

DẠNG 11**Bài toán tìm cặp số nguyên thỏa mãn**

- Câu 1.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq y \leq 10$ và $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^y \cdot \log_2(2y + 2)$?
A. 9 . **B.** 3 . **C.** 6 . **D.** 4 .
- Câu 2.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$.
A. 4 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 1 .
- Câu 3.** Gọi S là tập hợp các điểm $M(x; y)$, với $x; y$ là các số nguyên thỏa mãn $\begin{cases} 3 \leq x \leq 2020 \\ \log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1) \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm thuộc S ?
A. 165. **B.** 120. **C.** 220. **D.** 55.
- Câu 4.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $-20 \leq x \leq 20, -20 \leq y \leq 20$ và $2^{x+5} + 3x + 12 = 2^{y+1} + 3y$?
A. 41 . **B.** 40 . **C.** 37 . **D.** 32 .
- Câu 5.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x) + 5x = 10 \cdot 2^y + y + 2$?
A. 31 . **B.** 11 . **C.** 2020 . **D.** 21 .
- Câu 6.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 < x \leq 100$ và $\log \frac{10y^2 - 20y}{x-1} = x - y^2 + 2y$?
A. 19 . **B.** 17 . **C.** 20 . **D.** 18 .
- Câu 7.** Số giá trị x nguyên thỏa mãn $\log_2^3(y-1) - x^3 + \log_2(y-1)^3 = 3x$ và $2 \leq y \leq 17$ là:
A. 0 . **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 8 .
- Câu 8.** Cho các số x, y, a thỏa mãn $1 \leq x \leq 2048, y \geq 1, a \in \mathbb{N}$ và $x^2 + xy + \log_2(x+y-1)^{x+1} = x(2^a + a) - y + 2^a + a + 1$. Có bao nhiêu giá trị của $a \leq 100$ để luôn có 2048 cặp số nguyên $(x; y)$?
A. 11. **B.** 10. **C.** 89. **D.** 90.
- Câu 9.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq y \leq 2018$ và $\log_5 \left(\frac{3^{x+1} - 1}{y+1} \right) = y + 2 - 3^{x+1}$?
A. 10 . **B.** 8 . **C.** 5 . **D.** 6 .
- Câu 10.** Cho các số x, y, a thỏa mãn $1 \leq x \leq 8, y \geq 1, a \in \mathbb{N}$ và $\log_2(2^a + y + 1) + 2^a + y + 1 = x + 2^x$ (*). Có bao nhiêu giá trị của $a \in [0; 100]$ để không tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa (*)?
A. 0 . **B.** 8 . **C.** 1. **D.** 93 .
- Câu 11.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x + y > 0, -20 \leq x \leq 20$ và $\log_2(x + 2y) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y = 0$?
A. 9 . **B.** 6 . **C.** 10 . **D.** 11 .

- Câu 12.** Gọi $(x; y)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn $1 < y < 2020$ và $\log_3 \left(\frac{4^x + 1}{y} \right) = y^2 - 2y + 1 - 16^x$.
Gọi $y_{\min}$ và $y_{\max}$ lần lượt là nghiệm ứng với giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y . Tính giá trị của $T = y_{\min} + y_{\max}$.
A. $T = 103$. B. $T = 3010$. C. $T = 1030$. D. $T = 301$.
- Câu 13.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $4^x + 2x = y + \log_2 y$ và $1 \leq y \leq 1024$?
A. 5. B. 6. C. 1024. D. 1023.
- Câu 14.** Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3 \left(\frac{2a+5}{a+b} \right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + 3b^2$
A. $\frac{5}{4}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{25}{4}$.
- Câu 15.** Cho tập hợp X là tập hợp các điểm $M(x; y)$ với $x; y$ là các số nguyên thỏa mãn $3 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1)$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có cả ba đỉnh là các điểm thuộc tập X ?
A. 120. B. 165. C. 220. D. 55.
- Câu 16.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_5(25x + 25) + x = 2y + 5^y$
A. 2019. B. 3. C. 2020. D. 4.
- Câu 17.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\sqrt{\log_2 x} + x = y + 2^{y^2}$ và $0 < x < 2020$. Số các giá trị nguyên dương của y là
A. 4. B. 3. C. 10. D. 9.
- Câu 18.** Có bao nhiêu cặp các số nguyên $(x; y)$ với $y < 8$ thỏa mãn $\log_2(x^2 - 6x + 9) - \log_2 y + x^2 + 8 = 6x + 2y$?
A. 6. B. 4. C. 2. D. 1.
- Câu 19.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $20 \leq x \leq 2020$ và $\frac{19^{-x-3}}{x^2 + 2x + 2021} = \frac{361^{y-2}}{4y^2 - 4y + 2020}$?
A. 1009. B. 1000. C. 2000. D. 2001.
- Câu 20.** Có bao nhiêu cặp số $(x; y), x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $1 \leq y \leq e^7$ và $e^{\ln^2 y - x^2 - 2x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{\ln^2 y + 1}$
A. 1. B. 2. C. 16. D. 15.
- Câu 21.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1)$?
A. 11. B. 2020. C. 10. D. 2019.
- Câu 22.** Cho x, y là các số nguyên dương thỏa $x \leq 10$ và $2x + \log_2(x-3) = 5 + y + 2^y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x + y$.
A. 6. B. 8. C. 10. D. 12.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.C	5.B	6.D	7.D	8.D	9.D	10.D
11.C	12.C	13.B	14.D	15.B	16.B	17.B	18.C	19.B	20.D
21.A	22.C								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1. Chọn D**

