

**PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b (a < b)$ . Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành là:

A.  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$  . B.  $V = 2\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$  . C.  $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx$  . D.  $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$  .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 2.** Gọi  $H$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1, x = 4$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng  $H$  quay quanh trục  $Ox$  là:

A.  $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x} dx$  . B.  $V = \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$  . C.  $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$  . D.  $V = \pi^2 \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$  .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 3.** Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -\sin x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0, x = \pi$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng  $D$  quay xung quanh trục  $Ox$  là:

A.  $V = \pi \int_0^{\pi} |\sin x| dx$  . B.  $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$  . C.  $V = \pi \left| \int_0^{\pi} (-\sin x) dx \right|$  . D.  $V = \pi^2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$  .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 4.** Gọi  $H$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1, x = 2$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng  $H$  quay xung quanh trục  $Ox$  là:

A.  $V = \pi \int_1^2 \sqrt{x} dx$  . B.  $V = \pi^2 \int_0^{\pi} x dx$  . C.  $V = \pi^2 \int_1^2 \sqrt{x} dx$  . D.  $V = \pi \int_1^2 x dx$  .

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 5.** Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0, x = 2$  quay quanh trục  $Ox$  được khối tròn xoay có thể tích tính theo công thức là:

A.  $\int_0^2 x dx$  . B.  $\pi \int_0^2 x^2 dx$  . C.  $\int_0^2 x^2 dx$  . D.  $\pi \int_0^2 x dx$  .

**Lời giải**

**Chọn B**

- Câu 6.** Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x + 1$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -1, x = 2$  quanh trục hoành là

A.  $V = \int_{-1}^2 (x+1)^2 dx$  . B.  $V = \pi \int_{-1}^2 (x+1)^2 dx$  . C.  $V = \int_{-1}^2 |x+1| dx$  . D.  $V = \pi \int_{-1}^2 |x+1| dx$  .

**Lời giải****Chọn B**

Câu hỏi nhận biết ứng dụng tích phân tính thể tích khối tròn xoay.

- Câu 7.** Cho một vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại các điểm có hoành độ  $x = -1$  và  $x = 1$ . Một mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x (-1 \leq x \leq 1)$  cắt vật thể đó theo một mặt cắt là hình vuông có cạnh bằng  $\sqrt{1 - x^4}$ . Thể tích của vật thể đó bằng

A.  $\frac{4}{5}$  . B.  $\frac{4\pi}{5}$  . C.  $\frac{8}{5}$  . D.  $\frac{8\pi}{5}$  .

**Lời giải****Chọn C**

Diện tích hình vuông cạnh  $\sqrt{1 - x^4}$  là  $S(x) = (\sqrt{1 - x^4})^2 = 1 - x^4$ .

$$V = \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \left( x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{5}$$

Thể tích cần tìm là

- Câu 8.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x) = x - 2$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 3, x = 4$ . Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  quanh trục hoành là

A.  $V = \int_3^4 |x - 2| dx$  . B.  $V = \int_3^4 (x^2 - 4x + 4) dx$  .  
C.  $V = \pi \int_3^4 |x - 2| dx$  . D.  $V = \pi \int_3^4 (x^2 - 4x + 4) dx$  .

**Lời giải****Chọn D**

- Câu 9.** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x, y = 0, x = 0$  và  $x = 1$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục  $Ox$  bằng

A.  $\pi \int_0^1 e^{2x} dx$  . B.  $\pi \int_0^1 e^x dx$  . C.  $\int_0^1 e^x dx$  . D.  $\int_0^1 e^{2x} dx$  .

**Lời giải****Chọn A**

**Câu 10. (Mã 103 2018)** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$

B.  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$

C.  $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$

D.  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$

**Lời giải**

**Chọn D**

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$  là:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$$

**Câu 11.** Tính thể tích  $V$  của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = 1$ , biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x (0 \leq x \leq 1)$  thì được thiết diện là hình vuông có cạnh bằng  $(x + 1)$ .

A.  $V = \frac{3\pi}{2}$

B.  $V = \frac{7\pi}{3}$

C.  $V = \frac{7}{3}$

D.  $V = \frac{3}{2}$

**Lời giải**

Diện tích thiết diện bằng  $S = (x + 1)^2$ .

Suy ra thể tích khối tròn xoay sẽ bằng  $V = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 (x + 1)^2 dx = \frac{7}{3}$ . Chọn C.

**Câu 12.** Cho phần vật thể  $(T)$  giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình  $x = 0$  và  $x = 2$ . Cắt phần vật thể  $(T)$  bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x (0 \leq x \leq 2)$ , ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng  $x\sqrt{2 - x}$ . Tính thể tích  $V$  của phần vật thể  $(T)$ .

A.  $V = \frac{4}{3}$

B.  $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$

C.  $V = 4\sqrt{3}$

D.  $V = \sqrt{3}$

**Lời giải**

Ta có: diện tích thiết diện là  $S(x) = \frac{(x\sqrt{2-x})^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \int_0^2 \frac{(x\sqrt{2-x})^2 \sqrt{3}}{4} dx$

Sử dụng CASIO suy ra  $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Chọn B

**Câu 13.** Gọi  $(D)$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 2^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  và  $x = 2$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(D)$  quanh trục  $Ox$  được định bởi công thức

A.  $V = \pi \int_0^2 2^{x+1} dx$

B.  $V = \int_0^2 2^{x+1} dx$

C.  $V = \int_0^2 4^x dx$

D.  $V = \pi \int_0^2 4^x dx$

### Lời giải

Đáp án D

Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(D)$  quanh trục  $Ox$  được định bởi công thức

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 4^x dx$$

- Câu 14.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{\cos x}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x=0, x = \frac{\pi}{2}$ . Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình  $(H)$  quanh trục  $Ox$ .
- A.  $V = 2\pi^2$ .      B.  $V = \pi$ .      C.  $V = 2\pi$ .      D.  $V = \pi^2$ .

