

Trắc nghiệm 4 đáp án (Ứng dụng đạo hàm giải bài toán thực tế)

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là:

- A. $-9m/s^2$. B. $9m/s^2$. C. $-12m/s^2$. *D. $12m/s^2$

Lời giảiTa có: $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = S' = 3t^2 - 6t - 9 \\ a = S'' = 6t - 6 \end{cases}$$

$$v = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 < 0 \\ t = 3 (tm) \end{cases}$$

Khi vận tốc bị triệt tiêu tức

Khi đó gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là $a = 6.3 - 6 = 12 (m/s^2)$.

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- *A. $89(m/s)$. B. $71(m/s)$. C. $109(m/s)$. D. $\frac{25}{3}(m/s)$.

Lời giải

$$s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t \Rightarrow v = t^2 - 2t + 9$$

Vì

Xét hàm $f(t) = t^2 - 2t + 9 \Rightarrow f'(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$

BBT của hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 9$

t	0	1	10
$f'(t)$		0	
$f(t)$	9	8	89

Dựa vào BBT ta thấy: $\max_{[0;10]} f(t) = f(10) = 89$

Vậy vận tốc của vật đạt được lớn nhất bằng $89(m/s)$.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3 (m)$. Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- *A. $t = 2$. B. $t = 0,5$. C. $t = 2,5$. D. $t = 1$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2 - t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	2		
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	↗ 2 ↘		

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Câu 4. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 289 (m/s) *B. 105 (m/s) C. 111 (m/s) D. 487 (m/s)

Lời giải

Ta có $v(t) = s' = -6t^2 + 48t + 9$

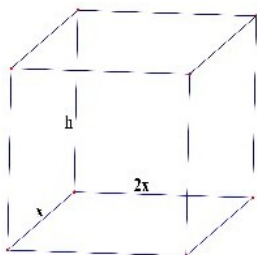
Xét hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9, t \in [0; 10]$.

Ta có $v'(t) = -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (Nhận). Ta có
$$\begin{cases} v(0) = 9 \\ v(4) = 105 \\ v(10) = -111 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0; 10]} v(t) = v(4) = 105$$

Câu 5. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 10 m^3 . Thùng tôn là hình hộp chữ nhật có chiều dài đáy bằng hai lần chiều rộng và không có nắp. Trên thị trường giá tôn làm đáy thùng là $75.000 / \text{m}^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $55.000 / \text{m}^2$. Tính chi phí thấp nhất để làm thùng đựng gạo. (Làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 1.418.000 đồng. B. 1.403.000 đồng. *C. 1.402.000 đồng. D. 1.417.000 đồng.

Lời giải



Gọi x là chiều rộng của đáy thùng, $x > 0$, đơn vị m .

$\Rightarrow$ chiều dài của đáy thùng là: $2x$.

Ta có $V = x \cdot 2x \cdot h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2}$.

Chi phí làm đáy thùng là: $2x^2 \cdot 75 = 150x^2$ (đơn vị nghìn đồng).

Chi phí làm diện tích xung quanh là: $\left(2x \cdot \frac{5}{x^2} + 2 \cdot 2x \cdot \frac{5}{x^2} \right) \cdot 55 = \frac{1650}{x}$ (đơn vị nghìn đồng).

$\Rightarrow$ Chi phí làm thùng là: $T = 150x^2 + \frac{1650}{x}$ (đơn vị nghìn đồng).

Xét hàm số $T = 150x^2 + \frac{1650}{x}$, với $x > 0$.

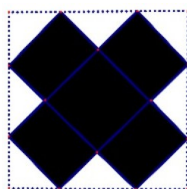
Ta có $T'(x) = 300x - \frac{1650}{x^2}$; $T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$.
 Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên $T(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$.

$$T = 150\sqrt[3]{\frac{11}{2}} + \frac{1650}{\sqrt[3]{\frac{11}{2}}} = 1.402.127$$

Vậy chi phí ít nhất bằng đồng.

Câu 6. Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



*A. $8\sqrt{2}$.

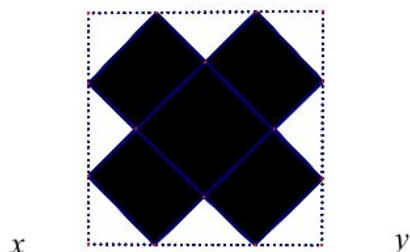
B. $10\sqrt{2}$.

C. $9\sqrt{2}$.

D. $11\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ



Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2} - x$ với $0 < x < 3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối hộp tạo thành là $V = x^2y = x^2(3\sqrt{2} - x)$.

Ta có $V' = 3x(2\sqrt{2} - x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
V'		-	+
V		$8\sqrt{2}$	

Vậy: $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.

Câu 7. Ông A dự định sử dụng hết $5,5 m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?:

*A. $1,17 \text{ m}^3$

B. $1,01 \text{ m}^3$

C. $1,51 \text{ m}^3$

D. $1,40 \text{ m}^3$

Lời giải

Gọi $x, 2x, h$ lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể cá.

Ta có $2x^2 + 2(xh + 2xh) = 5,5 \Leftrightarrow h = \frac{5,5 - 2x^2}{6x}$ (Điều kiện $0 < x < \sqrt{\frac{5,5}{2}}$).

Thể tích bể cá $V = 2x^2 \cdot \frac{5,5 - 2x^2}{6x} = \frac{1}{3}(5,5x - 2x^3)$

$V' = \frac{1}{3}(5,5 - 6x^2)$ $V' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5,5}{6}}$

Lập BBT suy ra $V_{\max} = \frac{11\sqrt{33}}{54} \approx 1,17 \text{ m}^3$

Câu 8. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 216 (m/s)

B. 30 (m/s)

C. 400 (m/s)

*D. 54 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có: $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s) .

