

# MỤC LỤC

<b>CHƯƠNG 3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH</b>	<b>1</b>
1 Đại cương về phương trình	1
<b>I. KIẾN THỨC CƠ BẢN</b>	<b>1</b>
<b>A Khái niệm phương trình</b>	<b>1</b>
<b>B Phương trình tương đương</b>	<b>1</b>
1 Phương trình tương đương	1
2 Phép biến đổi tương đương	1
3 Phương trình hệ quả	1
<b>C Phương trình nhiều ẩn</b>	<b>2</b>
<b>D Phương trình chứa tham số</b>	<b>2</b>
<b>II. CÁC DẠNG BÀI TẬP</b>	<b>2</b>
Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình	2
Dạng 2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả	5
Dạng 3. Giải phương trình có điều kiện	9
<b>E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM</b>	<b>16</b>
<b>ĐÁP ÁN</b>	<b>57</b>
2 <b>PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC NHẤT VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI</b>	<b>58</b>
<b>A Giải và biện luận phương trình bậc nhất</b>	<b>58</b>
<b>B Giải và biện luận phương trình bậc hai</b>	<b>58</b>
1 Giải và biện luận phương trình bậc hai	58
2 Định lý Vi-ét – định lý Vi-ét đảo	58
<b>C PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI, PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU CĂN</b>	<b>59</b>
<b>D CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP</b>	<b>59</b>
1 Phương trình cơ bản	59

2	Phương pháp bình phương hai vế	59
3	Phương pháp đặt ẩn phụ	60
4	Phương pháp nhân lượng liên hợp	60
<b>E</b>	<b>HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN</b>	<b>61</b>
	Dạng 1. Một số phương trình cơ bản.	61
	Dạng 2. Phương pháp bình phương hai vế.	64
	Dạng 3. Phương pháp đặt ẩn phụ	66
	Dạng 4. Phương pháp nhân lượng liên hợp	71
	Dạng 5. Bài toán chứa tham số	77
	Dạng 6. Phương trình bậc nhất, bậc hai chứa tham số	81
	Dạng 7. Tìm điều kiện tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước	85
	Dạng 8. Phương trình trùng phương	87
	Dạng 9. Dùng định nghĩa, tính chất của giá trị tuyệt đối và phương pháp bình phương hai vế	89
1	Bài tập tự luyện	90
	Dạng 10. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối bằng cách đặt ẩn phụ.	93
1	Bài tập tự luyện	95
	Dạng 11. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối có tham số.	97
1	Bài tập tự luyện	98
	Dạng 12. Phương pháp nâng lên lũy thừa	99
1	Bài tập tự luyện	100
	Dạng 13. Phương pháp dùng hằng đẳng thức	101
1	Bài tập tự luyện	103
	Dạng 14. Đặt ẩn phụ	105
1	Bài tập tự luyện	106
	Dạng 15. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn	107
1	Bài tập tự luyện	108

Dạng 16. Đặt một ẩn phụ chuyển về hệ phương trình	108
1 Bài tập tự luyện	109
Dạng 17. Đặt hai ẩn phụ	109
1 Bài tập tự luyện	110
Dạng 18. Đặt hai ẩn phụ chuyển về giải một phương trình hai ẩn	110
1 Bài tập tự luyện	111
Dạng 19. Phương pháp nhân liên hợp	111
1 Bài tập tự luyện	112
Dạng 20. Phương pháp biến đổi thành phương trình tích	112
1 Bài tập tự luyện	113
Dạng 21. Phương pháp đánh giá hai vế	114
1 Bài tập tự luyện	115
<b>F BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM</b>	116
<b>ĐÁP ÁN</b>	151
<b>3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN</b>	153
Dạng 1. Phương trình bậc nhất hai ẩn	153
Dạng 2. Hệ pt bậc nhất hai ẩn; hệ pt bậc nhất ba ẩn (không chứa tham số)	155
Dạng 3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có tham số	158
<b>A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM</b>	162
<b>ĐÁP ÁN</b>	222
<b>B HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG-HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP</b>	224
Dạng 4. Hệ phương trình đối xứng loại I	224
Dạng 5. Hệ phương trình đối xứng loại II	227
1 <b>HỆ ĐẲNG CẤP BẬC HAI</b>	235
<b>C Chuyên đề 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế</b>	243

Dạng 6. Phương pháp thế ẩn	243
1 Bài tập rèn luyện	244
Dạng 7. Phương pháp thế biểu thức	245
1 Bài tập rèn luyện	247
Dạng 8. Phương pháp thế số	247
1 Bài tập rèn luyện	248
<b>D Chuyên đề 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ</b>	<b>250</b>
Dạng 9. Đặt ẩn phụ dạng đại số	250
1 Bài tập tự luyện	252
Dạng 10. Đặt ẩn phụ dạng tổng - hiệu	253
1 Bài tập tự luyện	256
Dạng 11. Đặt ẩn phụ trong hệ có căn	258
1 Bài tập rèn luyện	262
Dạng 12. Sử dụng hình giải tích	266
<b>E Chuyên đề 3: Cách nhận dạng hệ giải bằng phương pháp nhân liên hợp</b>	<b>269</b>
1 Cách giải tổng quát của dạng toán	269
2 Bài tập áp dụng	269
Dạng 13. Nhân liên hợp trực tiếp hai căn có sẵn trong phương trình	269
Dạng 14. Thêm bớt hằng số để nhân liên hợp	271
Dạng 15. Thêm bớt một biểu thức để nhân liên hợp	274
<b>F MỘT SỐ ĐỀ</b>	<b>278</b>
<b>ĐỀ 1</b>	<b>278</b>
<b>ĐỀ 2</b>	<b>284</b>
<b>ĐỀ 3</b>	<b>294</b>

**BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH**

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**A KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH**

**Phương trình ẩn  $x$**  là mệnh đề chứa biến có dạng  $f(x) = g(x)$  (1) trong đó  $f(x)$  và  $g(x)$  là những biểu thức của  $x$ . Ta gọi  $f(x)$  là vế trái,  $g(x)$  là vế phải của phương trình (1).

**Điều kiện xác định của phương trình** (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện của ẩn  $x$  để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

Nếu  $f(x_0) = g(x_0)$  thì số thực  $x_0$  được gọi là một nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  (1)

**Giải phương trình** (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).

Nếu phương trình không có nghiệm nào thì ta nói phương trình vô nghiệm (hoặc nói tập nghiệm của nó là rỗng).

**B PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG**

**1 PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG**

Hai phương trình  $f(x) = g(x)$  (1) và  $f_1(x) = g_1(x)$  (2) được gọi là tương đương nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng)

Kí hiệu  $(1) \Leftrightarrow (2)$ .

**2 PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG**

Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là phép biến đổi tương đương. Ta có một số phép biến đổi tương đương đã biết sau

- Cộng hoặc trừ cả hai vế với cùng một số hoặc biểu thức.
- Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số hoặc biểu thức khác 0.

**Chú ý.** Các phép biến đổi trên không làm thay đổi điều kiện của phương trình thì mới được phương trình tương đương.

**3 PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ**

Mỗi nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) thì ta nói phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

Kí hiệu:  $(1) \Rightarrow (2)$ .

**Chú ý.**

+ Phép bình phương hai vế một phương trình không phải là phép biến đổi tương đương mà chỉ là phép biến đổi hệ quả.

+ Khi hai vế của phương trình đều không âm, bình phương hai vế của phương trình ta được một phương trình tương đương.

**Công thức**

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là **nghiệm ngoại lai**.

Khi giải phương trình, không phải lúc nào ta cũng áp dụng được phép biến đổi tương đương, trong nhiều trường hợp ta phải thực hiện các phép biến đổi đưa tới phương trình hệ quả, chẳng hạn bình phương hai vế, nhân hai vế của phương trình với một đa thức. Lúc đó để loại nghiệm ngoại lai, ta phải thử lại các nghiệm tìm được.

## C PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn số. Nghiệm của một phương trình hai ẩn  $x, y$  là một cặp số thực  $(x_0; y_0)$  thỏa mãn phương trình đó, còn nghiệm của một phương trình ba ẩn  $x, y, z$  là một bộ số thực  $(x_0; y_0; z_0)$  thỏa mãn phương trình đó.

**Ví dụ 1.** Cho phương trình

$$3x + 2y = x^2 - 2xy + 8 \tag{1}$$

$$4x^2 - xy + 2z = 3z^2 + 2xz + y^2 \tag{2}$$

Phương trình (2) là phương trình hai ẩn ( $x$  và  $y$ ), còn (3) là phương trình ba ẩn ( $x, y$  và  $z$ ).

Khi  $x = 2, y = 1$  thì hai vế của phương trình (2) có giá trị bằng nhau, ta nói cặp  $(x; y) = (2; 1)$  là một nghiệm của phương trình (2).

Tương tự, bộ ba số  $(x; y; z) = (-1; 1; 2)$  là một nghiệm của phương trình (3).

## D PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*.

## II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

*Phương pháp*

① Điều kiện để căn bậc chẵn xác định: Biểu thức trong căn phải có nghĩa và không âm.

② Điều kiện phân thức xác định: Mẫu thức phải có nghĩa và khác 0.

**Ví dụ 1.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình

$$\textcircled{1} \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} = 2\sqrt{9-2x}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+1}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{5x-1} + \sqrt{-2x+3} = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$

$$\textcircled{4} \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{-2x+4} - \sqrt{15+5x}$$

**Lời giải.**

**Phân tích**

Điều kiện xác định của phương trình là các biểu thức trong căn không âm.

$$\textcircled{1} \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 9-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \leq \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4.$$

$$\textcircled{2} \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq -3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{3} \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ -2x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq x \leq 1.$$

$$\textcircled{4} \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \\ -2x + 4 \geq 0 \\ 15 + 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 2.$$

□

**Ví dụ 2.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình

$$\textcircled{1} \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \sqrt{x+2} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{6-2x}} + \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\textcircled{3} \frac{\sqrt{5x+1} + \sqrt{-2x+4}}{\sqrt{2x-1}-1} = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$

$$\textcircled{4} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-2x+4} + \sqrt{15+5x}}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}$$

**Lời giải.**

**Phân tích**

Điều kiện xác định của phương trình là các biểu thức trong căn không âm và mẫu thức khác 0

$$\textcircled{1} \text{ Điều kiện xác định } \begin{cases} 3-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq -2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 3.$$

$$\textcircled{2} \text{ Điều kiện xác định } \begin{cases} 6-2x > 0 \\ x+2 > 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 3.$$

$$\textcircled{3} \text{ Điều kiện xác định } \begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ -2x+4 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ \sqrt{2x-1}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 2x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

$$\textcircled{4} \text{ Điều kiện xác định } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ -2x+4 \geq 0 \\ 15+5x \geq 0 \\ x > 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{2x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq 2 \\ x \geq -3 \\ x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq 2 \\ x \geq -3 \\ x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2.$$

□

**Ví dụ 3.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình

$$\textcircled{1} \frac{2x}{x^2 + 1} - 5 = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{x + 2} - \frac{3}{x - 2} = \frac{4}{x^2 - 4}$$

$$\textcircled{3} \frac{4x}{x^2 - 5x + 6} - \frac{3 - 5x}{x^2 - 6x + 8} = \frac{9x + 1}{x^2 - 7x + 12}$$

**Lời giải.**

**Phân tích**

Điều kiện xác định của phương trình là các biểu thức dưới mẫu khác 0.

① Điều kiện xác định  $x^2 + 1 \neq 0$  (luôn đúng).

Vậy điều kiện xác định của phương trình là mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

② Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 2. \end{cases}$

③ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \neq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \\ x \neq 4. \end{cases}$

□

**Ví dụ 4.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình

$$\textcircled{1} \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \sqrt{x+2} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2} = \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

$$\textcircled{3} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} + \frac{1}{x} = \sqrt{-x+3} - \frac{2x-1}{x-2}$$

$$\textcircled{4} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3} - \frac{7x}{\sqrt{7-2x}} = 5x$$

**Lời giải.**

**Phân tích**

Điều kiện xác định của phương trình là các biểu thức trong căn không âm và mẫu thức khác 0

① Điều kiện xác định  $\begin{cases} 3-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq -2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 3.$

② Điều kiện xác định  $\begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geq -2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \notin \{1; 2\}. \end{cases}$

③ Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ -x+3 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3] \setminus \{2\}.$

④ Điều kiện xác định  $\begin{cases} x^2-4x+3 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ 7-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1 \\ x \geq 2 \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{7}{2}\right) \setminus \{3\}.$

□



**Dạng 2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả**

**Phương pháp**

- ① Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- ② Nếu mọi nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  đều là nghiệm của phương trình  $f_1(x) = g_1(x)$  thì phương trình  $f_1(x) = g_1(x)$  được gọi là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = g(x)$ .
- ③ Để giải phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng
  - Cộng (trừ) cả hai vế của phương trình với một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương phương trình đã cho.
  - Nhân (chia) vào hai vế với một biểu thức khác không và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.
  - Bình phương hai vế của phương trình ta thu được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.
  - Bình phương hai vế của phương trình (hai vế luôn cùng dấu) ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

①  $\sqrt{2x - 3} = \sqrt{4x^2 - 15}$

②  $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3 - 2x$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

Để giải các phương trình có dạng  $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ ,  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  ta thường dùng hai cách sau:

+ Cách 1: Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả rồi thử lại.

+ Cách 2: Biến đổi tương đương

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2. \end{cases}$$

① **Cách 1:** Điều kiện xác định:  $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 15 \geq 0 \end{cases}$  (\*).

$$\sqrt{2x - 3} = \sqrt{4x^2 - 15} \Rightarrow (\sqrt{2x - 3})^2 = (\sqrt{4x^2 - 15})^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 4x^2 - 15$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Thay vào điều kiện (\*) ta thấy chỉ có  $x = 2$  thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

$$\text{Cách 2: } \sqrt{2x - 3} = \sqrt{4x^2 - 15} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 2x - 3 = 4x^2 - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

2.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

② **Cách 1:** Điều kiện xác định  $x^2 - 3x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0$  (luôn đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ )

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = (3 - 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Thay vào phương trình ta thấy chỉ có  $x = 1$  là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3 - 2x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 3 = (3 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x^2 - 3x + 3 = 9 - 12x + 4x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 9x + 6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

□

**Ví dụ 2.** Giải các phương trình:

①  $|2x + 1| = |x - 2|$

②  $|2x + 1| = x - 1$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

Để giải các phương trình có dạng  $|f(x)| = |g(x)|$ ,  $|f(x)| = g(x)$  ta thường dùng hai cách sau:

+ Cách 1: Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả.

+ Cách 2: Biến đổi tương đương

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) = -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases}$$

① Cách 1: Phương trình tương đương với  $(|2x + 1|)^2 = (|x - 2|)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 4x + 4$   
 $\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x = -3$  và  $x = \frac{1}{3}$ .

Cách 2:  $|2x + 1| = |x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x - 2 \\ 2x + 1 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x = -3$  và  $x = \frac{1}{3}$ .

② Cách 1: Ta có  $|2x + 1| = x - 1 \Rightarrow (2x + 1)^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

Thử vào phương trình ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn

Vậy phương trình vô nghiệm.

Cách 2:  $|2x + 1| = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} 2x + 1 = x - 1 \\ 2x + 1 = -x + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = -2 \text{ (không có giá trị nào thỏa mãn)} \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$

Vậy phương trình vô nghiệm.

□

**Ví dụ 3.** Tìm chỗ sai (nếu có) trong phép giải mỗi phương trình sau:

① Giải phương trình  $\sqrt{x - 1} = |x - 1|$ . (1)

Ta có (1)  $\Leftrightarrow x - 1 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 2$

② Giải phương trình  $\sqrt{x+1} = x-1$ . (2)

Ta có điều kiện của phương trình là  $x \geq 1$ .

$$(2) \Leftrightarrow x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x = 0$  và  $x = 3$ .

### Lời giải.

- ① Ở câu này, ta đã giản ước  $x-1$  ở hai vế của biểu thức  $x-1 = (x-1)^2$  nên đã làm mất một nghiệm  $x = 1$ .
- ② Ở câu này, ta đã làm xuất hiện nghiệm ngoại lai  $x = 0$  không phải là nghiệm của phương trình (vì nói chung phép bình phương hai vế của một phương trình không phải bao giờ cũng là phép biến đổi tương đương).

□

**Ví dụ 4.** Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào cho ta phương trình tương đương, phép biến đổi nào không cho ta phương trình tương đương?

- ① Lược bỏ số hạng  $\frac{7}{x-1}$  ở hai vế của phương trình  $x^2 + 1 + \frac{7}{x-1} = 2x + \frac{7}{x-1}$ .
- ② Lược bỏ số hạng  $\frac{5}{x-2}$  ở hai vế của phương trình  $x^2 + 1 + \frac{5}{x-2} = 2x + \frac{5}{x-2}$ .
- ③ Thay thế  $(\sqrt{2x-1})^2$  bởi  $2x-1$  trong phương trình  $(\sqrt{2x-1})^2 = 3x+2$ .
- ④ Chia cả hai vế của phương trình  $x+3 = x^2+3$  cho  $x$ .
- ⑤ Nhân cả hai vế của phương trình  $\frac{x^2+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$  với  $x$ .

### Lời giải.

- ① Phép biến đổi này không cho ta phương trình tương đương vì nghiệm của phương trình  $x^2 + 1 = 2x$  không là nghiệm của phương trình  $x^2 + 1 + \frac{7}{x-1} = 2x + \frac{7}{x-1}$ .
- ② Phép biến đổi này cho ta phương trình tương đương vì nghiệm của phương trình  $x^2 + 1 = 2x$  cũng là nghiệm của phương trình  $x^2 + 1 + \frac{5}{x-2} = 2x + \frac{5}{x-2}$ .
- ③ Phép biến đổi này không cho ta phương trình tương đương vì nó làm thay đổi điều kiện của phương trình ban đầu.
- ④ Phép biến đổi này không cho ta phương trình tương đương vì nó làm mất nghiệm của phương trình ban đầu.
- ⑤ Phép biến đổi này không cho ta phương trình tương đương vì nó làm xuất hiện nghiệm ngoại lai  $x = 0$  không là nghiệm của phương trình ban đầu.

□

**Ví dụ 5.** Cho các cặp phương trình sau, phương trình nào là hệ quả của phương trình còn lại?

①  $\sqrt{x-1}(x-2) = 0$  (1) và  $x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1}$  (2)

②  $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$  (3) và  $x^2 - x - 2 = 0$  (4).

### Lời giải.

① Ta có:  $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}; \quad (2) \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy (1) là phương trình hệ quả của (2).

② Ta có:  $(3) \Leftrightarrow x = 2; \quad (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy (4) là phương trình hệ quả của (3).

□

**Ví dụ 6.** Giả sử  $f(x)$  là một biểu thức của  $x$ . Xét khẳng định sau  $(x - 2)f(x) = x - 2 \Leftrightarrow f(x) = 1$ .  
Khẳng định đó có luôn đúng không?

**Lời giải.**

Ta có  $(x - 2)f(x) = x - 2 \Leftrightarrow (x - 2)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = 1. \end{cases}$

- Nếu  $x = 2$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = 1$  thì phương trình  $(x - 2)f(x) = x - 2$  và  $f(x) = 1$  có cùng tập hợp nghiệm. Do đó khẳng định đã cho là đúng.
- Nếu  $x = 2$  không là nghiệm của phương trình  $f(x) = 1$  thì phương trình  $(x - 2)f(x) = x - 2$  và  $f(x) = 1$  không cùng tập hợp nghiệm. Do đó khẳng định đã cho là sai.

Vậy khẳng định  $(x - 2)f(x) = (x - 2) \Leftrightarrow f(x) = 1$  không luôn đúng.

□

**Ví dụ 7.** Xác định tham số  $m$  để các cặp phương trình sau tương đương  $x - 2 = 0$  và  $(3m - 1)x - 4m = 0$ .

**Lời giải.**

Phân tích

Để giải dạng toán này ta thường làm theo các bước

- Bước 1 Tìm một nghiệm của một phương trình giải được.
- Bước 2 Thay nghiệm đó vào phương trình kia, tìm ra  $m$ .
- Bước 3 Thử lại  $m$  tìm được vào 2 phương trình có cùng tập nghiệm thì nhận.

Lời giải

Phương trình  $x - 2 = 0$  có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

Để phương trình  $(3m - 1)x - 4m = 0$  tương đương với phương trình  $x - 2 = 0$  thì  $x = 2$  là nghiệm phương trình  $(3m - 1)x - 4m = 0$ . Do đó

$$(3m - 1)2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Với  $m = 1$ , phương trình  $(3m - 1)x - 4m = 0$  trở thành  $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

Khi đó hai phương trình có cùng tập hợp nghiệm nên chúng tương đương.

Vậy hai phương trình tương đương khi  $m = 1$ .

□

**Ví dụ 8.** Xác định tham số  $m$  để các cặp phương trình sau tương đương  $x^2 - 9 = 0$  (1) và  $2x^2 + (m - 5)x - 3(m + 1) = 0$ . (2)

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$ . Do đó (1) có tập nghiệm  $S_1 = \{-3; 3\}$ .

Hai phương trình (1), (2) tương đương thì  $x = 3, x = -3$  là nghiệm của (2). Khi đó ta có

$$\begin{cases} 2 \cdot (-3)^2 + (m - 5) \cdot (-3) - 3(m + 1) = 0 \\ 2 \cdot (3)^2 + (m - 5) \cdot (3) - 3(m + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 6m = 0 \\ 0m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Với  $m = 5$  phương trình (2) trở thành  $2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$ . Khi đó phương trình có tập nghiệm  $S_2 = \{-3; 3\} = S_1$  nên (1) và (2) tương đương.

Vậy với  $m = 5$  hai phương trình đã cho tương đương.

□

**Ví dụ 9.** Tìm  $m$  để cặp phương trình sau tương đương  $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$  (1) và  $(m - 2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$ . (2)

**Lời giải.**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (x - 1)(mx - m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0. \end{cases}$

Hai phương trình (1) và (2) tương đương thì  $x = 1$  là nghiệm của phương trình (2). Khi đó ta có

$$(m - 2) - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5. \end{cases}$$

— Với  $m = -5$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1) trở thành } -5x^2 + 12x - 7 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{5}. \end{cases} \\ \text{Phương trình (2) trở thành } -7x^2 - 3x + 10 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{10}{7}. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra hai phương trình không tương đương.

— Với  $m = 4$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1) trở thành } 4x^2 - 6x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1. \end{cases} \\ \text{Phương trình (2) trở thành } 2x^2 - 3x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra hai phương trình tương đương.

Vậy  $m = 4$  thì hai phương trình tương đương. □

### Dạng 3. Giải phương trình có điều kiện

#### Phương pháp

Đối với các phương trình có điều kiện (thường là phương trình chứa ẩn trong căn, chứa ẩn ở mẫu,...) khi giải ta thường làm theo các bước sau

- ① Đặt điều kiện cho phương trình.
- ② Chuyển về, đổi dấu hoặc quy đồng và khử mẫu phân thức.
- ③ Rút gọn và giải phương trình nhận được.
- ④ Đối chiếu điều kiện và kết luận.