### Lời giải

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos x})^2 dx = \pi$$

Thể tích cần tính bằng . Chọn B

- Câu 15.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 1 - \sqrt{x}$ , trục hoành và  $x=9$  quay xung quanh trục  $Ox$ . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.
- A.  $V = \frac{27\pi}{2}$ .      B.  $V = 13\pi$ .      C.  $V = \frac{41\pi}{3}$ .      D.  $V = \frac{40\pi}{3}$ .

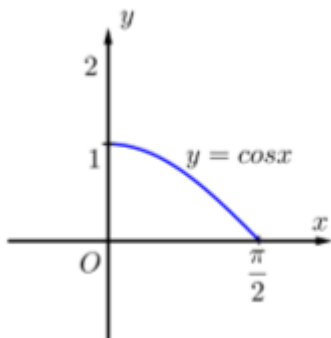
### Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = 1 - \sqrt{x}$  và trục hoành:  $1 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi \int_1^9 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^9 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} - \frac{4x\sqrt{x}}{3} + x \right) \Big|_1^9 = \frac{40\pi}{3}$$

- Câu 16.** Cho hàm số  $y = \cos x$  với  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , có đồ thị là  $(H)$  như hình vẽ bên, quay hình  $(H)$  quanh trục  $Ox$  tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?



- A.  $\pi^2$ .      B.  $\frac{\pi^2}{4}$ .      C.  $\frac{\pi}{4}$ .      D.  $\pi$ .

### Lời giải

Đáp án B

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{\pi}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ta có

**Câu 17. (Mã 105 2017)** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = e^x$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0, x = 1$ . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

A.  $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$       B.  $V = \frac{e^2 - 1}{2}$       C.  $V = \frac{\pi e^2}{3}$       D.  $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} \, dx = \pi \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$$

**Câu 18. (Mã 104 2017)** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0, x = 1$ . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

A.  $V = 2$       B.  $V = \frac{4\pi}{3}$       C.  $V = 2\pi$       D.  $V = \frac{4}{3}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 \, dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) \, dx = \pi \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

**Câu 19. (Mã 123 2017)** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{2 + \cos x}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ . Khối tròn xoay tạo thành khi  $D$  quay quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

A.  $V = (\pi + 1)\pi$       B.  $V = \pi - 1$       C.  $V = \pi + 1$       D.  $V = (\pi - 1)\pi$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 \, dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

**Câu 20. (Mã 104 2018)** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường thẳng  $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$       B.  $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$       C.  $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$       D.  $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: 
$$V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$$

**Câu 21. (Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích  $V$  của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  $x = 1$  và  $x = 3$ , biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $1 \leq x \leq 3$ ) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là  $3x$  và  $\sqrt{3x^2 - 2}$ .

- A.  $V = \frac{124}{3}$       B.  $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$       C.  $V = 32 + 2\sqrt{15}$       D.  $V = \frac{124\pi}{3}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Diện tích thiết diện là:  $S(x) = 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2}$

$$\Rightarrow \text{Thể tích vật thể là: } V = \int_1^3 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{124}{3}$$

**Câu 22.** Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = 2x$  quay xung quanh trục  $Ox$ .

- A.  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$       B.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$       C.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$       D.  $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

**Lời giải**

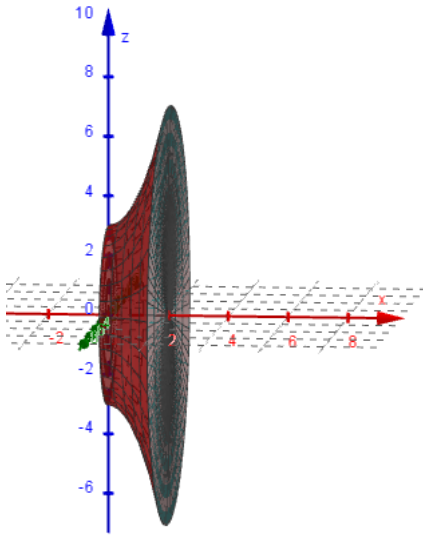
Phương trình hoành độ giao điểm 
$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy thể tích khối tròn xoay được tính 
$$V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$$

**Câu 23. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$ . Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$       B.  $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$       C.  $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$       D.  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$

**Lời giải**



$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Thể tích của vật thể được tạo nên là

- Câu 24. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sin x$ , trục  $Ox$ , trục  $Oy$  và đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$ , xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$       B.  $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$       C.  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$       D.  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

**Lời giải**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Công thức tính:

- Câu 25.** Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = x^2 - 2x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 0$  và  $x = 1$  quanh trục hoành bằng
- A.  $\frac{16\pi}{15}$       B.  $\frac{2\pi}{3}$       C.  $\frac{4\pi}{3}$       D.  $\frac{8\pi}{15}$

**Lời giải**

Ta có 
$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left( \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{15}.$$

- Câu 26. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho miền phẳng  $(D)$  giới hạn bởi  $y = \sqrt{x}$ , hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = 2$  và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(D)$  quanh trục hoành.