Câu 9. Trong một chuyển động thẳng, chất điểm chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 10$, trong đó thời gian t tính bằng giây và quãng đường s tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm chất điểm dừng lại là

A. -6 m/s^2

*B. 0 m/s^2

C. 12 m/s^2

D. 10 m/s^2

Lời giải

Chọn B

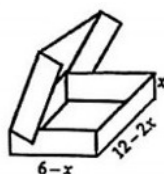
Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 3$

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm t là $g(t) = v'(t) = 6t - 6$

Tại thời điểm chất điểm dừng lại thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Khi đó gia tốc là $g(1) = 0 \text{ m/s}^2$

Câu 10. Một hộp đựng Chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được rải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị V_0 bằng



A. 64 (đvtt).

B. $\frac{64}{3}$ (đvtt).

C. 16(đvtt).

*D. 48 (đvtt).

Lời giảiĐiều kiện: $0 < x < 6$.Thể tích của hộp kim loại là: $V(x) = (6-x)(12-2x)x = 2x^3 - 24x^2 + 72x$ (đvtt).

$$V'(x) = 6x^2 - 48x + 72, 0 < x < 6$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

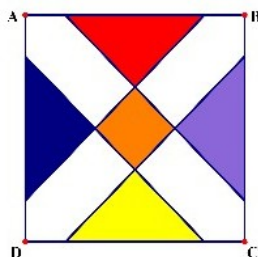
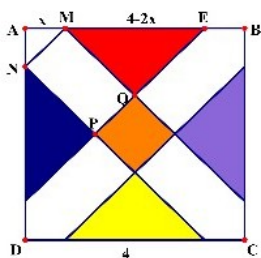
Bảng biến thiên:

x	0	2	6
$V'(x)$		+	-
$V(x)$		↗ 64 ↘	

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích hộp kim loại lớn nhất khi và chỉ khi $x = 2$.

$$V_0 = \frac{3}{4}V(2) = \frac{3}{4} \cdot 64 = 48 \text{ (đvtt).}$$

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{19}{3}$.B. $\frac{17}{3}$.*C. $\frac{16}{3}$.D. $\frac{14}{3}$.**Lời giải**Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$$2MQ^2 = (4 - 2x)^2$$

$$\Leftrightarrow MQ^2 = 2(2 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow MQ = \sqrt{2(2 - x)^2}$$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16$$

$$S' = 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{3}$	4
S'	-	0	+
S		$\frac{16}{3}$	

Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$

Câu 12. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

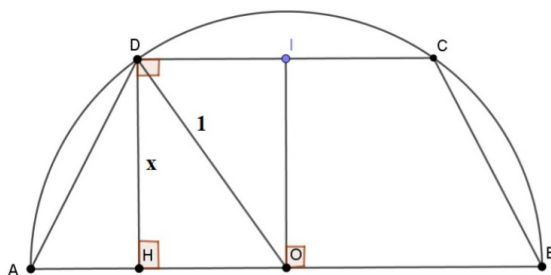
*B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB , I là trung điểm của đoạn CD và O là trung điểm của AB .

Đặt $DH = x$, $0 < x < 1$. Ta có $DC = 2DI = 2OH = 2\sqrt{OD^2 - DH^2} = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = f(x) = \frac{(AB + CD)DH}{2} = (1 + \sqrt{1 - x^2})x$.

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2 = 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{1 - x^2}$, (điều kiện $t \geq 0$) khi đó phương trình (*) trở thành $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

$t = -1$ loại. $t = \frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

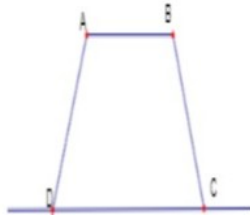
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

$\nearrow \frac{3\sqrt{3}}{4} \searrow 1$

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



A. $100\sqrt{3}$.

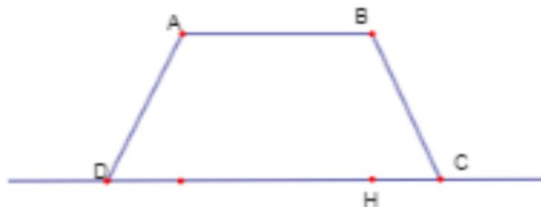
B. $106\sqrt{3}$.

*C. $108\sqrt{3}$.

D. $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường cao BH , gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x \in (0^\circ; 90^\circ)$.
Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \frac{1}{2} BH (AB + CD) = \frac{1}{2} BC \cdot \sin x (2 \cdot AB + 2 BC \cdot \cos x) = \frac{1}{2} AB^2 (2 \sin x + \sin 2x)$$

Xét hàm số $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ với $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ có $f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

Ta có:

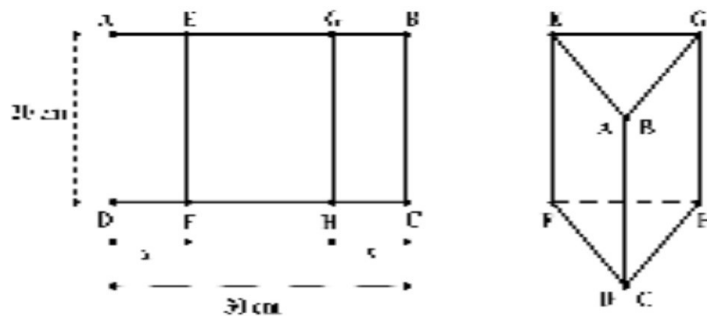
Do $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ nên ta nhận $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60^\circ$. Ta có bảng biến thiên:

x	0°	60°	90°
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\underset{(0^\circ; 90^\circ)}{\text{Max}} f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x = 60^\circ$.

$\Rightarrow \text{Max} S = 108\sqrt{3} (m^2)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60° ($\angle C = \angle D = 60^\circ$).