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^y \cdot \log_2(2y + 2)$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2y} \cdot \log_2(2y + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t + 2), t \geq 0$.

Vì $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t + 2) + \frac{2^t}{(t + 2) \ln 2} > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2y) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2y.$$

$$\text{Mà } 1 \leq y \leq 10 \Rightarrow 2 \leq (x-1)^2 \leq 20 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{20} \\ 1 - \sqrt{20} \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Mặt khác $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3; -2; -1; 3; 4; 5\}$. Vì $x-1$ phải chẵn nên x lẻ.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 2. Chọn D

Điều kiện: $10x^2 - 20x + 20 > 0$, luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log[10(x^2 - 2x + 2)] = 10^{y^2} + y^2 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2) + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log(x^2 - 2x + 2)} + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2 \quad (1). \text{ Xét hàm số } f(t) = 10^t + t \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Ta có $f'(t) = 10^t \cdot \ln 10 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f[\log(x^2 - 2x + 2)] = f(y^2) \Leftrightarrow \log(x^2 - 2x + 2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^{y^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2}.$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 10^6 \text{ nên } 1 \leq (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2} \leq (10^6 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log[(10^6 - 1)^2 + 1].$$

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in \{1; 2; 3\}$.

$$\text{Với } y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (ktm)} \\ x = 4 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

Với $y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 9998 = 0$ (không có x nguyên nào thỏa mãn).

Với $y = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 999999998 = 0$ (không có x nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x; y) = (4; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Chọn A

Ta có $\log_2(2x-4) + 2x-4 = y+1 + 2^{y+1}$.

Đặt $\log_2(2x-4) = t \Rightarrow 2x-4 = 2^t$ khi đó ta có $t + 2^t = (y+1) + 2^{y+1} (1)$.

Hàm $y = f(t) = t + 2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$(1) \Leftrightarrow t = y+1 \Rightarrow y = \log_2(2x-4) - 1 \Leftrightarrow y = \log_2(x-2).$$

Hàm số $y = \log_2(x-2)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Suy ra với $3 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq y \leq \log_2 2018 \Rightarrow$ có 11 số nguyên y thỏa mãn hay 11 điểm M .

Do các điểm này nằm trên đường cong $y = \log_2(x-2)$ nên không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Vậy số tam giác nhận 3 trong 11 điểm này làm đỉnh là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 4. Chọn C

Ta có: $2^{x+5} + 3x + 12 = 2^{y+1} + 3y \Leftrightarrow 2^{x+5} + 3(x+5) = 2^{y+1} + 3(y+1)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3t$, $f(t) = 2^t + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $x+5 = y+1 \Leftrightarrow y = x+4$.

Kết hợp với điều kiện $-20 \leq x \leq 20$; $-20 \leq y \leq 20$ suy ra x nguyên thuộc $[-20; 16]$ thỏa đề.

Vậy có 37 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 5. Chọn B

Ta có: $\log_2(2x) + 5x = 10 \cdot 2^y + y + 2 \Leftrightarrow \log_2 x + 5x + 1 = \log_2 2^{y+1} + 5 \cdot 2^{y+1} + 1$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + 5t + 1$, $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra $x = 2^{y+1}$.

Từ $1 \leq x \leq 2020$ suy ra $1 \leq 2^{y+1} \leq 2020 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2^y \leq 1010 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \log_2 1010 \approx 9,98$.

Có 11 giá trị nguyên của y thỏa đề. Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 6. Chọn D

Với $1 < x \leq 100$, ta có:

$$\log \frac{10y^2 - 20y}{x-1} = x - y^2 + 2y \Leftrightarrow \log(x-1) + x-1 = \log(y^2 - 2y) + y^2 - 2y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(u) = \log u + u$, ta có $f'(u) = \frac{1}{u \ln 10} + 1 > 0, \forall u > 0$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 = y^2 - 2y \Leftrightarrow x = (y-1)^2$.

$$1 < x \leq 100 \Rightarrow 1 < (y-1)^2 \leq 100 \Leftrightarrow 1 < |y-1| \leq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq y < 0 \\ 2 < y \leq 11 \end{cases}.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị của y và cũng có 18 giá trị của x .

Câu 7. Chọn D

Với $2 \leq y \leq 17$ ta có

$$\log_2^3(y-1) - x^3 + \log_2(y-1)^3 = 3x \Leftrightarrow \log_2^3(y-1) + 3\log_2(y-1) = x^3 + 3x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(y-1) = x \Leftrightarrow y = x^2 + 1$.

Do $2 \leq y \leq 17 \Rightarrow 2 \leq x^2 + 1 \leq 17 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 16$.

Vì x nhận các giá trị nguyên nên có 8 giá trị cần tìm là $S = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của x cần tìm.

Câu 8. Chọn D

Ta có: $x^2 + xy + \log_2(x+y-1)^{x+1} = x(2^a + a) - y + 2^a + a + 1 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+y-1) + (x+1)\log_2(x+y-1) = (x+1)(2^a + a)$

$\Leftrightarrow 2^{\log_2(x+y-1)} + \log_2(x+y-1) = 2^a + a \quad (\text{do } x+1 \geq 2, \forall x \geq 1) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \quad (t \geq 0)$.

Vì $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow \log_2(x+y-1) = a \Leftrightarrow x+y-1 = 2^a \Leftrightarrow x = 2^a - y + 1$.

Mà $1 \leq x \leq 2048$ nên suy ra: $1 \leq 2^a - y + 1 \leq 2048 \Leftrightarrow 2^a - 2047 \leq y \leq 2^a$.

Do $y \geq 1$, mỗi giá trị của y có một giá trị của x và $[2^a - 2047; 2^a]$ có 2048 số nguyên nên để có 2048 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn (1) thì $2^a - 2047 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 11$.

Mà $a \leq 100, a \in \mathbb{N}$ nên $a \in \{11; 12; \dots; 100\}$.

Vậy có 90 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2018 \\ \frac{3^{x+1} - 1}{y+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$.

Ta có $\log_5\left(\frac{3^{x+1} - 1}{y+1}\right) = y + 2 - 3^{x+1} \Leftrightarrow \log_5(3^{x+1} - 1) - \log_5(y+1) = y + 1 + 1 - 3^{x+1}$

$\Leftrightarrow \log_5(3^{x+1} - 1) + (3^{x+1} - 1) = \log_5(y+1) + (y+1) \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0$ với mọi $t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t) = \log_5 t + t$ đồng biến trên

khoảng $(0; +\infty)$. Từ (1) ta có $f(3^{x+1} - 1) = f(y+1) \Leftrightarrow 3^{x+1} - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = 3^{x+1} - 2$.

Vì $1 \leq y \leq 2018 \Leftrightarrow 1 \leq 3^{x+1} - 2 \leq 2018 \Leftrightarrow 3 \leq 3^{x+1} \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq \log_3 2020$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_3 2020 - 1$.

Vì x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 6 cặp $(x; y)$ thỏa bài toán.

Câu 10. Chọn D

Có $(*) \Leftrightarrow y + 2^a + 1 + \log_2(y + 2^a + 1) = 2^x + \log_2(2^x)$.