A.  $3\pi$       B.  $\frac{3\pi}{2}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{3}{2}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$V = \pi \int_1^2 x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

**Câu 27. (Sở Phú Thọ 2019)** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ . Quay  $(H)$  quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

- A.  $\int_0^2 (2x - x^2) dx$       B.  $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$       C.  $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$       D.  $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

**Lời giải**

**Chọn B**

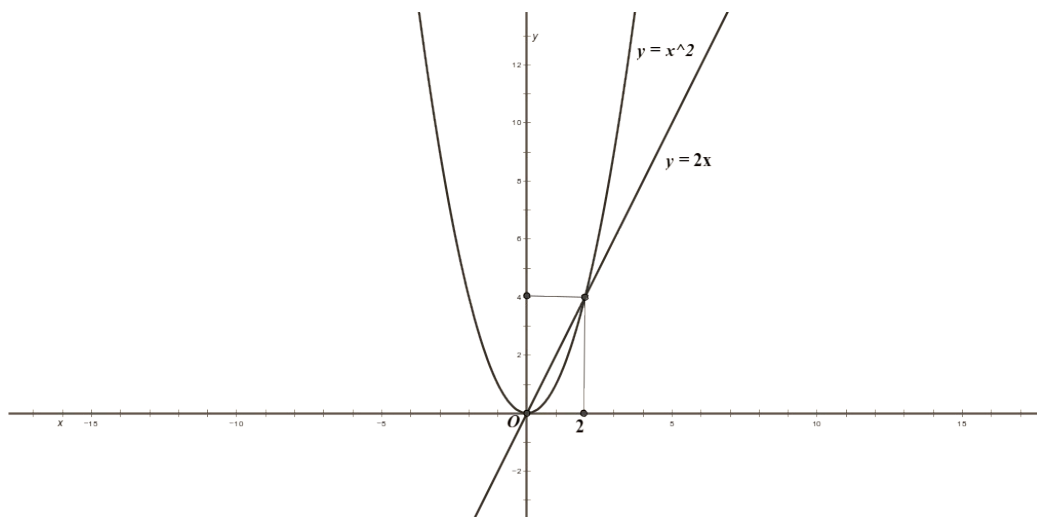
$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$$

Theo công thức ta chọn

**Câu 28. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng d:  $y = 2x$  quay xung quanh trục  $Ox$  bằng:

- A.  $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$       B.  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$   
C.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$       D.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$

**Lời giải**



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:  $x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$$

Ta có:

**Câu 29. (Đề Minh Họa 2023)** Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường  $y = -x^2 + 2x$  và  $y = 0$  quanh trục  $Ox$  bằng

- A.  $V = \frac{16}{15}$       B.  $V = \frac{16\pi}{9}$       C.  $V = \frac{16}{9}$       D.  $V = \frac{16\pi}{15}$



### Lời giải

#### Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đường  $y = -x^2 + 2x$  và đường  $y = 0$  là

$$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Thể tích là 
$$V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left( \frac{x^5}{5} - x^4 + 4 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}$$

- Câu 30. (THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .  $V$  có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?  
**A.** 550                      **B.** 400                      **C.** 670                      **D.** 335

### Lời giải

#### Chọn D

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H = \left\{ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}, y = 0, x = -5, x = 5 \right\}$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi  $H$  khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_{-5}^5 \left( 16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left( 16x - \frac{16x^3}{75} \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{320\pi}{3} \approx 335,1$$

- Câu 31. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x} - 2$ ,  $y = 0$  và  $x = 9$  quay xung quanh trục  $Ox$ . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.  
**A.**  $V = \frac{7}{6}$                       **B.**  $V = \frac{5\pi}{6}$                       **C.**  $V = \frac{7\pi}{11}$                       **D.**  $V = \frac{11\pi}{6}$

### Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x} - 2$  và trục hoành:  $\sqrt{x} - 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_4^9 (\sqrt{x} - 2)^2 dx = \pi \int_4^9 (x - 4\sqrt{x} + 4) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} - \frac{8x\sqrt{x}}{3} + 4x \right) \Big|_4^9 \\ &= \pi \left( \frac{81}{2} - 72 + 36 \right) - \pi \left( \frac{16}{2} - \frac{64}{3} + 16 \right) = \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

**Câu 32. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình  $(H)$  quanh  $Ox$  với  $(H)$  được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{4x - x^2}$  và trục hoành.

A.  $\frac{31\pi}{3}$ .

B.  $\frac{32\pi}{3}$ .

C.  $\frac{34\pi}{3}$ .

D.  $\frac{35\pi}{3}$ .

**Lời giải**

Điều kiện xác định:  $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \sqrt{4x - x^2}$  và trục hoành

$$\sqrt{4x - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

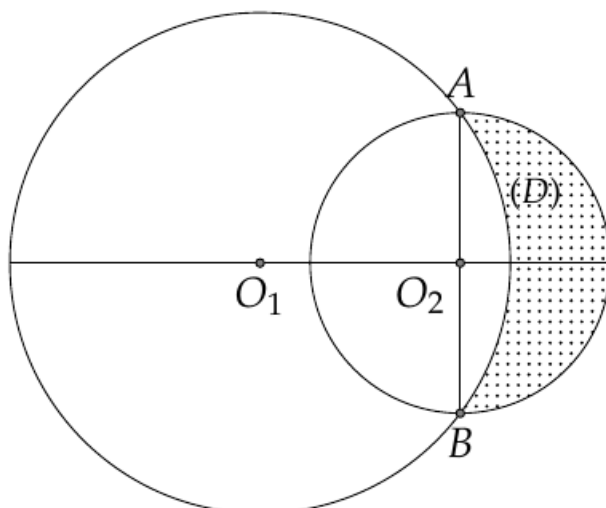
Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình  $(H)$  quanh  $Ox$  là :

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4x - x^2})^2 dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2) dx = \frac{32}{3} \pi$$

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình  $(H)$  quanh  $Ox$  là  $\frac{32}{3} \pi$ .

**NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ GIỎI**

**Câu 33. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2024)** Cho hai đường tròn  $(O_1; 5)$  và  $(O_2; 3)$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB$  là một đường kính của đường tròn  $(O_2; 3)$ . Gọi  $(D)$  là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần tô dấu chấm như hình vẽ). Quay  $(D)$  quanh trục  $O_1O_2$  ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay được tạo thành.