Câu 14. Một tấm kẽm hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 30 \text{ cm}$; $BC = 20 \text{ cm}$. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:



*A. $x=10$ (cm)

B. $x=9$ (cm)

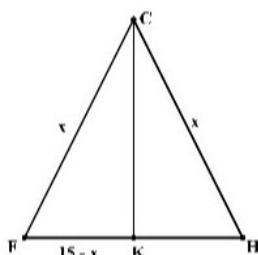
C. $x=8$ (cm)

D. $x=5$ (cm)

Lời giải

Chọn A

Có $FH = 30 - 2x$. Để tồn tại tam giác FCH thì $\begin{cases} x + x > 30 - 2x \\ x + (30 - 2x) > x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{15}{2} < x < 15$
Gọi K là trung điểm FH .



Xét tam giác CFK vuông tại K ta có: $CK = \sqrt{CF^2 - FK^2} = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} = \sqrt{30x - 225}$

Diện tích tam giác CFH là $S_{CFH} = \frac{1}{2}FH \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot (30 - 2x) \cdot \sqrt{30x - 225} = (15 - x) \cdot \sqrt{30x - 225}$

Khi gấp tấm kẽm ta được lăng trụ đứng có chiều cao cố định bằng 20 cm nên thể tích của nó lớn nhất khi diện tích đáy S_{CFH} lớn nhất.

Xét hàm số $S(x) = (15 - x) \cdot \sqrt{30x - 225}$ trên khoảng $\left(\frac{15}{2}; 15\right)$.

Có $S'(x) = -\sqrt{30x - 225} + (15 - x) \cdot \frac{30}{2\sqrt{30x - 225}} = \frac{450 - 45x}{\sqrt{30x - 225}}$. Để thấy $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{15}{2}$	10
$S'(x)$		0
$S(x)$		$25\sqrt{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{\left(\frac{15}{2}; 15\right)} S(x) = 25\sqrt{3}$ khi $x = 10$.

Vậy thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$ (cm).

Câu 15. Một chất điểm chuyển động với quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) tại vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 12.

B. 24.

*C. 2.

D. 6.

Lời giải

Ta có $s(t) = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$

$\Rightarrow v'(t) = 12 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$		12	

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t = 2$.

Câu 16. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

A. $x = 15(mg)$

B. $x = 20(mg)$

*C. $x = 20(mg)$

D. $x = 25(mg)$

Lời giải

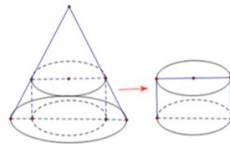
$G'(x) = 1,5x - 0,075x^2$

$G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$

x	0	20	30
$G'(x)$		+	-
$G(x)$	0	$G_{\max}$	0

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $x = 20(mg)$

Câu 17. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2m$, chiều cao $h = 6m$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Giá trị của V là:



A. $V = \frac{32}{9}\pi(m^3)$

*B. $V = \frac{32}{3}\pi(m^3)$

C. $V = \frac{32}{27}\pi(m^3)$

D. $V = \frac{32}{5}\pi(m^3)$

Lời giải

Gọi r_t , h_t lần lượt là bán kính và chiều cao của khối trụ.

Ta có: $\frac{r_t}{2} = \frac{6 - h_t}{6} \Rightarrow 2(6 - h_t) = 6r_t \Leftrightarrow h_t = 6 - 3r_t$

Ta lại có: $V = \pi r_t^2 \cdot h_t = \pi r_t^2 (6 - 3r_t) = \pi(6r_t^2 - 3r_t^3)$

Xét hàm số $f(r_t) = 6r_t^2 - 3r_t^3$, với $r_t \in (0; 2)$ có $f'(r_t) = 12r_t - 9r_t^2$;

$f'(r_t) = 0 \Leftrightarrow r_t = \frac{4}{3}$

Bảng biến thiên:

r_t	0	$\frac{4}{3}$	2
$f'(r_t)$		+	-
$f(r_t)$	0	$\frac{32}{9}$	0

Dựa vào BBT ta có $\max f(r_i) = \frac{32}{9}$ đạt tại $r_i = \frac{4}{3}$.

Vậy $V = \frac{32}{9}\pi$.

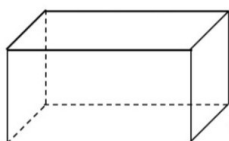
Cách 2: $V = \pi r_i^2 \cdot h_i = \pi r_i^2 (6 - 3r_i) = 12\pi \frac{r_i}{2} \frac{r_i}{2} (2 - r_i)$. Áp dụng BĐT Co-si, V max khi

$$\frac{r_i}{2} = 2 - r_i \Leftrightarrow r_i = \frac{4}{3}.$$

Câu 18. Ông A dự định sử dụng hết 8 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- *A. 2.05 m^3 . B. 1.02 m^3 . C. 1.45 m^3 . D. 0.73 m^3 .

Lời giải



Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể lần lượt là $x, 2x, y (x, y > 0)$.

Diện tích phần lắp kính là

$$2x \cdot x + 2xy + 2 \cdot 2x \cdot y = 2x^2 + 6xy = 8 \Leftrightarrow xy = \frac{8 - 2x^2}{6} > 0 \Rightarrow x < \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Thể tích bể cá là: $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x \cdot \frac{8 - 2x^2}{6} = \frac{-4x^3 + 16x}{6}$ với $0 < x < 2$

$$V' = \frac{-12x^2 + 16}{6}, V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}} (L) \end{cases}$$

Ta có:

x	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
V'		+	-
V			

$$\Rightarrow V_{\max} = V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2,05 \text{ m}^3$$

Câu 19. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 30,54cm. *B. 33,61cm. C. 40,62cm. D. 26,43cm

Lời giải

Gọi $x (0 < x < 60)$ là chiều dài của đoạn thứ hai, suy ra $60 - x$ là độ dài đoạn thứ nhất.

Khi đó cạnh hình vuông là $15 - \frac{x}{4}$ nên diện tích hình vuông là $\left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Chu vi của vòng tròn là $2\pi R = x \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$. Khi đó diện tích hình tròn là $\pi R^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$$

Khi đó tổng diện tích của hai hình sẽ là

$$f'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \left(15 - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right) - \frac{15}{2}$$

Khi đó ta có

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}}$$

Cho

$$x = \frac{60\pi}{4 + \pi}$$

Khi đó cạnh hình vuông sẽ là

$$60 - \frac{60\pi}{4 + \pi} \approx 33,61$$

Câu 20. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số

$P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố.

B. Sau 0,5 giờ.

C. Sau 2 giờ.

*D. Sau 1 giờ.

Lời giải

$$P'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2 + t + 4)^2} = \frac{(t-1)(-t-3)}{(t^2 + t + 4)^2}$$

• Xét

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = 1$ và $P'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty)$ nên sau $1(h)$ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 21. Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m.

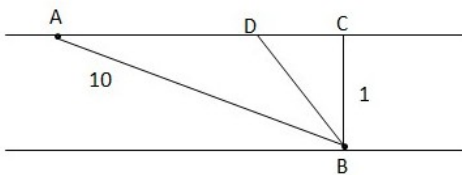
A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$

B. $75\sqrt{3}$

C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$

*D. $75\sqrt{2}$

Lời giải



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sĩ, BD là đường bơi của chiến sĩ.

Chọn 1 đơn vị độ dài là 100m, suy ra $BC=1$; $AB=10$; $AC=3\sqrt{11}$

Gọi vận tốc bơi của chiến sĩ là 1 đơn vị vận tốc, thì vận tốc chạy của chiến sĩ là 3 đơn vị vận tốc.

Gọi x là quãng đường chiến sĩ bơi suy ra $BD=x$; Vậy quãng đường chiến sĩ chạy là

$$AD = AC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$t = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}}{3} + \frac{x}{1} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$$

Thời gian chiến sĩ đến được mục tiêu là:

$$f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$$

Xét hàm

có

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} (TM) \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} (L) \end{cases}$$

BBT

x	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 100 = 75\sqrt{2} (m)$.

Câu 22. Ông X muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72 m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng $/\text{m}^2$, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng $/\text{m}^2$, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng $/\text{m}^2$. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}} (m)$ *B. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} (m)$ C. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} (m)$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{\pi}} (m)$

Lời giải

Gọi $x (m)$, ($x > 0$) là bán kính đáy của bình chứa hình trụ.

Khi đó tổng số tiền phải trả là : $14 \cdot 10^4 \pi x^2 + 10^5 \pi x^2 + \frac{144 \cdot 9 \cdot 10^4}{x}$

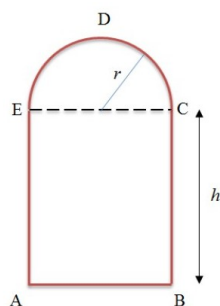
Đặt $f(x) = 14 \cdot 10^4 \pi x^2 + 10^5 \pi x^2 + \frac{144 \cdot 9 \cdot 10^4}{x}$

Suy ra : $f'(x) = 48 \cdot 10^4 \pi x - \frac{1296 \cdot 10^4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 48 \cdot 10^4 \pi x - \frac{1296 \cdot 10^4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$

Vậy để chi phí xây dựng là thấp nhất thì bán kính đáy bằng $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Câu 23. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ.



Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r (theo m) để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.

- A. 1. B. 0,5. *C. $\frac{4}{\pi + 4}$ D. $\frac{2}{\pi + 4}$

Lời giải

• Ta có $2(h+r) + \pi r = 4 \Rightarrow h = \frac{4 - 2r - \pi r}{2}$

• Diện tích của khung cửa là $S = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r \left(\frac{4 - 2r - \pi r}{2} \right) = -\frac{\pi+4}{2}r^2 + 4r$

• Ta có $h = \frac{4 - 2r - \pi r}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 < r < \frac{4}{\pi+2}$

• Xét hàm số $S(r) = -\frac{\pi+4}{2}r^2 + 4r$ trên $\left(0; \frac{4}{\pi+2}\right)$

$S'(r) = -(\pi+4)r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{\pi+4}$	$\frac{4}{\pi+2}$
S'		+	0
S			-

$\Rightarrow S(r)$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}$

Câu 24. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

*A. 20.

B. 10.

C. 1200.

D. 1100.

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$)

$N'(t) = 60t - 3t^2$

$N'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20 \end{cases}$

t	0	20	30
N'		+	0
N			-

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

Câu 25. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng

A. 12(s)

B. 6(s)

C. 4(s)

*D. 2(s)

Lời giải

Ta có $v = S' = 12t - 3t^2$ suy ra $v' = 12 - 6t$ nên $v' = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
v'		+	0
v			-

Do vậy $v_{\max} = 12 (m/s)$ tại $t = 2 (s)$.

Câu 26. Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,01m^3$. *B. $1,17m^3$. C. $1,51m^3$. D. $1,40m^3$.