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình

①  $\sqrt{x+2} + x^2 = 9 + \sqrt{x+2}$ .

②  $\sqrt{1-x} - x^3 = \sqrt{1-x} - 8$ .

**Lời giải.**

- ① Điều kiện của phương trình là  $x \geq -2$ .  
 Với điều kiện  $x \geq -2$ , ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + x^2 &= 9 + \sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 9 + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -3 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 3$ .

**⚠ Sai lầm thường gặp:** Không đối chiếu điều kiện khi lấy nghiệm của phương trình.

- ② Điều kiện của phương trình là  $x \leq 1$ .  
Với điều kiện  $x \leq 1$ , ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} - x^3 &= \sqrt{1-x} - 8 \\ \Leftrightarrow x^3 &= 8 + \sqrt{1-x} - \sqrt{1-x} \\ \Leftrightarrow x^3 &= 8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại)}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình

$$\textcircled{1} \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \qquad \textcircled{2} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{\sqrt{x+2}}.$$

**Lời giải.**

- ① Điều kiện  $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ .

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} &= \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \\ \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt{x-3} &= \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt{x-3} \\ \Rightarrow 2x+1 &= x+2 \\ \Rightarrow x &= 1.\end{aligned}$$

Giá trị  $x = 1$  không thỏa mãn điều kiện  $x > 3$  nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Một số chú ý và sai lầm thường gặp

- Mẫu  $\sqrt{x-3}$  là căn của một biểu thức. Do đó ta thường làm nhanh đặt điều kiện cho biểu thức trong căn lớn hơn 0.
- Nhiều em học sinh khi đặt điều kiện cho  $\sqrt{x-3}$  thì cho cả biểu thức  $\sqrt{x-3} > 0$ . Chú ý là ta chỉ cho biểu thức trong căn lớn hơn 0.
- Khử căn ở mẫu ở hai vế của một phương trình là phép biến đổi hệ quả.
- Chưa đối chiếu điều kiện dẫn tới kết luận tập nghiệm sai.

- ② Điều kiện  $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ .

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt{x+2}} &= \frac{4}{\sqrt{x+2}} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \cdot \sqrt{x+2} &= \frac{4}{\sqrt{x+2}} \cdot \sqrt{x+2} \\ \Rightarrow x^2 &= 4 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Giá trị  $x = 2$  thỏa mãn điều kiện  $x > -2$  và nghiệm đúng phương trình.

Giá trị  $x = -2$  không thỏa mãn điều kiện  $x > -2$  nên bị loại.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 2$ . □

**Ví dụ 3.** Giải phương trình

$$\textcircled{1} \sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0 \qquad \textcircled{2} \sqrt{\sqrt{x-1}}(x^2 - x - 2) = 0.$$

**Lời giải.**

**Phân tích**

Với dạng phương trình  $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$  ta thường có hai cách giải

— **Cách 1.** Tìm điều kiện của phương trình, sau đó biến đổi hệ quả.

— **Cách 2.** Sử dụng phép biến đổi tương đương:  $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$

① **Cách 1.**

Điều kiện của phương trình là  $x \geq 2$ . Ta có

$$\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là  $x = 2$  và  $x = 3$ .

**Cách 2.**

$$\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x > 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 2$  và  $x = 3$ .

② **Cách 1.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ . Ta có

$$\sqrt{\sqrt{x}-1}(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{x}-1} = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là  $x = 1$  và  $x = 2$ .

**Cách 2.**

$$\sqrt{\sqrt{x}-1}(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 1 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 1$  và  $x = 2$ .

Một số chú ý và sai lầm thường gặp.

— Với phương trình có dạng  $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$  học sinh hay quên đặt điều kiện cho  $f(x)$ .

— Nhiều em biến đổi  $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$

□

**Ví dụ 4.** Giải các phương trình

①  $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{4-2x}{x-2} - 5 = 0.$

③  $1 + \frac{1}{2-x} = \frac{6}{4-x^2}.$

②  $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{2x+5}{x^3+1}.$

④  $x + \frac{1}{x+2} = -\frac{2x+3}{x+2}.$

**Lời giải.**

**Phương pháp**

- Đặt điều kiện cho phương trình.
- Quy đồng và khử mẫu phân thức.
- Rút gọn và giải phương trình nhận được.
- Đối chiếu điều kiện và kết luận.

**Lời giải**

① Điều kiện  $x \neq 2$ . Biến đổi về trái ta được

$$\frac{3x + 1}{x - 2} - \frac{4 - 2x}{x - 2} - 5 = \frac{3x + 1 - 4 + 2x}{x - 2} - \frac{5(x - 2)}{x - 2} = \frac{7}{x - 2}.$$

Suy ra, ta có phương trình  $\frac{7}{x - 2} = 0$ . Vậy phương trình vô nghiệm.

② Điều kiện  $x \neq -1$ . Quy đồng hai vế ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 1 + 2(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} &= \frac{2x + 5}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ \Rightarrow x^2 - x + 1 + 2x + 2 &= 2x + 5 \quad (*) \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy  $x = -1$  bị loại.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 2$ .

Một số chú ý và sai lầm thường gặp

- Trước đẳng thức (\*) là dấu suy ra, không phải dấu tương đương.
- Quy đồng khử mẫu là phép biến đổi hệ quả.
- Chưa đối chiếu điều kiện dẫn tới kết luận tập nghiệm sai.

③ Điều kiện  $x \neq 2, x \neq -2$ . Quy đồng hai vế ta được

$$\begin{aligned} \frac{4 - x^2 + 2 + x}{(2 - x)(2 + x)} &= \frac{6}{(2 - x)(2 + x)} \\ \Leftrightarrow \frac{-4 + x^2 - 2 - x + 6}{(x - 2)(2 + x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{(x - 2)(2 + x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy cả 2 giá trị trên đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{0; 1\}$ .

④ Điều kiện  $x \neq -2$ . Quy đồng hai vế ta được

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x + 2} &= -\frac{2x + 3}{x + 2} \\ \Leftrightarrow \frac{x(x + 2) + 1}{x + 2} &= \frac{-2x - 3}{x + 2} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1 + 2x + 3}{x + 2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x+2} = 0 \\ &\Rightarrow x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Vì  $x = -2$  không thỏa mãn điều kiện nên phương trình vô nghiệm.  
 Vậy  $S = \emptyset$ .

□

**Ví dụ 5.** Giải các phương trình

$$\textcircled{1} \frac{2x}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \sqrt{3-x}.$$

$$\textcircled{3} \frac{(x-3)(x-4)}{\sqrt{x}-2} = 0.$$

$$\textcircled{2} \frac{x^2}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}.$$

$$\textcircled{4} \frac{2(x-1)^2}{(3-\sqrt{7+2x})^2} = x+20.$$

**Lời giải.**

**Phương pháp**

- Đặt điều kiện cho phương trình.
- Quy đồng và khử mẫu phân thức (ta thường sử dụng thêm nhân liên hợp).
- Rút gọn và giải phương trình nhận được.
- Đối chiếu điều kiện và kết luận.

**Lời giải**

$$\textcircled{1} \text{ Điều kiện } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \sqrt{3-x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3.$$

Qui đồng hai vế ta được

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{3-x}} = \frac{1-(3-x)}{\sqrt{3-x}}.$$

Khử mẫu ta được phương trình hệ quả  $\Rightarrow 2x = 1 - (3 - x)$ .

Giải phương trình ta nhận được  $2x = 1 - 3 + x \Leftrightarrow x = -2$ .

Đối chiếu điều kiện ta thấy  $x = -2$  thỏa mãn điều kiện.

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{-2\}$ .

Một số chú ý và sai lầm thường gặp

- Mẫu  $\sqrt{3-x}$  là căn của một biểu thức. Do đó ta thường làm nhanh đặt điều kiện cho biểu thức trong căn lớn hơn 0.
- Nhiều em khi đặt điều kiện  $\sqrt{3-x}$  cho thì cho cả biểu thức  $\sqrt{3-x} \geq 0$ . Chú ý là ta chỉ cho biểu thức trong căn lớn hơn hoặc bằng 0.
- Qui đồng khử mẫu là phép biến đổi hệ quả.
- Chưa đối chiếu điều kiện dẫn tới kết luận tập nghiệm sai.

$$\textcircled{2} \text{ Điều kiện } x > 2.$$

$$\text{Qui đồng hai vế ta được } \frac{x^2}{\sqrt{x-2}} = \frac{1-(x-2)}{\sqrt{x-2}}.$$

$$\text{Chuyển vế ta đưa về phương trình } \frac{x^2+x-3}{\sqrt{x-2}} = 0.$$

$$\Rightarrow x^2+x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Cả 2 nghiệm trên đều không thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

③ Điều kiện  $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4. \end{cases}$

Ta đưa về phương trình hệ quả

$$\frac{(x-3)(x-4)}{\sqrt{x}-2} = 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được phương trình có nghiệm là  $x = 3$ .

④ Điều kiện  $\begin{cases} 7 + 2x \geq 0 \\ 3 \neq \sqrt{7 + 2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$ . Ta có

Phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)^2 (3 + \sqrt{7 + 2x})^2}{(3 + \sqrt{7 + 2x})^2 (3 - \sqrt{7 + 2x})^2} = x + 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)^2 (10 + 2x + 6\sqrt{7 + 2x})}{(2 - 2x)^2} = x + 20$$

$$\Rightarrow 10 + 2x + 6\sqrt{7 + 2x} = 2(x + 20)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7 + 2x} = 5 \Leftrightarrow x = 9.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy  $x = 9$  thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 9$ .

□

**Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau

①  $\frac{\sqrt{3-x}}{x-3} = x + \sqrt{x-3}$ .

③  $x^2 + 1 + \sqrt{x-1} = 2x + \sqrt{x-1}$ .

②  $\sqrt{2x} = \sqrt{-x}$ .

④  $\sqrt{(x-3)^2(5-3x)} + 2x = \sqrt{3x-5} + 4$ .

**Lời giải.**

Phương pháp

— Đặt điều kiện cho phương trình.

— Dựa vào điều kiện đã tìm, lập luận để tìm ra nghiệm của phương trình.

Lời giải

① Điều kiện  $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \leq 3 \\ x \geq 3. \end{cases}$

Ta thấy không có giá trị nào của  $x$  thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình vô nghiệm.

② Điều kiện  $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ .

Nhận thấy  $x = 0$  là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là  $x = 0$ .

③ Điều kiện  $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ .

Với  $x \geq 1$  thì  $x^2 + 1 \geq 2x$ .

Suy ra  $VT \geq VP$ . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $x = 1$ .

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là  $x = 1$ .

$$\textcircled{4} \text{ Điều kiện } \begin{cases} (x-3)^2(5-3x) \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3 \\ x \leq \frac{5}{3} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Với  $x=3$  thì thay vào cả 2 vế ta được  $0+2 \cdot 3 = \sqrt{9-5} + 4 \Leftrightarrow 6 = 6$ .

Suy ra  $x=3$  là nghiệm của phương trình.

Với  $x = \frac{5}{3}$  thì thay vào cả 2 vế ta được  $0+2 \cdot \frac{5}{3} = 0+4$  (vô lí).

Suy ra  $x = \frac{5}{3}$  không là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm là  $x=3$ .

**⚠** Ở bài này học sinh hay quên  $x=3$  ở điều kiện. Chú ý rằng khi  $(x-3)^2 = 0$  thì cũng làm cho biểu thức  $(x-3)^2(5-3x) = 0$ .

□

**Ví dụ 7.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình hai ẩn sau rồi suy ra tập nghiệm của nó

$$\textcircled{1} \sqrt{x-2} + \sqrt{y-2} = \sqrt{4-x-y}.$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x-y} + \sqrt{y-x} = x^2 - 3y.$$

$$\textcircled{2} \sqrt{-x^2 - (y+1)^2} + xy = (x+1)(y+1).$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \text{ Điều kiện } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ y-2 \geq 0 \\ 4-x-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \\ x+y \leq 4. \end{cases}$$

$$\text{Từ đây ta suy ra } \begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=4.$$

Khi đó ta có  $\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2} = 0$ .

Vì  $\sqrt{x-2} \geq 0$  và  $\sqrt{y-2} \geq 0$  nên  $\sqrt{x-2} = \sqrt{y-2} = 0 \Rightarrow x = y = 2$ .

Thay  $x = y = 2$  vào phương trình ban đầu thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có một nghiệm  $(x; y) = (2; 2)$ .

$$\textcircled{2} \text{ Điều kiện } -x^2 - (y+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 \leq 0.$$

$$\text{Mà } x^2 \geq 0 \text{ và } (y+1)^2 \geq 0 \text{ nên } x^2 = (y+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1. \end{cases}$$

Thay  $x=0, y=-1$  vào phương trình ban đầu thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có một nghiệm  $(x; y) = (0; -1)$ .

$$\textcircled{3} \text{ Điều kiện } \begin{cases} x-y \geq 0 \\ y-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y \\ y \geq x \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$$

$$\text{Thay } x=y \text{ vào phương trình ban đầu ta được phương trình } x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3. \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x=y=0$  và  $x=y=3$ .

□

**Ví dụ 8.** Tìm nghiệm  $(x; y)$  với là số nguyên dương của phương trình sau

$$\sqrt{20-8x} + \sqrt{6x^2-y^2} = y\sqrt{7-4x}.$$

**Lời giải.**

$$\text{Nếu phương trình có nghiệm } (x; y) \text{ thì } x \text{ phải thỏa mãn } \begin{cases} 20-8x \geq 0 \\ 7-4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{20}{8} \\ x \leq \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4}.$$

Vì  $x$  là số nguyên dương nên  $x=1$ .

Thay  $x = 1$  vào phương trình ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{12} + \sqrt{6 - y^2} &= y\sqrt{3} \quad (*) \\ \Rightarrow \sqrt{6 - y^2} &= \sqrt{3}(y - 2) \Rightarrow 6 - y^2 = 3(y - 2)^2 \\ \Rightarrow 4y^2 - 12y + 6 &= 0 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Thử vào phương trình (\*) thấy chỉ có  $y = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$  là thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài là  $(x; y) = \left(1; \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)$ . □

### E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{2x}{x^2 + 1} - 5 = \frac{3}{x^2 + 1}$  là

- A.  $x \neq 1$ .                      B.  $x \neq -1$ .                      C.  $x \neq \pm 1$ .                      D.  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Vì  $x^2 + 1 \neq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **(D)**. □

**Câu 2.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$  là

- A.  $x > 3$ .                      B.  $x \geq 2$ .                      C.  $x \geq 1$ .                      D.  $x \geq 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi  $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$ .

Chọn đáp án **(D)**. □

**Câu 3.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-2} + \frac{x^2 + 5}{\sqrt{7-x}} = 0$  là

- A.  $x \geq 2$ .                      B.  $x < 7$ .                      C.  $2 \leq x \leq 7$ .                      D.  $2 \leq x < 7$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi  $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7$ .

Chọn đáp án **(D)**. □

**Câu 4.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$  là

- A.  $x \geq 0$ .                      B.  $x > 0$ .  
C.  $x > 0$  và  $x^2 - 1 \geq 0$ .                      D.  $x \geq 0$  và  $x^2 - 1 > 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi  $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(C)**. □

**Câu 5.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{x^2}{\sqrt{x-2}} = \frac{8}{\sqrt{x-2}}$  là

- A.  $x \neq 2$ .                      B.  $x \geq 2$ .                      C.  $x < 2$ .                      D.  $x > 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi  $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ .

Chọn đáp án **(D)**. □

**Câu 6.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{1}{x^2 - 4} = \sqrt{x + 3}$  là

- A.  $x \geq -3$  và  $x \neq \pm 2$ .                      B.  $x \neq \pm 2$ .                      C.  $x > -3$  và  $x \neq \pm 2$ .                      D.  $x \geq -3$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi  $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geq -3 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(A)**. □

**Câu 7.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}$  là

- A.  $x \geq 2$  hoặc  $x \leq -2$ .    B.  $x \geq 2$  hoặc  $x < -2$ .    C.  $x > 2$  hoặc  $x < -2$ .    D.  $x > 2$  hoặc  $x \leq -2$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi 
$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 8.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{3-2x}}{x}$  là

- A.  $x > -2$  và  $x \neq 0$ .    B.  $x > -2, x \neq 0$  và  $x \leq \frac{3}{2}$ .  
C.  $x > -2$  và  $x < \frac{3}{2}$ .    D.  $x \neq -2$  và  $x \neq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi 
$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **B** □

**Câu 9.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + 2 - \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{4-3x}}{x+1}$  là

- A.  $x > -2$  và  $x \neq -1$ .    B.  $x > -2$  và  $x < \frac{4}{3}$ .  
C.  $x + 1 = (2 - x)^2$ , và  $x \leq \frac{4}{3}$ .    D.  $x \neq -2$  và  $x \neq -1$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi 
$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 4 - 3x \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \frac{4}{3} \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 10.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+3x} = 0$  là

- A.  $x \geq -\frac{1}{2}$ .    B.  $x \geq -\frac{1}{2}$  và  $x \neq -3$ .    C.  $x \geq -\frac{1}{2}$  và  $x \neq 0$ .    D.  $x \neq -3$  và  $x \neq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi 
$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 11.** Hai phương trình được gọi là tương đương khi

- A. Có cùng dạng phương trình.    B. Có cùng tập xác định.  
C. Có cùng tập hợp nghiệm.    D. Tất cả đều đúng.

**Lời giải.**

Theo định nghĩa phương trình tương đương.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 12.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình  $x^2 - 4 = 0$ ?

- A.  $(2 + x)(-x^2 + 2x + 1) = 0$ .    B.  $(x - 2)(x^2 + 3x + 2) = 0$ .  
C.  $\sqrt{x^2 - 3} = 1$ .    D.  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S_0 = \{-2; 2\}$ .

+) Ta có  $(2 + x)(-x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ -x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của

phương trình là  $S_1 = \{-2; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\} \neq S_0$ .

+) Ta có  $(x - 2)(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình

là  $S_2 = \{-2; -1; 2\} \neq S_0$ .

+) Ta có  $\sqrt{x^2 - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình là  $S_3 = \{-2; 2\} = S_0$ .

+) Ta có  $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình là  $S_4 = \{2\} \neq S_0$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 13.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình  $x^2 - 3x = 0$ ?

**A.**  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$ .

**B.**  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$ .

**C.**  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$ .

**D.**  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S_0 = \{0; 3\}$ .

+) Ta có  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ . Do đó, tập nghiệm của phương

trình là  $S_1 = \{3\} \neq S_0$ .

+) Ta có  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình là  $S_2 = \{0\} \neq S_0$ .

+) Ta có  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ . Do đó, tập nghiệm của phương

trình là  $S_3 = \{3\} \neq S_0$ .

+) Ta có  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình là

$S_4 = \{0; 3\} = S_0$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 14.** Cho phương trình  $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0$ . Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

**A.**  $x - 1 = 0$ .

**B.**  $x + 1 = 0$ .

**C.**  $x^2 + 1 = 0$ .

**D.**  $(x - 1)(x + 1) = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$  (vì  $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ).

Chọn đáp án **D** □

**Câu 15.** Phương trình nào sau đây **không** tương đương với phương trình  $x + \frac{1}{x} = 1$ ?

**A.**  $x^2 + \sqrt{x} = -1$ .

**B.**  $|2x - 1| + \sqrt{2x + 1} = 0$ .

**C.**  $x\sqrt{x-5} = 0$ .

**D.**  $7 + \sqrt{6x-1} = -18$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$  (vô nghiệm)

Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S_0 = \emptyset$ .

— Ta có  $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \sqrt{x} \geq 0$ . Do đó, phương trình  $x^2 + \sqrt{x} = -1$  vô nghiệm.

Tập nghiệm của phương trình là  $S_1 = \emptyset = S_0$ .

— Ta có  $|2x - 1| + \sqrt{2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| = 0 \\ \sqrt{2x + 1} = 0 \end{cases}$  (vô nghiệm). Do đó, phương trình

$|2x - 1| + \sqrt{2x + 1} = 0$  vô nghiệm. Tập nghiệm của phương trình là  $S_2 = \emptyset = S_0$ .

- Ta có  $x\sqrt{x-5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x-5}=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=5$ . Do đó, phương trình  $x\sqrt{x-5} = 0$  có tập nghiệm là  $S_3 = \{5\} \neq S_0$ .
- Ta có  $\sqrt{6x-1} \geq 0 \Rightarrow 7 + \sqrt{6x-1} \geq 7 > -18$ . Do đó, phương trình  $7 + \sqrt{6x-1} = -18$  vô nghiệm. Tập nghiệm của phương trình là  $S_4 = \emptyset = S_0$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 16.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}$ .  
 B.  $\sqrt{x-1} = 3x \Leftrightarrow x-1 = 9x^2$ .  
 C.  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2$ .  
 D.  $\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2x-3 = (x-1)^2$ .

**Lời giải.**

$3x + \sqrt{x-2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}$  đúng vì trừ hai vế cho  $\sqrt{x-2}$  không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 17.** Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1 = 0$ .  
 B.  $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = 0$ .  
 C.  $|x-2| = |x+1| \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+1)^2$ .  
 D.  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ .

**Lời giải.**

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  sai vì  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 18.** Chọn cặp phương trình tương đương trong các cặp phương trình sau:

- A.  $x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1}$  và  $x = 1$ .  
 B.  $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$  và  $x = 1$ .  
 C.  $\sqrt{x}(x+2) = \sqrt{x}$  và  $x+2 = 1$ .  
 D.  $x(x+2) = x$  và  $x+2 = 1$ .

**Lời giải.**

+) Ta có  $x + \sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ .

+) Ta có  $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

+) Ta có  $\sqrt{x}(x+2) = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ và } x+2=1 \Leftrightarrow x=-1$ .

Do đó,  $\sqrt{x}(x+2) = \sqrt{x}$  và  $x+2 = 1$  không phải là cặp phương trình tương đương.

+) Ta có  $x(x+2) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ và } x+2=1 \Leftrightarrow x=-1$ .

Do đó,  $x(x+2) = x$  và  $x+2 = 1$  không phải là cặp phương trình tương đương.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 19.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}$ .  
 B.  $\sqrt{x-1} = 3x \Leftrightarrow x-1 = 9x^2$ .  
 C.  $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2$ .  
 D.  $\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2x-3 = (x-1)^2$ .

**Lời giải.**

Trừ hai vế cho  $\sqrt{x-2}$  không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 20.** Chọn cặp phương trình không tương đương trong các cặp phương trình sau:

- A.  $x+1 = x^2 - 2x$  và  $x+2 = (x-1)^2$ .  
 B.  $3x\sqrt{x+1} = 8\sqrt{3-x}$  và  $6x\sqrt{x+1} = 16\sqrt{3-x}$ .  
 C.  $x\sqrt{3-2x} + x^2 = x^2 + x$  và  $x\sqrt{3-2x} = x$ .  
 D.  $\sqrt{x+2} = 2x$  và  $x+2 = 4x^2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{x+2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$ .