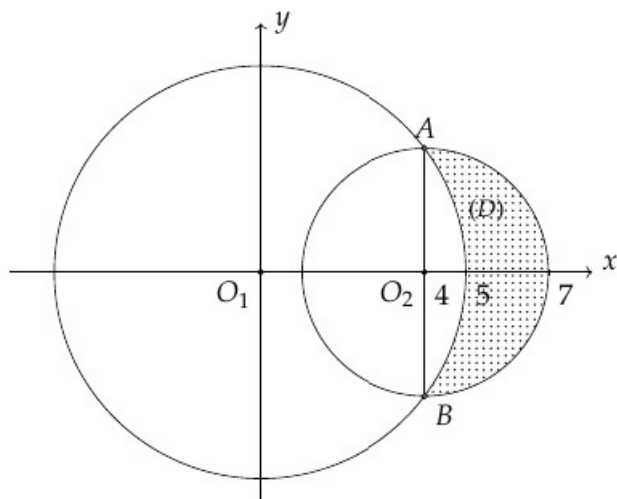
A.  $V = 36\pi$ .

B.  $V = \frac{68\pi}{3}$ .

C.  $V = \frac{14\pi}{3}$ .

D.  $V = \frac{40\pi}{3}$ .

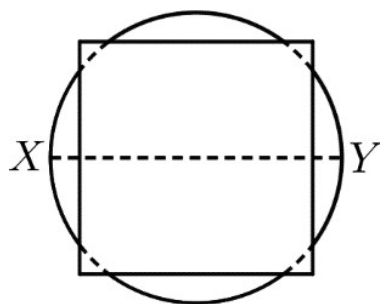
Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ sao cho  $O_1$  trùng gốc tọa độ. Khi đó  $(O_1): x^2 + y^2 = 25$  và  $(O_2): (x - 4)^2 + y^2 = 9$ .

Khi đó 
$$V = \pi \int_4^7 (9 - (x - 4)^2) dx - \pi \int_4^5 (25 - x^2) dx = \frac{40\pi}{3}$$

**Câu 34. (Cụm Hải Dương 2024)** Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8cm và một hình tròn có bán kính 5cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích  $V$  của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục  $XY$ .



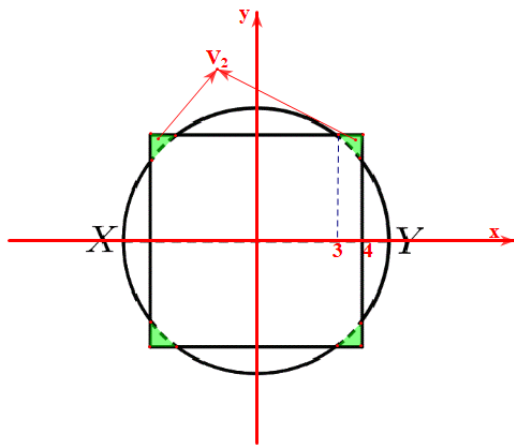
A.  $V = \frac{260\pi}{3} \text{ cm}^3$ .

B.  $V = \frac{290\pi}{3} \text{ cm}^3$ .

C.  $V = \frac{580\pi}{3} \text{ cm}^3$ .

D.  $V = \frac{520\pi}{3} \text{ cm}^3$ .

Lời giải

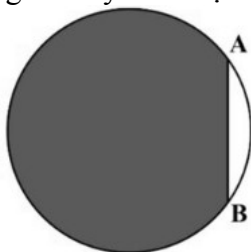


Xét  $V_1 = V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi$

$$V_2 = 2\pi \int_3^4 (16 - (25 - x^2)) dx = \frac{20}{3}\pi$$

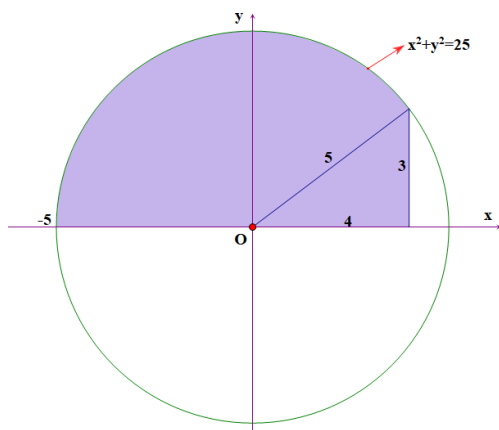
Vậy thể tích cần tìm bằng  $V = V_1 + V_2 = \frac{520}{3}\pi$

**Câu 35. (Sở Hưng Yên 2024)** Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng  $5m$ . Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có một khoảng trống để dựng một cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại một phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó  $AB = 6m$ . Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền?



- A. 3722 nghìn đồng.    B. 3723 nghìn đồng.    C. 7445 nghìn đồng.    D. 7446 nghìn đồng.

**Lời giải**

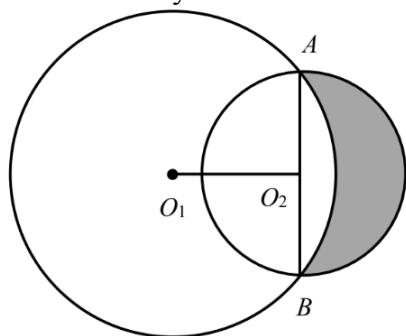


$$S = 2 \int_{-5}^4 \sqrt{25 - x^2} dx \approx 74,45$$

Ta được

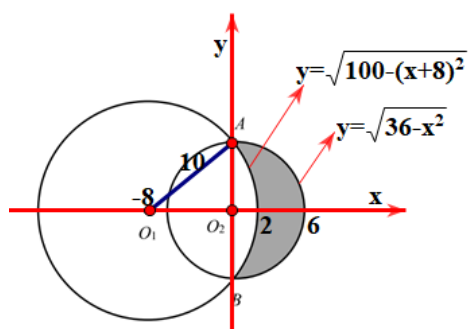
. **Chọn C**

- Câu 36. (Sở Phú Thọ 2024X)** Cho hai đường tròn  $(O_1; 10)$  và  $(O_2; 6)$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB$  là một đường kính của đường tròn  $(O_2)$ . Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần tô đậm như hình vẽ). Quay hình  $(H)$  quanh trục  $O_1O_2$  ta được một khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng



- A.  $\frac{608\pi}{3}$  .      B.  $\frac{400\pi}{3}$  .      C.  $\frac{320\pi}{3}$  .      D.  $\frac{680\pi}{3}$  .