Xét hàm số $f(x) = x + \log_2 x$ có $f'(x) = 1 + \frac{1}{x \ln 2} > 0, \forall x > 0$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó $f(2^a + y + 1) = f(2^x) \Leftrightarrow 2^a + y + 1 = 2^x$.

Ta lại có $1 \leq x \leq 8 \Rightarrow 1 \leq 2^a + y + 1 \leq 256 \Rightarrow -2^a \leq y \leq 255 - 2^a$.

Với mỗi giá trị nguyên $y \geq 1$ ta có duy nhất một giá trị nguyên x .

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -2^a \leq y \leq 255 - 2^a$ không chứa giá trị nguyên $y \geq 1$.

Hay $255 - 2^a < 1 \Leftrightarrow a \geq 8$. Vậy có 93 giá trị nguyên của $a \in [0; 100]$ thỏa ycbt.

Câu 11. Chọn C

Điều kiện: $x + 2y > 0$. Do: $2x + y > 0$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \log_2(x + 2y) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{(2x + y)(x + 2y)}{2x + y} + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 2y^2 + 5xy) - \log_2(2x + y) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 2y^2 + 5xy) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy &= \log_2(2x + y) + 2x + y \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$, ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng

biến trên $(0; +\infty)$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow f(2x^2 + 2y^2 + 5xy) = f(2x + y) \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 5xy = 2x + y$

$$\Leftrightarrow (2x + y)(x + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - 2y \text{ vì } 2x + y > 0 \text{ nên } y < \frac{2}{3}, (2).$$

$$\text{Do } -20 \leq x \leq 20 \text{ suy ra } \frac{-19}{2} \leq y \leq \frac{21}{2}, (3).$$

Từ (2), (3) và $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-9; -8; \dots; 0\}$. Vậy có 10 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 12. Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_3 \left(\frac{4^x + 1}{y} \right) &= y^2 - 2y + 1 - 16^x \Leftrightarrow \log_3(4^x + 1) - \log_3 y = (y - 1)^2 - 16^x \\ \Leftrightarrow \log_3(4^x + 1) + (4^x)^2 &= \log_3 y + (y - 1)^2 \quad (*). \text{ Đặt } t = 4^x + 1 \Leftrightarrow 4^x = t - 1 \quad (t > 1). \end{aligned}$$

$$(*) \Leftrightarrow \log_3 t + (t - 1)^2 = \log_3 y + (y - 1)^2 \quad (**)$$

Đặt: $f(u) = \log_3 u + (u - 1)^2$ ($u > 1$). Ta có: $f'(u) = \frac{1}{u \ln 3} + 2(u - 1) > 0$ khi $u > 1$.

Suy ra hàm số $y = f(u)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Khi đó: } (**) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow 4^x + 1 = y.$$

$$\text{Vì } 1 < y < 2020, \text{ nên ta có } 1 < 4^x + 1 < 2020 \Leftrightarrow 0 < 4^x < 2019 \Leftrightarrow x < \log_4 2019 \approx 5,49$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \begin{cases} x_{\min} = 1 \\ x_{\max} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{\min} = 5 \\ y_{\max} = 1025 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = y_{\min} + y_{\max} = 5 + 1025 = 1030.$$

Câu 13. Chọn B

Với điều kiện $y > 0$, ta có $4^x + 2x = y + \log_2 y \Leftrightarrow 2^{2x} + 2x = 2^{\log_2 y} + \log_2 y$ (*).

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, t \in \mathbb{R}$.

Ta thấy $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = 2^t + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(2x) = f(\log_2 y) \Leftrightarrow 2x = \log_2 y \Leftrightarrow y = 4^x$.

Vì $1 \leq y \leq 1024$ nên $1 \leq 4^x \leq 1024 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5$.

Vậy có 6 cặp số nguyên thỏa mãn là $(0;1), (1;4), (2;16), (3;64), (4;256), (5;1024)$.

Câu 14. Chọn D

$$\log_3 \left(\frac{2a+5}{a+b} \right) = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{2a+5}{3a+3b} \right) = (3a+3b) - (2a+5)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2a+5) + (2a+5) = \log_3 (3a+3b) + (3a+3b) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 x + x$ có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 1 > 0, \forall x > 0$ nên hàm số $f(x) = \log_3 x + x$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó

$(1) \Leftrightarrow f(2a+5) = f(3a+3b) \Leftrightarrow 2a+5 = 3a+3b \Leftrightarrow a = 5-3b$ thay vào T , ta được:

$$T = a^2 + 3b^2 = (5-3b)^2 + 3b^2 = 12b^2 - 30b + 25 \geq \frac{25}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $\frac{25}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = \frac{5}{4}$ và $a = \frac{5}{4}$.