Lời giải

Gọi $x, 2x, y (x, y > 0)$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá

Theo giả thiết ta có: $2.2xy + 2.xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow y = \frac{5,5 - 2x^2}{6x}$

Thể tích bể cá là: $V(x) = 2x^2y = 2x^2 \cdot \frac{5,5 - 2x^2}{6x} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$

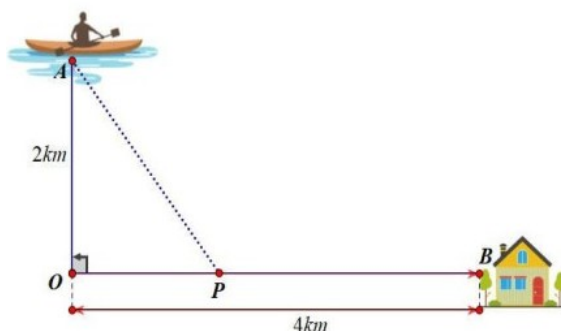
Khảo sát hàm số $V(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$$V'(x) = -2x^2 + \frac{11}{6}; \quad V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$V\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right) = 1,17m^3.$$

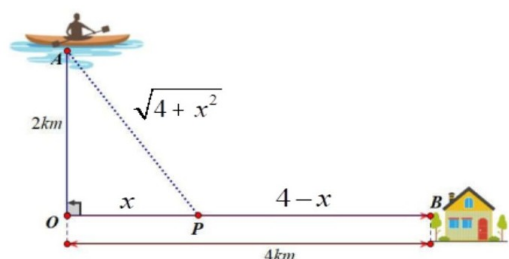
Thể tích lớn nhất của bể cá là

Câu 27. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



- *A. 40 phút. B. 44 phút. C. 30 phút. D. 38 phút.

Lời giải



Đặt $OP = x (0 < x < 4) \Rightarrow BP = 4 - x; AP = \sqrt{4 + x^2}$

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} (h). \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

BBT:

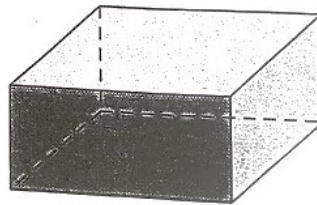
x	0	$\frac{3}{2}$	4
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$			

$\swarrow$ $\frac{2}{3}$ $\searrow$

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{\min} = \frac{2}{3}(h) = \frac{2}{3} \cdot 60(\text{phút}) = 40 \text{ phút}.$$

Câu 28. Một người thợ gò làm một cái hòm dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng độ dài đường chéo hình hộp bằng $3\sqrt{2}dm$ và chỉ được sử dụng vừa đủ $18dm^2$ tôn. Với yêu cầu như trên người thợ có thể làm được cái hòm có thể tích lớn nhất bằng



A. $8dm^3$.

B. $2\sqrt{2}dm^3$.

C. $6dm^3$.

*D. $4dm^3$.

Lời giải

Gọi a, b, c ($a > 0, b > 0, c > 0$) là 3 kích thước của hình hộp chữ nhật. Không mất tính tổng quát $0 < c \leq b \leq a$.

Theo bài ra $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 18(1).$

Diện tích toàn phần của khối hộp là $2ab + 2bc + 2ca = 18(2).$

Từ (1), (2) ta có $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 36 \Rightarrow a + b + c = 6(3).$

Từ (3), (2) ta có: $ab + c(6 - c) = 9 \Rightarrow ab = 9 + c^2 - 6c.$

Thể tích của cái hòm $V = abc = (c^2 - 6c + 9)c = c^3 - 6c^2 + 9c, (0 < c < \sqrt{6}).$

Đặt $h(c) = c^3 - 6c^2 + 9c \Rightarrow h'(c) = 3c^2 - 12c + 9 \Rightarrow h'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

c	0	1	$\sqrt{6}$
$h'(c)$		$\begin{matrix} + & 0 & - \end{matrix}$	0
$h(c)$		$\begin{matrix} & \nearrow & \nwarrow \\ 0 & 4 & -36+15\sqrt{6} \end{matrix}$	

Thể tích lớn nhất bằng $4dm^3$ khi $c = 1, a = 4, b = 1.$

Câu 29. Bạn A có một đoạn dây dài $20m$, bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều, phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất.

A. $\frac{120}{9 + 4\sqrt{3}}m$.

B. $\frac{60}{9 + 4\sqrt{3}}m$.

*C. $\frac{180}{9 + 4\sqrt{3}}m$.

D. $\frac{40}{9 + 4\sqrt{3}}m$.

Lời giải

Giả sử độ dài của đoạn dây là $AB = 20m$. Đoạn dây được chia thành hai phần

+) Phần thứ nhất là $AM = x$, (với $0 < x < 20$) được uốn thành một tam giác đều có cạnh là $\frac{x}{3}m$

$\Rightarrow$ Diện tích của tam giác là $\frac{\sqrt{3}}{36}x^2$.

+) Phần thứ hai là $BM = 20 - x$ được uốn thành hình vuông có cạnh là $\frac{20 - x}{4}m$

$\Rightarrow$ Diện tích của hình vuông là $\frac{(20 - x)^2}{16}$.

$\Rightarrow$ Tổng diện tích của hai hình là $\frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(20 - x)^2}{16}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(20 - x)^2}{16}$ (với $0 < x < 20$)

Ta có $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8}\right)x - \frac{5}{2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{180}{4\sqrt{3} + 9}$

BBT

x	0	$\frac{180}{4\sqrt{3} + 9}$	20
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Từ BBT suy ra hàm số đạt GTNN khi $x = \frac{180}{4\sqrt{3} + 9}$.

Câu 30. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

A. 18 USD/người.

B. 19 USD/người.

*C. 14 USD/người.

D. 25 USD/người.

Lời giải

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x$ ($x + 20 > 0$)

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập $f(x) = (20 + x \cdot 1 + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$

Bảng biến thiên

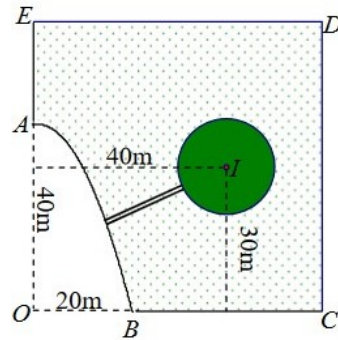
x	-20	-6	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f(-6)$	

$\max_{(-20; +\infty)} f(x) = f(-6)$

.Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD

Câu 31. Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10m. Người ta muốn bắc một cầu cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40m và 30m.



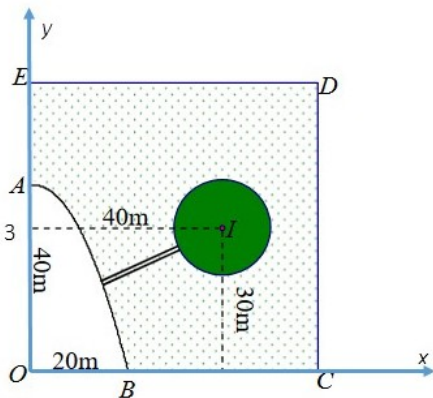
*A. $l \approx 17,7$ m.

B. $l \approx 25,7$ m.

C. $l \approx 27,7$ m.

D. $l \approx 15,7$ m.

Lời giải



Gán trục tọa độ Oxy sao cho $\begin{cases} A \in Oy \\ B \in Ox \end{cases}$ cho đơn vị là 10m.

Khi đó mảnh vườn hình tròn có phương trình $(C): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$ có tâm $I(4; 3)$

Bờ AB là một phần của Parabol $(P): y = 4 - x^2$ ứng với $x \in [0; 2]$

Vậy bài toán trở thành tìm MN nhỏ nhất với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (C) \end{cases}$.

Đặt trường hợp khi đã xác định được điểm N thì $MN + MI \geq IM$, vậy MN nhỏ nhất khi $MN + MI = IM \Leftrightarrow N; M; I$ thẳng hàng.

Bây giờ, ta sẽ xác định điểm N để IN nhỏ nhất

$$N \in (P) \Leftrightarrow N(x; 4 - x^2) \quad IN = \sqrt{(4 - x)^2 + (1 - x^2)^2} \Leftrightarrow IN^2 = (4 - x)^2 + (1 - x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow IN^2 = x^4 - x^2 - 8x + 17$$

$$\text{Xét } f(x) = x^4 - x^2 - 8x + 17 \text{ trên } [0; 2] \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x - 8$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,3917 \text{ là nghiệm duy nhất và } 1,3917 \in [0; 2]$$

Ta có $f(1,3917) = 7,68$; $f(0) = 17$; $f(2) = 13$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0; 2]$ gần bằng 7,68 khi $x \approx 1,3917$

Vậy $\min IN \approx \sqrt{7,68} \approx 2,77 \Leftrightarrow IN = 27,7 \text{ m} \Leftrightarrow MN = IN - IM = 27,7 - 10 = 17,7 \text{ m}$.

Câu 32. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m , bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất ?

A. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}$

B. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}$

C. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}$

*D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}$

Lời giải



Gọi $x \text{ (m)}$ là cạnh của tam giác đều, $\left(0 < x < \frac{20}{3}\right)$.

Suy ra cạnh hình vuông là $\frac{20-3x}{4} \text{ (m)}$.

Gọi S là tổng diện tích của hai hình.

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{20-3x}{4}\right)^2$$

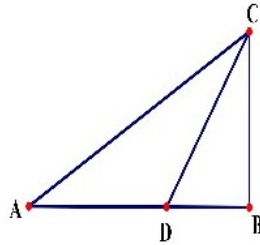
Ta có : $S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$.

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên, S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}} \text{ m}$.

Câu 33. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km , khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km . Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km , đi đường bộ là 3 USD/km . Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40 \text{ km}$, $BC = 10 \text{ km}$)



- A. 10 km *B. $\frac{65}{2}$ km C. 40 km D. $\frac{15}{2}$ km

Lời giải

Đặt $AD = x \text{ km}$, $x \in [0; 40] \Rightarrow BD = 40 - x \Rightarrow CD = \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2}$

Tổng kinh phí đi từ A đến C là $f(x) = x \cdot 3 + \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} \cdot 5$

$$f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}$$

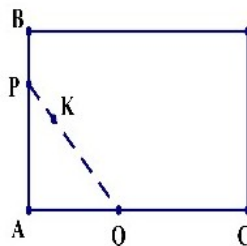
$$f'(x) = 3 + 5 \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{65}{2}$$

Bảng biến thiên

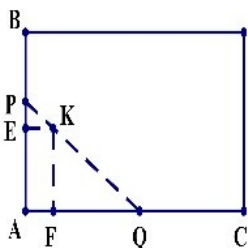
x	0	$\frac{65}{2}$	40
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Câu 34. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



- A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$ *B. $5\sqrt{5}$ C. $9\sqrt{2}$ D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$

Lời giải



Đặt $AP = a$; $AQ = b$ ($a, b > 0$).

Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC . Suy ra $KE=1, KF=8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}, \frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ} \Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1$ hay là $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

(Hoặc có thể dùng phép tọa độ hóa: Gán $A=(0;0), P=(0;a), Q=(b;0)$. Khi đó $K=(1;8)$.

Phương trình đường thẳng $PQ: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. Vì PQ đi qua K nên $\frac{1}{b} + \frac{8}{a} = 1$.)

Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-8}$ với $a > 8$. Khi đó $PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Xét hàm số $f(a) = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Ta có $f'(a) = 2a + \frac{2a}{a-8} \cdot \frac{-8}{(a-8)^2} = \frac{2a[(a-8)^3 - 8]}{(a-8)^3}$; $f'(a) = 0 \Rightarrow a = 10$.

BBT của $f(a)$:

a	8	10	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$+\infty$	125	$+\infty$

Vậy GTNN của $f(a)$ là 125 khi $a = 10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Câu 35. Một người bán buôn Thanh Long Đỗ ở Lập Thạch – Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 nghìn /kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 nghìn /kg thì khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 nghìn /kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 nghìn /kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 16000 nghìn /kg. B. 24000 nghìn /kg. *C. 22000 nghìn /kg. D. 12000 nghìn /kg.

Lời giải

Gọi $2000x$ nghìn /kg là mức giá thay đổi tăng hoặc giảm so với giá bán bình quân.

Giá bán sau khi thay đổi là $20000 + 2000x$ nghìn /kg.

Số lượng người mua sau khi thay đổi giá là $90 - x$.

Khối lượng khách mua trung bình sau khi giảm giá là $60 - 5x$ kg.

Số tiền thuế phải nộp sau khi thay đổi giá: $2200(90 - x)(60 - 5x)$.

Số tiền thu được sau khi thay đổi giá là $T(x) = (90 - x)(60 - 5x)(20000 + 2000x) - 2200(90 - x)(60 - 5x)$
 $= (17800 + 2000x)(90 - x)(60 - 5x) = (10x^3 - 931x^2 + 1722x + 96120) \cdot 1000$.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq 90 \\ x \leq 12 \\ x \geq 8,9 \Leftrightarrow 8,9 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

Ta có $T'(x) = (30x^2 - 1862x + 1722) \cdot 1000$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 931x + 861 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \approx 0,94 (N) \\ x \approx 61,13 (L) \end{cases}$$

$$T\left(\frac{89}{10}\right) = T(12) = 0 \quad T(0,94) = 96924000$$

Do đó $x \approx 1$ thì lợi nhuận cao nhất.

Do đó giá bán tốt nhất là 22000 nghìn /kg.

Câu 36. Ông A dự định sử dụng hết $6,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

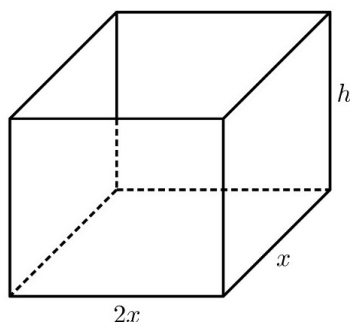
A. $2,26 \text{ m}^3$

B. $1,61 \text{ m}^3$

C. $1,33 \text{ m}^3$

***D. $1,50 \text{ m}^3$**

Lời giải



Giả sử bể cá có kích thước như hình vẽ.

$$\text{Ta có: } 2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \frac{6,5 - 2x^2}{6x}$$

$$\text{Do } h > 0, x > 0 \text{ nên } 6,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Lại có } V = 2x^2h = \frac{6,5x - 2x^3}{3} = f(x), \text{ với } x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{13}{6} - 2x^2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{39}}{6}$$

x	0	$\frac{\sqrt{39}}{6}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
f'	+	0	-
f		$\frac{13\sqrt{39}}{54}$	

$$V \leq f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 \text{ m}^3$$

Vậy

Câu 37. Ông A dự định sử dụng hết $6,7 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

*A. $1,57m^3$.

B. $1,11m^3$.

C. $1,23m^3$.

D. $2,48m^3$.

Lời giải

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h = \frac{6,7 - 2x^2}{6x}$,

ta có $h > 0$ nên $x < \sqrt{\frac{6,7}{2}}$.

Thể tích bể cá là $V(x) = \frac{6,7x - 2x^3}{3}$ và $V'(x) = \frac{6,7 - 6x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$	$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$
y'		+	-
y	0	$1,57m^3$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57m^3$.

Câu 38. Một đoạn dây thép dài $150cm$ được uốn thành khung có dạng như hình vẽ.

$A \quad F \quad A \quad C \quad D \quad E \quad 5x \quad 5x \quad 6x$

Khi x thay đổi, tìm x để diện tích hình phẳng thu được đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{25}{4+\pi}cm$

B. $\frac{100}{4+\pi}cm$

C. $\frac{10}{4+\pi}cm$

*D. $\frac{50}{4+\pi}cm$

Lời giải

Đặt $CD = y$.

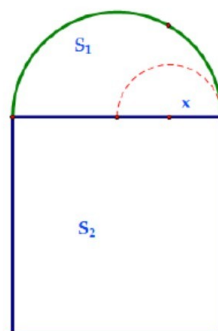
Ta có $10x + 2y + \pi \cdot 3x = 150 \Rightarrow 2y = 150 - 10x + 3\pi x$

$$S = S_{ABC} + S_{BCDF} + S_{DFE} = 12x^2 + 6xy + \frac{\pi 9x^2}{2} = 12x^2 + 3x(150 - 10x + 3\pi x) + \frac{9\pi x^2}{2} = f(x)$$

$$f'(x) = 450 - (36 + 9\pi)x = 0 \Rightarrow x = \frac{50}{4 + \pi}cm$$

Vậy diện tích hình phẳng thu được đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{50}{4 + \pi}cm$.

Câu 39. Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a mét (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi đường kính của hình bán nguyệt). Gọi d là đường kính của hình bán nguyệt. Hãy xác định d để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



A. $d = \frac{a}{2 + \pi}$.

B. $d = \frac{a}{4 + \pi}$.

C. $d = \frac{2a}{2 + \pi}$.

*D. $d = \frac{2a}{4 + \pi}$.

Lời giải

Chu vi của hình bán nguyệt (không tính đường kính) là $\frac{d\pi}{2}$ (m).

Chu vi hình chữ nhật là: $a - \frac{d\pi}{2} + d$ (m).

Hình chữ nhật có kích thước là d , kích thước còn lại là $\frac{a - \frac{d\pi}{2} + d}{2} - d = \frac{a - \frac{d\pi}{2} + d - 2d}{2} = \frac{a - \frac{d\pi}{2} - d}{2}$

Diện tích hình chữ nhật là $d \cdot \frac{a - \frac{d\pi}{2} - d}{2} = \frac{1}{2} \left(ad - \frac{d^2\pi}{2} - d^2 \right) (m^2)$

Diện tích hình bán nguyệt là $\frac{\pi \cdot (d/2)^2}{2} = \pi \cdot \frac{d^2}{8} (m^2)$

Tổng diện tích cửa sổ là $\frac{1}{2} \left(ad - \frac{d^2\pi}{2} - d^2 \right) + \frac{\pi d^2}{8} = \frac{ad}{2} - \frac{d^2\pi}{4} - \frac{d^2}{2} + \frac{\pi d^2}{8} = \frac{ad}{2} - \frac{\pi d^2}{8} - \frac{d^2}{2} (m^2)$

Xét hàm $y = \frac{ad}{2} - \frac{\pi d^2}{8} - \frac{d^2}{2}$

có $y' = \frac{a}{2} - \frac{\pi d}{4} - d$ và $y' = 0 \Leftrightarrow d = \frac{2a}{4 + \pi}$

Lập BBT ta thấy y min $\Leftrightarrow d = \frac{2a}{4 + \pi}$.

Câu 40. Bác Tôm có một cái ao có diện tích $50m^2$ để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ $20\text{con}/m^2$ và thu được tất cả 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi $8\text{con}/m^2$ thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5\text{kg}$. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

- *A. 1100 con. B. 1000 con. C. 500 con. D. 502 con.

Lời giải

Số cá vụ vừa rồi Bác Tôm nuôi là $20 \cdot 50 = 1000$ con.

Vậy trọng lượng mỗi con là 1,5 kg.

Gọi số cá giảm là $8x$ con.

Trọng lượng thu được của vụ tới là: $(1000 - 400x)(1,5 + 0,5x) = -200x^2 - 100x + 1500$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{4}$.

Vậy số cá giống ban đầu là 1100 con.

Câu 41. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, tiền chi phí xây bể là $500.000\text{đồng}/m^2$. Xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí sẽ thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để xây bể là bao nhiêu?

- A. 168 triệu đồng. B. 54 triệu đồng. *C. 108 triệu đồng. D. 90 triệu đồng.

Lời giải

A B B' A' C D D' C' 2x x h

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là $x, (x > 0)$ và h là chiều cao của hình hộp

$\Rightarrow$ chiều dài của hình chữ nhật là $2x$

$$V = 2x^2h = 288 \Rightarrow h = \frac{144}{x^2}$$

Ta có

Diện tích các mặt cần xây là

$$S(x) = 2x^2 + \frac{864}{x}$$

Chi phí xây bể là $\left(2x^2 + \frac{864}{x}\right) 500.000$

Để chi phí thấp nhất thì biểu thức

$$\left(2x^2 + \frac{864}{x}\right) 500.000 \text{ đạt GTNN}$$

Xét hàm số $f(x) = 500000 \left(2x^2 + \frac{864}{x}\right), (x > 0)$

$$f'(x) = 500000 \left(4x - \frac{864}{x^2}\right), (x > 0); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

BBT

$$x \in (0; 6) \Rightarrow f' < 0; x \in (6; +\infty) \Rightarrow f' > 0$$

Câu 42. Gia đình ông An xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp dung tích là 2018 lít, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng được làm bằng bê tông có giá 250.000 đồng/ m^2 , thân bể được xây bằng gạch có giá 200.000 đồng/ m^2 và nắp bể được làm bằng tôn có giá 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi chi phí thấp nhất gia đình ông An bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 2.017.000 đồng.

B. 2.017.331 đồng.

*C. 2.017.333 đồng.

D. 2.017.334 đồng.

Lời giải

$$\text{Đổi } 2018(\text{lít}) = 2,018 m^3$$

Gọi chiều cao của hình hộp là h , chiều rộng là x , chiều dài là $3x$.

Theo giả thiết ta có $V = x \cdot 3x \cdot h = 2,018 \Rightarrow h = \frac{2,018}{3x^2}$

Xét hàm số $f(x) = 250 \cdot x \cdot 3x + 200 \cdot \left(2 \cdot 3x \cdot \frac{2,018}{3x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{2,018}{3x^2}\right) + 100 \cdot 3x \cdot x$

$$= \frac{15750x^3 + 16144}{15x} \rightarrow \min$$

$$f'(x) = \frac{15750 \cdot 3x^2 \cdot 15x - 15(15750x^3 + 16144)}{(15x)^2} = \frac{472500x^3 - 242160}{225x^2}$$

Suy ra

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 472500x^3 - 242160 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{242160}{472500}}$$

Vậy chi phí thấp nhất gia đình ông An bỏ ra để xây bể nước là

$$\frac{15750 \cdot \frac{242160}{472500} + 16144}{15 \cdot \sqrt[3]{\frac{242160}{472500}}} \approx 2017.333 \quad (\text{nghìn}) \approx 2017333 \quad (\text{đồng}).$$

Câu 43. Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đậy với thể tích 1 (m³). Chi phí mỗi m² đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m² nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m² mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

A. $\sqrt[3]{2\pi}$.

B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

*C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Lời giải

Gọi R và h lần lượt là bán kính và chiều cao của bể chứa nước.

Ta có thể tích bể chứa nước là: $V = 1 \Rightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích nắp và mặt đáy bể chứa nước là: $S_1 = \pi R^2$.

Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $S_2 = 2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2}{R}$.

Chi phí làm bể chứa nước là: $f(R) = 6\pi R^2 + 2\pi R^2 + 4 \cdot \frac{2}{R} = 8\pi R^2 + \frac{8}{R}$ (trăm nghìn đồng).

Ta có: $f'(R) = 16\pi R - \frac{8}{R^2}$. Xét $f'(R) = 0 \Leftrightarrow 16\pi R - \frac{8}{R^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi R^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$		-	0
$f(R)$			+

$f(R)$			
		CT	

$R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chi phí làm bể chứa nước thấp nhất khi

----HẾT----