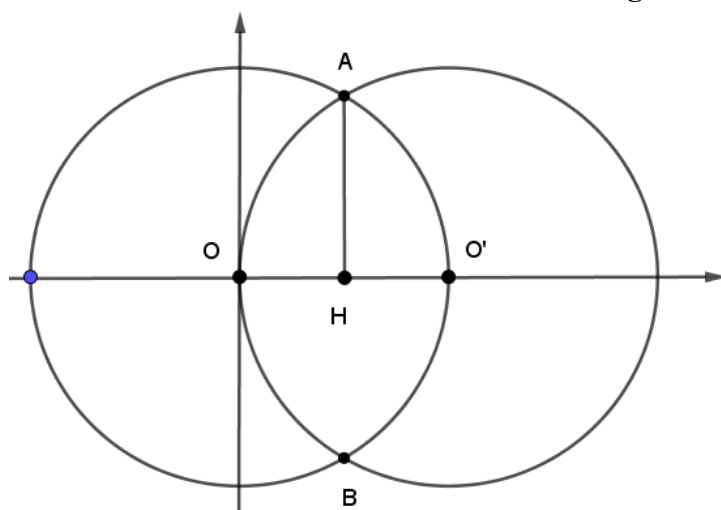
**Lời giải**



$$V = \pi \int_0^6 (36 - x^2) dx - \pi \int_0^2 (100 - (x+8)^2) dx = \frac{320\pi}{3}$$

- Câu 37.** Cho hai mặt cầu  $(S_1), (S_2)$  có cùng bán kính  $R = 3$  thỏa mãn tính chất tâm của  $(S_1)$  thuộc  $(S_2)$  và ngược lại. Tính thể tích  $V$  phần chung của hai khối cầu tạo bởi  $(S_1), (S_2)$ .
- A.  $V = \frac{45\pi}{8}$  .      B.  $V = \frac{45\pi}{4}$  .      C.  $V = \frac{45}{4}$  .      D.  $V = \frac{45}{8}$  .

**Lời giải**



Phần chung của hai khối cầu tạo bởi  $(S_1), (S_2)$  là một khối tròn xoay, tương đương phần hình phẳng  $OAO'$  quay quanh trục  $OO'$  hay bằng hai lần phần mặt phẳng tạo bởi  $AHO'$  quay quanh trục  $OO'$ .

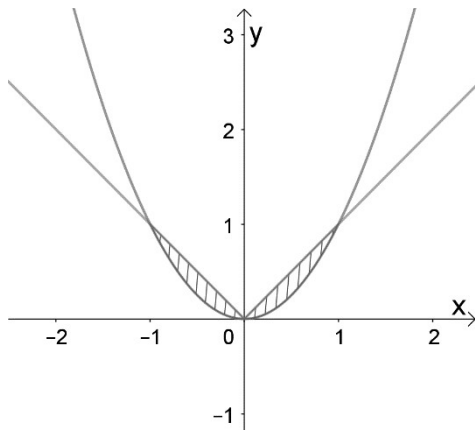
Đặt hệ trục như hình khi đó phương trình đường tròn  $(O)$  là  $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$ , điểm  $H$  có hoành độ bằng  $\frac{3}{2}$ ;  $O'$  có hoành độ là 3 nên thể tích:

$$V = \pi \int_{\frac{3}{2}}^3 \left( \sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{\frac{3}{2}}^3 (9 - x^2) dx = \frac{45}{8} \pi$$

**Câu 38. (Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị  $y = |x|$  và  $y = x^2$  quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

- A.**  $\frac{\pi}{6}$  .                      **B.**  $\frac{\pi}{3}$  .                      **C.**  $\frac{2\pi}{15}$  .                      **D.**  $\frac{4\pi}{15}$  .

**Lời giải**



Phương trình hoành độ giao điểm  $|x| = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$ .

Ta có đồ thị hai hàm số  $y = |x|$  và  $y = x^2$  đều đối xứng qua  $Oy$  nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị  $y = |x|$  và  $y = x^2$  quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường  $x = y$  và  $x = \sqrt{y}$  quay xung quanh trục  $Oy$ .

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^1 |y - y^2| dy = \pi \int_0^1 (y - y^2) dy = \pi \cdot \left( \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

**Câu 39. (THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  song song  $CD$  và  $AB = AD = BC = a$ ,  $CD = 2a$ . Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang  $ABCD$  quanh trục là đường thẳng  $AB$ .

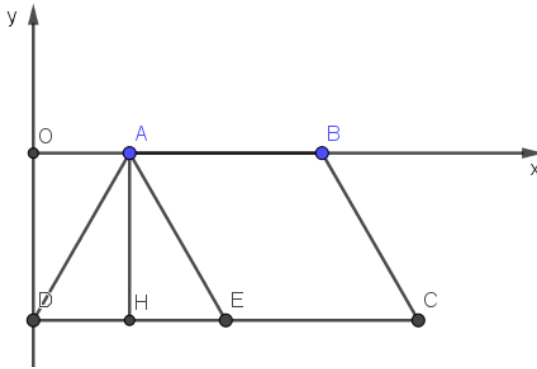
**A.**  $\frac{5}{4}\pi a^3$ .

**B.**  $\frac{5}{2}\pi a^3$ .

**C.**  $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$ .

**D.**  $\pi a^3$ .

**Lời giải**



Dễ thấy  $ABCE$  là hình bình hành nên  $AE = BC = a$ . Vậy  $ADE$  là tam giác đều.

