

CHỦ ĐỀ 2

NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

DẠNG 1

BÀI TOÁN CHO HÀM $f(x)$, TÌM NGUYÊN HÀM CỦA $f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$
- B. $F(x) = \ln|x| + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.
- C. $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$
- D. $F(x) = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

Lại có $F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$. Do đó $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$

Vậy $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

Câu 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

- A. 2. B. 6. C. 8. **D. 4.**

Lời giải

Chọn D.

$F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C; F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$

Khi đó $F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4$

Câu 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2^x + x + 1$. Biết $F(0) = 1$. Tính $F(-1)$ kết quả là.

- A. $F(-1) = \frac{1}{2\ln 2}$ **B. $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2}$**

C. $F(-1) = 1 + \frac{1}{2 \ln 2}$

D. $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}$

Lời giải

Chọn B.

$$F(x) = \int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\ln 2} 2^0 + \frac{1}{2} 0^2 + 0 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + 1 - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow F(-1) = \frac{1}{\ln 2} 2^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln 2}$$

Câu 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Lời giải

Chọn C.

Có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

Câu 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng.

A. 9.

B. 15.

C. 11.

D. 6.

Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + C_1;$$

$$\int (3x^2 - 2) dx = x^3 - 2x + C_2$$

Suy ra
$$F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Mà ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 = 1$.

Khi đó ta có:
$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}.$$

Vậy $F(-1) + 2F(2) = 9$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Lời giải

Chọn D.

Khi $x \geq 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C_1$

Khi $x < 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 + 2) dx = x^3 + 2x + C_2$

Theo giả thiết $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 1$

Vậy $F(-1) + 2F(2) = -3 + C_2 + 2(10 + C_1) = 21$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- A. 18. B. 20. C. 9. D. 24.

Lời giải

Chọn A.

F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Ta có: $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$. (1)

Do F liên tục tại $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$

$$\Leftrightarrow C_1 + 3 = C_2 + 2 \Leftrightarrow C_1 + 3 = 4 \Leftrightarrow C_1 = 1.$$

Do đó $F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Suy ra $F(-1) + 2F(2) = 18$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2024$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = x^2 + e^x + 2023$

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2019$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2024 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2024 \Leftrightarrow C = 2023.$$

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2023$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow F(x) = \int (\sin x + 1) dx = x - \cos x + C$$

Do $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

Vậy nguyên hàm cần tìm là: $F(x) = x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = (5x+3)^5$. Biết $F(1) = 0$. Tính $F(0)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(0) = -\frac{52283}{6}$

$$f(x) = (5x+3)^5$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (5x+3)^5 dx = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{(5 \cdot 1 + 3)^6}{30} + C \Rightarrow C = -\frac{131072}{15}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{(5x+3)^6}{30} - \frac{131072}{15}$$

$$\Rightarrow F(0) = \frac{(5 \cdot 0 + 3)^6}{30} - \frac{131072}{15} = -\frac{52283}{6}$$

Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Biết $F(1) = 3$. Tính $F(0)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3 - 5\cos x$. Biết $F(\pi) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 14. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{3-5x^2}{x}$. Biết $F(e) = 1$. Tính $F(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 15. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Biết $F(1) = \frac{3}{2}$. Tính $F(-1)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 16. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ biết $F(-2) = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 17. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ biết $F(1) = -2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 18. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2025$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 20. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$ biết $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x \geq 1 \\ 3x^2+4, & x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị của $F(-1) + 2F(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(-1) + 2F(2) = 27$

Ta có
$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + C_1 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + C_2 & x < 1 \end{cases}$$

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + 4x + 2$.

Vì $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 6 + C_1 = 7 \Rightarrow C_1 = 1$$

Vậy ta có
$$\begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + 2 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = -3 + 2 \cdot 15 = 27$$

Câu 22. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Ta có $\int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, ta có $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$$

Câu 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 44$

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$$F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Suy ra

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44.$

DẠNG 2**BÀI TOÁN CHO HÀM $f'(x)$, TÌM HÀM $f(x)$**

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

- A. -3 . **B. 1 .** C. 2 . D. 7 .

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x + C_1$.

Mà $f(1) = 3 \Rightarrow 3 = 6 + C_1 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x - 3 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + C_2$.

Lại có: $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.