Câu 15. Chọn B

Ta có: $\log_2 (x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x-2) + 2x - 4 = y + 2^{y+1} \Leftrightarrow \log_2 (2x-4) + 2x - 4 = y + 1 + 2^{y+1} (*).$$

Đặt $\log_2 (2x-4) = t \Rightarrow 2x-4 = 2^t$, khi đó ta có $(*) \Leftrightarrow t + 2^t = (y+1) + 2^{y+1} (1)$.

Hàm $y = f(t) = t + 2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow t = y+1 \Rightarrow y = \log_2 (2x-4) - 1$.

Với $3 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 1 \leq t \leq \log_2 4036 \Rightarrow 1 \leq 1+y \leq \log_2 4036$ mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; \dots; 10\}$ vậy có 11 số nguyên y hay 11 điểm M .

Do các điểm này nằm trên đường cong $y = \log_2 (2x-4) - 1$ nên không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Vậy số tam giác nhận 3 trong 11 điểm này làm đỉnh là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 16. Chọn B

Đặt $t = \log_5 (25x+25) (2 \leq t \leq 2 + \log_5 2021) \Leftrightarrow 25x+25 = 5^t \Leftrightarrow x = 5^{t-2} - 2$.

Theo bài ra: $\log_5 (25x+25) + x = 2y + 5^y \Leftrightarrow (t-2) + 5^{t-2} = 2y + 5^{2y} (*)$

Hàm $f(u) = u + 5^u$ đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow t-2 = 2y \Leftrightarrow t = 2y+2$.

Mà $2 \leq t \leq 2 + \log_5 2021 \Rightarrow 2 \leq 2y+2 \leq 2 + \log_5 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \log_5 2021$

Mặt khác $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2\}$. Vậy có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 17. Chọn B

Điều kiện: $x \geq 1$. Vì $x \geq 1$ và y dương nên ta có:

$$\sqrt{\log_2 x} + x = y + 2^{y^2} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} + 2^{\log_2 x} = y + 2^{y^2} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} + 2^{\log_2 x} = \sqrt{y^2} + 2^{y^2} (*).$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} + 2^t, t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó: $(*) \Leftrightarrow f(\log_2 x) = f(y^2) \Leftrightarrow \log_2 x = y^2$.

Vì $1 \leq x < 2020$ nên $0 \leq \log_2 x < \log_2 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 < \log_2 2020$. Suy ra: $0 \leq y < \sqrt{\log_2 2020}$

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{1; 2; 3\}$.

Câu 18. Chọn C

Điều kiện: $x \neq 3; y > 0$. Ta có: $\log_2(x^2 - 6x + 9) - \log_2 y + x^2 + 8 = 6x + 2y$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 6x + 9) + x^2 - 6x + 9 = \log_2(2y) + 2y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên là hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Nên PT $(*) \Leftrightarrow f(u) = f(v)$ với $u = x^2 - 6x + 9; v = 2y \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 2y$.

Khi đó $y < 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 < 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 7$

Với $x \in \mathbb{Z}, x \neq 3 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$

Với $x = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$ (Không tm)

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$ (Thỏa mãn)

Với $x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ (Không tm)

Với $x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ (Không tm)

Với $x = 5 \Rightarrow y = 2$ (Thỏa mãn)

Với $x = 6 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$ (Không tm)

Vậy có 2 cặp $(x; y)$ thỏa mãn x, y là những số nguyên và $y < 8$.