Có  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

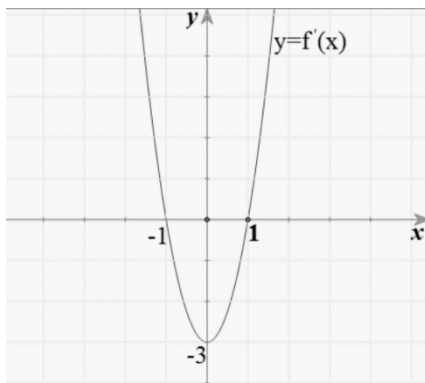
Xét hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ. Có phương trình  $CD: y = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $x_D = 0, x_C = 2a$ ;  
 $A\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ .

Phương trình  $AD: y = \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy  $V = \pi \int_0^{2a} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{4} \cdot 2a - 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(3x^2 - 3ax + \frac{3a^2}{4}\right)$

$\frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi \left(x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + \frac{3a^2}{4}x\right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{5}{4}\pi a^3$ .

**Câu 40.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$  có đồ thị  $(C)$ . Biết rằng đồ thị  $(C)$  tiếp xúc với đường thẳng  $y = 4$  tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị  $(C)$  và trục hoành khi quay xung quanh trục  $Ox$ .



A.  $\frac{725}{35}\pi$ .

B.  $\frac{1}{35}\pi$ .

C.  $6\pi$ .

**D.** đáp án khác.

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1)$

Khi đó  $f(x) = \int f'(x) dx = x^3 - 3x + C$

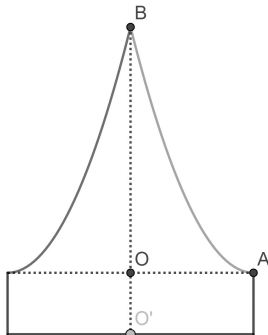
Điều kiện đồ thị hàm số  $f(x)$  tiếp xúc với đường thẳng  $y = 4$  là:

$$\begin{cases} f(x) = 4 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + C = 4 \\ 3(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ C = 2 \end{cases} \text{ suy ra } f(x) = x^3 - 3x^2 + 2(C)$$

$+ (C) \cap Ox \Rightarrow$  hoành độ giao điểm là  $x = -2; x = 1$

$+ \text{Khi đó } V = \pi \int_{-2}^1 (x^3 - 3x^2 + 2)^2 dx = \frac{729}{35}\pi$

**Câu 41. (Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng  $OO' = 5$  cm,  $OA = 10$  cm,  $OB = 20$  cm, đường cong  $AB$  là một phần của parabol có đỉnh là điểm  $A$ . Thể tích của chiếc mũ bằng



A.  $\frac{2750\pi}{3} (\text{cm}^3)$

**B.**  $\frac{2500\pi}{3} (\text{cm}^3)$

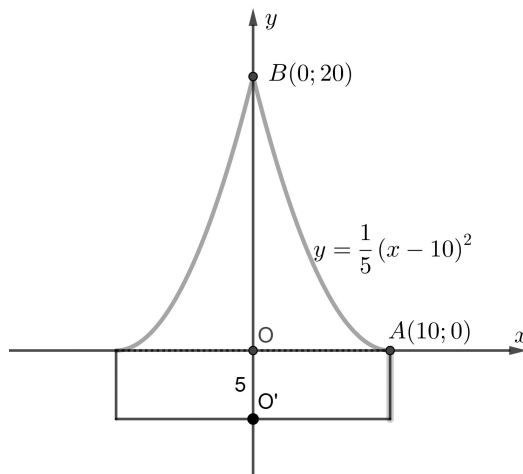
C.  $\frac{2050\pi}{3} (\text{cm}^3)$

D.  $\frac{2250\pi}{3} (\text{cm}^3)$

**Lời giải**



**Chọn B**



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là  $V$ .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng  $OA = 10$  cm và đường cao  $OO' = 5$  cm là  $V_1$ .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $AB$  và hai trục tọa độ quanh trục  $Oy$  là  $V_2$ .

Ta có  $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh  $A$  nên nó có phương trình dạng  $(P): y = a(x - 10)^2$ .

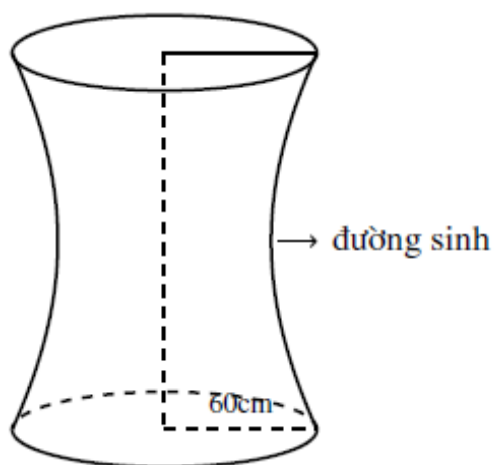
Vì  $(P)$  qua điểm  $B(0; 20)$  nên  $a = \frac{1}{5}$ .

Do đó,  $(P): y = \frac{1}{5}(x - 10)^2$ . Từ đó suy ra  $x = 10 - \sqrt{5y}$  (do  $x < 10$ ).

Suy ra 
$$V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left( 3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Do đó 
$$V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

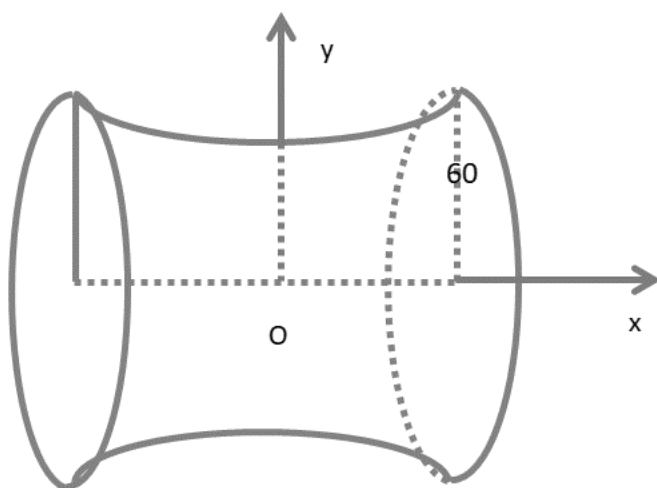
**Câu 42.** Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích  $V$  của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



- A.  $V = 344963 \text{ cm}^3$     B.  $V = 344964 \text{ cm}^3$     C.  $V = 208347 \text{ cm}^3$     D.  $V = 208346 \text{ cm}^3$

**Lời giải**

Đặt hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ (trục hoành là trục của chiếc trống, gốc tọa độ là trung điểm của đường cao chiếc trống, đơn vị: dm).