$x + 2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ . Do đó,  $\sqrt{x+2} = 2x$  và  $x + 2 = 4x^2$  không phải là cặp phương trình tương đương.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 21.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để cặp phương trình sau tương đương:  $2x^2 + mx - 2 = 0$  (1) và  $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0$  (2).

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m = 3$ .                      C.  $m = \frac{1}{2}$ .                      D.  $m = -2$ .

**Lời giải.**

Ta có (2)  $\Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + mx - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0. \end{cases}$

Do hai phương trình tương đương nên  $x = -2$  cũng là nghiệm của phương trình (1).

Thay  $x = -2$  vào (1), ta được  $2(-2)^2 + m(-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ .

Với  $m = 3$ , ta có

— (1) trở thành  $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$  hoặc  $x = \frac{1}{2}$ .

— (2) trở thành  $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$  hoặc  $x = \frac{1}{2}$ .

Suy ra hai phương trình tương đương. Vậy  $m = 3$  thỏa mãn.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để cặp phương trình sau tương đương:  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$  (1) và  $(m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$  (2).

- A.  $m = -5$ .                      B.  $m = -5; m = 4$ .                      C.  $m = 4$ .                      D.  $m = 5$ .

**Lời giải.**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (x-1)(mx - m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0. \end{cases}$

Do hai phương trình tương đương nên  $x = 1$  cũng là nghiệm của phương trình (2).

Thay  $x = 1$  vào (2), ta được  $(m-2) - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 4. \end{cases}$

Với  $m = -5$ , ta có

— (1) trở thành  $-5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$  hoặc  $x = 1$ .

— (2) trở thành  $-7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{7}$  hoặc  $x = 1$ .

Suy ra hai phương trình không tương đương.

Với  $m = 4$ , ta có

— (1) trở thành  $4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  hoặc  $x = 1$ .

— (2) trở thành  $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  hoặc  $x = 1$ .

Suy ra hai phương trình tương đương.

Vậy  $m = 4$  thỏa mãn.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 23.** Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 1$ .                      B.  $\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1$ .  
 C.  $|3x-2| = x-3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0$ .                      D.  $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow 3x - 12 = 0$ .

**Lời giải.**



Ta có:  $|3x - 2| = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (3x - 2)^2 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 8x^2 - 6x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

$8x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{4}.$

Do đó, phương trình  $8x^2 - 4x - 5 = 0$  không phải là hệ quả của phương trình  $|3x - 2| = x - 3$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 24.** Cho phương trình  $2x^2 - x = 0$ . Trong các phương trình sau đây, phương trình nào không phải là hệ quả của phương trình đã cho?

A.  $2x - \frac{x}{1-x} = 0.$

B.  $4x^3 - x = 0.$

C.  $(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0.$

D.  $2x^3 + x^2 - x = 0.$

**Lời giải.**

Ta có  $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S_0 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$ .

+) Ta có  $2x - \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 2x(1-x) - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$

Do đó, tập nghiệm của phương trình là  $S_1 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0$ .

+) Ta có  $4x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình là  $S_2 = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0$ .

+) Ta có  $(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$  (vô nghiệm). Do đó, tập nghiệm của phương trình là  $S_3 = \emptyset \not\supset S_0$ .

+) Ta có  $2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình là  $S_2 = \left\{-1; 0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 25.** Cho hai phương trình:  $x(x - 2) = 3(x - 2)$  (1) và  $\frac{x(x - 2)}{x - 2} = 3$  (2). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

B. Phương trình (1) và (2) là hai phương trình tương đương.

C. Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1).

D. Cả A, B, C đều sai.

**Lời giải.**

Ta có: Phương trình (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình 1 là  $S_1 = \{2; 3\}$ .

Phương trình (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ . Do đó, tập nghiệm của phương trình 2 là  $S_2 = 3$ .

Vì  $S_2 \subset S_1$  nên phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

Chọn đáp án **A** □

**Câu 26.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2x - x^2}$  là

A.  $S = \{0\}$ .

B.  $S = \emptyset$ .

C.  $S = \{0; 2\}$ .

D.  $S = \{2\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Thử lại ta thấy cả  $x = 0$  và  $x = 2$  đều thỏa mãn phương trình.

Chọn đáp án **C**

□

**Câu 27.** Phương trình  $x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Phương trình tương đương với 
$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ \sqrt{x - 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 1$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **B**

□

**Câu 28.** Phương trình  $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $-x^2 + 6x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 3$ .

Thử lại ta thấy  $x = 3$  thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **B**

□

**Câu 29.** Phương trình  $\sqrt{(x - 3)^2(5 - 3x)} + 2x = \sqrt{3x - 5} + 4$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện: 
$$\begin{cases} (x - 3)^2(5 - 3x) \geq 0 & (*) \\ 3x - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Ta thấy  $x = 3$  thỏa mãn điều kiện (\*).

Nếu  $x \neq 3$  thì (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 3x \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ .

Do đó điều kiện xác định của phương trình là  $x = 3$  hoặc  $x = \frac{5}{3}$ .

Thay  $x = 3$  và  $x = \frac{5}{3}$  vào phương trình thấy chỉ có  $x = 3$  thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **B**

□

**Câu 30.** Phương trình  $x + \sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - x}$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện 
$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Thử lại  $x = 1$  thì phương trình không thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Chọn đáp án **A**

□

**Câu 31.** Phương trình  $\sqrt{2x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x} + 2$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện: 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thử lại phương trình thấy  $x = 2$  thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

Chọn đáp án **B**

□

**Câu 32.** Phương trình  $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + x = \sqrt{2 - x}$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x-2) \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Thay  $x = 1$  và  $x = 2$  vào phương trình thấy chỉ có  $x = 1$  thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 33.** Phương trình  $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$  có bao nhiêu nghiệm?  
**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq 1$ .

Với điều kiện trên phương trình tương đương  $x^2 - x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1$  hoặc  $x = 2$ .

Đối chiếu điều kiện ta được phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 34.** Phương trình  $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq 3$ .

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \sqrt{x-3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 35.** Phương trình  $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq -1$ .

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là  $x = -1, x = 2$ . Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 36.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \sqrt{x-2} = 3 + \sqrt{x-2}$  là

**A.**  $x = 2$ . **B.**  $x \geq 3$ . **C.**  $x \geq 2$ . **D.**  $x = 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình có nghĩa khi  $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 37.** Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình  $x^2 - 3x = 0$

**A.**  $x^2 + \sqrt{2x-1} = 3x + \sqrt{2x-1}$ . **B.**  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$ .  
**C.**  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$ . **D.**  $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - 3x = 0$  có tập nghiệm là  $S = \{0; 3\}$ .

Phương trình  $x^2 + \sqrt{2x-1} = 3x + \sqrt{2x-1}$  có tập nghiệm là  $S = \{3\}$ .

Phương trình  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$  có tập nghiệm là  $S = \{0; 3\}$ .

Phương trình  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$  có tập nghiệm là  $S = \{3\}$ .

Phương trình  $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$  có tập nghiệm là  $S = \{3\}$ .

Do đó, phương trình  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$  tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 38.** Xác định số nghiệm của phương trình  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2}$ .  
 A. 2.                                      B. 3.                                      C. 1.                                      D. 0.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq 1, x \neq 2$ .

Phương trình đã cho tương đương với  $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

So điều kiện, ta loại nghiệm  $x = 2$  nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 39.** Cho hai phương trình  $x^2 - 3x - 5 = 0$  và  $-5x^2 - 3x + 1 = 0$ . Tính tổng tất cả các nghiệm của hai phương trình đã cho.

- A.  $\frac{17}{5}$ .                                      B.  $\frac{13}{3}$ .                                      C.  $\frac{12}{5}$ .                                      D.  $\frac{17}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có hai phương trình  $x^2 - 3x - 5 = 0$  (1) và  $-5x^2 - 3x + 1 = 0$  (2) mỗi phương trình luôn có hai nghiệm.

Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của (1),  $x_3, x_4$  là hai nghiệm của (2) khi đó  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + -\frac{3}{5} = \frac{12}{5}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 40.** Phương trình  $4x + \frac{3}{\sqrt{x+3}} = -x^2 + \frac{3}{\sqrt{x+3}}$  có bao nhiêu nghiệm?  
 A. 2.                                      B. 1.                                      C. 3.                                      D. 0.

**Lời giải.**

Điều kiện  $x > -3$ . (\*)

Khi đó, ta có  $4x + \frac{3}{\sqrt{x+3}} = -x^2 + \frac{3}{\sqrt{x+3}} \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (vì (*) nhận)} \\ x = -4 \text{ (vì (*) loại)}. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 41.** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{x-4} - x = 1 + \sqrt{x-4}$  là  
 A.  $x = -1$ .                                      B. Vô nghiệm.                                      C. Đáp án khác.                                      D.  $x = 4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq 4$ .

Ta có  $\sqrt{x-4} - x = 1 + \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x = -1$  (loại).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 42.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-2} + \frac{6}{x-3} = 4$  là tập nào sau đây?  
 A.  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .                                      B.  $[2; +\infty)$ .                                      C.  $\mathbb{R}$ .                                      D.  $[2; +\infty) \setminus \{3\}$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi  $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 43.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$  là  
 A.  $2 \leq x \leq 7$ .                                      B.  $x < 7$ .                                      C.  $x \geq 2$ .                                      D.  $2 \leq x < 7$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 44.** Phương trình nào sau đây nhận 2 làm nghiệm?

- A.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ .                                      B.  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .  
 C.  $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ .                                      D.  $\sqrt{1-x} + x = \sqrt{1-x} + 2$ .

**Lời giải.**

Thay  $x = 2$  vào từng phương trình trên, ta thấy 2 là nghiệm của phương trình  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 45.** Một học sinh giải phương trình  $x + \sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{x+3}$  (\*) như sau:

Bước 1. (\*)  $\Rightarrow x + 2 = 0$ ;

Bước 2.  $\Leftrightarrow x = -2$ ;

Bước 3. Thử lại ta thấy phương trình có nghiệm  $x = -2$ .

Lời giải trên đúng hay **sai**, nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

- A. Lời giải đúng.
- B. Lời giải sai từ bước 1.
- C. Lời giải sai từ bước 2.
- D. Lời giải sai từ bước 3.

**Lời giải.**

Ta có  $x + \sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{x+3} \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ .

Với  $x = -2$ , thay vào phương trình (\*) ta thấy thỏa mãn.

Vậy  $x = -2$  là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 46.** Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây?

- A.  $\sqrt{1-x^2} + x = \sqrt{1-x^2} + 2 \Leftrightarrow x = 2$ .
- B.  $\sqrt{x} = \sqrt{-x} \Leftrightarrow x = 0$ .
- C.  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .
- D.  $(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

**Lời giải.**

- ① Xét phương trình  $\sqrt{1-x^2} + x = \sqrt{1-x^2} + 2$ .  
 Điều kiện xác định  $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ .  
 Ta có  $\sqrt{1-x^2} + x = \sqrt{1-x^2} + 2 \Leftrightarrow x = 2$  (không thỏa mãn điều kiện).  
 Vậy phương trình vô nghiệm.
- ② Xét phương trình  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ .  
 Điều kiện xác định  $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ .  
 Thay  $x = 0$  vào phương trình ta thấy thỏa mãn.  
 Vậy  $x = 0$  là nghiệm của phương trình.
- ③ Xét phương trình  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .
- ④ Xét phương trình  $(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 47.** Cho phương trình  $f(x) = g(x)$  xác định với mọi  $x > 0$ . Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào **không** tương đương với phương trình đã cho?

- A.  $k \cdot f(x) = k \cdot g(x)$ , với mọi số thực  $k \neq 0$ .
- B.  $(x^2 + 1) \cdot f(x) = (x^2 + 1) \cdot g(x)$ .
- C.  $\sqrt{x^2 + 2x + 3} \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \cdot g(x)$ .
- D.  $\frac{f(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{g(x)}{\sqrt{-x}}$ .

**Lời giải.**

- ① Xét  $k \cdot f(x) = k \cdot g(x)$ .  
 Vì  $k \neq 0$  nên  $k \cdot f(x) = k \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ .
- ② Xét  $(x^2 + 1) \cdot f(x) = (x^2 + 1) \cdot g(x)$ .  
 Vì  $x^2 + 1 \neq 0$  nên  $(x^2 + 1) \cdot f(x) = (x^2 + 1) \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ .
- ③ Xét  $\sqrt{x^2 + 2x + 3} \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \cdot g(x)$ .  
 Vì  $x^2 + 2x + 3 > 0$  với mọi  $x$  nên  $\sqrt{x^2 + 2x + 3} \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ .
- ④ Xét  $\frac{f(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{g(x)}{\sqrt{-x}}$ .  
 Điều kiện xác định  $x < 0$ .  
 Ta có  $\frac{f(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{g(x)}{\sqrt{-x}} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  với  $x < 0$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 48.** Cho phương trình  $\sqrt{x^3-1} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ . Tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho.

- A.  $x \leq -2$  và  $x \geq 2$ .
- B.  $x \geq 2$ .
- C.  $x > 2$ .
- D.  $x \geq 1$  và  $x \neq 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của hàm số là:  $\begin{cases} x^3 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Chọn đáp án **C**

**Câu 49.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \sqrt{x-2} = 3 + \sqrt{x-2}$  là

- A.  $x = 2.$                       B.  $x \geq 3.$                       C.  $x \geq 2.$                       D.  $x = 3.$

**Lời giải.**

Phương trình có nghĩa khi  $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Chọn đáp án **C**

**Câu 50.** Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình  $x^2 - 3x = 0$

- A.  $x^2 + \sqrt{2x-1} = 3x + \sqrt{2x-1}.$                       B.  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}.$   
 C.  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}.$                       D.  $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}.$

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - 3x = 0$  có tập nghiệm là  $S = \{0; 3\}.$

Phương trình  $x^2 + \sqrt{2x-1} = 3x + \sqrt{2x-1}$  có tập nghiệm là  $S = \{3\}.$

Phương trình  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$  có tập nghiệm là  $S = \{0; 3\}.$

Phương trình  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$  có tập nghiệm là  $S = \{3\}.$

Phương trình  $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$  có tập nghiệm là  $S = \{3\}.$

Do đó, phương trình  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$  tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **C**

**Câu 51.** Xác định số nghiệm của phương trình  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2}.$

- A. 2.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 0.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq 1, x \neq 2.$

Phương trình đã cho tương đương với  $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

So điều kiện, ta loại nghiệm  $x = 2$  nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **D**

**Câu 52.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \sqrt{x-2} = 3 + \sqrt{x-2}$  là

- A.  $x = 2.$                       B.  $x \geq 3.$                       C.  $x \geq 2.$                       D.  $x = 3.$

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình xác định là  $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Chọn đáp án **C**

**Câu 53.** Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình  $x^2 - 3x = 0$ ?

- A.  $x^2 + \sqrt{2x-1} = 3x + \sqrt{2x-1}.$                       B.  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}.$   
 C.  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}.$                       D.  $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}.$

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{0; 3\}.$

Trong các trường phương án thì phương trình  $x^2 + \sqrt[3]{x-3} = 3x + \sqrt[3]{x-3}$  có cùng tập nghiệm.

Chọn đáp án **C**

**Câu 54.** Cặp  $(x; y) = (1; 2)$  là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A.  $x - 2y = 5.$                       B.  $0x + 3y = 5.$                       C.  $3x + 2y = 7.$                       D.  $3x - 2y = 4.$

**Lời giải.**

Ta có  $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$  nên cặp  $(1; 2)$  là nghiệm của phương trình  $3x + 2y = 7.$

Chọn đáp án **C**

**Câu 55.** Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Mọi  $x, y \in \mathbb{R}$  là nghiệm của phương trình  $2x - 3y + 4 = 0.$   
 B. Tập nghiệm của phương trình  $2x - 3y + 4 = 0$  có biểu diễn hình học là một đường thẳng.

C. (1; 2) là một nghiệm của phương trình  $2x - 3y + 4 = 0$ .

D. Phương trình  $2x - 3y + 4 = 0$  có vô số nghiệm.

**Lời giải.**

Ta thấy  $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4 = 4 \neq 0$  nên (0; 0) không là nghiệm của phương trình  $2x - 3y + 4 = 0$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 56.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $x^2 + 3 = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ .

A.  $x \in \mathbb{R}$ .

B.  $x \in [1; +\infty)$ .

C.  $x \in (1; +\infty)$ .

D.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x - 1 > 0$  hay  $x > 1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 57.** Điều kiện của phương trình  $\frac{4x}{x-3} + x = 0$  là

A.  $x \geq 3$ .

B.  $x > 3$ .

C.  $x \neq -3$ .

D.  $x \neq 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 58.** Điều kiện của phương trình  $\sqrt{x-5} = \sqrt{5-x}$  là

A.  $x \geq 5$ .

B.  $x = 5$ .

C.  $x \leq 5$ .

D.  $-5 \leq x \leq 5$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 59.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\frac{3x+1}{x-5} = \frac{16}{x-5}$ .

A.  $S = \emptyset$ .

B.  $S = \{5\}$ .

C.  $S = \left\{\frac{17}{3}\right\}$ .

D.  $S = \left\{\frac{47}{3}\right\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 5$  (\*)

Với điều kiện (\*), phương trình đã cho tương đương với  $3x + 1 = 16 \Leftrightarrow x = 5$  (không thỏa mãn điều kiện (\*)).

Vậy  $S = \emptyset$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 60.** Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình  $x^2 = 1$ ?

A.  $|x| = 1$ .

B.  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .

C.  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .

D.  $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 = 1$  và phương trình  $|x| = 1$  có cùng tập nghiệm  $S = \{-1; 1\}$  nên chúng tương đương.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 61.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{\frac{1}{x-1}} = \frac{x-1}{x}$ .

A.  $x \geq 0$ .

B.  $x > 1$ .

C.  $x \geq 1$ .

D.  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} \frac{1}{x-1} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 62.** Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A.  $\frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-4}} = 0$ .

B.  $\sqrt{2x-3} = -6$ .

C.  $\frac{x^2 - 7x + 6}{\sqrt{1-x}} = 0$ .

D.  $\frac{2x-1}{x} = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{2x-1}{x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x-1 = x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 63.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của phương trình  $x^2 + 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ .

- A.  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .                      B.  $\mathcal{D} = [1; +\infty)$ .                      C.  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ .                      D.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho xác định khi  $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 64.** Cho phương trình  $\frac{x-2}{\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A.  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.                      B.  $x = -2$  là nghiệm của phương trình.  
C.  $x = 4$  là nghiệm của phương trình.                      D. Phương trình vô nghiệm.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x > 3$ .

Phương trình đã cho tương đương  $\begin{cases} x > 3 \\ x - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 65.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{2x-3} = \sqrt{7-x}$ .

- A.  $x \geq \frac{3}{2}$ .                      B.  $x \leq 7$ .                      C.  $\frac{3}{2} < x < 7$ .                      D.  $\frac{3}{2} \leq x \leq 7$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 7$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 66.** Tìm  $m$  để phương trình  $2x^2 - 3x + 5 - 2m = 0$  nhận  $x = -4$  làm nghiệm.

- A.  $m = \frac{49}{2}$ .                      B.  $m = -\frac{49}{2}$ .                      C.  $m = 49$ .                      D.  $m = -49$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm là  $x = -4$  khi và chỉ khi

$$2 \cdot (-4)^2 - 3 \cdot (-4) + 5 - 2m = 0 \Leftrightarrow 49 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{49}{2}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 67.** Cho hai phương trình  $|x| = 1$  (1) và  $x^2 - 3x + 2 = 0$  (2). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (1) là hệ quả của (2).  
B. (2) là hệ quả của (1).  
C. (1)  $\Leftrightarrow$  (2).  
D.  $x = 1$  là nghiệm chung của hai phương trình.

**Lời giải.**

Để thấy  $x = 1$  là nghiệm chung của hai phương trình.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 68.** Trong các cặp phương trình sau, cặp phương trình nào tương đương với nhau?

- A.  $|x| = 2$  và  $x - 2 = 0$ .                      B.  $|x - 2| = 1$  và  $|x| - 2 = 1$ .  
C.  $x^2 + 3|x| + 2 = 0$  và  $x^2 + 3x + 2 = 0$ .                      D.  $2x - 1 = 0$  và  $\frac{(x+2)(2x-1)}{\sqrt{x+1}} = 0$ .

**Lời giải.**

Để thấy, phương trình  $2x - 1 = 0$  có tập nghiệm là  $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ . Ta có

$$\frac{(x+2)(2x-1)}{\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x+2)(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy hai phương trình có cùng tập nghiệm, hay chúng tương đương với nhau.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 69.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$  với tham số  $m$ . Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm (nếu có) của phương trình. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?



A. Khi  $m = 3$  thì  $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$ .

C. Khi  $m = 1$  thì  $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$ .

B. Khi  $m = 2$  thì  $|x_1 - x_2| = 4$ .

D. Tồn tại giá trị của  $m$  để  $x_1 = x_2$ .

**Lời giải.**

$\Delta = m^2 - m + 2 > 0$  với mọi  $m$ . Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy không thể tồn tại giá trị của  $m$  để  $x_1 = x_2$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 70.** Cho phương trình  $a(x - a + 2) = a(x - 1) + 2$ . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau đây

A. Nếu  $a = 0$  thì phương trình có nghiệm.

B. Nếu  $a \neq 1$  thì phương trình vô nghiệm.

C. Nếu  $a \neq 2$  thì phương trình vô nghiệm.

D. Nếu  $a \neq 1$  và  $a \neq 2$  thì phương trình vô nghiệm.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với  $a^2 - 3a + 2 = 0$  (trong đó  $a$  là tham số).

Khi đó phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi  $a^2 - 3a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 71.** Phương trình nào sau đây là phương trình hệ quả của phương trình  $\frac{2x+4}{2-x} = \frac{-x^2+4}{x-2}$ ?

A.  $(5x+6)(x-4) = x^2(4-x)$ .

B.  $(x-2)^2 = 0$ .

C.  $x^2 - 6x + 8 = 0$ .

D.  $(x-2)(2x+4) = (x-2)(-x^2+4)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq 2$ .

Ta có  $\frac{2x+4}{2-x} = \frac{-x^2+4}{x-2} \Leftrightarrow 2x+4 = x^2-4 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$ .

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{4; -2\}$ .

Xét từng đáp án ta có

$$\text{— } (5x+6)(x-4) = x^2(4-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ 5x+6 = -x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x^2+5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Nên có tập nghiệm là  $\{-3; -2; 4\}$ .

$$\text{— } (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2. \text{ Nên có tập nghiệm là } \{2\}.$$

$$\text{— } x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}. \text{ Nên có tập nghiệm là } \{2; 4\}.$$

$$\text{— } (x-2)(2x+4) = (x-2)(-x^2+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2x+4 = -x^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Nên có tập nghiệm là  $\{-2; 0; 2\}$ .

Vậy phương trình hệ quả của phương trình đã cho là  $(5x+6)(x-4) = x^2(4-x)$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 72.** Tập xác định của phương trình  $\frac{2x+1}{\sqrt{4-5x}} + 2x - 3 = 5x - 1$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{4}{5} \right\}$ .

B.  $\left( -\infty; \frac{4}{5} \right]$ .

C.  $\left( -\infty; \frac{4}{5} \right)$ .

D.  $\left( \frac{4}{5}; +\infty \right)$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi và chỉ khi  $4 - 5x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}$ .

Vậy tập xác định của phương trình là  $\mathcal{D} = \left( -\infty; \frac{4}{5} \right)$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 73.** Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình  $x - 1 = 0$ ?

- A.  $2x - 2 = 0$ .      B.  $x + 2 = 0$ .      C.  $(x - 1)(x + 2) = 0$ .      D.  $x + 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

—  $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

—  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .

—  $(x + 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$

—  $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

Vậy  $2x - 2 = 0$  tương đương với  $x - 1 = 0$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 74.** Số nghiệm của phương trình  $x + \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - x} + 4$  là

- A. Một nghiệm.      B. Vô nghiệm.      C. Vô số nghiệm.      D. Hai nghiệm.

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$ .

Thế  $x = 4$  vào phương trình  $x + \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - x} + 4$  ta thấy thỏa mãn, nên phương trình có nghiệm là  $x = 4$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 75.** Tập nghiệm của phương trình  $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2$  là

- A.  $S = \mathbb{R}$ .      B.  $S = \{-2\}$ .      C.  $S = \emptyset$ .      D.  $S = \{0\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq 0$ .

$x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow x = -2$  (loại).

Vậy tập nghiệm phương trình là  $S = \emptyset$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 76.** Điều kiện xác định của phương trình  $x - 3\sqrt{x - 5} = 0$  là

- A.  $x > 5$ .      B.  $x \leq 5$ .      C.  $x \geq 5$ .      D.  $x \geq 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 77.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $a$  để phương trình  $5x - 3 = -a + 3x$  có nghiệm âm.

- A.  $a < 3$ .      B.  $a \neq 3$ .      C.  $a > 3$ .      D.  $a > 0$ .

**Lời giải.**

$5x - 3 = -a + 3x \Leftrightarrow x = \frac{3 - a}{2}$ . Để phương trình có nghiệm âm thì  $\frac{3 - a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > 3$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 78.** Phương trình  $x^2 = 3x$  tương đương với phương trình nào sau đây?

- A.  $x^2 + \sqrt{x - 2} = 3x + \sqrt{x - 2}$ .      B.  $x^2 + \frac{1}{x - 3} = 3x + \frac{1}{x - 3}$ .  
C.  $2x^2 + \sqrt{x + 1} = 6x + \sqrt{x + 1}$ .      D.  $x^2 \cdot \sqrt{x - 3} = 3x \cdot \sqrt{x - 3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

Ta xét các phương trình

①  $x^2 + \sqrt{x - 2} = 3x + \sqrt{x - 2}$ .

Điều kiện:  $x \geq 2$ .

Phương trình trở thành  $x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(loại)} \\ x = 3 & \text{(nhận)}. \end{cases}$

Vậy phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

②  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$ .

Điều kiện:  $x \neq 3$ .

Phương trình trở thành  $x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(nhận)} \\ x = 3 & \text{(loại)}. \end{cases}$

Vậy phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

③  $2x^2 + \sqrt{x+1} = 6x + \sqrt{x+1}$ .

Điều kiện:  $x \geq -1$ .

Phương trình trở thành  $2x^2 = 6x \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(nhận)} \\ x = 3 & \text{(nhận)}. \end{cases}$

Vậy phương trình này tương đương với phương trình đã cho.

④  $x^2 \cdot \sqrt{x-3} = 3x \cdot \sqrt{x-3}$ .

Điều kiện:  $x \geq 3$ .

$x^2 \cdot \sqrt{x-3} = 3x \cdot \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện thì phương trình có nghiệm  $x = 3$ .

Vậy phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 79.** Cho phương trình  $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{-x} = 0$  có tập nghiệm là  $S$ . Số phần tử của tập  $S$  là

- A. 0.    B. 2.    C. 3.    D. 1.

**Lời giải.**

Điều kiện  $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ .

Có  $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 0. \end{cases}$

So với điều kiện ta nhận các nghiệm  $x = -2; x = 0$ .

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 80.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $3x + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x-1}$ .

- A.  $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$ .    B.  $S = \left\{ 1; \frac{4}{3} \right\}$ .    C.  $S = \emptyset$ .    D.  $S = \{1\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ .

Tuy nhiên,  $x = 1$  không thỏa mãn phương trình  $3x + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x-1}$  nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 81.** Cho phương trình  $\sqrt{x+1} = x-1$  (1). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Phương trình (1) có tập xác định là  $[1; +\infty)$ .  
 B. Phương trình (1) tương đương với phương trình  $x+1 = (x-1)^2$ .  
 C. Tập xác định của phương trình (1) chứa đoạn  $[-1; 1]$ .  
 D. Phương trình (1) vô nghiệm.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$ .

Ta có  $\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ .

Suy ra phương trình có nghiệm  $x = 3$ .

Vậy khẳng định “Tập xác định của phương trình (1) chứa đoạn  $[-1; 1]$ ” là khẳng định đúng.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 82.** Cho phương trình  $ax + b = 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu  $a \neq 0$  thì phương trình có một nghiệm duy nhất.

- B. Nếu  $a = 0$  và  $b \neq 0$  thì phương trình có nghiệm.
- C. Nếu  $a = 0$  và  $b = 0$  thì phương trình vô nghiệm.
- D. Nếu  $a = 0$  thì phương trình có nghiệm.

**Lời giải.**

Nếu  $a = 0$  thì phương trình trở thành  $0x = -b$ . Khi đó nếu  $b \neq 0$  thì phương trình vô nghiệm và  $b = 0$  thì phương trình có nghiệm.

Nếu  $a \neq 0$  thì phương trình có một nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 83.** Tích các nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x - 2 = 0$  là

- A. 2.
- B. -2.
- C. 3.
- D. -3.

**Lời giải.**

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 84.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$  là

- A.  $2 \leq x < 7$ .
- B.  $x \geq 2$ .
- C.  $2 \leq x \leq 7$ .
- D.  $x < 7$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi  $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 85.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình  $x^2 = 3x$ ?

- A.  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$ .
- B.  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ .
- C.  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$ .
- D.  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

—  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

—  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

—  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

—  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy phương trình " $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ " tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 86.** Điều kiện xác định của phương trình  $x^2 + 2x = \sqrt{x-3} - 1$  là

- A.  $x \geq 1$ .
- B.  $x \geq 3$ .
- C.  $x > 3$ .
- D.  $x \geq 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $x^2 + 2x = \sqrt{x-3} - 1$  là  $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 87.** Phương trình  $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2.
- B. 1.
- C. Vô số nghiệm.
- D. Vô nghiệm.

**Lời giải.**

Phương trình  $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$  xác định khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ . Thử  $x = 2$  vào phương trình ta thấy thỏa nên phương trình có một nghiệm duy nhất là  $x = 2$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 88.** Tìm tập xác định của phương trình  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$ .

- A.  $\mathcal{D} = [3; +\infty)$ .      B.  $\mathcal{D} = [2; +\infty)$ .      C.  $\mathcal{D} = (3; +\infty)$ .      D.  $\mathcal{D} = [1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình có nghĩa là  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$ .

Vậy tập xác định của phương trình là  $\mathcal{D} = [3; +\infty)$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 89.** Cho phương trình  $(x^2+9) \cdot (x-9) \cdot (x+9) = 0$ . Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

- A.  $x+9=0$ .      B.  $x-9=0$ .      C.  $(x-9) \cdot (x+9) = 0$ .      D.  $x^2+9=0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(x^2+9) \cdot (x-9) \cdot (x+9) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 9$ .

Trong các phương trình đã cho thì chỉ có phương trình  $(x-9) \cdot (x+9) = 0$  cũng có các nghiệm là  $x = \pm 9$ . Do đó phương trình này tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 90.** Điều kiện xác định của phương trình  $x - 2\sqrt{x-3} = 0$  là

- A.  $x \geq 3$ .      B.  $x \leq 3$ .      C.  $x < 3$ .      D.  $x > 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định  $\Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 91.** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A.  $x - \sqrt{x-3} = 3 + \sqrt{x-3}$ .      B.  $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 2$ .  
C.  $\sqrt{x-4} + 2 = x + \sqrt{4-x}$ .      D.  $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\sqrt{x-4} + 2 = x + \sqrt{4-x}$  điều kiện xác định  $x = 4$ .

Thay  $x = 4$  và phương trình ta được  $0 + 2 = 4 + 0$  vô lý, vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 92.** Tìm điều kiện của ẩn số  $x$  để phương trình  $\sqrt{x+1} = 2-x$  xác định.

- A.  $x \leq -1$ .      B.  $x \leq 2$ .      C.  $x \geq -1$ .      D.  $x \geq 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 93.** Phương trình nào sau đây là phương trình hệ quả của phương trình  $\frac{x^2+x}{x+1} = 3$ ?

- A.  $3(x^2+x) = x+1$ .      B.  $x^2-2x-3=0$ .      C.  $x^2+x=3$ .      D.  $x^2+x=0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{x^2+x}{x+1} = 3 \Rightarrow x^2+x = 3(x+1) \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ .

Vậy  $x^2-2x-3=0$  là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 94.** Phương trình  $x^2-4x+3=0$  có tập nghiệm là tập hợp nào sau đây?

- A.  $T = \{-3; -1\}$ .      B.  $W = \{1; 3\}$ .      C.  $S = (1; 3)$ .      D.  $V = (-3; -1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$ .

Tập nghiệm của phương trình là  $W = \{1; 3\}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 95.** Cho phương trình  $2x - \frac{3}{x} = x^2 - \frac{3}{x}$  (1). Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình (1)?

A.  $2x = x^2$ .

B.  $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$ .

C.  $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^2$ .

D.  $2x^2 - 3 = x^2 - 3$ .

**Lời giải.**

Chuyển vế và đổi dấu là một phép biến đổi tương đương, do đó  $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$  tương đương với (1).

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 96.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{2-x} + \sqrt{7+x} = 2$  là

A.  $x \in (-7; 2)$ .

B.  $x \in [2; +\infty)$ .

C.  $x \in [-7; 2]$ .

D.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7; 2\}$ .

**Lời giải.**

ĐKXD:  $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 7+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7. \end{cases}$

Vậy  $\mathcal{D} = [-7; 2]$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 97.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$  là

A.  $x \geq -2$ .

B.  $x > 1$ .

C.  $\begin{cases} x \geq -2 \\ x > 1 \end{cases}$ .

D.  $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình là

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \\ x^2-2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in \mathbb{R} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 98.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\frac{\sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{4-x^2}}{x(x+2)} = 0$ .

A.  $S = \{2\}$ .

B.  $S = \{2; 3\}$ .

C.  $S = \{3\}$ .

D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x^2-3x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \\ x(x+2) \neq 0 \end{cases}$ . Khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{4-x^2}}{x(x+2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x = 0 \\ 4-x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy không có giá trị  $x$  nào thỏa mãn nên phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 99.** Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình  $x - 1 = 0$ ?

A.  $x + 2 = 0$ .

B.  $x + 1 = 0$ .

C.  $2x - 2 = 0$ .

D.  $(x - 1)(x + 2) = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . Ngoài ra, ta có

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ,

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ,

$2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ,

$(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 100.** Cho phương trình  $f(x) = 0$  có tập nghiệm  $S_1 = \{m; 2m - 1\}$  và phương trình  $g(x) = 0$  có tập nghiệm  $S_2 = [1; 2]$ . Tìm tất cả giá trị  $m$  để phương trình  $g(x) = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = 0$ .

- A.  $1 < m < \frac{3}{2}$ .      B.  $1 \leq m \leq 2$ .      C.  $m \in \emptyset$ .      D.  $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Để phương trình  $g(x) = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = 0$  thì

$$\begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq 2m - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 101.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{2x}{x^2 + 1} - 5 = \frac{3}{x^2 + 1}$  là

- A.  $x \neq 1$ .      B.  $\forall x \in \mathbb{R}$ .      C.  $x \neq 1$  và  $x \neq -1$ .      D.  $x \neq -1$ .

**Lời giải.**

Do  $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình đã cho xác định  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 102.** Cho phương trình  $\frac{16}{x^3} + x - 4 = 0$ , giá trị nào của  $x$  là nghiệm của phương trình đã cho?

- A.  $x = 2$ .      B.  $x = 0$ .      C.  $x = 3$ .      D.  $x = 5$ .

**Lời giải.**

Cách 1: Nhận thấy thay  $x = 2$  vào phương trình thấy thỏa mãn nên  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.

Cách 2: Điều kiện:  $x \neq 0$ .

Phương trình tương đương với  $x^4 - 4x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3,67857351. \end{cases}$

Do đó  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 103.** Trong các phép biến đổi sau, biến đổi nào **sai**?

- A.  $x - 1 = 2x - 3 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3)$ .  
 B.  $x - 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3)$ .  
 C.  $(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x - 3 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$ .  
 D. Nếu  $x > -1$  thì  $(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3) \Leftrightarrow x - 1 = 2x - 3$ .

**Lời giải.**

Nhận thấy trong đáp án B phương trình  $x - 1 = 2x - 3$  có nghiệm  $x = 2$  trong khi phương trình  $(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3)$  có nghiệm  $x = -1; x = 2$ .

Hai phương trình không có cùng tập nghiệm nên không tương đương

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 104.** Tìm tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x - 2}$ .

- A.  $S = \{-1; 2\}$ .      B.  $S = \{0\}$ .      C.  $S = \{2\}$ .      D.  $S = \{0; 2\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ .

Ta có

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

So với điều kiện xác định, ta được tập nghiệm cần tìm là  $S = \{2\}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 105.** Tìm tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{x - 5} = 2$ .

- A.  $S = \{3\}$ .      B.  $S = \{9\}$ .      C.  $\emptyset$ .      D.  $S = \{7\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ .

Với điều kiện trên, ta có

$$\sqrt{x-5} = 2 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy  $x = 9$  là nghiệm cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 106.** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3+x} = x + 1$  là

- A.  $x = 1$ .                      B.  $x = 1, x = -2$ .                      C.  $x = -1$ .                      D.  $x = 2, x = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{3+x} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3 + x = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 107.** Số nghiệm của phương trình  $2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  là

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. vô số.

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ .

Khi đó phương trình tương đương với  $2x = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(nhận)} \\ x = -2 & \text{(loại)}. \end{cases}$

Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 108.** Cho phương trình  $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x^2-4}$ . Tập nghiệm của phương trình là

- A.  $S = \{0\}$ .                      B.  $S = \{0; -1\}$ .                      C.  $S = \{0; 1\}$ .                      D.  $S = \{-1\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} &= \frac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow x(x+2) - (x-2) = 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(nhận)} \\ x = -1 & \text{(nhận)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{0; -1\}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 109.** Cho phương trình  $x^2 + 3x - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}} = 10 - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}}$ . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Phương trình có một nghiệm âm.  
 B. Phương trình có hai nghiệm dương.  
 C. Phương trình có một nghiệm dương.  
 D. Phương trình có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 + 3x - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}} = 10 - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0, \forall x < 2 \Rightarrow x = -5$ .

Vậy phương trình có một nghiệm âm.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 110.** Điều kiện xác định của phương trình  $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$  là

- A.  $x \neq 4$ .                      B.  $x < 4$ .                      C.  $x > 4$ .                      D.  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ .

Chọn đáp án **(A)** □



**Câu 111.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-1} = 2x-3$  là

- A.  $x \geq 1$ .                      B.  $x < 1$ .                      C.  $x \in \mathbb{R}$ .                      D.  $x \neq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 112.** Một học sinh đã giải phương trình  $\sqrt{x^2-5} = 2-x$  (\*) tuân tự như sau:

$$(b1) (*) \Leftrightarrow x^2 - 5 = (2-x)^2$$

$$(b2) \Leftrightarrow 4x = 9$$

$$(b3) \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$(b4) \text{ Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm } S = \left\{ \frac{9}{4} \right\}.$$

Lý luận trên, nếu sai thì sai từ bước nào?

- A. (b1).                      B. (b2).                      C. (b3).                      D. Lý luận đúng.

**Lời giải.**

Lý luận trên sai từ bước (b1), do khi bình phương hai vế của phương trình ta chỉ được phương trình hệ quả.

Lời giải đúng cho phương trình trên như sau:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-5} = 2-x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2-5 = (2-x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 4x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 113.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của phương trình  $\frac{x+9}{x^2-1} - 5 = \frac{2}{x^2-1}$ .

- A.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .                      B.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .                      C.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .                      D.  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 114.** Phương trình  $|f(x)| = |g(x)|$  tương đương với phương trình nào trong các phương trình sau?

- A.  $f(x) = g(x)$ .                      B.  $|f(x)|^2 = |g(x)|^2$ .                      C.  $f(x) = -g(x)$ .                      D.  $|f(x)|^2 + |g(x)|^2 = 0$ .

**Lời giải.**

Bình phương hai vế của một phương trình mà hai vế của nó cùng dấu thì ta được một phương trình tương đương.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 115.** Điều kiện  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 3 \end{cases}$  là điều kiện xác định của phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

A.  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x}$ .                      B.  $\sqrt{x-3} + 4 = \frac{1}{x-3}$ .

C.  $\sqrt{x+3} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ .                      D.  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x}$  có điều kiện xác định là  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$ .

Phương trình  $\sqrt{x-3} + 4 = \frac{1}{x-3}$  có điều kiện xác định là  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$ .

Phương trình  $\sqrt{x-3} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$  có điều kiện xác định là  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$ .

Phương trình  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x}$  có điều kiện xác định là  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$ .

Chọn đáp án **D**

**Câu 116.** Cho  $x = 3$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 + 2mx + m - 2 = 0$  với  $m$  là tham số. Tìm nghiệm còn lại.

- A.  $x = -1$ .                      B.  $x = -2$ .                      C.  $x = 2$ .                      D.  $x = 1$ .

**Lời giải.**

Do  $x = 3$  là nghiệm của phương trình nên ta có  $9 + 6m + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ .

Với  $m = -1$  phương trình thành  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **A**

**Câu 117.** Phương trình  $\sqrt{2x+3} = 3$  tương đương với phương trình nào sau đây?

- A.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$ .                      B.  $x\sqrt{2x+3} = 3x$ .  
C.  $\sqrt{x-5} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x-5}$ .                      D.  $(2x-3)\sqrt{2x+3} = 3(2x-3)$ .

**Lời giải.**

Hai phương trình  $\sqrt{2x+3} = 3$  và  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$  có chung tập nghiệm là  $S = \{3\}$  nên tương đương với nhau.

Chọn đáp án **A**

**Câu 118.** Số thực nào dưới đây là nghiệm của phương trình  $\frac{\sqrt{x-1}+2}{x-2} = \frac{4}{3}$ .

- A. 0.                      B. 2.                      C. 5.                      D. 10.

**Lời giải.**

Thay các số ở các đáp án vào phương trình đã cho thì ta thấy  $x = 5$  là nghiệm của phương trình ban đầu.

Chọn đáp án **C**

**Câu 119.** Tìm điều kiện xác định của phương trình  $\frac{2x}{x-1} + \sqrt{x} = 21$ .

- A.  $x \geq 0$ .                      B.  $x \geq 0; x \neq 1$ .                      C.  $x \geq 1$ .                      D.  $x > 0; x \neq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **B**

**Câu 120.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 0$  là

- A.  $S = \emptyset$ .                      B.  $S = \{-3\}$ .                      C.  $S = \{\pm 3\}$ .                      D.  $S = \{3\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x \neq -3$ .

Ta có  $\frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -3 \text{ (không thỏa mãn)}. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = \{3\}$ .

Chọn đáp án **D**

**Câu 121.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-3} = \sqrt{6-2x}$  là

- A.  $x \neq 3$ .                      B.  $x = 3$ .                      C.  $x \leq 3$ .                      D.  $x \geq 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ .

Chọn đáp án **B**

**Câu 122.** Phương trình  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. vô số.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ .

Ta thấy  $x = 0$  thỏa mãn phương trình nên  $x = 0$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Câu 123.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$  là

- A.  $x > -3$  và  $x \neq 1$ .                      B.  $x \neq -3$  và  $x \neq 1$ .

C.  $x > -3, x \leq 4$  và  $x \neq 1$ .

D.  $x > -3$  và  $x \leq 4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình là  $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \leq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 124.** Phương trình nào tương đương với phương trình  $x - 2 = 0$  ?

A.  $x^2 + x - 6 = 0$ .

B.  $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ .

C.  $x^2 = 4$ .

D.  $\sqrt{1-x} + x = 2 + \sqrt{1-x}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x - 2 = 0$  có tập nghiệm  $S = \{2\}$ . Trong khi đó

— Phương trình  $x^2 + x - 6 = 0$  có tập nghiệm  $S = \{2; -3\}$ .

— Phương trình  $x^2 = 4$  có tập nghiệm  $S = \{-2; 2\}$ .

—  $\sqrt{1-x} + x = 2 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

Còn

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình này tương đương với phương trình  $x - 2 = 0$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 125.** Nghiệm của phương trình  $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$  là

A. 1 và -6.

B.  $\pm 1$ .

C.  $\pm 1$  và  $\pm\sqrt{6}$ .

D.  $\pm 1$  và  $\pm 6$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2, (t \geq 0)$  phương trình đã cho trở thành  $t^2 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (\text{nhận}) \\ t = -6 & (\text{loại}). \end{cases}$

Với  $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 1, x = -1$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 126.** Phương trình  $x^2 - 4x + 3 = 0$  có tập nghiệm là tập hợp nào sau đây?

A.  $T = \{-3; -1\}$ .

B.  $W = \{1; 3\}$ .

C.  $S = (1; 3)$ .

D.  $V = (-3; -1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình là  $W = \{1; 3\}$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 127.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  là

A.  $S = \emptyset$ .

B.  $S = \{-2\}$ .

C.  $S = \{2\}$ .

D.  $S = \{-2; 2\}$ .

**Lời giải.**

— Điều kiện:  $x > 1$  (\*)

— Với điều kiện (\*), phương trình đã cho tương đương với  $x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$

— Đối chiếu điều kiện (\*) ta được nghiệm của phương trình là  $x = 2$ .

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = \{2\}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 128.** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3+x} = x + 1$  là

- A.  $x = 1$ .                      B.  $x = 1, x = -2$ .                      C.  $x = -1$ .                      D.  $x = 2, x = -1$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \sqrt{3+x} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3 + x = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 129.** Phương trình  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.                      B. Vô số.                      C. 2.                      D. 1.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ . Thử lại thấy  $x = 0$  thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = 0$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 130.** Số nghiệm của phương trình  $\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}}$  là

- A. 1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

Tập xác định của phương trình là  $x > -1$ , phương trình trở thành  $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2$  hoặc  $x = -2$ . So sánh điều kiện ta có  $x = 2$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 131.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 5 = 0$  có nghiệm là

- A.  $m \geq 1$ .                      B.  $m > 1$ .                      C.  $m \geq 1$  và  $m \neq 2$ .                      D.  $m > 1$  và  $m \neq 2$ .

**Lời giải.**

Khi  $m = 2$  phương trình có nghiệm là  $x = -\frac{1}{2}$ .

Khi  $m \neq 2$  phương trình có nghiệm khi  $\Delta' \geq 0$  hay  $m \geq 1$ .

Vậy phương trình có nghiệm khi  $m \geq 1$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 132.** Phương trình nào sau đây có nghiệm nguyên

- A.  $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 6 = 0$ .                      B.  $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$ .  
C.  $4x + \frac{3}{4x-1} = 1 + \frac{3}{4x-1}$ .                      D.  $16x^2 + \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x+4}$ .

**Lời giải.**

Các phương trình

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x-2} &= 1 + \sqrt{x-2}, \\ 4x + \frac{3}{4x-1} &= 1 + \frac{3}{4x-1} \end{aligned}$$

vô nghiệm.

Còn phương trình  $16x^2 + \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x+4}$  có nghiệm là  $x = \frac{1}{4}$  hoặc  $x = -\frac{1}{4}$ .

Phương trình  $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 6 = 0$  nhận  $x = 1$  là nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 133.** Cho phương trình  $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$  ( $m$  là tham số). Giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm kép là

- A.  $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$ .                      B.  $m \in \{1; 3\}$ .                      C.  $m \in \{-1; -3\}$ .                      D.  $m \in \{1; 9\}$ .

**Lời giải.**

Để phương trình có nghiệm kép thì  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0. \end{cases}$

Khi đó  $\begin{cases} a \neq 0 \\ (m^2 - 3)^2 - 4m^2 = 0 \end{cases}$  giải ra ta được  $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 134.** Cho  $x = 3$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 + 2mx + m - 2 = 0$  với  $m$  là tham số. Tìm nghiệm còn lại.

- A.  $x = -1$ .                      B.  $x = -2$ .                      C.  $x = 2$ .                      D.  $x = 1$ .

**Lời giải.**

Do  $x = 3$  là nghiệm của phương trình nên ta có  $9 + 6m + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ .

Với  $m = -1$  phương trình thành  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 135.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $x + \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} - 3$ .

- A.  $S = \mathbb{R}$ .                      B.  $S = \emptyset$ .                      C.  $S = \{3\}$ .                      D.  $S = \{\pm 3\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Thế  $x = 3$  vào phương trình đã cho ta được

$$3 + \sqrt{3-3} = \sqrt{3-3} - 3 \Leftrightarrow 3 = -3 \text{ (sai)}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 136.** Phương trình  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. vô số.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ .

Ta thấy  $x = 0$  thỏa mãn phương trình nên  $x = 0$  là nghiệm duy nhất của phương trình. □

**Câu 137.** Gọi  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ . Tính giá trị  $2x_0 - y_0$ .

- A. 11.                      B. 10.                      C. 2.                      D. 5.

**Lời giải.**

Giải hệ phương trình ta được  $x_0 = 4, y_0 = 3$ . Suy ra  $2x_0 - y_0 = 5$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 138.** Số nghiệm của phương trình  $2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  là

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > -1$ . Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$2x = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (Loại)} \Rightarrow x = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 139.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$  ?

- A. 0.                      B. vô số.                      C. 1.                      D. 2.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ .

Với  $x = 1$  thay vào phương trình thỏa mãn. Vậy phương trình có một nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 140.** Số nghiệm của phương trình  $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$  là

- A. 2.                      B. 0.                      C. 1.                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x > 3$ .

Với điều kiện  $x > 3$  phương trình đã cho trở thành  $\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2 < 3$  (loại).

Vậy phương trình không có nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 141.** Phương trình  $(x^2 + 5x + 4)\sqrt{x+3} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình là  $x \geq -3$ .

$$\text{Phương trình tương đương với } \begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 142.** Phương trình  $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.                      B. 2.                      C. 0.                      D. 3.

**Lời giải.**

Ta có

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 143.** Tìm nghiệm của tam thức bậc hai  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ .

- A.  $x = 5; x = -1$ .                      B.  $x = -5; x = -1$ .                      C.  $x = 5; x = 1$ .                      D.  $x = -5; x = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5; x = 1$ .

Vậy nghiệm của tam thức bậc hai  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  là  $x = -5; x = 1$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 144.** Phương trình  $x^2 - 4x + 3 = 0$  có tập nghiệm là tập hợp nào sau đây?

- A.  $T = \{-3; -1\}$ .                      B.  $W = \{1; 3\}$ .                      C.  $S = (1; 3)$ .                      D.  $V = (-3; -1)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là  $W = \{1; 3\}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 145.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  là

- A.  $S = \emptyset$ .                      B.  $S = \{-2\}$ .                      C.  $S = \{2\}$ .                      D.  $S = \{-2; 2\}$ .

**Lời giải.**

— Điều kiện:  $x > 1$  (\*)

— Với điều kiện (\*), phương trình đã cho tương đương với  $x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$

— Đối chiếu điều kiện (\*) ta được nghiệm của phương trình là  $x = 2$ .

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = \{2\}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 146.** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3+x} = x + 1$  là

- A.  $x = 1$ .                      B.  $x = 1, x = -2$ .                      C.  $x = -1$ .                      D.  $x = 2, x = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{3+x} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3+x = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 147.** Phương trình  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 0.                      **B.** Vô số.                      **C.** 2.                      **D.** 1.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ . Thử lại thấy  $x=0$  thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có một nghiệm  $x=0$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 148.** Số nghiệm của phương trình  $\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}}$  là

- A.** 1.                      **B.** 0.                      **C.** 2.                      **D.** 3.

**Lời giải.**

Tập xác định của phương trình là  $x > -1$ , phương trình trở thành  $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2$  hoặc  $x = -2$ . So sánh điều kiện ta có  $x = 2$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 149.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$  có nghiệm là

- A.**  $m \geq 1$ .                      **B.**  $m > 1$ .                      **C.**  $m \geq 1$  và  $m \neq 2$ .                      **D.**  $m > 1$  và  $m \neq 2$ .

**Lời giải.**

Khi  $m = 2$  phương trình có nghiệm là  $x = -\frac{1}{2}$ .

Khi  $m \neq 2$  phương trình có nghiệm khi  $\Delta' \geq 0$  hay  $m \geq 1$ .

Vậy phương trình có nghiệm khi  $m \geq 1$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 150.** Phương trình nào sau đây có nghiệm nguyên

- A.**  $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 6 = 0$ .                      **B.**  $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$ .  
**C.**  $4x + \frac{3}{4x-1} = 1 + \frac{3}{4x-1}$ .                      **D.**  $16x^2 + \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x+4}$ .

**Lời giải.**

Các phương trình

$$x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2},$$

$$4x + \frac{3}{4x-1} = 1 + \frac{3}{4x-1}$$

vô nghiệm.

Còn phương trình  $16x^2 + \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x+4}$  có nghiệm là  $x = \frac{1}{4}$  hoặc  $x = -\frac{1}{4}$ .

Phương trình  $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 6 = 0$  nhận  $x = 1$  là nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 151.** Cho phương trình  $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$  ( $m$  là tham số). Giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm kép là

- A.**  $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$ .                      **B.**  $m \in \{1; 3\}$ .                      **C.**  $m \in \{-1; -3\}$ .                      **D.**  $m \in \{1; 9\}$ .

**Lời giải.**

Để phương trình có nghiệm kép thì  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0. \end{cases}$

Khi đó  $\begin{cases} a \neq 0 \\ (m^2 - 3)^2 - 4m^2 = 0 \end{cases}$  giải ra ta được  $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 152.** Cho  $x = 3$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 + 2mx + m - 2 = 0$  với  $m$  là tham số. Tìm nghiệm còn lại.

A.  $x = -1$ .

B.  $x = -2$ .

C.  $x = 2$ .

D.  $x = 1$ .

**Lời giải.**

Do  $x = 3$  là nghiệm của phương trình nên ta có  $9 + 6m + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ .

Với  $m = -1$  phương trình thành  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 153.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $x + \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} - 3$ .

A.  $S = \mathbb{R}$ .

B.  $S = \emptyset$ .

C.  $S = \{3\}$ .

D.  $S = \{\pm 3\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Thế  $x = 3$  vào phương trình đã cho ta được

$$3 + \sqrt{3-3} = \sqrt{3-3} - 3 \Leftrightarrow 3 = -3 \text{ (sai)}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 154.** Phương trình  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. vô số.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ .

Ta thấy  $x = 0$  thỏa mãn phương trình nên  $x = 0$  là nghiệm duy nhất của phương trình. □

**Câu 155.** Gọi  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ . Tính giá trị  $2x_0 - y_0$ .

A. 11.

B. 10.

C. 2.

D. 5.

**Lời giải.**

Giải hệ phương trình ta được  $x_0 = 4, y_0 = 3$ . Suy ra  $2x_0 - y_0 = 5$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 156.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x} = \frac{3}{\sqrt{5-x}}$  là

A.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$ .

B.  $x \in (-2; 5) \setminus \{0\}$ .

C.  $[-2; 5] \setminus \{0; -2\}$ .

D.  $(-\infty; 5) \setminus \{0; -2\}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x} = \frac{3}{\sqrt{5-x}}$  có nghĩa khi

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x \neq 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0; x \neq -2 \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 5) \setminus \{0\}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 157.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$  là

A.  $x \in (-4; +\infty)$ .

B.  $x \in [-4; 3) \setminus \{\pm 1\}$ .

C.  $x \in (-\infty; 3)$ .

D.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho xác định khi

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq \pm 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 3 \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □



**Câu 158.** Tập xác định của phương trình  $\sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \sqrt[3]{x - 2}$  là

- A.  $\mathcal{D} = [2; +\infty)$ .  
 B.  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1\}$ .  
 C.  $\mathcal{D} = [0; +\infty)$ .  
 D.  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1; 2\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Vậy đáp án  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1\}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 159.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{1}{\sqrt{2x + 4}} = \frac{\sqrt{3 - 2x}}{x}$  là

- A.  $x > -2$  và  $x < \frac{3}{2}$ .  
 B.  $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$ .  
 C.  $x > -2$  và  $x \neq 0$ .  
 D.  $\begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình là  $\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 2x + 4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > -2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 160.** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A.  $x - \sqrt{x - 3} = 3 + \sqrt{x - 3}$ .  
 B.  $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 2$ .  
 C.  $\sqrt{x - 4} + 2 = x + \sqrt{4 - x}$ .  
 D.  $\sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x}$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\sqrt{x - 4} + 2 = x + \sqrt{4 - x}$  điều kiện xác định  $x = 4$ .

Thay  $x = 4$  và phương trình ta được  $0 + 2 = 4 + 0$  vô lý, vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 161.** Cho phương trình  $(m - 1)x^4 + 2(m - 3)x^2 + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình vô nghiệm.

- A.  $m \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .  
 B.  $m \leq -3$ .  
 C.  $m > \frac{3}{2}$ .  
 D.  $m < -3$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2 \geq 0$  phương trình viết lại thành  $(m - 1)t^2 + 2(m - 3)t + m + 3 = 0$  (1).

Với  $m = 1$  thay vào ta có phương trình trên có nghiệm.

Với  $m \neq 1$  để phương trình ban đầu vô nghiệm thì phương trình (1) phải có  $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 < 0. \end{cases}$

Mà  $\Delta' = -8m + 12$ ,  $t_1 + t_2 = \frac{2(3 - m)}{m - 1}$ ,  $t_1 \cdot t_2 = \frac{m + 3}{m - 1}$ .

Hệ điều kiện trên trở thành  $\begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \end{cases}$  chọn nghiệm chung ta được  $m \in (-\infty; -3) \cup$

$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 162.** Với giá trị nào  $m$  thì phương trình  $(m - 3)x^2 + 3(m - 3)x + m + 2 = 0$  có nghiệm kép?

- A.  $m = \frac{29}{8}$ .  
 B.  $m = 7$ .  
 C.  $m = 3$ .  
 D.  $m = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

— Với  $m = 3$  phương trình đã cho vô nghiệm nên  $m = 3$  không thỏa mãn. (1)

— Với  $m \neq 3$ , ta có  $\Delta = 9(m - 3)^2 - 4(m - 3)(m + 2) = 5m^2 - 50m + 105$ .

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm kép} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 50m + 105 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 7. \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị cần tìm của  $m$  là  $m = 7$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 163.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-7; 7]$  để phương trình  $mx^2 - 2(m + 2)x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt?

- A. 14.                                      B. 8.                                      C. 7.                                      D. 15.

**Lời giải.**

TH1:  $m = 0 \Leftrightarrow -4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ ; phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất nên loại  $m = 0$ .

TH2:  $m \neq 0$ .

Để  $mx^2 - 2(m + 2)x + m - 1 = 0$  với  $m \in [-7; 7]$  có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta' = (m + 2)^2 - m(m - 1) > 0 \Leftrightarrow 5m > -4 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{5} \text{ đồng thời } m \in [-7; 7].$$

Vậy  $m = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Suy ra có 7 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 164.** Phương trình  $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$  có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 2.                                      B. 1.                                      C. 4.                                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $17 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}$ .

Ta có:  $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x \Leftrightarrow (x^2 - 6x)(\sqrt{17 - x^2} - 1) = 0$ . Tương đương

$$\begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 6) = 0 \\ 16 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{Thỏa mãn}) \\ x = 6 & (\text{Loại}) \\ x = \pm 4 & (\text{Thỏa mãn}). \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 thực phân biệt.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 165.** Phương trình  $\sqrt{3x} + \sqrt{2x - 2} = \sqrt{1 - x} + 2$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2x - 2 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Thay  $x = 1$  vào  $\sqrt{3x} + \sqrt{2x - 2} = \sqrt{1 - x} + 2$ , ta được:  $\sqrt{3} = 2$  (vô lý).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 166.** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A.  $x - \sqrt{x - 3} = 3 + \sqrt{x - 3}$ .                                      B.  $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 2$ .  
C.  $\sqrt{x - 4} + 2 = x + \sqrt{4 - x}$ .                                      D.  $\sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x}$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\sqrt{x - 4} + 2 = x + \sqrt{4 - x}$  điều kiện xác định  $x = 4$ .

Thay  $x = 4$  và phương trình ta được  $0 + 2 = 4 + 0$  vô lý, vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 167.** Cho phương trình  $(m - 1)x^4 + 2(m - 3)x^2 + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình vô nghiệm.

- A.  $m \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .                                      B.  $m \leq -3$ .  
C.  $m > \frac{3}{2}$ .                                      D.  $m < -3$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2 \geq 0$  phương trình viết lại thành  $(m - 1)t^2 + 2(m - 3)t + m + 3 = 0$  (1).

Với  $m = 1$  thay vào ta có phương trình trên có nghiệm.

Với  $m \neq 1$  để phương trình ban đầu vô nghiệm thì phương trình (1) phải có 
$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 < 0. \end{cases}$$

Mà  $\Delta' = -8m + 12$ ,  $t_1 + t_2 = \frac{2(3 - m)}{m - 1}$ ,  $t_1 \cdot t_2 = \frac{m + 3}{m - 1}$ .

Hệ điều kiện trên trở thành 
$$\begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$
 chọn nghiệm chung ta được  $m \in (-\infty; -3) \cup$

$(\frac{3}{2}; +\infty)$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 168.** Với giá trị nào  $m$  thì phương trình  $(m - 3)x^2 + 3(m - 3)x + m + 2 = 0$  có nghiệm kép?

- A.  $m = \frac{29}{8}$ .                      B.  $m = 7$ .                      C.  $m = 3$ .                      D.  $m = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

— Với  $m = 3$  phương trình đã cho vô nghiệm nên  $m = 3$  không thỏa mãn. (1)

— Với  $m \neq 3$ , ta có  $\Delta = 9(m - 3)^2 - 4(m - 3)(m + 2) = 5m^2 - 50m + 105$ .

Phương trình đã cho có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 50m + 105 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 7. \end{cases}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị cần tìm của  $m$  là  $m = 7$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 169.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\frac{\sqrt{x^2 - 3x} \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x(x + 2)} = 0$ .

- A.  $S = \{2\}$ .                      B.  $S = \{2; 3\}$ .                      C.  $S = \{3\}$ .                      D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \\ x(x + 2) \neq 0 \end{cases}$ . Khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x} \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x(x + 2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Thử lại ta thấy không có giá trị  $x$  nào thỏa mãn nên phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 170.** Cho phương trình  $f(x) = 0$  có tập nghiệm  $S_1 = \{m; 2m - 1\}$  và phương trình  $g(x) = 0$  có tập nghiệm  $S_2 = [1; 2]$ . Tìm tất cả giá trị  $m$  để phương trình  $g(x) = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = 0$ .

- A.  $1 < m < \frac{3}{2}$ .                      B.  $1 \leq m \leq 2$ .                      C.  $m \in \emptyset$ .                      D.  $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Để phương trình  $g(x) = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = 0$  thì

$$\begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq 2m - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 171.** Cho phương trình  $|x^2 - 5x + 4| = |x - 1|$  (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. Phương trình (1) có ba nghiệm.
- B. Phương trình (1) vô nghiệm.
- C. Phương trình (1) có hai nghiệm.
- D. Phương trình (1) có bốn nghiệm.

**Lời giải.**

Phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = x - 1 \\ x^2 - 5x + 4 = -x + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 172.** Phương trình  $\sqrt{2x+3} = 3$  tương đương với phương trình nào sau đây?

- A.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$ .
- B.  $x\sqrt{2x+3} = 3x$ .
- C.  $\sqrt{x-5} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x-5}$ .
- D.  $(2x-3)\sqrt{2x+3} = 3(2x-3)$ .

**Lời giải.**

Hai phương trình  $\sqrt{2x+3} = 3$  và  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$  có chung tập nghiệm là  $S = \{3\}$  nên tương đương với nhau.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 173.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\frac{\sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{4-x^2}}{x(x+2)} = 0$ .

- A.  $S = \{2\}$ .
- B.  $S = \{2; 3\}$ .
- C.  $S = \{3\}$ .
- D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \\ x(x+2) \neq 0 \end{cases}$ . Khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{4-x^2}}{x(x+2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Thử lại ta thấy không có giá trị  $x$  nào thỏa mãn nên phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 174.** Cho phương trình  $f(x) = 0$  có tập nghiệm  $S_1 = \{m; 2m - 1\}$  và phương trình  $g(x) = 0$  có tập nghiệm  $S_2 = [1; 2]$ . Tìm tất cả giá trị  $m$  để phương trình  $g(x) = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = 0$ .

- A.  $1 < m < \frac{3}{2}$ .
- B.  $1 \leq m \leq 2$ .
- C.  $m \in \emptyset$ .
- D.  $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Để phương trình  $g(x) = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = 0$  thì

$$\begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq 2m - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 175.** Cho phương trình  $|x^2 - 5x + 4| = |x - 1|$  (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. Phương trình (1) có ba nghiệm. B. Phương trình (1) vô nghiệm.  
 C. Phương trình (1) có hai nghiệm. D. Phương trình (1) có bốn nghiệm.

**Lời giải.**

Phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = x - 1 \\ x^2 - 5x + 4 = -x + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 176.** Phương trình  $\sqrt{2x+3} = 3$  tương đương với phương trình nào sau đây?

- A.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$ . B.  $x\sqrt{2x+3} = 3x$ .  
 C.  $\sqrt{x-5} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x-5}$ . D.  $(2x-3)\sqrt{2x+3} = 3(2x-3)$ .

**Lời giải.**

Hai phương trình  $\sqrt{2x+3} = 3$  và  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$  có chung tập nghiệm là  $S = \{3\}$  nên tương đương với nhau.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 177.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{2-x} + \sqrt{7+x} = 2$  là

- A.  $x \in (-7; 2)$ . B.  $x \in [2; +\infty]$ . C.  $x \in [-7; 2]$ . D.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7; 2\}$ .

**Lời giải.**

ĐKXD:  $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 7+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7. \end{cases}$

Vậy  $\mathcal{D} = [-7; 2]$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 178.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-3} + \frac{2}{x-5} = 3$  là

- A.  $x \geq 3$ . B.  $\begin{cases} x > 3 \\ x \neq -5 \end{cases}$ . C.  $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$ . D.  $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-3} + \frac{2}{x-5} = 3$  là  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 5. \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 179.** Tìm tập xác định của phương trình  $\frac{x}{\sqrt{x+2}} - 3 = \sqrt{x+2}$ .

- A.  $(-2; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -2]$ . C.  $[-2; +\infty)$ . D.  $(-\infty; -2)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình xác định là  $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 180.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{2x}{x^2+1} - 5 = \frac{3}{x^2+1}$  là

- A.  $x \neq 1$ . B.  $\forall x \in \mathbb{R}$ . C.  $x \neq 1$  và  $x \neq -1$ . D.  $x \neq -1$ .

**Lời giải.**

Do  $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình đã cho xác định  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 181.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{x+2}{x^2-2x-3}$  là.

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus (-1; 3)$ .      C.  $D = \mathbb{R} \setminus [-1; 3]$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$ .

**Lời giải.**

TXĐ  $x^2 - 2x - 3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

**Câu 182.** Tất cả các giá trị của  $m$  để  $(m - 1)x + 2x = 3$  là phương trình bậc nhất theo ẩn  $x$  là

- A.  $m \in \emptyset$ .      B.  $m$  khác 1.      C.  $m$  khác  $-1$ .      D.  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(m - 1)x + 2x = 3 \Leftrightarrow (m + 1)x = 3$ .

Phương trình này là phương trình bậc nhất theo ẩn  $x$  khi  $m + 1$  khác 0, hay  $m$  khác  $-1$ .

Chọn đáp án **C**

**Câu 183.** Điều kiện xác định của phương trình  $3x + \frac{5}{x - 4} = 12 + \frac{5}{x - 4}$  là

- A.  $x \neq 4$ .      B.  $x < 4$ .      C.  $x > 4$ .      D.  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ .

Chọn đáp án **A**

**Câu 184.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x - 1} = 2x - 3$  là

- A.  $x \geq 1$ .      B.  $x < 1$ .      C.  $x \in \mathbb{R}$ .      D.  $x \neq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Chọn đáp án **A**

**Câu 185.** Tìm tập xác định của phương trình  $\frac{x - 2}{x - 1} = x + 2$ .

- A.  $(1; +\infty)$ .      B.  $(-\infty; -1)$ .      C.  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .      D.  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{x - 2}{x - 1} = x + 2$  là

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Vậy tập xác định của phương trình là  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Chọn đáp án **C**

**Câu 186.** Cho phương trình  $\sqrt{x} = 1 - x$ . Điều kiện của phương trình này là

- A.  $x \leq 1$ .      B.  $x \geq 0$ .      C.  $x \geq 1$ .      D.  $0 \leq x \leq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x \geq 0$ .

Chọn đáp án **B**

**Câu 187.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{1}{\sqrt{x + 3}} = \frac{\sqrt{4 - x}}{x - 1}$  là

- A.  $x > -3$  và  $x \neq 1$ .      B.  $x \neq -3$  và  $x \neq 1$ .  
C.  $x > -3$ ,  $x \leq 4$  và  $x \neq 1$ .      D.  $x > -3$  và  $x \leq 4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình là  $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \leq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Chọn đáp án **C**

**Câu 188.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x - 3}$  là

- A.  $x > 3$ .      B.  $x \geq 2$ .      C.  $x \geq 1$ .      D.  $x \geq 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

Chọn đáp án **D**

**Câu 189.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{2-x} + \sqrt{7+x} = 2$  là

- A.  $x \in (-7; 2)$ .      B.  $x \in [2; +\infty)$ .      C.  $x \in [-7; 2]$ .      D.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7; 2\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{DKXD: } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 7+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7. \end{cases}$$

Vậy  $\mathcal{D} = [-7; 2]$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 190.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-3} + \frac{2}{x-5} = 3$  là

- A.  $x \geq 3$ .      B.  $\begin{cases} x > 3 \\ x \neq -5 \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình } \sqrt{x-3} + \frac{2}{x-5} = 3 \text{ là } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 191.** Tìm tập xác định của phương trình  $\frac{x}{\sqrt{x+2}} - 3 = \sqrt{x+2}$ .

- A.  $(-2; +\infty)$ .      B.  $(-\infty; -2]$ .      C.  $[-2; +\infty)$ .      D.  $(-\infty; -2)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình xác định là  $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 192.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{2x}{x^2+1} - 5 = \frac{3}{x^2+1}$  là

- A.  $x \neq 1$ .      B.  $\forall x \in \mathbb{R}$ .      C.  $x \neq 1$  và  $x \neq -1$ .      D.  $x \neq -1$ .

**Lời giải.**

Do  $x^2+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình đã cho xác định  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 193.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{x+2}{x^2-2x-3}$  là.

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus (-1; 3)$ .      C.  $D = \mathbb{R} \setminus [-1; 3]$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{TXD } x^2 - 2x - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 194.** Tất cả các giá trị của  $m$  để  $(m-1)x + 2x = 3$  là phương trình bậc nhất theo ẩn  $x$  là

- A.  $m \in \emptyset$ .      B.  $m$  khác 1.      C.  $m$  khác -1.      D.  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(m-1)x + 2x = 3 \Leftrightarrow (m+1)x = 3$ .

Phương trình này là phương trình bậc nhất theo ẩn  $x$  khi  $m+1$  khác 0, hay  $m$  khác -1.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 195.** Điều kiện xác định của phương trình  $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$  là

- A.  $x \neq 4$ .      B.  $x < 4$ .      C.  $x > 4$ .      D.  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 196.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-1} = 2x-3$  là

- A.  $x \geq 1$ .      B.  $x < 1$ .      C.  $x \in \mathbb{R}$ .      D.  $x \neq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 197.** Tìm tập xác định của phương trình  $\frac{x-2}{x-1} = x+2$ .

- A.  $(1; +\infty)$ .                      B.  $(-\infty; -1)$ .                      C.  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .                      D.  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{x-2}{x-1} = x+2$  là

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Vậy tập xác định của phương trình là  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 198.** Cho phương trình  $\sqrt{x} = 1-x$ . Điều kiện của phương trình này là

- A.  $x \leq 1$ .                      B.  $x \geq 0$ .                      C.  $x \geq 1$ .                      D.  $0 \leq x \leq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình là  $x \geq 0$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 199.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$  là

- A.  $x > -3$  và  $x \neq 1$ .                      B.  $x \neq -3$  và  $x \neq 1$ .  
C.  $x > -3$ ,  $x \leq 4$  và  $x \neq 1$ .                      D.  $x > -3$  và  $x \leq 4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình là  $\begin{cases} x+3 > 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \leq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 200.** Phương trình  $3x - 2y = 1$  nhận cặp số nào sau đây làm nghiệm?

- A.  $(-1; 1)$ .                      B.  $(1; 1)$ .                      C.  $(1; -1)$ .                      D.  $(0; 2)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ . Vậy  $(1; 1)$  là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 201.** Tìm điều kiện của ẩn số  $x$  để phương trình  $\sqrt{x+1} = 2-x$  xác định.

- A.  $x \leq -1$ .                      B.  $x \leq 2$ .                      C.  $x \geq -1$ .                      D.  $x \geq 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 202.** Cặp số  $(x, y)$  nào sau đây là một nghiệm của phương trình  $x + y - 3 = 0$ ?

- A.  $(x; y) = (4; 0)$ .                      B.  $(x; y) = (2; 2)$ .                      C.  $(x; y) = (-2; 1)$ .                      D.  $(x; y) = (2; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2 + 1 - 3 = 0$  nên  $(x; y) = (2; 1)$  là một nghiệm của phương trình  $x + y - 3 = 0$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 203.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 0$  là

- A.  $S = \{2; 3\}$ .                      B.  $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ .                      C.  $S = \{3\}$ .                      D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ . Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 204.** Cho phương trình  $\frac{16}{x^3} + x - 4 = 0$ , giá trị nào của  $x$  là nghiệm của phương trình đã cho?

- A.  $x = 2$ .                      B.  $x = 0$ .                      C.  $x = 3$ .                      D.  $x = 5$ .

**Lời giải.**

Cách 1: Nhận thấy thay  $x = 2$  vào phương trình thấy thỏa mãn nên  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.

Cách 2: Điều kiện:  $x \neq 0$ .



Phương trình tương đương với  $x^4 - 4x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3,67857351. \end{cases}$

Do đó  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 205.** Cho phương trình  $\frac{3x + 1}{\sqrt{-x + 2} - \sqrt{x - 3}}$ . Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Điều kiện xác định của phương trình là  $x \geq 3$ .      B. Phương trình vô nghiệm.  
C. Phương trình có một nghiệm duy nhất.      D. Điều kiện xác định của phương trình là  $x < 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $\begin{cases} -x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ . Phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 206.** Số thực nào dưới đây là nghiệm của phương trình  $\frac{\sqrt{x - 1} + 2}{x - 2} = \frac{4}{3}$ .

- A. 0.      B. 2.      C. 5.      D. 10.

**Lời giải.**

Thay các số ở các đáp án vào phương trình đã cho thì ta thấy  $x = 5$  là nghiệm của phương trình ban đầu.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 207.** Phương trình nào tương đương với phương trình  $x - 2 = 0$  ?

- A.  $x^2 + x - 6 = 0$ .      B.  $\frac{x^2}{\sqrt{x - 1}} = \frac{4}{\sqrt{x - 1}}$ .  
C.  $x^2 = 4$ .      D.  $\sqrt{1 - x} + x = 2 + \sqrt{1 - x}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x - 2 = 0$  có tập nghiệm  $S = \{2\}$ . Trong khi đó

— Phương trình  $x^2 + x - 6 = 0$  có tập nghiệm  $S = \{2; -3\}$ .

— Phương trình  $x^2 = 4$  có tập nghiệm  $S = \{-2; 2\}$ .

—  $\sqrt{1 - x} + x = 2 + \sqrt{1 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

Còn

$$\frac{x^2}{\sqrt{x - 1}} = \frac{4}{\sqrt{x - 1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình này tương đương với phương trình  $x - 2 = 0$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 208.** Phương trình  $a^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm khi và chỉ khi.

- A.  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ .      C.  $\Delta > 0$ .      D.  $\Delta \geq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 209.** Cặp số  $(x; y)$  nào sau đây không là nghiệm của phương trình  $2x - 3y = 5$  ?

- A.  $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; 0\right)$ .      B.  $(x; y) = (1; -1)$ .      C.  $(x; y) = \left(0; \frac{5}{3}\right)$ .      D.  $(x; y) = (-2; -3)$ .

**Lời giải.**

Thay các bộ số  $(x; y)$  vào phương trình, ta thấy bộ số  $\left(0; \frac{5}{3}\right)$  không thỏa mãn:  $2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{5}{3} = -5 \neq 5$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 210.** Phương trình  $x^2 - 2mx + 2 + m = 0$  có một nghiệm  $x = 2$  thì

- A.  $m = 1$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = -2$ .

**Lời giải.**

Thay  $x = 2$  vào phương trình  $x^2 - 2mx + 2 + m = 0$  ta có  $2^2 - 2m \cdot 2 + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 211.** Phương trình  $3x + 2y - 5 = 0$  nhận cặp số nào sau đây là nghiệm

- A. (2; -3).                      B. (-1; -1).                      C. (3; 2).                      D. (1; 1).

**Lời giải.**

Thay  $x = 1$  và  $y = 1$  vào phương trình đã cho ta thấy thỏa mãn nên (1; 1) là một nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 212.** Khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

- A. Phương trình  $3x + 5 = 0$  có nghiệm là  $x = -\frac{5}{3}$ .    B. Phương trình  $0x - 7 = 0$  vô nghiệm.  
C. Phương trình  $0x + 0 = 0$  có tập nghiệm  $\mathbb{R}$ .    D. Cả A, B, C đều đúng.

**Lời giải.**

“Phương trình  $3x + 5 = 0$  có nghiệm là  $x = -\frac{5}{3}$ ” là khẳng định đúng.

“Phương trình  $0x - 7 = 0$  vô nghiệm” là khẳng định đúng.

“Phương trình  $0x + 0 = 0$  có tập nghiệm  $\mathbb{R}$ ” là khẳng định đúng.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 213.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$  ?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. Vô số.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ .

Thay  $x = 2$  vào phương trình ta được  $0 = 0$  hay  $x = 2$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 214.** Tìm nghiệm của nhị thức bậc nhất  $f(x) = 3x + 6$ .

- A.  $x = 2$ .                      B.  $x = -2$ .                      C.  $x = -3$ .                      D.  $x = 3$ .

**Lời giải.**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 215.** Phương trình  $3x - 2y = 1$  nhận cặp số nào sau đây làm nghiệm?

- A. (-1; 1).                      B. (1; 1).                      C. (1; -1).                      D. (0; 2).

**Lời giải.**

Ta có  $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ . Vậy (1; 1) là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 216.** Tìm điều kiện của ẩn số  $x$  để phương trình  $\sqrt{x+1} = 2 - x$  xác định.

- A.  $x \leq -1$ .                      B.  $x \leq 2$ .                      C.  $x \geq -1$ .                      D.  $x \geq 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 217.** Cặp số  $(x, y)$  nào sau đây là một nghiệm của phương trình  $x + y - 3 = 0$ ?

- A.  $(x; y) = (4; 0)$ .                      B.  $(x; y) = (2; 2)$ .                      C.  $(x; y) = (-2; 1)$ .                      D.  $(x; y) = (2; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2 + 1 - 3 = 0$  nên  $(x; y) = (2; 1)$  là một nghiệm của phương trình  $x + y - 3 = 0$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 218.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 0$  là

- A.  $S = \{2; 3\}$ .                      B.  $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ .                      C.  $S = \{3\}$ .                      D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ . Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 219.** Cho phương trình  $\frac{16}{x^3} + x - 4 = 0$ , giá trị nào của  $x$  là nghiệm của phương trình đã cho?

- A.  $x = 2$ .                      B.  $x = 0$ .                      C.  $x = 3$ .                      D.  $x = 5$ .

**Lời giải.**

Cách 1: Nhận thấy thay  $x = 2$  vào phương trình thấy thỏa mãn nên  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.

Cách 2: Điều kiện:  $x \neq 0$ .

Phương trình tương đương với  $x^4 - 4x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3,67857351. \end{cases}$

Do đó  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 220.** Cho phương trình  $\frac{3x + 1}{\sqrt{-x + 2} - \sqrt{x - 3}}$ . Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Điều kiện xác định của phương trình là  $x \geq 3$ .    B. Phương trình vô nghiệm.  
 C. Phương trình có một nghiệm duy nhất.    D. Điều kiện xác định của phương trình là  $x < 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $\begin{cases} -x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ . Phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 221.** Số thực nào dưới đây là nghiệm của phương trình  $\frac{\sqrt{x-1} + 2}{x-2} = \frac{4}{3}$ .

- A. 0.    B. 2.    C. 5.    D. 10.

**Lời giải.**

Thay các số ở các đáp án vào phương trình đã cho thì ta thấy  $x = 5$  là nghiệm của phương trình ban đầu.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 222.** Phương trình nào tương đương với phương trình  $x - 2 = 0$  ?

- A.  $x^2 + x - 6 = 0$ .    B.  $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ .  
 C.  $x^2 = 4$ .    D.  $\sqrt{1-x} + x = 2 + \sqrt{1-x}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x - 2 = 0$  có tập nghiệm  $S = \{2\}$ . Trong khi đó

— Phương trình  $x^2 + x - 6 = 0$  có tập nghiệm  $S = \{2; -3\}$ .

— Phương trình  $x^2 = 4$  có tập nghiệm  $S = \{-2; 2\}$ .

—  $\sqrt{1-x} + x = 2 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

Còn

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình này tương đương với phương trình  $x - 2 = 0$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 223.** Phương trình  $a^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm khi và chỉ khi.

- A.  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ .    B.  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ .    C.  $\Delta > 0$ .    D.  $\Delta \geq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 224.** Phương trình nào sau đây là phương trình hệ quả của phương trình  $\frac{x^2 + x}{x + 1} = 3$ ?

- A.  $3(x^2 + x) = x + 1$ .    B.  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .    C.  $x^2 + x = 3$ .    D.  $x^2 + x = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{x^2 + x}{x + 1} = 3 \Rightarrow x^2 + x = 3(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ .

Vậy  $x^2 - 2x - 3 = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 225.** Cho phương trình  $2x - \frac{3}{x} = x^2 - \frac{3}{x}$  (1). Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình (1)?

A.  $2x = x^2$ .

B.  $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$ .

C.  $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^2$ .

D.  $2x^2 - 3 = x^2 - 3$ .

**Lời giải.**

Chuyển vế và đổi dấu là một phép biến đổi tương đương, do đó  $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$  tương đương với (1).

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 226.** Chọn phát biểu đúng?

A.  $x^2(x+1) = 2x^2 \Leftrightarrow x+1 = 2$ .

B.  $(x^2+1)x = (x^2+1)(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow x = \sqrt{x}-1$ .

C.  $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 0$ .

D.  $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x+1 = 1$ .

**Lời giải.**

$$(x^2+1)x = (x^2+1)(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)x - (x^2+1)(\sqrt{x}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)[x - (\sqrt{x}-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1) = 0 & (\text{vn}) \\ x - (\sqrt{x}-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - (\sqrt{x}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{x}-1$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 227.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 0$  là

A.  $S = \emptyset$ .

B.  $S = \{-3\}$ .

C.  $S = \{\pm 3\}$ .

D.  $S = \{3\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x \neq -3$ .

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = -3 & (\text{không thỏa mãn}). \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = \{3\}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 228.** Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình  $x - 1 = 0$ ?

A.  $x + 2 = 0$ .

B.  $x - 1 = 0$ .

C.  $2x - 2 = 0$ .

D.  $(x - 1)(x + 2) = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 229.** Phương trình nào sau đây là phương trình hệ quả của phương trình  $\frac{x^2+x}{x+1} = 3$ ?

A.  $3(x^2+x) = x+1$ .

B.  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

C.  $x^2 + x = 3$ .

D.  $x^2 + x = 0$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \frac{x^2+x}{x+1} = 3 \Rightarrow x^2+x = 3(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Vậy  $x^2 - 2x - 3 = 0$  là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 230.** Cho phương trình  $2x - \frac{3}{x} = x^2 - \frac{3}{x}$  (1). Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình (1)?

A.  $2x = x^2$ .

B.  $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$ .

C.  $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^2$ .

D.  $2x^2 - 3 = x^2 - 3$ .

**Lời giải.**

Chuyển vế và đổi dấu là một phép biến đổi tương đương, do đó  $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$  tương đương với (1).

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 231.** Chọn phát biểu đúng?

A.  $x^2(x + 1) = 2x^2 \Leftrightarrow x + 1 = 2.$

C.  $x + \sqrt{x - 1} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x = 0.$

B.  $(x^2 + 1)x = (x^2 + 1)(\sqrt{x} - 1) \Leftrightarrow x = \sqrt{x} - 1.$

D.  $\frac{x + 1}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x + 1 = 1.$

**Lời giải.**

$$(x^2 + 1)x = (x^2 + 1)(\sqrt{x} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)x - (x^2 + 1)(\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)[x - (\sqrt{x} - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 1) = 0 & (\text{vn}) \\ x - (\sqrt{x} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - (\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{x} - 1.$$

Chọn đáp án **B** □

**Câu 232.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{x^2}{x + 3} - \frac{9}{x + 3} = 0$  là

A.  $S = \emptyset.$

B.  $S = \{-3\}.$

C.  $S = \{\pm 3\}.$

D.  $S = \{3\}.$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x \neq -3.$

Ta có  $\frac{x^2}{x + 3} - \frac{9}{x + 3} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = -3 & (\text{không thỏa mãn}). \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = \{3\}.$

Chọn đáp án **D** □

**ĐÁP ÁN**

1. D	2. D	3. D	4. C	5. D	6. A	7. D	8. B	9. C	10. C
11. C	12. C	13. D	14. D	15. C	16. A	17. D	18. A	19. A	20. D
21. B	22. C	23. C	24. C	25. A	26. C	27. B	28. B	29. B	30. A
31. B	32. B	33. B	34. B	35. C	36. C	37. C	38. D	39. C	40. B
41. B	42. D	43. D	44. A	45. A	46. A	47. D	48. C	49. C	50. C
51. D	52. C	53. C	54. C	55. A	56. C	57. D	58. B	59. A	60. A
61. B	62. D	63. C	64. C	65. D	66. A	67. D	68. D	69. D	70. D
71. A	72. C	73. A	74. A	75. C	76. C	77. C	78. C	79. B	80. C
81. C	82. A	83. B	84. A	85. B	86. B	87. B	88. A	89. C	90. B
91. C	92. C	93. B	94. B	95. B	96. C	97. D	98. D	99. C	100. D
101. B	102. A	103. B	104. C	105. B	106. A	107. B	108. B	109. A	110. A
111. A	112. A	113. C	114. B	115. D	116. A	117. A	118. C	119. B	120. D
121. B	123. C	124. B	125. B	126. B	127. C	128. A	129. D	130. A	131. A
132. A	133. A	134. A	135. B	137. D	138. B	139. C	140. B	141. C	142. B
143. D	144. B	145. C	146. A	147. D	148. A	149. A	150. A	151. A	152. A
153. B	155. D	156. B	157. B	158. B	159. D	160. C	161. A	162. B	163. C
164. D	165. A	166. C	167. A	168. B	169. D	170. D	171. A	172. A	173. D
174. D	175. A	176. A	177. C	178. C	179. A	180. B	181. A	182. C	183. A
184. A	185. C	186. B	187. C	188. D	189. C	190. C	191. A	192. B	193. A
194. C	195. A	196. A	197. C	198. B	199. C	200. B	201. C	202. D	203. D
204. A	205. B	206. C	207. B	208. B	209. C	210. C	211. D	212. D	213. B
214. B	215. B	216. C	217. D	218. D	219. A	220. B	221. C	222. B	223. B
224. B	225. B	226. B	227. D	228. C	229. B	230. B	231. B	232. D	

## BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC NHẤT VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### A GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Phương trình bậc nhất ẩn  $x$  là phương trình có dạng  $ax + b = 0$ , ( $a \neq 0$ ). (1)

Phương trình (1)  $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ .

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là  $x = -\frac{b}{a}$ .

**Nhận xét.** Trong trường hợp tổng quát. Xét phương trình  $ax + b = 0$ , ta có

— Phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow a \neq 0$ .

— Phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b = 0$ .

— Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$

— Phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a = b = 0. \end{cases}$

### B GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

#### 1 GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương trình bậc hai ẩn  $x$  là phương trình có dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a \neq 0$ . (2)

Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$  hoặc  $\Delta' = b'^2 - ac$  với  $b' = \frac{b}{2}$ . Ta có

— Nếu  $\Delta > 0$  ( $\Delta' > 0$ ), phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

— Nếu  $\Delta = 0$  ( $\Delta' = 0$ ), phương trình (2) có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{b'}{a}$ .

— Nếu  $\Delta < 0$  ( $\Delta' < 0$ ), phương trình (2) vô nghiệm.

**Nhận xét.** Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  trong trường hợp tổng quát, ta có

— Phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0. \end{cases}$

— Phương trình có đúng một nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ và } b \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } \Delta = 0. \end{cases}$

— Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \text{ và } c \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } \Delta < 0. \end{cases}$

— Phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 0 \\ a = 0 \text{ và } b \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } \Delta \geq 0. \end{cases}$

#### 2 ĐỊNH LÝ VI-ÉT – ĐỊNH LÝ VI-ÉT ĐẢO

Nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$

Cho hai số  $u, v$  thỏa mãn  $u + v = S, uv = P$ . Khi đó  $u, v$  tồn tại là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

**⚠** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$

— có hai nghiệm trái dấu nhau  $\Leftrightarrow ac < 0$ .

— có hai nghiệm nghiệm phân biệt cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0. \end{cases}$

— có hai nghiệm dương phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$

— có hai nghiệm âm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0. \end{cases}$

### **C** PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI, PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU CĂN

#### **KIẾN THỨC CƠ BẢN**

$$\text{— } |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2. \end{cases}$$

$$\text{— } \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

$$\text{— } |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B. \end{cases}$$

$$\text{— } \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ hoặc } B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$$

### **D** CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

#### **1** PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

**①** Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Đặt điều kiện.
- Quy đồng mẫu số.
- Giải phương trình, so điều kiện để nhận nghiệm.

**②** Phương trình chứa giá trị tuyệt đối

$$\text{— } |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2. \end{cases}$$

$$\text{— } \text{Dạng } |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B. \end{cases}$$

#### **2** PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG HAI VẾ

Phương pháp chung

- Đặt điều kiện.
- Chuyển vế sao cho hai vế cùng dấu.
- Bình phương hai vế để khử căn thức.

Một số dạng thường gặp:

① Phương trình  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

② Phương trình  $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ ( hoặc } B \geq 0) \\ A = B. \end{cases}$

③ Phương trình  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ 2\sqrt{AB} = C - A - B. \end{cases}$

④ Phương trình  $\sqrt{F} - \sqrt{G} = \sqrt{H} - \sqrt{K}$  thỏa mãn  $\begin{cases} F + H = G + K \\ F \cdot H = G \cdot K. \end{cases}$

Ta biến đổi về dạng  $\sqrt{F} + \sqrt{H} = \sqrt{K} + \sqrt{G}$  rồi bình phương hai vế và giải phương trình hệ quả.

### 3 PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Tìm mối liên hệ giữa các biến để đặt ẩn phụ thích hợp. Một số dạng cơ bản thường gặp

— Nếu có  $\sqrt{f(x)}$  và  $f(x)$  thì đặt  $t = f(x)$ .

— Nếu có  $\sqrt{f(x)}$ ,  $\sqrt{g(x)}$  và  $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = a$  thì đặt  $t = \sqrt{f(x)} \Rightarrow \sqrt{g(x)} = \frac{a}{t}$ .

— Nếu có  $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ ,  $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$ ,  $f(x) + g(x)$  thì đặt  $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ .

— Nếu có dạng  $\alpha \sqrt[n]{a - f(x)} + \beta \sqrt[n]{b + f(x)} = c$  thì đặt  $\begin{cases} u = \sqrt[n]{a - f(x)} \\ v = \sqrt[n]{b + f(x)}. \end{cases}$

### 4 PHƯƠNG PHÁP NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP

— Liên hợp số: Khi gặp phương trình dạng  $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[m]{g(x)} + h(x) = 0$  nhận  $a$  làm nghiệm thì ta tiến hành ghép

$$\left(\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{f(a)}\right) + \left(\sqrt[m]{g(x)} - \sqrt[m]{g(a)}\right) + \left(h(x) + \sqrt[n]{f(a)} + \sqrt[m]{g(a)}\right) = 0 \Leftrightarrow (x - a)k(x) = 0.$$

— Liên hợp trực tiếp giữa các căn thức: Khi gặp phương trình dạng  $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = h(x)$  với  $h(x) = (f(x) - g(x)) \cdot k(x)$  thì ta tiến hành liên hợp lượng  $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)}$  để xuất hiện nhân tử  $f(x) - g(x)$ .

**!** Thực hiện tương tự với các phương trình dạng  $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[h(x)] \pm \sqrt[k(x)]$ .

— Liên hợp biểu thức: Khi gặp phương trình dạng chứa căn thức có hai nghiệm  $x_1, x_2$  lẻ nhưng tổng và tích của chúng là các số “đẹp” thì ta nghĩ đến việc nhóm lượng căn thức với lượng  $ax + b$  để đưa ra nhân tử  $(x^2 - Sx + P)$ . Ngoài ra ta có thể sử dụng kỹ thuật hệ số bất định như sau. Giả sử phương trình  $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} - (ax + b) = g(x) - ax - b$ . Khi đó  $\frac{f(x) - (ax + b)^2}{\sqrt{f(x)} + ax + b} = g(x) - ax - b$ . Bằng cách đồng nhất hệ số hai vế ta sẽ có ngay giá trị  $a, b$ .

— Một số dạng liên hợp thường gặp

—  $(\sqrt{f(x)} - g(x)) (\sqrt{f(x)} + g(x)) = f(x) - g^2(x)$ .

—  $(\sqrt[3]{f(x)} - g(x)) (\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)} \cdot g(x) + g^2(x)) = f(x) - g^3(x)$ .



**E HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN****Dạng 1. Một số phương trình cơ bản.**

**Bài 1.** Giải phương trình  $\frac{1-6x}{x-2} + \frac{9x+4}{x+2} = \frac{x(3x-2)+1}{x^2-4}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq \pm 2$ .

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1-6x}{x-2} + \frac{9x+4}{x+2} &= \frac{x(3x-2)+1}{x^2-4} \\ \Leftrightarrow \frac{(x+2)(1-6x)}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(9x+4)}{(x-2)(x+2)} &= \frac{3x^2-2x+1}{(x-2)(x+2)} \\ \Leftrightarrow x-6x^2+2-12x+9x^2+4x-18x-8 &= 3x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow 3x^2-25x-6 &= 3x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow -23x &= 7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{23} \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Vậy  $x = -\frac{7}{23}$  là nghiệm của phương trình. □

**Bài 2.** Giải các phương trình sau

①  $1 + \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)}$ .

②  $\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{4x-2}{(2x-1)^2}$ .

**Lời giải.**

① Điều kiện  $x \neq -3$  và  $x \neq 2$ .

Với điều kiện trên, phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (2-x)(x+3) - 2(x+3) &= 10(2-x) - 50 \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là  $x = 10$ .

② Điều kiện  $x \neq -1$  và  $x \neq \frac{1}{2}$ .

Với điều kiện trên, phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x+1)^2} &= \frac{2}{2x-1} \\ \Leftrightarrow (x+3)(2x-1) &= 2(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow x &= 5. \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là  $x = 5$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình sau  $1 + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{x^2-x-6}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \neq 3 \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -2. \end{cases}$

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với

$$1 + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{(x-3)(x+2)} \Leftrightarrow (x-3)(x+2) + x+2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là  $x = -3$ . □

**Bài 4.** Giải phương trình  $\sqrt{2x-3} = x-3$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{2x-3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 6$ . □

**Bài 5.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2+10x-5} = 2(x-1)$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+10x-5} = 2(x-1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2(x-1) \geq 0 \\ x^2+10x-5 = 4x^2-8x+4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 1 \\ -3x^2+18x-9 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 3 + \sqrt{6} \\ x = 3 - \sqrt{6} \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 3 + \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 3 + \sqrt{6}$ . □

**Bài 6.** Giải phương trình  $(x^2+x-6)\sqrt{2x^2-x-10} = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $2x^2-x-10 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x \leq -2. \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} x^2+x-6 = 0 & (1) \\ \sqrt{2x^2-x-10} = 0 & (2) \end{cases}$

—  $x^2+x-6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (loại)}. \end{cases}$

—  $\sqrt{2x^2-x-10} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-x-10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{5}{2} \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là  $x = -3, x = -2, x = \frac{5}{2}$ . □

**Bài 7.** Giải phương trình:  $\sqrt{2x^2-2x+16} = x+4$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x^2-2x+16} = x+4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2x^2-2x+16 = (x+4)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2-10x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 10. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 0$  và  $x = 10$ . □

**Bài 8.** Giải phương trình sau  $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17$ .

**Lời giải.**

- Với  $4x - 17 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{17}{4}$  ta có  $VT \geq 0, VP < 0$  suy ra phương trình vô nghiệm.
- Với  $4x - 17 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{17}{4}$ , khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra

$$\begin{aligned} & |x^2 - 4x - 5| = 4x - 17 \\ \Leftrightarrow & |x^2 - 4x - 5|^2 = (4x - 17)^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - 4x - 5)^2 = (4x - 17)^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 22) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 - 22 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \\ x = \pm\sqrt{22}. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện  $x \geq \frac{17}{4}$  thấy chỉ có  $x = 6$  và  $x = \sqrt{22}$  thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x = 6$  và  $x = \sqrt{22}$ . □

**Bài 9.** Giải phương trình  $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta nhận thấy  $a + b + c + d = 0$  nên  $x = 1$  là một nghiệm của phương trình, từ đó ta có

$$\begin{aligned} & 3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1)(3x^2 + 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{-1; 1; \frac{1}{3}\right\}$ . □

**Bài 10.** Giải phương trình  $\frac{2x^3 + 2x^2 - 11x + 7}{x^2 - x} = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & 2x^3 + 2x^2 - 11x + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1)(2x^2 + 4x - 7) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 4x - 7 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{2 - 3\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{ \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{2}; \frac{2 - 3\sqrt{2}}{2} \right\}$ . □

**Dạng 2. Phương pháp bình phương hai vế.**

**Bài 1.** Giải phương trình sau  $\sqrt{x^2 + x + 2} = 3x - 1$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + x + 2} = 3x - 1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = (3x - 1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2 - 7x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{8} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 1$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $\sqrt{x + 1} = \sqrt{10} - \sqrt{x - 3}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$ .

Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 3})^2 = 10 \\ \Leftrightarrow & x + 1 + 2\sqrt{(x + 1)(x - 3)} + x - 3 = 10 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{(x + 1)(x - 3)} = 12 - 2x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 12 - 2x \geq 0 \\ 4(x + 1)(x - 3) = (12 - 2x)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq 6 \\ x = \frac{39}{10} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{39}{10}. \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được phương trình có nghiệm là  $x = \frac{39}{10}$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -1, x = -2$ . □

**Bài 4.** Giải phương trình  $x - \sqrt{2x + 3} = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$x - \sqrt{2x+3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là  $x = 3$ . □

**Bài 5.** Giải phương trình  $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1} = 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} 6x+1 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{6} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{6}$ .

Với điều kiện trên phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{6x+1} = \sqrt{2x+1} + 2 \\ \Leftrightarrow & 6x+1 = 2x+5 + 4\sqrt{2x+1} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x+1} = x-1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 4. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta được  $x = 4$  là nghiệm của phương trình. □

**Bài 6.** Giải phương trình  $\sqrt{2019x+4} - \sqrt{2019x+1} = 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} 2019x+4 \geq 0 \\ 2019x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{2019} \\ x \geq -\frac{1}{2019} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2019}$ .

Với điều kiện trên, phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{2019x+4} = \sqrt{2019x+1} + 1 \\ \Leftrightarrow & 2019x+4 = 2019x+1 + 2\sqrt{2019x+1} + 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x+1} = 1 \\ \Leftrightarrow & 2x+1 = 1 \\ \Leftrightarrow & x = 0. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện (\*) ta được  $x = 0$  là nghiệm của phương trình. □

**Bài 7.** Giải phương trình  $\sqrt{3+2x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+4}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -1$ .

Với điều kiện trên, bình phương hai vế phương trình đã cho ta được

$$4 + 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 3x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \{-1\}$ . □

**Bài 8.** Giải phương trình  $\sqrt{3+2x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+4}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -1$ .

Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được

$$4 + 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 3x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là  $T = \{-1\}$ . □

**Bài 9.** Giải phương trình  $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2(x+1)}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} - \sqrt{2(x+1)} &= \sqrt{4x} - \sqrt{x+3} \\ \Rightarrow 3x+1 - 2\sqrt{(3x+1) \cdot 2 \cdot (x+1)} + 2(x+1) &= 4x - 2\sqrt{4x(x+3)} + x+3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{6x^2 + 8x + 2} &= \sqrt{4x^2 + 12x} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy  $x = 1$  thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = \{1\}$ . □

**Bài 10.** Giải phương trình  $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+16} = \sqrt{2x+4} + \sqrt{2x+9}$ . (1)

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+16 \geq 0 \\ 2x+4 \geq 0 \\ 2x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -8 \\ x \geq -2 \\ x \geq -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow 2x+1 + 2x+16 + 2\sqrt{(2x+1)(2x+16)} &= 2x+4 + 2x+9 + 2\sqrt{(2x+4)(2x+9)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 34x + 16} + 2 &= \sqrt{4x^2 + 26x + 36}. \quad (2) \end{aligned}$$

Hai vế của (2) không âm, bình phương 2 vế của (2) ta có

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow 4x^2 + 34x + 20 + 4\sqrt{4x^2 + 34x + 16} &= 4x^2 + 26x + 36 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 34x + 16} &= -2x + 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4 \geq 0 \\ 4x^2 + 34x + 16 = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 0$ . □

### Dạng 3. Phương pháp đặt ẩn phụ

**Bài 1.** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $3x^2 + 5x + 1 \geq 0$ . (\*)

Đặt  $3x^2 + 5x + 1 = t, t \geq 0$ .

Khi đó phương trình trở thành

$$\sqrt{t+7} - \sqrt{t} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{t+7} = \sqrt{t} + 1 \Leftrightarrow t+7 = t+1+2\sqrt{t} \Leftrightarrow \sqrt{t} = 3 \Leftrightarrow t = 9 > 0 \text{ (nhận)}.$$

Với  $t = 9$ , ta có

$$3x^2 + 5x + 1 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -\frac{8}{3} \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{1; -\frac{8}{3}\right\}$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x + 6} = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x^2 + 3x + 6 \geq 0$ . Đặt  $t = \sqrt{x^2 + 3x + 6}, t \geq 0$ .

Khi đó  $t^2 = x^2 + 3x + 6 \Leftrightarrow t^2 - 6 = x^2 + 3x$ .

Thay vào phương trình ta được  $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (nhận)} \\ t = -3 \text{ (loại)}. \end{cases}$

Với  $t = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 6} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{-2; -1\}$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình  $\sqrt{x+8} - 2\sqrt{x+7} = 2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -7$ .

Đặt  $t = \sqrt{x+7}$ , điều kiện  $t \geq 0$ .

Ta có

$$\sqrt{t^2+1-2t} = 2 - \sqrt{t^2-6-t} \Leftrightarrow |t-1| = 2 - \sqrt{t^2-t-6}.$$

Nếu  $t \geq 1$  thì ta có  $3-t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 9-6t+t^2 \\ t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = 3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (nhận)}.$

Nếu  $t < 1$  thì ta có  $1+t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 1+2t+t^2 \\ t \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{7}{3} \text{ (loại)}.$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 2$ . □

**Bài 4.** Giải phương trình  $(x^2 + 1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2 + 4}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$(x^2 + 1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2 + 4} \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) = 4 - x\sqrt{2x^2 + 4}. \quad (*)$$

Đặt  $t = x\sqrt{2x^2 + 4} \Rightarrow t^2 = x^2(2x^2 + 4) \Rightarrow \frac{t^2}{2} = x^2(x^2 + 2)$ .

Phương trình (\*) trở thành

$$\frac{t^2}{2} = 4 - t \Leftrightarrow t^2 + 4t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2. \end{cases}$$

— Với  $t = -4$ , ta có  $x\sqrt{2x^2 + 4} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ .

— Với  $t = 2$ , ta có  $x\sqrt{2x^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + 2x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$ .

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm  $x = -\sqrt{2}$  và  $x = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$ . □

**Bài 5.** Giải phương trình  $x - \sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x^2 - 30x + 2}$ . (1)

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 \leq x < \frac{15 - \sqrt{221}}{2} \\ x > \frac{15 + \sqrt{221}}{2}. \end{cases}$$

Ta thấy  $x = 0$  không thỏa mãn (1).

Với  $x > 0$ , chia cả 2 vế của (1) cho  $\sqrt{x}$  ta được

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \sqrt{2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 30}. \quad (2)$$

Đặt  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = t$  ( $t \geq 2$ ).

Phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2t^2 - 34} &= t - 1 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 34 &= t^2 - 2t + 1 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2t - 35 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \text{ (nhận)} \\ t = -7 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 5 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 23 \Leftrightarrow x^2 - 23x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm 5\sqrt{21}}{2}$ .

Đối chiếu điều kiện ta có  $x = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2}$ . □

**Bài 6.** Giải phương trình  $2x^2 + 3x + 7 = (x + 5)\sqrt{2x^2 + 1}$ .

**Lời giải.**

— Phương trình

$$2x^2 + 3x + 7 = (x + 5)\sqrt{2x^2 + 1} \Leftrightarrow 2x^2 + 1 - (x + 5)\sqrt{2x^2 + 1} + 3x + 6 = 0.$$

— Đặt  $t = \sqrt{2x^2 + 1}$  ( $t \geq 0$ ). Ta có phương trình:  $t^2 - (x + 5)t + (3x + 6) = 0$ . (\*)

$$\Delta = [-(x + 5)]^2 - 4(3x + 6) = (x - 1)^2.$$

— Phương trình (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = x + 2. \end{cases}$

Với  $t = 3$  ta có  $\sqrt{2x^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2$ .

Với  $t = x + 2$  ta có  $\sqrt{2x^2 + 1} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7}. \end{cases}$

— Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{2; -2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}\}$ . □

**Bài 7.** Giải phương trình  $\sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - 1 = \sqrt{\frac{5x^2 - 2}{6}}$ .

**Lời giải.**

— Điều kiện xác định  $5x^2 - 2 \geq 0$ .

— Đặt  $t = \sqrt{\frac{5x^2 - 2}{6}}$  ( $t \geq 0$ ). Ta có  $5x^2 = 6t^2 + 2$ .



Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^3 + 6t^2 + 2} - 1 = t \\ \Leftrightarrow & x^3 + 6t^2 + 2 = (t + 1)^3 \\ \Leftrightarrow & x^3 = (t - 1)^3 \Leftrightarrow x = t - 1 \Leftrightarrow t = x + 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\frac{5x^2 - 2}{6}} = x + 1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -1 \\ \frac{5x^2 - 2}{6} = (x + 1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 12x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6 + 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

— Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = -6 + 2\sqrt{7}$ .

□

**Bài 8.** Giải phương trình  $(x + 1)\sqrt{6x^2 - 6x + 25} = 23x - 13$ .

**Lời giải.**

— Đặt  $t = \sqrt{6x^2 - 6x + 25}$  ( $t \geq 0$ ). Khi đó  $t^2 = 6x^2 - 6x + 25$ .

— Phương trình  $(x + 1)\sqrt{6x^2 - 6x + 25} = 23x - 13$  trở thành

$$\begin{aligned} & (6x^2 - 6x + 25) + (x + 1) \cdot t - (6x^2 - 6x + 25) - (23x - 13) = 0 \\ \Leftrightarrow & t^2 + (x + 1) \cdot t - (6x^2 + 17x + 12) = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có:  $\Delta = (x + 1)^2 + 4(6x^2 + 17x + 12) = 25x^2 + 70x + 49 = (5x + 7)^2$ .

Khi đó (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x + 3 \\ t = -3x - 4. \end{cases}$

— Với  $t = 2x + 3$  ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{6x^2 - 6x + 25} = 2x + 3 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 6x^2 - 6x + 25 = (2x + 3)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 2x^2 - 18x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 8 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $t = -3x - 4$  ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{6x^2 - 6x + 25} = -3x - 4 & \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 4 \geq 0 \\ 6x^2 - 6x + 25 = (-3x - 4)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{4}{3} \\ 3x^2 + 30x - 9 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{4}{3} \\ \begin{cases} x = -5 - 2\sqrt{7} \\ x = -5 + 2\sqrt{7} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

— Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $S = \{1; 8; -2\sqrt{7} - 5\}$ .

□

**Bài 9.** Giải phương trình  $(x + 3)\sqrt{(4 - x)(12 + x)} = 28 - x$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $-12 \leq x \leq 4$ .

Khi đó

$$(x + 3)\sqrt{(4 - x)(12 + x)} = 28 - x \Leftrightarrow 2(x + 3)\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = (-x^2 - 8x + 48) + x^2 + 6x + 8.$$

Đặt  $t = \sqrt{-x^2 - 8x + 48}$ ,  $t \geq 0$ . Phương trình trở thành

$$2(x + 3)t = t^2 + x^2 + 6x + 8 \Leftrightarrow t^2 - 2(x + 3)t + x^2 + 6x + 8 = 0.$$

Ta có  $\Delta' = (x + 3)^2 - (x^2 + 6x + 8) = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 1$ . Suy ra  $\begin{cases} t = x + 2 \\ t = x + 4. \end{cases}$

— Với  $t = x + 2$  ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ -x^2 - 8x + 48 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2 + 12x - 44 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = -3 + \sqrt{31} \Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{31} \text{ (nhận).} \\ x = -3 - \sqrt{31} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $t = x + 4$  ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x + 4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ -x^2 - 8x + 48 = (x + 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ 2x^2 + 16x - 32 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x = -4 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -4 + 4\sqrt{2} \text{ (nhận).} \\ x = -4 - 4\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{-3 + \sqrt{31}; -4 + 4\sqrt{2}\}$ . □

**Bài 10.** Giải phương trình  $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$ . (1)

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $t \geq 1$ . Suy ra  $t^2 = x^2 + 1$ .

Khi đó phương trình (1) trở thành  $t^2 + 3x = (x + 3)t \Leftrightarrow t^2 - (x + 3)t + 3x = 0$ . (2)

Ta xem (2) là phương trình bậc hai ẩn  $t$  và  $x$  là tham số, có  $\Delta = (x + 3)^2 - 4 \cdot 3x = (x - 3)^2$ .

Suy ra (2) có hai nghiệm:  $t = \frac{x + 3 + x - 3}{2} = x$ ;  $t = \frac{x + 3 - x + 3}{2} = 3$ .

— Với  $t = x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = x^2 \end{cases}$  phương trình vô nghiệm.

— Với  $t = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$ .

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \pm 2\sqrt{2}$ . □

**Bài 11.** Giải phương trình  $3(x^2 - 1) + 4x = 4x\sqrt{4x - 3}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$ .

Phương trình đã cho tương đương với  $3x^2 - 4x\sqrt{4x - 3} + 4x - 3 = 0$ .

Đặt  $t = \sqrt{4x - 3}$ ,  $t \geq 0$ . Suy ra  $t^2 = 4x - 3$ . Khi đó, phương trình trở thành

$$3x^2 - 4xt + t^2 = 0 \Leftrightarrow (x - t)(3x - t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 3x. \end{cases}$$

— Với  $t = x \Rightarrow \sqrt{4x - 3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

— Với  $t = 3x \Rightarrow \sqrt{4x - 3} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = 9x^2 \end{cases}$  (Hệ vô nghiệm).

Đối chiếu với điều kiện, ta suy ra tập nghiệm của phương trình  $S = \{1; 3\}$ . □

**Dạng 4. Phương pháp nhân lượng liên hợp**

**Bài 1.** Giải phương trình  $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = 2x^2 - 5x - 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $2 \leq x \leq 4$ .

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = 2x^2 - 5x - 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x - 2} - 1 + \sqrt{4 - x} - 1 = 2x^2 - 5x - 3 \\ \Leftrightarrow & \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} + 1} - \frac{x - 3}{\sqrt{4 - x} + 1} = (x - 3)(2x + 1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3 \\ \frac{1}{\sqrt{x - 2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{4 - x} + 1} = 2x + 1. \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thấy  $\frac{1}{\sqrt{x - 2} + 1} \leq 1$  và  $\frac{1}{\sqrt{4 - x} + 1} \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x - 2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{4 - x} + 1} \leq 2 - \sqrt{2}$ .

Mặt khác  $x \geq 2 \Rightarrow 2x + 1 \geq 5 \Rightarrow$  phương trình (\*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 3$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $\sqrt[3]{x - 9} + 2x^2 + 3x = \sqrt{5x - 1} + 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq \frac{1}{5}$ .

