ĐỀ SỐ 12

Câu1. (4 điểm)

a, Cho p là số nguyên tố; p ≥ 5. chứng minh rằng: Nếu 2p + 1 là sô nguyên tố thì: $2p^2+1$ là hợp số.

b, Chứng minh A = n(n+1)(n+2)(n+3) không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Câu 2. (4 điểm)

a, Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+3y^2+4x=19$

b, Giải phương trình: $5\sqrt{x+1}+\sqrt{5x^2+27x+25}$

Câu 3. (4 điểm)

a, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: M = $4x^2+2y^2-4xy-4x+2023$.

b, Cho các số thực dương x; y;z thỏa mãn x +y+z = 1.

Chứng minh rằng $\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\leq\frac{9}{4}$

Câu 4.(6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a, Chứng minh : BH.BD = BC.BK và BH.BD +CH.CE = BC^2.

b, Chứng minh BH = AC. Cot ABC

c, Gọi M là trung điểm của BC, đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: MP = MQ.

Câu 5. (2 điểm)

Trong một buổi gặp mặt có 294 người tham gia, những người tham gia, những người quen nhau bắt tay nhau. Biết nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều mất bao nhiêu cái bắt tay.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

a, Cho p là số nguyên tố; p ≥5. chứng minh rằng: Nếu 2p + 1 là sô nguyên tố thì: $2p^2+1$ là hợp số.

Vì p là số nguyên tố; p ≥5 nên p lẻ và p không chia hết cho 3. Khi đó p chia hết cho 3 dư 1 hoặc 2. Suy ra: p = 3k +1, p = 3k +2 (k thuộc n)

HS lập luận để chứng tỏ $2p^2+1$ là hợp số.

b, Chứng minh A = n(n+1)(n+2)(n+3) không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Ta có: $A=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)$

$\Rightarrow A>(n^2+3n)^2$ với mọi n ≥1

$A+1=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)<A<A+1=(n^2+3n+1)^2$.

Suy ra A không là số chính phương.

Câu 2. (4,0 điểm)

a, Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+3y^2+4x=19$

$2x^2+3y^2+4x=19 \Leftrightarrow 2(x^2+2x+1)=3(7-y^2) \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3(7-y^2)$

$\Leftrightarrow 3(7-y^2)\vdots 2 \Leftrightarrow 7-y^2\vdots 2 \Leftrightarrow$ y là số nguyên lẻ

Mà $2.(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow 7-y^2\geq 0 \Leftrightarrow y^2=1$

HS tìm y rồi thay vào tìm x để tìm ra các cặp nghiệm: (2;1); (2;-1); (-4;1); (-4;-1)

b, Giải phương trình: $5\sqrt{x+1}+\sqrt{5x^2+27x+25}$

$5\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5x^2+27x+25}$ ĐKXĐ $x\geq 2$

Bình phương cả hai vế ta có

$10\sqrt{(x+1)(x-2)(x+2)}+25x+25+x^2-4=27x+25+5x^2$

$5\sqrt{(x+1)(x-2)(x+2)}=x+2+2x^2$

Đặt $a=\sqrt{(x+1)(x-2)};b=\sqrt{(x+2)};(a\geq 0,b>0)$

Khi đó ta có: $2a^3+3b^2=5ab\, suy\, ra\, a=b\, hoặc\, a=1,5b$

Giải ra ta có: x = $\sqrt{5}+1$

Câu 3. (2 điểm)

a, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: M = $4x^2+2y^2-4xy-4x+2023$

Ta có: M = $4x^2+2y^2-4xy-4x+2023$

$\Rightarrow M=(2x-y-1)^2+(y-1)^2+2021$

Do $(2x-y-1)^2\geq 0\,\forall x,y\, và\, (y-1)^2\geq 0\,\forall x,y$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}(2x-y-1)^2=0\\ (y-1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Vậy GTNN của M = 2021 khi x = y =1

b, Cho các số thực dương x; y; z thỏa mãn x + y + z = 1.

Chứng minh rằng $\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\leq\frac{9}{4}$

Ta có x + yz + = x(x +y + z) + yz = (x+y)(z+x).

Tương tự ta có y + zx = (x + y)(y + z); z +xy = (y + z)(z + x)

Do đó:

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$¿\frac{2((x+y)(y+z)(z+x)+xyz)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$¿2+\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ (vì áp dungjh BĐT coossi cho hai số dương ta có:

$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}=8xyz$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