Gọi  $(E)$  là elip có phương trình  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  thì ảnh của  $(E)$  qua phép tịnh tiến theo vector

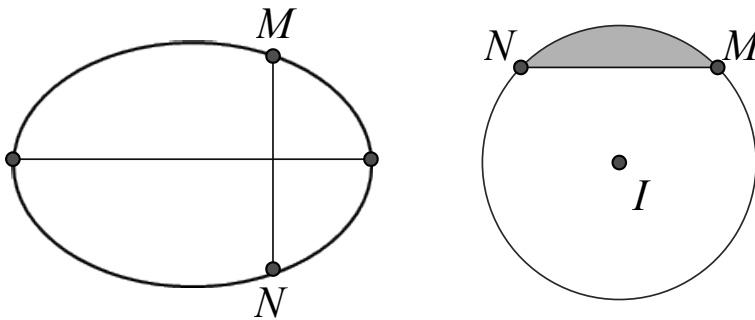
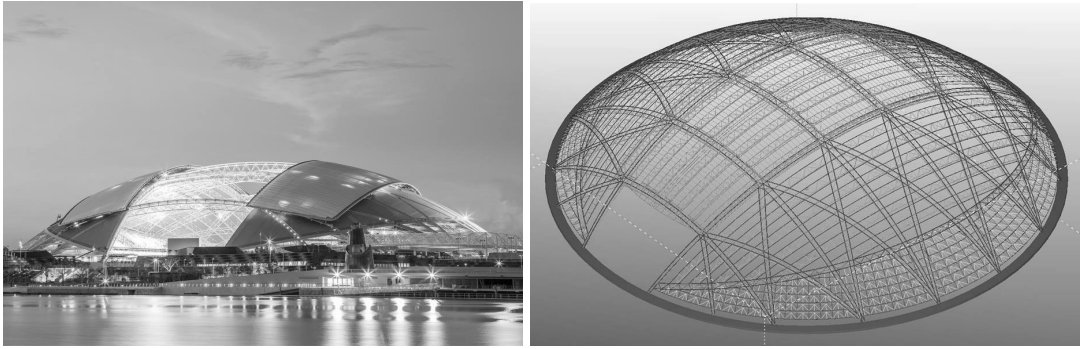
$u(0;6)$  là elip  $(E')$  có phương trình  $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$ .

Suy ra, phương trình của đường sinh là:  $y = 6 - \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ .

Do đó, thể tích của chiếc trống là:  $V = \pi \int_{-4}^4 \left( 6 - \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} \right)^2 dx \approx 344,964 \text{ (dm}^3\text{)}$ .

- Câu 43. (THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip  $(E)$  có trục lớn dài  $150m$ , trục bé dài  $90m$  (hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của  $(E)$  và cắt elip ở  $M, N$  (hình 3) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm  $I$  (phần tô đậm trong hình 4)

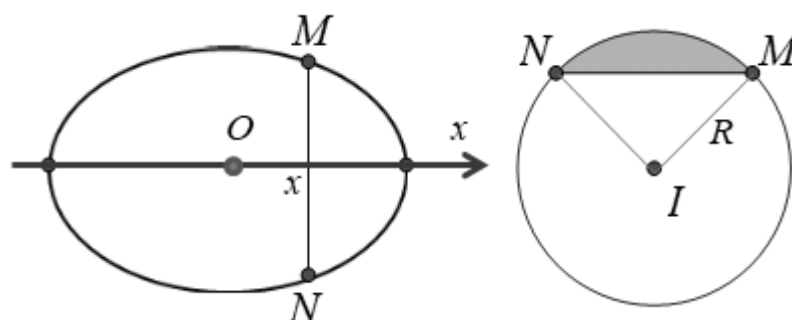
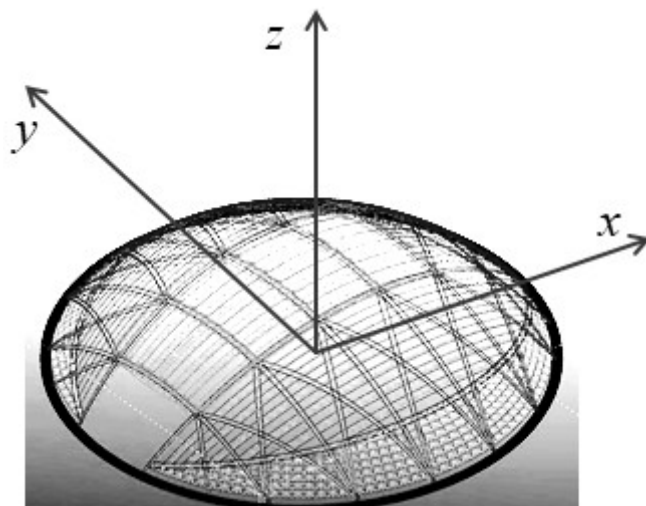
với  $MN$  là một dây cung và góc  $\angle MIN = 90^\circ$ . Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?



Hình 3

- A.  $57793m^3$  .      B.  $115586m^3$  .      C.  $32162m^3$  .      D.  $101793m^3$  .

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của  $S(x)$  thiết diện.

Gọi  $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

Lúc đó

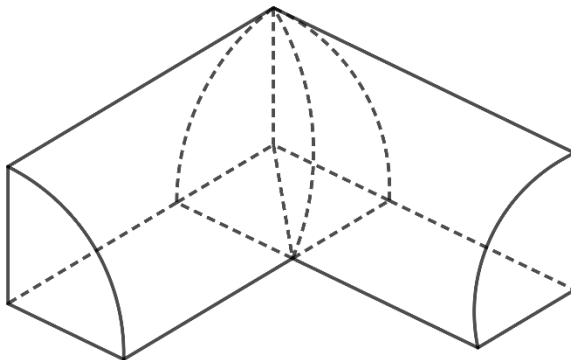
$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2} \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Thể tích khoảng không cần tìm là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2} \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586 m^3.$$

- Câu 44.** (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020) Gọi  $(H)$  là phần giao của hai khối  $\frac{1}{4}$  hình trụ có bán kính  $a$ , hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối  $(H)$ .



A.  $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$

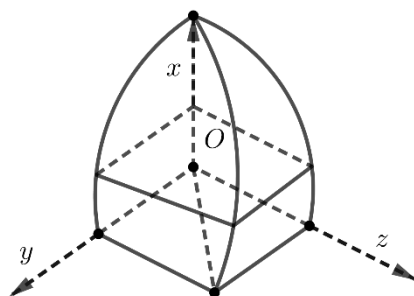
B.  $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$

C.  $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$

D.  $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$

**Lời giải**

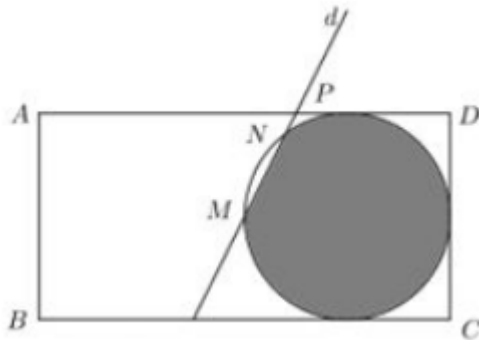
**Chọn C**



- Đặt hệ toạ độ  $Oxyz$  như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp  $(Oyz)$  cắt trục  $Ox$  tại  $x$ : thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh  $\sqrt{a^2 - x^2}$  ( $0 \leq x \leq a$ ).
- Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích:  $S(x) = a^2 - x^2$ .

• Vậy 
$$V_{(H)} = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

**Câu 45. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2024)** Từ một tấm bìa giấy hình chữ nhật  $ABCD$  có kích thước  $AB = 8\text{cm}$ ,  $AD = 16\text{cm}$ , người ta vẽ một đường tròn tiếp xúc với ba cạnh  $AD, BC, CD$  và kẻ một đường thẳng  $d$  cắt đường tròn theo dây  $MN$ . Biết  $d$  cắt cạnh  $AD$  tại  $P$  sao cho  $AP = PC$  và  $d$  chia tấm bìa thành hai miền có diện tích bằng nhau.

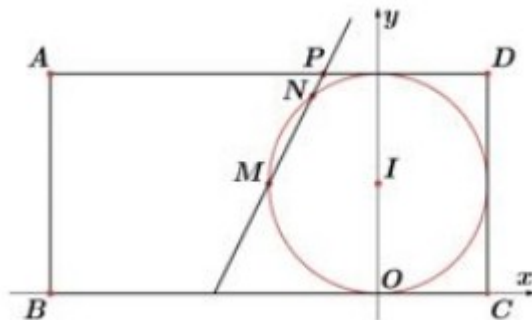


Quay tấm bìa quanh cạnh  $BC$  thì miền phẳng được tô đậm tạo thành một vật thể tròn xoay có thể tích gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A.  $13088\text{cm}^3$ .
- B.  $12999\text{cm}^3$ .
- C.  $13089\text{cm}^3$ .
- D.  $13000\text{cm}^3$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Chọn  $O(0;0)$ , khi đó  $A(-12;8), B(-12;0), C(4;0), D(4;8)$  và đường tròn có phương trình là  $(C): x^2 + (y - 4)^2 = 16$ .

Nên cung trên và dưới của đường tròn có phương trình lần lượt là 
$$\begin{cases} (C_1): y = \sqrt{16 - x^2} + 4 \\ (C_2): y = -\sqrt{16 - x^2} + 4 \end{cases}$$

Để đường thẳng  $d$  chia đường tròn thành hai phần bằng nhau thì  $M$  phải là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$  nên  $M(-4; 4)$ .

Mặt khác  $AP = PC$  nên đường thẳng  $AM$  hay  $d$  là đường trung trực của  $AC$ , khi đó:  $d: 2x - y + 12 = 0 \Leftrightarrow d: y = 2x + 12$ .

Phương trình hoành độ giao điểm:  $\sqrt{16 - x^2} + 4 = 2x + 12 \Leftrightarrow \sqrt{16 - x^2} = 2x + 8$   

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - x^2 = 4x^2 + 32x + 64 \\ 2x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 32x + 48 \\ 2x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Thể tích khối tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn quanh cạnh  $BC$  là:

$$V_1 = \pi \int_{-4}^4 (\sqrt{16 - x^2} + 4)^2 dx - \pi \int_{-4}^4 (-\sqrt{16 - x^2} + 4)^2 dx \approx 1263,3 (cm^3)$$

Thể tích khối tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi cung trên của đường tròn và đường thẳng  $d$  là:

$$V_2 = \pi \int_{-4}^{-\frac{12}{5}} (\sqrt{16 - x^2} + 4)^2 dx - \pi \int_{-4}^{-\frac{12}{5}} (2x + 12)^2 dx \approx 36,32$$

Khi đó, thể tích hình cần tìm là  $V = V_1 - V_2 \approx 1226,98$ .