hết cho 2016.

Câu 10.

Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kỳ trong chúng không chia hết cho hiệu của nó.

Lời giải

+ Ta thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3 và tổng của chúng chia 3 dư 1 nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

+ Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012 sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k + 2\ (k = 0,1,2,...,670)$

Khi đó hai số bất kỳ trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3 nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng.

Ta chứng minh rằng chọn được nhiều nhất 672 số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được hai số $a,b\ (a > b)$ sao cho $a - b \le 2$.

Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã cho sẽ không nhỏ hơn $3.671 = 2013$ (trái với giả thiết hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012 - 1 = 2011$). Do đó $a - b = 1$ hoặc.

+ Nếu $a - b = 1$ thì $(a + b) \vdots (a - b)$

+ Nếu $a - b = 2$ thì $a + b$ là số chẵn, nên $(a + b) \vdots 2$ hay $(a + b) \vdots (a - b)$

Như vậy các số tự nhiên từ 1 đến 2012 không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

Dạng 2. Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

Câu 1. **(HSG 7 Thành Phố Ninh Bình 2022 - 2023)**

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải

Mỗi số trong 5 số có dạng $2^x \cdot 3^y$ trong đó x, y là số tự nhiên khác 0.

$(x; y)$ chỉ có thể (Chẵn, Chẵn); (Lẻ, Lẻ); (Chẵn, Lẻ); (Lẻ, Chẵn) vì có 5 số mà chỉ có 4 dạng nên tồn tại 2 số cùng một dạng nên tích 2 số này là số chính phương.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)**

Một cái hộp đựng 60 quả bóng giống nhau, gồm ba màu: màu đỏ, màu xanh và màu vàng. Trong đó có 18 quả bóng màu đỏ và 25 quả bóng màu vàng. Hỏi cần phải lấy ra ngẫu nhiên ít nhất bao nhiêu quả bóng để chắc chắn rằng lấy ra được 2 quả bóng xanh?

Lời giải

Số quả bóng màu xanh là: $60 - 18 - 25 = 17$ (quả).

Trường hợp xấu nhất: Ta lấy ra được 25 quả bóng màu vàng, 18 bóng màu đỏ và 1 quả bóng màu xanh. Khi đó, ta cần lấy thêm 1 quả bóng nữa thì chắc chắn có được 2 quả bóng màu xanh.

Vậy cần lấy ít nhất là: $25 + 18 + 1 + 1 = 45$ quả bóng để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. **(HSG 7 , Trường THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)**

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1; 0; -1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số $1; 0$ hoặc -1 nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5. Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$.

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau (đpcm).

Câu 4. **(HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)**

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng:

a) Tích của 100 số đó là một số dương.

b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

Lời giải

a) Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của ba số bất kì không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra. Chia 99 số còn lại thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số.

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm tức là của 99 số là một số âm.

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương.

b) Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn $a_1 \le a_2 \le a_3 \le .... \le a_{100}$

Các số này đều khác 0 (vì nếu có một thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài).

Xét tích $a_{98}.a_{99}.a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0,$ tích của ba số này không thể là một số âm).

Do đó $a_1, a_2, a_3, ...a_{98}$ là các số âm

+ Xét tích $a_1a_2a_{99} < 0$ mà $a_1a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$

+ Xét tích $a_1a_2a_{100} < 0$ mà $a_1a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

Câu 5. **(HSG 7 huyện Hoằng Hóa 2016 - 2017)**

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, ..., a_{20}$ có các tính chất sau:

* a_1 là số dương

* Tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương.

* Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng: $a_1.a_{14} + a_{14}.a_{12} < a_1.a_{12}$

Lời giải

+ Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + ... + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$a_1 > 0;\ a_2 + a_3 + a_4 > 0; .....;\ a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0;\ a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0;\ a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$$

$$\Rightarrow a_{14} < 0$$

+ Ta cũng có:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + ... + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + a_{13} + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0$$

Mặt khác: $a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$

Như vậy: $a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0$

$\Rightarrow a_1.a_{14} + a_{14}.a_{12} < a_1a_{12}$ (điều phải chứng minh).

Câu 6.

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng tất cả 100 số đó đều là số âm.

Lời giải

Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của 3 số bất kỳ không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra, 99 số còn lại chia thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm là số âm, tức là tích của 99 số là một số âm

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương

Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ...... \le a_{100}$$

Các số này đều khác 0 (vì nếu có 1 thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài)

Xét tích $a_{98}.a_{99}.a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0,$ tích của ba số này không thể là một số âm).

Vậy $a_1, a_2, a_3, ..., a_{98}$ là các số âm.

Xét tích: $a_1.a_2.a_{99} < 0$ mà $a_1a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$.

Xét tích: $a_1.a_2.a_{100} < 0$ mà $a_1a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$.

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

Dạng 3. Sử dụng trong một số bài toán thực tế

Câu 1.

Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau .

Lời giải :

Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3.12 = 36$ mà $36 < 40$.

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh

Câu 2.

Có 10 đội bóng thi đấu với nhau trong một giải, mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải :

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận.

Như vậy 10 đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9. Vậy theo nguyên lý Đirichlê phải có ít nhất 2 đội đã đấu số trận đấu như nhau. (Đội chưa đấu trận nào, số trận bằng 0)

Câu 3.

Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải :

Vì trong lớp có 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và có 2 học sinh được 10 điểm nên có $45-2=43$ học sinh còn lại có số điểm từ 2 đến 9 điểm.

Như vậy có 43 học sinh phân chia vào 8 loại điểm (từ 2 đến 9). Giả sử mỗi loại trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có không quá $5.8=40$ học sinh, ít hơn 43 học sinh. Vậy tồn tại ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Câu 4.

Một đồi thông có 800000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau trên cây.

Lời giải :

Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có một chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v…

Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Điriclê ít nhất có 1 lồng nhốt không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

Câu 5.

Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Lời giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5=2.2+1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề tài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

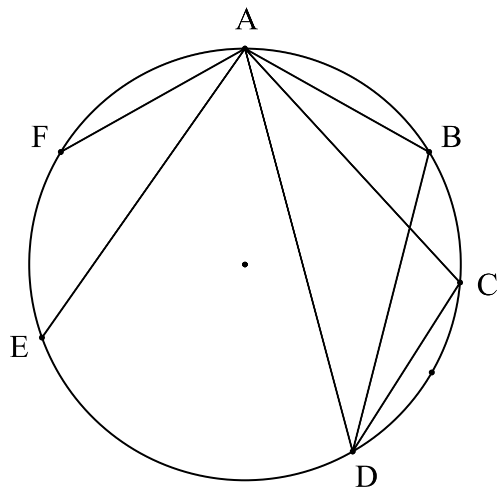
Vậy có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Dạng 4. Sử dụng trong một số bài toán về hình học

Câu 1. **(HSG 7 huyện Tam Dương 2021 – 2022; trường THCS Yên Phong 2022 - 2023)**

Trên một đường tròn có 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kỳ trong 6 điểm này đều được nối với nhau bởi một đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

Lời giải



Xét 6 điểm phân biệt A, B, C, D, E, F trên một đường tròn

Nối điểm A với 5 điểm còn lại ta được 5 đoạn thẳng .

Vì các đoạn thẳng chỉ có màu xanh hoặc đỏ nên theo nguyên lý Diriclethì có ít nhất $\left[\frac{5}{2}\right]+1=3$ ba đoạn thẳng có cùng một màu.

Giả sử ba đoạn $AB;\ AC; AD$ có cùng màu và là màu đỏ.

Khi đó luôn tồn tại một trong ba tam giác ABC, ACD, BCD có ba cạnh cùng màu.