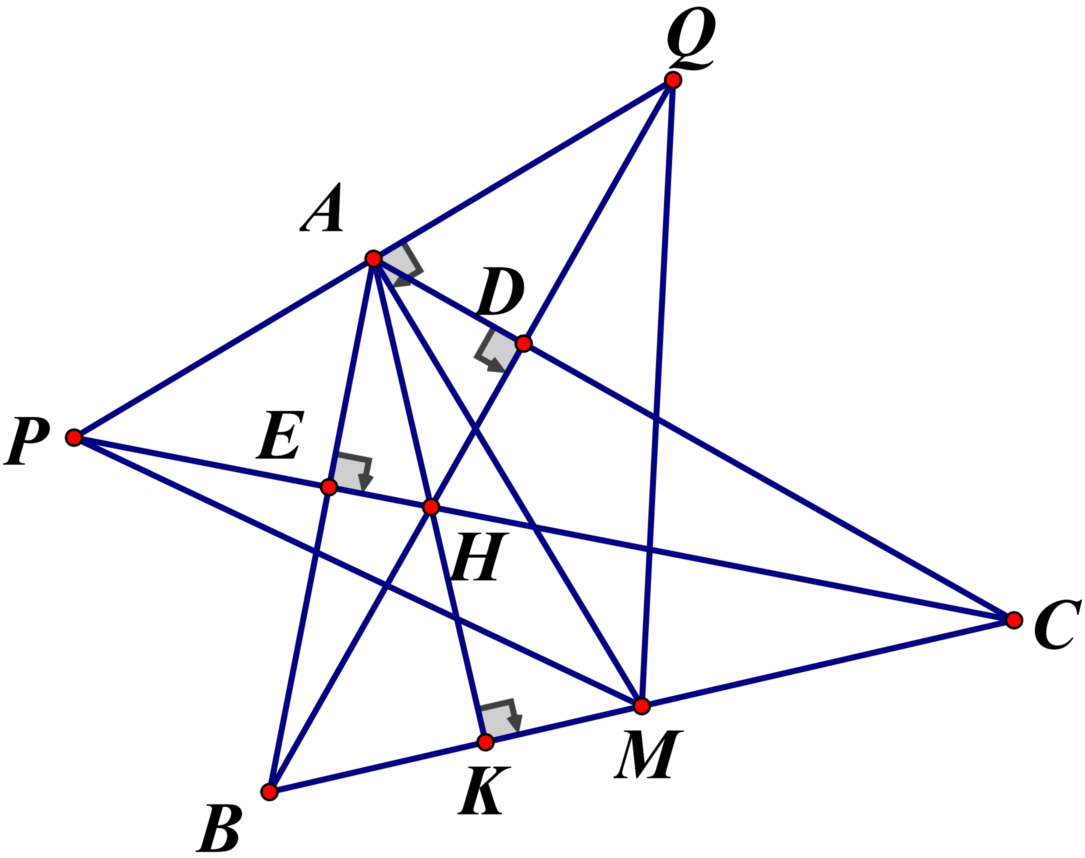
Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a, Chứng minh : BH.BD = BC.BK và BH.BD +CH.CE = BC^2.

b, Chứng minh BH = AC. Cot ABC

c, Gọi M là trung điểm của BC, đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: MP = MQ.



a, Chứng minh: BH.BD = BC.BK và BH.BD + CH. CE = BC^2

Xét tam giác: tam giác BHK đồng dạng tam giác BCD có:

Góc KBH chung

$\widehat{BKH}=\widehat{BDC}=90°\Rightarrow tam\,giác\,BHK$ đồng dạng tam giác BCD (g.g)

Nên $\frac{BH}{BC}=\frac{BK}{BD}\Rightarrow BH.BD=BC.BK$

Tương tự: tam giác CHK đồng dạng tam giác CBE

Nên $\frac{CH}{BC}=\frac{KC}{CE}\Rightarrow CH.CE=BC.KC$

Cộng vế với vế hai đẳng thức ta được:

BH.BD + CH.CE = BC.BK + BC.KC

Hay BH.BD + CH.CE = BC(BK + KC) = BC^2

b, Chứng minh BH = AC. Cot ABC

Chứng minh: tam giác BEH đồng dạng với tam giác CEA (g.g) $\Rightarrow\frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}$

Xét tam giác BEC vuông tại E suy ra cot ABC = $\frac{BE}{CE}$

$\Rightarrow\frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}=cotABC\Rightarrow BH=AC.\cot ABC$

d, Gọi M là trung điểm của BC, đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: MP = MQ.

Chứng minh: tam giác PAH đồng dạng tam giác AMB (g.g) suy ra $\frac{PA}{AM}=\frac{AH}{MB}$

Chứng minh: tam giác QAH đồng dạng tam giác tam giác MAC (g.g) suy ra $\frac{QA}{AM}=\frac{AH}{MC}$

Do MB = MC (gt) suy ra $\frac{QA}{AM}=\frac{AH}{MC}\Rightarrow PA=QA\Rightarrow\Delta QMP$ cân tại M suy ra MP = MQ

Câu 5. (2,0 điểm)

Trong một buổi gặp mặt có 294 người tham gia, những người tham gia, những người quen nhau bắt tay nhau. Biết nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều mất bao nhiêu cái bắt tay.

Trong 294 người tham gia ta gọi:

a là những người bị giới hạn số lần bắt tay; b là những người không bị giới hạn số lần bắt tay.

Số người không bị giới hạn số lần bắt tay có tối thiểu là 6 nên b $\geq$6.

Số cái bắt tay từ người bị giới hạn số lần bắt tay tối đa là 6a.

Vậy thì từ b cũng phải cho 6a cái bắt tay.

Vậy tổng số cái bắt tay là 6a. Vậy a phải lớn nhất nên b là bé nhất bằng 6.

a+b =294 nên a = 288. Số cái bắt tay nhiều nhất là 6a = 6. 288 = 1728 cái.