

BÀI 13. CÂU TOÁN BƠM NƯỚC

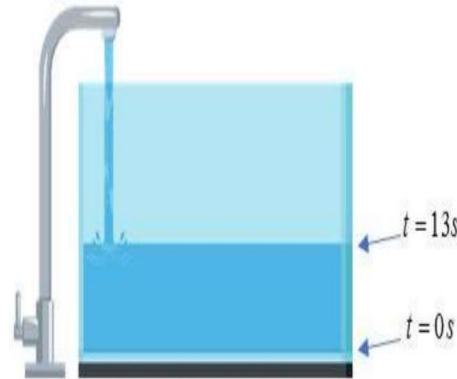
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết: Các kiến thức cơ bản về nguyên hàm của hàm số.

Phương pháp: Sử dụng phương pháp nguyên hàm, tích phân cơ bản để tìm yếu tố chưa biết.

Ví dụ: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một

hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t+1}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có:

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \sqrt[3]{2t+1} dt = \frac{3}{8}(2t+1)\sqrt[3]{2t+1} + C$$

Lúc đầu $t=0$, bể không có nước $\Rightarrow h(0)=0 \Rightarrow C + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow C = -\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{8}(2t+1)\sqrt[3]{2t+1} - \frac{3}{8} \Rightarrow h(13) = 30$$

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

Lời giải

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể x tính bằng giây.

Ta có:
$$\int_0^x \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} dt = \frac{3}{4} \cdot 280 \Rightarrow \frac{3}{4} (t+3)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000$$

$$\Rightarrow (x+3)\sqrt[3]{x+3} - 3\sqrt[3]{3} = 140000$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+3)^4} = 3\sqrt[3]{3} + 140000 \Rightarrow x+3 = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3} - 3 \Rightarrow x \approx 7234,8256$$

Câu 2: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 , sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Lời giải

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$$

Từ (1), (2) . Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 \text{ (m}^3\text{)}$$

Câu 3: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm , t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{3t+8}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 10 giây là bao nhiêu? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \sqrt[3]{3t+8} dt = \frac{1}{4}(3t+8)\sqrt[3]{3t+8} + C$$

Ta có:

$$\text{Lúc đầu } t=0, \text{ bể không có nước} \Rightarrow h(0)=0 \Rightarrow C+4=0 \Rightarrow C=-4$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{4}(3t+8)\sqrt[3]{3t+8} - 4 \Rightarrow h(10) \approx 27,94$$

Câu 4: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m^3 , sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m^3 . Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

Lời giải

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int (3at^2 + bt) dt = a \cdot t^3 + b \cdot \frac{t^2}{2} + C$$

Ta có:

$$h(0)=0 \Leftrightarrow C=0 \Rightarrow h(t) = a \cdot t^3 + b \cdot \frac{t^2}{2}$$

Do ban đầu hồ không có nước nên

$$h(5) = a \cdot 5^3 + b \cdot \frac{5^2}{2} = 150$$

Lúc 5 giây

$$h(10) = a \cdot 10^3 + b \cdot \frac{10^2}{2} = 1100$$

Lúc 10 giây

Suy ra $a=1, b=2 \Rightarrow h(t)=t^3+t^2 \Rightarrow h(20)=20^3+20^2=8400(m^3)$