|  |  |
| --- | --- |
|  | **ĐỀ THI họC SINH GIỎI lỚP 12 NĂM HỌC 2018-2019**  **SỞ THÁI BÌNH** |

**Câu 1.1.** Cho hàm số  và đường thẳng  có phương trình: . Tìm  để đường thẳng  cắt đồ thị  tại hai điểm phân biệt  sao cho diện tích tam giác  bằng  (với  là gốc tọa độ).

**Lời giải**

+ Xét phương trình hoành độ giao điểm:

+ Đường thẳng  cắt đồ thị  tại hai điểm phân biệt 

 có hai nghiệm phân biệt khác 





+ Gọi 

Khi đó  là hai nghiệm của phương trình 

Theo định lý Vi-et ta có 

+ Ta có 

Mặt khác ta có: 



+ Khi đó 









Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Câu 1.2.** Cho hàm số . Tìm  để hàm số có cực đại, cực tiểu trong đó có một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ.

**Lời giải**

**Cách 1**: Ta có .

Hàm số trên có cực đại, cực tiểu khi  có hai nghiệm phân biệt.

.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình:



Gọi ;  là điểm cực trị của đồ thị hàm số. Ta có: 





Hàm số  có hệ số  nên không xãy ra trường hợp đồ thị hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ nhất, một điểm thuộc góc phần tư thứ ba của hệ trục tọa độ .

Để một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ  thì .

Với .

Với .

Từ  suy ra  thì thỏa đề.

**Cách 2**:Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số có hai điểm cực trị trái dấu và đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

+ Ta có , hàm số có hai điểm cực trị trái dấu .

+ Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệtcó 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình (1).

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt (2) có hai nghiệm phân biệt khác -2.

Vậy .

**Câu 1.3.** Tính .

**Lời giải**

Ta có







**Câu 2.1.** Giải phương trình: 

**Lời giải**

***Tác giả:; Fb:***

Đặt . Phương trình đã cho trở thành:











.

Do đó ta có: .

Vậy nghiệm của phương trình là: .

**Câu 2.2.** Cho  là tập hợp các số tự nhiên có  chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho  và có chữ số tận cùng bằng .

**Lời giải**

***Tác giả: Duyên Vũ; Fb: Duyên Vũ***

**Cách 1.**

Số phần tử của không gian mẫu là: .

Gọi  là biến cố số được chọn chia hết cho  và có chữ số tận cùng bằng 2.

Ta nhận thấy rằng: Số nhỏ nhất có chữ số chia hết cho  là: , số lớn nhất có  chữ số chia hết cho  là: .

Ta có , do đó số có  chữ số nhỏ nhất chia hết cho  và có tận cùng bằng  chính là số .

Nhận thấy rằng nếu hai số tự nhiên có  chữ số cùng chia hết cho  và đều có chữ số tận cùng bằng  thì hiệu của chúng cũng chia hết cho  và có chữ số tận cùng bằng .

Số nhỏ nhất ( lớn hơn ) có chữ số tận cùng bằng  chia hết cho  là .

Điều này chứng tỏ tất cả các số có  chữ số chia hết cho  và có chữ số tận cùng bằng  lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là , công sai .

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: .

Vì số cần tìm là số có  chữ số không vượt quá  nên ta có:

.

Vì  là số tự nhiên nên số hạng lớn nhất trong dãy trên ứng với .

Vậy số phần tử của biến cố  là .

Xác suất của biến cố  là: .

**Cách 2.**

Số phần tử của không gian mẫu là: .

Gọi số chia hết cho  và có chữ số tận cùng bằng  là .

Ta có .

Gọi  là số dư của phép chia  cho .

Khi đó vì nên ta có:



Do đó tồn tại số tự nhiên  sao cho ,.

Ta có bảng:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Thỏa mãn |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |
|  |  | Loại |

Từ bảng trên ta có  là số dư của phép chia  cho . Như vậy, tồn tại số tự nhiên  để . Vì  nên , hay 

.