Thật vậy:

+ Nếu tam giác BCD có ít nhất một cạnh là màu đỏ, giả sử là cạnh BC, thì tam giác ABC có ba cạnh màu đỏ (thoả mãn đề bài).

+ Nếu tam giác BCD không có cạnh nào màu đỏ thì tức là cả ba cạnh của tam giác BCD cùng màu xanh (thoả mãn đề bài).

Vậy luôn tồn tại ít nhất một tam giác được tạo thành từ ba đoạn thẳng đó sẽ có ba cạnh cùng màu.

Câu 2. **(HSG 7 huyện, tỉnh, trường Sông Lô, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)**

Cho một hình vuông có cạnh bằng 5 đơn vị và cho 76 điểm nằm bên trong hình vuông đó. Chứng tỏ rằng có một hình tròn với bán kính bằng $\frac{3}{4}$ đơn vị chứa trọn 4 trong 76 điểm đã cho.

Lời giải

Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông nhỏ cạnh bằng 1.

Nếu trong mỗi hình vuông nhỏ có không quá 3 điểm (trong số các điểm đã cho) thì trong hình vuông lớn có không quá $25.3=75$ (điểm), trái với giả thiết trong hình vuông lớn có 76 điểm.

Như vậy, có ít nhất một hình vuông nhỏ (cạnh bằng 1) chứa bốn điểm (trong các điểm đã cho).

Hình tròn với đường kính là đường chéo của hình vuông nhỏ này chứa toàn bộ hình vuông nhỏ và có bán kính $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{4}$. Vậy có một hình tròn với bán kính bằng $\frac{3}{4}$ đơn vị chứa trọn 4 trong 76 điểm đã cho.

Câu 3. **(HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)**

Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ với $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_8 \le 20$

Thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \ge b \ge c$ và $b+c>a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Từ đó, ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài ba cạnh của một tam giác thì:

$a_6 \ge a_7 + a_8 \ge 1+1=2$

$a_5 \ge a_6 + a_7 \ge 2+1=3$

$a_4 \ge a_5 + a_6 \ge 3+2=5$

$a_3 \ge a_4 + a_5 \ge 5+3=8$

$a_2 \ge a_3 + a_4 \ge 8+5=13$

$a_1 \ge a_2 + a_3 \ge 13+8=21$

Điều này trái với giả thiết đề bài.

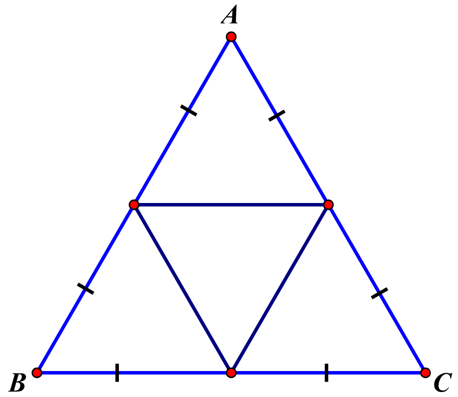
Do đó điều giả sử trên là sai.

Vậy trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được 3 số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 4.

Cho ΔABC đều có cạnh bằng 1. Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong ΔABC. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $0,5$.

Lời giải



Ta có: ΔABC đều có cạnh bằng 1

Các đường nối trung điểm các cạnh của ΔABC chia ΔABC thành bốn tam giác đều có cạnh là $0,5$.

Theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại ít nhất là 2 điểm rơi vào cùng một tam giác nhỏ.

Ta có khoảng cách giữa 2 điểm này nhỏ hơn $0,5$.

Dạng 5. Bài liên quan đến bảng ô vuông

Câu 1. **(HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)**

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1;0;-1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số 1; 0 hoặc -1

nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5.

Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là -5; -4; ....; 0; 1; ....; 5.

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau.

Câu 2.

Trên bảng ô vuông kích thước 8×8, ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Lời giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có $64 = 14.4 + 8$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn $4 + 1 = 5$.

Vậy luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.