Khi đó: $F(1) = 1$.

$$F(1) = \int_0^1 f(x)dx + F(0) = \int_0^1 (4x^3 + 2x - 3)dx + 2 = -1 + 2 = 1$$

Cách khác: Ta có:

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$ B. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$
C. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$ D. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(x) = \int (3 - 5\sin x)dx = 3x + 5\cos x + C$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.

Câu 26. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

- A. $y = 2e^x + 2x$. B. $y = 2e^x + 2$. C. $y = e^{2x} + x + 2$. **D. $y = e^{2x} + x + 1$.**

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int f'(x)dx = \int (2e^{2x} + 1)dx = e^{2x} + x + C$.

Suy ra $f(x) = e^{2x} + x + C$.

Theo bài ra ta có: $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy: $f(x) = e^{2x} + x + 1$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$.

B. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.

C. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

D. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2 - 5 \sin x)dx = 2x + 5 \cos x + C$.

Mà $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. 5.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$ (1).

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (2ax - \frac{b}{x^4})dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{3x^3} + C$$

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + C = 2 \quad (2)$$

$$+ f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a + b = 3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \\ C = \frac{11}{6} \end{array} \right. \Rightarrow 2a + b = 2 \cdot 2 + 1 = 5. \end{array}$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình

Câu 29. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$

B. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$

D. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{b}{x} + C$

$$\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + C = 1 \\ \frac{1}{2}a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Theo bài ra

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng

A. $\frac{6\ln 2 - 3}{4}$

B. $\frac{6\ln 2 + 3}{4}$

C. $\frac{8\ln 2 + 3}{4}$

D. $\frac{8\ln 2 - 3}{4}$

Lời giải

Chọn C.

Có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Do $f(-2) = \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = 1 - \ln 2$

Do $f(2) = 2\ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 - \frac{1}{2} + C_2 = 2\ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \ln 2 - 1$

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + 1 - \ln 2 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln 2 - 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Như vậy,

$$f(-1) + f(4) = (2 - \ln 2) + \left(\ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 2 - 1 \right) = \frac{8\ln 2 + 3}{4}.$$

Vậy

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 31. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}, \forall x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$. Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

$$f(x) = 2023x - \sin x + 1$$

Đáp án:

$$f'(x) = 2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \left(2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (2023 + \cos x) dx = 2023x - \sin x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = 2023x - \sin x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2023\pi}{2} = 2023 \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2023x - \sin x + 1$$

Câu 32. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 1 + e^{2x}, \forall x, f(0) = 2$. Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

$$f(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + 1$$

Đáp án:

$$f'(x) = 1 + e^{2x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\Rightarrow f(0) = 1 + C \Leftrightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + 1$$

Câu 33. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2^x + 3^x$, $\forall x, f(0) = \frac{1}{\ln 3}$. Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

$$f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 2}$$

Đáp án:

$$f'(x) = 2^x + 3^x$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 3} \Rightarrow \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 2}$$

Câu 34. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = e^{3x+2024}$, $\forall x, f(-675) = 1$. Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + 1 - \frac{1}{3e}$$

Đáp án:

$$f'(x) = e^{3x+2024}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int e^{3x+2024} dx = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + C$$

$$f(-675) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{3} e^{3(-675)+2024} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{3e}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + 1 - \frac{1}{3e}$$

Câu 35. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$, $\forall x, f(0) = \frac{1}{2 \ln 2}$. Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

$$f(x) = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{18}{2 \ln 2 + \ln 3}$$

Đáp án:

$$f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = 18 \int 2^x dx = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{2 \ln 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \ln 2} = 18 \frac{1}{\ln 12} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{18}{2 \ln 2 + \ln 3}$$

$$\Rightarrow f(x) = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{18}{2 \ln 2 + \ln 3}$$

Câu 36. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = (3^x + 5^x)^2$, $\forall x, f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$.

Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

$$f(x) = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} - \frac{1}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 5}$$

Đáp án:

$$f'(x) = (3^x + 5^x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (3^x + 5^x)^2 dx = \int (9^x + 30^x + 25^x) dx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{30^x}{\ln 30} + \frac{25^x}{\ln 25} + C$$

$$= \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} = \frac{1}{2 \ln 3} + \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 5} + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} - \frac{1}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 5}$$