Gọi  là biến cố số được chọn chia hết cho  và có chữ số tận cùng bằng 2.

Khi đó số phần tử của biến cố  là .

Xác suất của biến cố  là: .

**Câu 3.** Giải hệ phương trình



**Lời giải**

ĐK: 

Ta thấy với  phương trình  vô nghiệm.

Với  ta có





 (vì hàm số  có )

Thế  vào  ta có











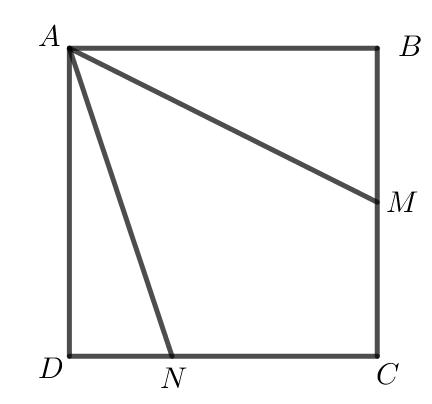
Với  ta có  (thỏa điều kiện đề bài).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất .

**Câu 4. [0H3-1.6-3]** Trong mặt phẳng tọa độ , cho hình vuông ,  là trung điểm cạnh ,  là điểm thuộc cạnh  sao cho , đường thẳng  có phương trình là . Tìm tọa độ điểm  biết  có hoành độ dương.

**Lời giải**

***Tác giả: Phạm Sơn; Fb: Phạm Sơn***



+ Ta có:, 

.

+ Đường thẳng  qua  nên có dạng: .

.

Với  thì : . Mà  nên  (loại).

Với  thì : . Mà  nên  (nhận).

+ Vậy .

Cách 2 <Nguyễn Viết Hòa>

+ Ta có:, 

.

. .

 (vì ).

**Câu 5.** Cho hình chóp  có đáy là hình thoi cạnh . Gọi là trung điểm của cạnh .

1. Tính thể tích khối chóp .

2. Tính khoảng cách giữa  và .

**Lời giải**



**1.** Gọi  là tâm của hình bình thoi .

Xét hai tam giác  và ta có: chung.

Suy ra (hai đường trung tuyến tương ứng).Tương tự .

Tam giác  có đường trung tuyến  và . Do đó vuông tại .

Từ đó ta tính được , , .

Diện tích của tam giác : (công thức Hê-rông).

Bán kính đường tròn ngoại tiếp  là .

Gọi  là hình chiếu của trên . Vì nên  là tâm đường tròn ngoại tiếp  và .

Diện tích tứ giác : .

Thể tích của khối chóp  là .

**2.** Tính khoảng cách giữa và .

Gọi  là trung điểm của .

Dễ thấy 

Mà 

Kẻ , kẻ  ta có .

Ta có: .

.

Vậy .

**Câu 6.** Cho là các số thực dương. Chứng minh rằng:

.

**Lời giải**

***Tác giả:Nguyên Dung; Fb: Dung Nguyen***

**Cách 1.**

Ta có: .

 (1).

Lại có:  và  (2).

Từ (1), (2) .



.

Do đó: .

Đặt: . Vì  là các số thực dương nên .

Suy ra:.

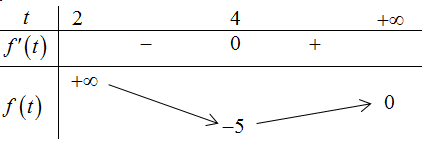
Xét hàm số với .

.

Ta có:( vì ).

Do đó .

Bảng biến thiên:



.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

**Cách 2:**

Ta có:

.

.

Đồng thời:

.

.

Do đó:.

Đặt . Vì  là các số thực dương nên .

.

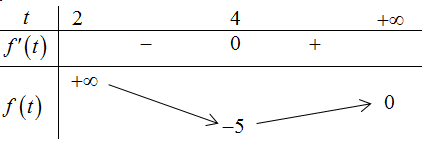
Xét hàm số: với .

.

Ta có: ( vì ).

Do đó .

Bảng biến thiên:



.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .