



Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  bằng  $0$  khi và chỉ khi  $x = 15; y = 6$  ;  $x = -15; y = -6$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2016 - 2017)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$ , biết :  $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

**Lời giải**

Ta có  $|7x - 5y| \geq 0$  ;  $|2z - 3x| \geq 0$  và  $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Nên  $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$

Có:  $|7x - 5y| = 0$  suy ra  $\frac{x}{5} = \frac{y}{7}$  ;

$|2z - 3x| = 0$  suy ra  $\frac{x}{2} = \frac{z}{3}$  ;

$|xy + yz + zx - 2000| = 0$  suy ra  $xy + yz + zx = 2000$

Từ đó tìm được  $x = 20; y = 28; z = 30$  hoặc  $x = -20; y = -28; z = -30$

Mà  $x, y, z$  cùng dấu nên  $x = 20; y = 28; z = 30$  hoặc  $x = -20; y = -28; z = -30$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng  $0$  khi và chỉ khi  $x = 20; y = 28; z = 30$  hoặc  $x = -20; y = -28; z = -30$

**Câu 3. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017)**

$$B = |x - 2| + |x - 8|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

**Lời giải**

$$B = |x - 2| + |8 - x| \geq |x - 2 + 8 - x| = |6| = 6$$

Ta có:

$$" = " \quad (x - 2)(8 - x) \geq 0 \quad (x - 2)(8 - x) \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra khi suy ra

$$x - 2 \geq 0 \quad 8 - x \geq 0 \quad x - 2 \leq 0 \quad 8 - x \leq 0$$

nên và hoặc và

$$x \geq 2 \quad x \leq 8 \quad 2 \leq x \leq 8 \quad x \leq 2 \quad x \geq 8$$

hay và tức là hoặc và (vô lý)

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $B$  bằng  $6$  khi và chỉ khi  $2 \leq x \leq 8$

**Câu 4. (HSG 7 trường Cự Khê 2016 - 2017)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = (x - 2)^2 + |y - x| + 3$

**Lời giải**

Ta có  $(x - 2)^2 \geq 0$  với mọi  $x$  và  $|y - x| \geq 0$  với mọi  $x, y \Rightarrow A \geq 3$  với mọi  $x, y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng  $3$  khi và chỉ khi  $(x - 2)^2 = 0$  và  $|y - x| = 0$  hay  $x = y = 2$

**Câu 5. (HSG 7 trường Mỹ Hưng 2016 - 2017)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$

**Lời giải**

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

$$A = (|x - 2013| + |x - 2015|) + |x - 2014|$$

Vì  $|x - 2015| = |2015 - x|$  nên  $A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$

Ta có:  $|x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$

Dấu "=" xảy ra khi  $(x - 2013)(2015 - x) \geq 0$  hay  $2013 \leq x \leq 2015$

Lại có:  $|x - 2014| \geq 0$ . Dấu "=" xảy ra khi  $x - 2014 = 0$  hay  $x = 2014$

Suy ra  $A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014| \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi  $2013 \leq x \leq 2015$  và  $x = 2014$  suy ra  $x = 2014$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng 2 khi và chỉ khi  $x = 2014$ .

**Câu 6. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017)**

Cho ba số  $a, b, c$  thỏa mãn  $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$  và  $a+b+c=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $c$ .

**Lời giải**

Vì  $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$  nên  $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$

Do đó  $0 \leq 4 \leq 3c+6$  (vì  $a+b+c=1$ )

$3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}$

Hay

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $c$  là  $-\frac{2}{3}$  khi đó  $a+b=\frac{5}{3}$ .

**Câu 7. (HSG 7 huyện Mộ Cang Chải 2016 - 2017)**

$$C = \frac{2(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2 + 2}$$

Cho biểu thức:  $C = \frac{2(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2 + 2}$ . Với giá trị nào của  $x$  thì biểu thức  $C$  có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Lời giải**

$$C = \frac{2(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2 + 2} = \frac{2[(x-1)^2 + 2] - 3}{(x-1)^2 + 2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2}$$

Ta có:

Suy ra  $C$  nhỏ nhất khi  $\frac{3}{(x-1)^2 + 2}$  lớn nhất.

Vì  $(x-1)^2 + 2 \geq 2$  nên  $\frac{3}{(x-1)^2 + 2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \geq 2 - \frac{3}{2}$  hay  $C \geq \frac{1}{2}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $C$  bằng  $\frac{1}{2}$  khi và chỉ khi  $x = 1$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Hương Khê (và Đề 326) 2016 - 2017)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$  với  $x$  là số nguyên.

**Lời giải**

$$A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$$

Ta có:

Dấu “=” xảy ra khi  $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$   
 $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{1; 2; 3; \dots; 1006\}$

Lại có

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng 2011 khi và chỉ khi  $x \in \{1; 2; 3; \dots; 1006\}$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2016 - 2017)**

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = |x| - |x - 2|$ .

**Lời giải**

Xét các trường hợp:

TH1:  $x \geq 2 \Rightarrow A = x - (x - 2) = 2$

TH2:  $0 \leq x < 2 \Rightarrow A = x + x - 2 = 2x - 2 < 2$

TH3:  $x < 0 \Rightarrow A = -x + x - 2 = -2 < 0$

Suy ra với mọi giá trị của  $x$  thì  $A \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của  $A$  bằng 2 khi  $x \geq 2$ .

**Câu 9. (HSG 7 huyện Đất Mũi 2016 - 2017)**

Cho  $a, b, c, d$  là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:  $A = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$

**Lời giải**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \leq b \leq c \leq d$ .

Áp dụng BĐT  $|a| + |b| \geq |a + b|$ , dấu bằng xảy ra khi  $ab \geq 0$  ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b \quad (2)$$

Suy ra  $A \geq c + d - a - b$ .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi dấu “=” ở (1) và (2) xảy ra

Khi đó  $(x - a)(d - x) \geq 0$  và  $(x - b)(c - x) \geq 0$  hay  $a \leq x \leq d$  và  $b \leq x \leq c$

Mà  $a \leq b \leq c \leq d$  nên  $b \leq x \leq c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng  $c + d - a - b$  khi và chỉ khi  $b \leq x \leq c$ .

**Câu 10. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)**

$$F = \frac{42 - x}{x - 15}$$

Cho  $x$  là số nguyên để  $F$  đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

$$F = \frac{42 - x}{x - 15} = -1 + \frac{27}{x - 15}$$

a) Ta thấy  $F$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $\frac{27}{x - 15}$  nhỏ nhất

Xét  $x - 15 > 0$  thì  $\frac{27}{x - 15} > 0$

Xét  $x - 15 < 0$  thì  $\frac{27}{x - 15} < 0$ .

Vậy  $\frac{27}{x - 15}$  nhỏ nhất khi  $x - 15 < 0$

Phân số  $\frac{27}{x - 15}$  có tử dương mẫu âm

Khi đó  $x - 15$  nhỏ nhất khi  $x - 15$  là số nguyên âm lớn nhất

Hay  $x - 15 = -1 \Rightarrow x = 14$

Vậy khi  $x = 14$  thì  $F$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $-28$

### Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

**A. Trắc nghiệm (nếu có): Không**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến, trường Thái Phiên 2016 - 2017)**

$$M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$$

Chứng minh rằng  $M$  có giá trị không phải là số tự nhiên ( $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$ )

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$

$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$

$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$

$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$

$\frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left( \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left( \frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$

Hay  $1 < M < 2$ .

Vậy  $M$  có giá trị không phải là số tự nhiên.

**Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)**

Cho  $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$  với  $a, b, c > 0$ . Chứng tỏ rằng  $M$  không phải là số nguyên.

**Lời giải**

Vì  $a, b, c > 0$  nên:  $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$ ;  $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$ ;  $\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

Do đó  $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$ . Do đó  $M > 1$  (1)

Mà  $\left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) + \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right)$   
 $= \left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left( \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left( \frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} \right) = 3$

$$\text{Vì } \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} \right) > 1 \quad \text{suy ra} \quad M = \left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $1 < M < 2$  nên  $M$  không phải là số nguyên.

**Câu 3. (HSG 7 huyện Hương Khê (và đề 326) 2016 - 2017)**

Cho ba số dương  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ , chứng minh rằng  $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ .

**Lời giải**

Vì  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ , nên  $(a-1)(b-1) \geq 0$  suy ra  $ab+1 \geq a+b$

$$\frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \quad \text{nên} \quad \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

Do đó

$$\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2) ; \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

Tương tự:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

Do đó:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

Mà

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{dpcm})$$

Từ (4) và (5) suy ra

**Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa: Không**

**Dạng 2.3: Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy**

**A. Trắc nghiệm (nếu có): Không**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)**

Cho  $100$  số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng:

- Tích của  $100$  số đó là một số dương.
- Tất cả  $100$  số đó đều là số âm

**Lời giải**

a) Trong  $100$  số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả  $100$  số đều dương thì tích của ba số bất kì không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra. Chia  $99$  số còn lại thành  $33$  nhóm, mỗi nhóm  $3$  thừa số.

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của  $33$  nhóm tức là của  $99$  số là một số âm.

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của  $100$  số là một số dương.

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$$

b) Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn  
 Các số này đều khác 0 (vì nếu có một thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài).

$$a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100} < 0 \quad a_{98} < 0$$

Xét tích suy ra

(vì nếu  $a_{98} > 0$  thì  $a_{99} > 0, a_{100} > 0$  tích của ba số này không thể là một số âm).

Vậy  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$  là các số âm

Xét tích  $a_1 a_2 a_{99} < 0$  mà  $a_1 a_2 > 0$  nên  $a_{99} < 0$

Xét tích  $a_1 a_2 a_{100} < 0$  mà  $a_1 a_2 > 0$  nên  $a_{100} < 0$

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

### Dạng 3: Bất đẳng thức dạng chữ

#### A. Trắc nghiệm (nếu có): Không

#### B. Tự luận

#### Câu 1. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017)

$$a, b \in \mathbb{Q} \quad |a| + |b| \geq |a + b|$$

Chứng minh với mọi  $a, b \in \mathbb{Q}$  thì

#### Lời giải

Ta có:  $(|a| + |b|)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$ ;  $(|a + b|)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Lại có  $|ab| \geq ab$  nên  $2|ab| \geq 2ab$

Vì thế  $a^2 + 2|ab| + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

Vậy  $|a| + |b| \geq |a + b|$  với mọi  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

#### Câu 2. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Cho 20 số nguyên khác 0:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$  có các tính chất sau:

- \*  $a_1$  là số dương
- \* Tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương.
- \* Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng:  $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$ .

#### Lời giải

Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

Vì tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương nên:

$$a_1 > 0, a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0 \quad \text{suy ra } a_{14} < 0$$

Cũng như vậy:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + a_{13} + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 \quad \text{suy ra}$$

$$a_{13} + a_{14} < 0$$

Mặt khác,  $a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$

Từ các điều kiện  $a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0 \Rightarrow a_1.a_{14} + a_{14}.a_{12} < a_1.a_{12}$  (ĐPCM).

**Câu 3. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2016 - 2017)**

Chứng minh rằng: Nếu  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$  thì:  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

**Lời giải**

Ta có:  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$  nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:  $a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$

Vì  $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$  nên ta được:  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Phú Lý 2016 - 2017)**

Cho  $a > 2, b > 2$ . Chứng minh  $ab > a + b$ .

**Lời giải**

Từ  $a > 2$  suy ra  $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ ; từ  $b > 2$  suy ra  $\frac{1}{b} < \frac{1}{2}$

Do đó  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$  suy ra  $\frac{a+b}{ab} < 1$

Vậy  $ab > a + b$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Phú Lý 2016 - 2017)**

Cho các số  $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

**Lời giải**

Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra  $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

Vậy  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$