Câu 19. Chọn B

$$\text{Ta có: } \frac{19^{-x-3}}{x^2 + 2x + 2021} = \frac{361^{y-2}}{4y^2 - 12y + 2026} \Leftrightarrow \frac{19^{-x-3}}{(x+2)^2 + 2017} = \frac{19^{2y-4}}{(3-2y)^2 + 2017}$$

$$\Leftrightarrow \frac{19^{3-2y}}{(x+2)^2 + 2017} = \frac{19^{x+2}}{(3-2y)^2 + 2017} \Leftrightarrow 19^{x+2} \cdot [(x+2)^2 + 2017] = 19^{3-2y} \cdot [(3-2y)^2 + 2017]$$

Xét hàm số: $f(t) = 19^t \cdot (t^2 + 2017)$ với $t \geq 0$ có $f'(t) = 2t \cdot 19^t + 19^t \cdot \ln 19 \cdot (t^2 + 2017) > 0; \forall t \geq 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$

Mặt khác $f(x+2) = f(3-2y) \Rightarrow x+2 = 3-2y \Leftrightarrow x = 1-2y$.

$$\text{Ta có } 20 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 20 \leq -2y + 1 \leq 2020 \Leftrightarrow \frac{-2019}{2} \leq y \leq \frac{-19}{2}.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1009; -1008; \dots; -10\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 1000 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20. Chọn D

Xét phương trình: $e^{\ln^2 y - x^2 - 2x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{\ln^2 y + 1}$ (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow e^{\ln^2 y - x^2 - 2x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{\ln^2 y + 1} \Leftrightarrow \frac{e^{\ln^2 y}}{e^{(x+1)^2}} = \frac{(x+1)^2 + 1}{\ln^2 y + 1} \Leftrightarrow e^{\ln^2 y} (\ln^2 y + 1) = ((x+1)^2 + 1) e^{(x+1)^2} \quad (2).$$

Xét hàm số: $f(t) = e^t(t+1)$, $t \in [0; +\infty)$, ta có: $f'(t) = e^t(t+1) + e^t = e^t(t+2) > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ (2) ta có: } f(\ln^2 y) = f((x+1)^2) \Leftrightarrow \ln^2 y = (x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x+1 \\ \ln y = -x-1. \end{cases}$$

Khi $\ln y = x+1 \Leftrightarrow y = e^{x+1}$. Do $1 \leq y \leq e^7$ nên $1 \leq e^{x+1} \leq e^7 \Leftrightarrow 0 \leq x+1 \leq 7 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 6$.

Hơn nữa $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (*).

Khi $\ln y = -x-1 \Leftrightarrow y = e^{-x-1}$. Do $1 \leq y \leq e^7$ nên $1 \leq e^{-x-1} \leq e^7 \Leftrightarrow 0 \leq -x-1 \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq -1$.

Hơn nữa $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$ (**).

Ứng với mỗi giá trị x cho ta một giá trị y thỏa đề.

Vậy từ (*) và (**) có 15 cặp số $(x; y), x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn.

Câu 21. Chọn A

Điều kiện: $x > 2$.

$$\text{Ta có } \log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1) \Leftrightarrow \log_2(2x-4) + 2x - 4 = y + 1 + 2^{y+1} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow f(\log_2(2x-4)) = f(y+1) \Leftrightarrow \log_2(2x-4) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2^{y+1} + 4}{2} \Leftrightarrow x = 2^y + 2.$$

$$\text{Vì } 3 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 3 \leq 2^y + 2 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_2 2018.$$

$$\text{Do } y \text{ nguyên nên } y \in \{0; 1; \dots; 10\} \Rightarrow (x; y) \in \{(2^i + 2; i) \mid 0 \leq i \leq 10\}$$

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 22. Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3 < x \leq 10$. Đẳng thức $2x + \log_2(x-3) = 5 + y + 2^y$

$$\Leftrightarrow (2x-6) + 1 + \log_2(x-3) = y + 2^y \Leftrightarrow (2x-6) + \log_2(2x-6) = y + 2^y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$ có đạo hàm $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(\log_2(2x-6)) = f(y) \Leftrightarrow y = \log_2(2x-6) \Leftrightarrow 2x-6 = 2^y \Leftrightarrow x = 2^{y-1} + 3.$$

$$\text{Theo giả thiết } x \leq 10 \Rightarrow 2^{y-1} + 3 \leq 10 \Rightarrow y \leq 1 + \log_2 7 \approx 3,8.$$

Do y nguyên dương nên ta có $y \leq 3$.

Khi đó $T = x + y = 2^{y-1} + 3 + y \leq 2^{3-1} + 3 + 3 = 10$. Vậy $\max T = 10$ khi $y = 3, x = 7$.

