|  |  |
| --- | --- |
| HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN  VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ  Description: LOGO CUA HOI DHBB  HƯỚNG DẪN CHẤM  *(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)* | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **LẦN THỨ XIV, NĂM 2023**  **HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN HỌC - LỚP 10** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 1. (4,0 điểm)** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương , tồn tại nhiều nhất một đa thức  có bậc  hệ số thực và thỏa mãn  với  là các số thực cho trước.  ***(Dựa theo: THPT Chuyên Cao Bằng)*** | **Điểm** |
| Giả sử đa thức  bậc  và thỏa mãn , khi đó  là đa thức monic. | **0,5** |
| Giả sử tồn tại đa thức  có hệ số thực,  và thỏa mãn . Khi đó đa thức  có . | **1,0** |
| Do  thỏa mãn  nên | **1,5** |
| Vế phải  là đa thức bậc , vế trái  là đa thức bậc , do đó , mâu thuẫn. Điều phải chứng minh. | **1,0** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 2. (4,0 điểm)** Cho  là các số thực không âm thỏa mãn  Chứng minh rằng  ***(Nguồn: THPT Chuyên Thái Bình)*** | **Điểm** |
| Biến đổi BĐT cần chứng minh trở thành | **1,5** |
| Giả sử  nằm giữa hai số  Khi đó | **1,0** |
| Do đó | **0,5** |
| Để chứng minh  ta chỉ cần chứng minh  Ta có  Do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.  Dấu bằng xảy ra khi  hoặc  và các hoán vị. | **1,0** |
| **Câu 3. (4,0 điểm)** Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn  có  là đường phân giác trong ( thuộc ). Gọi  lần lượt là điểm chính giữa cung  chứa  cung  chứa  của đường tròn . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại  Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại  a) Chứng minh rằng bốn điểm  cùng nằm trên một đường tròn.  b) Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  Gọi  lần lượt là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy.  ***(Nguồn: THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Yên Bái)*** | **Điểm** |
| Xét hình vẽ sau: (các trường hợp hình vẽ khác chứng minh tương tự) |  |
| **a)** Ta có  suy ra . Chứng minh tương tự ta có . | **0,5** |
| Vì  là phân giác của góc  nên  suy ra tứ giác  nội tiếp một đường tròn. | **0,5** |
|  |  |
| **b)** Trước hết ta chứng minh  vuông góc với . Thật vậy,  nên  vuông góc . | **0,5** |
| Vì  lần lượt là đường kính của các đường tròn  nên  Gọi  là giao điểm của  và  thì  là đường kính của .  Mặt khác  nên  và . Gọi  là giao điểm của  và  thì tứ giác  nội tiếp đường tròn đường kính  nên  thẳng hàng. | **1,0** |
| Ta có  (1) và  (2) | **0,5** |
| Lại có .  Suy ra  (3)  Từ (1), (2) và (3) suy ra , do vậy  đồng quy. | **1,0** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 4. (4,0 điểm)** Cho số nguyên dương . Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên dương  sao cho  thì  là số chẵn.  ***(Nguồn: THPT Chuyên Quốc Học – Thừa Thiên Huế)*** | **Điểm** |
| Từ giả thiết suy ra tồn tại  nguyên dương thỏa mãn  (1). Không mất tổng quát, giả sử . Từ (1) suy ra  (2). | **1,0** |
| Vì  nên , do đó  (3). | **1,0** |
| Nếu  thì , do đó  (\*). Mặt khác, từ  và (\*) suy ra | **1,0** |
| Nếu  thì , do đó  (\*\*). Vì  nên (\*\*) suy ra . Khi đó .  Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có . | **1,0** |
| **Câu 5. (4,0 điểm)** Một số nguyên dương *m* được gọi là “tốt” nếu tồn tại các số nguyên dương  sao cho  và  a) Chứng minh rằng số nguyên dương *m* là “tốt” khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên dương  sao cho  và  b) Tìm số “tốt” lớn nhất.  ***(Nguồn : THPT Chuyên Vĩnh Phúc)*** | **Điểm** |
| **a)** Chiều thuận: Giả sử *m* là tốt, khi đó tồn tại các số nguyên dương  sao cho  và  Từ , suy ra . Khi đó biểu diễn được , với  là các số nguyên dương. | **0,5** |
| Từ , suy ra . Từ , suy ra . | **0,5** |
| Khi đó  và  Như vậy đã tồn tại cặp  thoả mãn. | **0,5** |
| Chiều đảo: Giả sử tồn tại hai số nguyên dương *x*, *y* sao cho  và  Không mất tính tổng quát, giả sử  Suy ra | **1,0** |
| Đặt  thì  và  Vậy *m* là tốt. | **0,5** |
| **b)** Tìm số “tốt” lớn nhất: Giả sử *m* là số “tốt”, khi đó tồn *x*, *y* nguyên dương sao cho  và  (\*)  Khi đó ta có . Dấu bằng xảy ra khi  Vậy số “tốt” lớn nhất bằng 576. | **1,0** |

**-------------- HẾT --------------**