Phương trình ban đầu tương đương:

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{x - 9} + 2) + (2 - \sqrt{5x - 1}) + 2x^2 + 3x - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x - 1}{(\sqrt[3]{x - 9})^2 - 2\sqrt[3]{x - 9} + 4} - \frac{5(x - 1)}{\sqrt{5x - 1} + 2} + (x - 1)(2x + 5) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1) \left[ \frac{1}{(\sqrt[3]{x - 9} - 1)^2 + 3} - \frac{5}{\sqrt{5x - 1} + 2} + (2x + 5) \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \frac{1}{(\sqrt[3]{x - 9} - 1)^2 + 3} - \frac{5}{\sqrt{5x - 1} + 2} + 2x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Do  $\frac{1}{(\sqrt[3]{x - 9} - 1)^2 + 3} - \frac{5}{\sqrt{5x - 1} + 2} + 2x + 5 \geq -\frac{5}{2} + \frac{2}{5} + 5 > 0, \forall x \geq \frac{1}{5}$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 1$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình  $3x^2 + 10x + \sqrt{3x + 3} = x^3 + 26 + \sqrt{5 - 2x}$ . (1)

**Lời giải.**

Điều kiện  $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (\sqrt{3x+3}-3) + (1-\sqrt{5-2x}) - x^3 + 3x^2 + 10x - 24 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}} - (x-2)(x^2-x-12) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2) \left[ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{5-2x}} - (x^2-x-12) \right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{5-2x}} = x^2-x-12. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét phương trình  $\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{5-2x}} = x^2-x-12.$  (\*)

Ta có  $x^2-x-12 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}.$

Với  $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right] \Rightarrow -2 < -\frac{3}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq 2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \leq -\frac{33}{4} < 0.$

Và  $\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{5-2x}} > 0, \forall x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right].$

Nên phương trình (\*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 2.$

**Chú ý:** Ta có thể chứng minh  $x^2-x-12 \leq -\frac{33}{4}$  bằng cách sau

Xét hàm số  $f(x) = x^2-x-12$  trên  $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ , lập bảng biến thiên.

$x$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$f(x)$	-10	$-\frac{49}{4}$	$-\frac{33}{4}$

Từ bảng biến thiên suy ra  $f(x) = x^2-x-12 \leq -\frac{33}{4}.$  □

**Bài 4.** Giải phương trình  $2\sqrt[3]{x} + x^3 + 3x = \sqrt{x^2+3} + x^2 + 3.$  (\*)

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{x}-1) + (x-1)(x^2+3) + (2-\sqrt{x^2+3}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} + (x-1)(x^2+3) - \frac{x^2-1}{2+\sqrt{x^2+3}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1) \left( \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} + x^2+3 - \frac{x+1}{2+\sqrt{x^2+3}} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} + x^2+3 - \frac{x+1}{2+\sqrt{x^2+3}} = 0. \end{cases} (*)
 \end{aligned}$$

Ta có  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$  (1)

Và  $1 - \frac{x+1}{2+\sqrt{x^2+3}} = \frac{1+\sqrt{x^2+3}-x}{2+\sqrt{x^2+3}} > \frac{\sqrt{x^2-x}}{2+\sqrt{x^2+3}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + x^2 + 3 - \frac{x+1}{2+\sqrt{x^2+3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + x^2 + 2 + 1 - \frac{x+1}{2+\sqrt{x^2+3}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 1.$  □

**Bài 5.** Giải phương trình  $6\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 4} = \sqrt{x^2 - 2} + 3\sqrt{8x^2 - 6x}$ . (1)

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \\ 8x^2 - 6x \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Với điều kiện trên ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 6\sqrt{2x^2 - 2x + 1} - 3\sqrt{8x^2 - 6x} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \\ &\Leftrightarrow 3(\sqrt{8x^2 - 8x + 4} - \sqrt{8x^2 - 6x}) = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \\ &\Rightarrow 3 \cdot \frac{-2x + 4}{\sqrt{8x^2 - 8x + 4} + \sqrt{8x^2 - 6x}} = \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \\ &\Leftrightarrow (x - 2) \left( \frac{-6}{\sqrt{8x^2 - 8x + 4} + \sqrt{8x^2 - 6x}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \right) = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ hệ điều kiện (2)  $\frac{-6}{\sqrt{8x^2 - 8x + 4} + \sqrt{8x^2 - 6x}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} < 0$ .

Do đó (3)  $\Leftrightarrow x = 2$ .

Kết hợp điều kiện ta có  $x = 2$  thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 2$ . □

**Bài 6.** Giải phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x + 5} = 1 - 3x. \quad (1)$$

**Lời giải.**

Nhận thấy  $x = 1$  là một nghiệm của (1), ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x + 1)^3 - 8 = 3\sqrt[3]{3x + 5} - 6 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)[(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 4] = \frac{9(x - 1)}{\sqrt[3]{(3x + 5)^2} + 2\sqrt[3]{3x + 5} + 4} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x + 2)^2 + 3 = \frac{9}{(\sqrt[3]{3x + 5} + 1)^2 + 3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ [(x + 2)^2 + 3] \cdot [(\sqrt[3]{3x + 5} + 1)^2 + 3] = 9. \end{cases} \end{aligned}$$

Mặt khác  $[(x + 2)^2 + 3][(\sqrt[3]{3x + 5} + 1)^2 + 3] \geq 9, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + 3 = 3 \\ (\sqrt[3]{3x + 5} + 1)^2 + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Thử lại ta thấy, phương trình đã cho có nghiệm  $x = 1$  hoặc  $x = -2$ . □

**Bài 7.** Giải phương trình

$$\sqrt{10x + 1} + \sqrt{3x - 5} = \sqrt{9x + 4} + \sqrt{2x + 2}. \quad (1)$$

**Lời giải.**

Nhằm được  $x = 3$  là nghiệm nên đoán  $x - 3$  là nhân tử chung.

Nhận thấy  $(10x + 1) - (9x + 4) = (3x - 5) - (2x - 2) = x - 3$ . Do đó ta có lời giải như sau:

Điều kiện xác định là

$$\begin{cases} 10x + 1 \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \\ 9x + 4 \geq 0 \\ 2x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{10} \\ x \geq \frac{5}{3} \\ x \geq -\frac{4}{9} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (\sqrt{10x+1} - \sqrt{9x+4}) + (\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{10x+1 - (9x+4)}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{3x-5 - (2x-2)}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3) \left( \frac{1}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{1}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Vì  $\frac{1}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{1}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} > 0, \forall x \geq \frac{5}{3}$  cho nên

$$(2) \Leftrightarrow x = 3, \text{ thỏa mãn điều kiện } x \geq \frac{5}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 3$ . □

**Bài 8.** Giải phương trình

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0. \quad (1)$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 6.$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5) \left( \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình

$$\frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 = 0. \quad (2)$$

Ta có  $\frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$  nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 5$ . □

**Bài 9.** Giải phương trình

$$\sqrt{2x+4} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} + 2\sqrt{2-x}. \quad (1)$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $-2 \leq x \leq 2$ .

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{(2x+4) - 4(2-x)}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} \\ &\Leftrightarrow (6x-4) \left[ \frac{1}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+4} \\ &\Leftrightarrow (2x+4) + 4(2-x) + 4\sqrt{(2x-4)(2-x)} = x^2 + 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 4\sqrt{2(4-x^2)} \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 4\sqrt{2(4-x^2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Với  $-2 \leq x \leq 2$  thì  $(x-2)(x+4) \leq 0$  và  $4\sqrt{2(4-x^2)} \geq 0$ . Do đó

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+4) = 0 \\ 4\sqrt{2(4-x^2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 2, x = \frac{2}{3}$ . □

**Bài 10.** Giải phương trình  $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$ .

**Lời giải.**

**Nhận xét.** Dùng máy tính tìm được  $x = \frac{1}{4}$  và  $x = 4$  là hai nghiệm của phương trình đã cho.

— Với  $\sqrt{x^2 - 4x + 1}$ . Giả sử  $\sqrt{x^2 - 4x + 1} = ax + b$ , ta có hệ

$$\begin{cases} \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 + 1} = a \cdot 4 + b \\ \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} + 1} = a \cdot \frac{1}{4} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Cho nên ta cần nhóm  $\sqrt{x^2 - 4x + 1} - \frac{x+1}{5}$ .

— Với  $\sqrt{x}$ . Giả sử  $\sqrt{x} = cx + d$ , ta có hệ

$$\begin{cases} \sqrt{4} = c \cdot 4 + d \\ \sqrt{\frac{1}{4}} = c \cdot \frac{1}{4} + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2}{5} \\ d = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Cho nên ta cần nhóm  $\sqrt{x} - \frac{2x+2}{5}$ .

Điều kiện xác định là

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 + \sqrt{3} \\ 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3}. \end{cases} \tag{*}$$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\left( \sqrt{x^2 - 4x + 1} - \frac{x+1}{5} \right) + 3 \left( \frac{2x+2}{5} - \sqrt{x} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[ 5\sqrt{x^2 - 4x + 1} - (x+1) \right] + 3 \left[ 2x+2 - 5\sqrt{x} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{25(x^2 - 4x + 1) - (x + 1)^2}{5\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x + 1} + 3 \cdot \frac{(2x + 2)^2 - 25x}{2x + 2 + 5\sqrt{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{6(4x^2 - 17x + 4)}{5\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x + 1} + \frac{3(4x^2 - 17x + 4)}{2x + 2 + 5\sqrt{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(4x^2 - 17x + 4) \left[ \frac{2}{5\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x + 1} + \frac{1}{2x + 2 + 5\sqrt{x}} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0 \left( \frac{2}{5\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x + 1} + \frac{1}{2x + 2 + 5\sqrt{x}} > 0 \text{ với mọi } x \text{ thỏa mãn } (*) \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = \left\{ \frac{1}{4}; 4 \right\}$ . □

**Bài 11.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$ .

**Lời giải.**

Ta nhận thấy  $\sqrt{x^2 + 12} > \sqrt{x^2 + 5}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5.$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì

$$3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}.$$

Ta nhận thấy  $x = 2$  là nghiệm của phương trình. Như vậy phương trình có thể phân tích về dạng phương trình tích  $(x - 2)A(x) = 0$ , để thực hiện được điều đó ta phải nhóm, tách như sau:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 + 12} - 4 = 3x - 6 + \sqrt{x^2 + 5} - 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 3(x - 2) + \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \\ &\Leftrightarrow (x - 2) \left( \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình

$$\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 = 0. \tag{*}$$

Ta có

$$\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 = \frac{(x + 2) (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 12} - 1)}{(\sqrt{x^2 + 12} + 4) (\sqrt{x^2 + 5} + 3)} - 3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}.$$

Suy ra phương trình (\*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 2$ . □

**Bài 12.** Giải phương trình  $x^2 - 2x + 3 = (x + 1)\sqrt{x^2 - 3x + 3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 3x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 3 = (x + 1)\sqrt{x^2 - 3x + 3} \\ &\Leftrightarrow (x + 1) (\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1) - x^2 + 3x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x + 1)(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} - (x^2 - 3x + 2) = 0 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left( \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \sqrt{x^2 - 3x + 3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = 1$  và  $x = 2$ . □

**Dạng 5. Bài toán chứa tham số**

**Bài 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho phương trình  $2\sqrt{x+1} = x+m$  có nghiệm thực.

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt{x+1}$ , với  $t \geq 0$ . Phương trình đã cho trở thành

$$2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1.$$

Xét hàm số  $f(t) = -t^2 + 2t + 1$  có đồ thị là một parabol có bề lõm hướng xuống dưới, hoành độ đỉnh  $t = 1$ . Ta có bảng biến thiên của hàm số  $f(t)$

$t$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$2$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên suy ra phương trình có nghiệm khi  $m \leq 2$ . □

**Bài 2.** Cho phương trình  $(x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

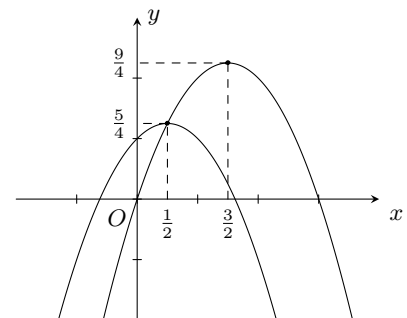
**Lời giải.**

Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$(x^2 - 2x + m)^2 - 2(x^2 - 2x + m) + m = x.$$

Đặt  $t = x^2 - 2x + m$  ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} t = x^2 - 2x + m \\ x = t^2 - 2t + m. \end{cases}$$



Từ hệ phương trình trên ta có

$$(x-t)(x+t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x+t-1 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{cases} x = x^2 - 2x + m \\ x + x^2 - 2x + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m = -x^2 + x + 1. \end{cases}$$

Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ các parabol  $(P_1): y = -x^2 + 3x$ ;  $(P_2): y = -x^2 + x + 1$  ta được điều kiện để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt là  $m \leq \frac{5}{4}$ . □

**Bài 3.** Tìm  $m$  để phương trình  $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$  có hai nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + (4 - m)x - 1 = 0. \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình  $3x^2 + (4 - m)x - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$ , tức là

$$\begin{cases} (4 - m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) > 0 \\ 3 \left[ 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (4 - m) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \right] \geq 0 \\ \frac{m - 4}{6} > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - m)^2 + 12 > 0 \\ \frac{1}{2}m - \frac{9}{4} \geq 0 \\ m - 4 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{9}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}.$$

Vậy  $m \geq \frac{9}{2}$  là giá trị cần tìm. □

**Bài 4.** Giải và biện luận phương trình  $\frac{|3x + mx + 2|}{|x + 1|} = m$  với  $m$  là tham số thực.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $x \neq -1$ .

**Trường hợp 1.** Nếu  $m < 0$  thì vế trái không âm, còn vế phải lại âm. Suy ra phương trình vô nghiệm.

**Trường hợp 2.** Nếu  $m \geq 0$  thì phương trình đã cho tương đương với

$$|3x + mx + 2| = m|x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + mx + 2 = m(x + 1) \\ 3x + mx + 2 = -m(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m - 2}{3} \\ (2m + 3)x = -m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m - 2}{3} \\ x = \frac{-m - 2}{2m + 3} \end{cases}.$$

— Với  $x = \frac{m - 2}{3}$ . Ta xét  $\frac{m - 2}{3} \neq -1$  hay  $m \neq -1$  (luôn đúng). Do đó với  $m \geq 0$  thì phương trình luôn nhận  $x = \frac{m - 2}{3}$  là nghiệm.

— Với  $x = \frac{-m - 2}{2m + 3}$ . Ta xét  $\frac{-m - 2}{2m + 3} \neq -1$  hay  $m \neq -1$  (luôn đúng). Do đó với  $m \geq 0$  thì phương trình luôn nhận  $x = \frac{-m - 2}{2m + 3}$  là nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm khi  $m < 0$ . Phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = \frac{m - 2}{3}$  và  $x = \frac{-m - 2}{2m + 3}$  khi  $m \geq 0$ . □

**Bài 5.** Cho phương trình  $\sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x} + 2\sqrt{4 - x^2} + m = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $-2 \leq x \leq 2$ .

Đặt  $t = \sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x}$ , với  $t \geq 0$ . Khi đó

$$t^2 = 4 + 2\sqrt{(2 - x)(2 + x)} \geq 4 \Rightarrow t \geq 2.$$

Lại có

$$\left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x}\right)^2 \leq (2 - x + 2 + x)(1^2 + 1^2) \Rightarrow t \leq 2\sqrt{2}.$$

Khi đó phương trình đã cho chuyển về

$$t + t^2 - 4 + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 4 = -m. \tag{1}$$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm  $t \in [2; 2\sqrt{2}]$  hay đồ thị hàm số  $f(t) = t^2 + t - 4$  cắt đường thẳng  $y = -m$  trong đoạn  $[2; 2\sqrt{2}]$ . (\*)

Bảng biến thiên của  $f(t) = t^2 + t - 4$  trên  $[2; 2\sqrt{2}]$  là

$t$	2	$2\sqrt{2}$
$f(t)$	2	$4 + 2\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên, (\*) xảy ra khi  $-m \in [2; 4 + 2\sqrt{2}]$ , suy ra  $m \in [-4 - 2\sqrt{2}; -2]$  thì phương trình đã cho có nghiệm. □

**Bài 6.** Cho phương trình  $x^2 - 4|x + 1| + 2 = 2m$ . Tìm  $m$  để phương trình

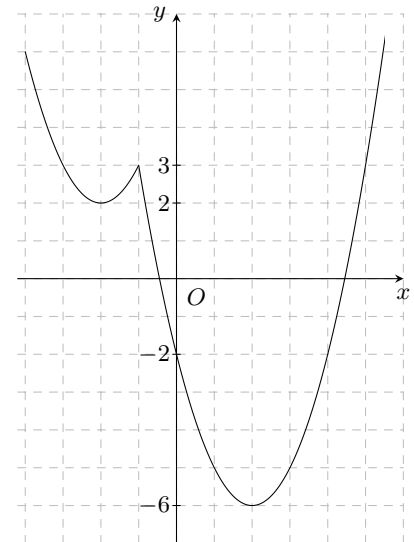
- ① có nghiệm.
- ② có 4 nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Xét hàm số

$$f(x) = x^2 - 4|x + 1| + 2 = \begin{cases} x^2 - 4(x + 1) + 2 & \text{khi } x \geq -1 \\ x^2 + 4(x + 1) + 2 & \text{khi } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x - 2 & \text{khi } x \geq -1 \\ x^2 + 4x + 6 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$$

Hàm số  $f(x)$  có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình  $x^2 - 4|x + 1| + 2 = 2m$  là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng  $y = 2m$ .



- ① Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi
- ② Phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$2m \geq -6 \Leftrightarrow m \geq -3.$$

$$2 < 2m < 3 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$$

**Bài 7.** Tìm  $m$  để phương trình  $|x^2 + x| = |mx^2 - (m + 1)x - 2m - 1|$  có ba nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với

$$|x(x + 1)| = |(x + 1)(mx - 2m - 1)| \Leftrightarrow |x + 1| [|x| - |mx - 2m - 1|] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ |x| = |mx - 2m - 1|. \end{cases} \quad (*)$$

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} mx - 2m - 1 = x \\ mx - 2m - 1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)x = 1 + 2m & (1) \\ (m + 1)x = 1 + 2m. & (2) \end{cases}$$

- Nếu  $m = 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm, khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt.
- Nếu  $m = -1$  thì phương trình (2) vô nghiệm, khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt.
- Nếu  $m \neq \pm 1$  thì

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 2m}{m - 1} \\ x = \frac{1 + 2m}{m + 1}. \end{cases}$$

Suy ra để phương trình ban đầu có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1+2m}{m-1} \neq -1 \\ \frac{1+2m}{m+1} \neq -1 \\ \frac{1+2m}{m-1} \neq \frac{1+2m}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{2}{3} \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy với  $m \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 0; 1\right\}$  thì phương trình có ba nghiệm phân biệt.  $\square$

**Bài 8.** Cho phương trình  $(2m - 1)x^2 - 4mx + 4 = 0$  (\*). Tìm giá trị của tham số  $m$  để (\*) có nghiệm  $x = m$ .

**Lời giải.**

**Trường hợp 1.**  $2m - 1 = 0$  tức là  $m = \frac{1}{2}$ . Thay vào (\*) ta được

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \neq \frac{1}{2}.$$

Do đó  $m = \frac{1}{2}$  không thỏa yêu cầu.

**Trường hợp 2.**  $2m - 1 \neq 0$  tức là  $m \neq \frac{1}{2}$ .

Ta có  $\Delta' = (2m - 2)^2 \geq 0$ .

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{2m - 1} \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{2m - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \\ m = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}.$$

Vậy có 3 giá trị  $m$  thỏa bài toán là  $m = 2, m = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$  và  $m = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$ .  $\square$

**Bài 9.** Cho phương trình

$$2\sqrt{12 + 4x - x^2} = 6(\sqrt{x + 2} + \sqrt{6 - x}) - 13 + m. \quad (*)$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình (\*) có 4 nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $-2 \leq x \leq 6$ .

Đặt  $t = \sqrt{x + 2} + \sqrt{6 - x}$ . Khi đó  $t^2 = 8 + 2\sqrt{12 + 4x - x^2}$ .

Ta có

$$t = \sqrt{x + 2} + \sqrt{6 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = 8 + 2\sqrt{(x + 2)(6 - x)} \geq 8 \end{cases} \Rightarrow t \geq 2\sqrt{2}. \quad (1)$$

Mặt khác

$$t = \sqrt{x + 2} + \sqrt{6 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (2 - x)^2} \leq 16 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $2\sqrt{2} \leq t \leq 4$ .

Ứng với mỗi nghiệm  $t \in [2\sqrt{2}; 4)$  ta có hai nghiệm  $x \in [-2; 6]$ .

Với điều kiện trên, phương trình (\*) trở thành

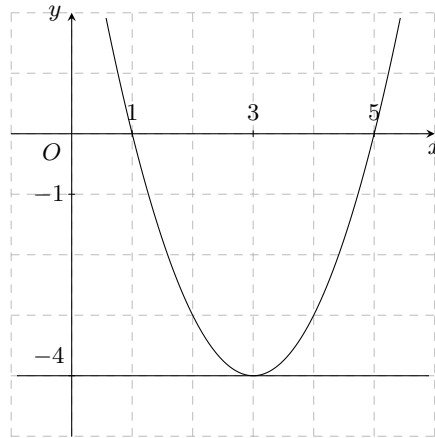
$$t^2 - 6t + 5 = m. \quad (**)$$

Phương trình (\*) có 4 nghiệm  $x$  phân biệt khi và chỉ khi phương trình (\*\*) có 2 nghiệm  $t$  phân biệt thuộc nửa khoảng  $[2\sqrt{2}; 4)$ .

Xét parabol  $(P): y = f(t) = t^2 - 6t + 5$ . Tọa độ đỉnh  $I(3; -4)$ .

Ta có  $f(2\sqrt{2}) = 13 - 12\sqrt{2}$ ;  $f(4) = -3$ .

Phương trình (\*\*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị  $\begin{cases} (P): y = f(t) = t^2 - 6t + 5 \\ d: y = m. \end{cases}$



Căn cứ vào đồ thị, giá trị của tham số  $m$  cần tìm là  $-4 < m \leq 13 - 12\sqrt{2}$ .

Vì trong nửa khoảng  $(-4; 13 - 12\sqrt{2}]$  không tồn tại số nguyên nào nên ta không tìm được giá trị nguyên của tham số  $m$  trong nửa khoảng ấy.

Vậy không có giá trị tham số nguyên  $m$  để phương trình (\*) có bốn nghiệm phân biệt. □

### Dạng 6. Phương trình bậc nhất, bậc hai chứa tham số

**Bài toán 1:** Giải và biện luận phương trình chứa tham số.

$$ax + b = 0$$

**Trường hợp 1.**  $a \neq 0$  Phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{b}{a}$ .

**Trường hợp 2.**  $a = 0$

$b \neq 0$  Phương trình có nghiệm với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

$b = 0$  Phương trình vô nghiệm.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

**Trường hợp 1.**  $a = 0$   $bx + c = 0$ .

**Trường hợp 2.**  $a \neq 0$   $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$  Phương trình vô nghiệm.

$\Delta = 0$  Phương trình có nghiệm kép  $x = -\frac{b}{2a}$ .

$\Delta > 0$  Phương trình có nghiệm  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

**Ví dụ 1.** Giải và biện luận phương trình  $(m^2 - 3)x - 2m^2 = x - 4m$ .

**Lời giải.**

$$\text{Phương trình } (m^2 - 3)x - 2m^2 = x - 4m \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 2m^2 - 4m \quad (1)$$

TH1: Với  $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$ . Khi đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = \frac{2m}{m+2}$ .

TH2: Với  $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$ .

Khi  $m = 2$ , (1)  $\Leftrightarrow 0x = 0$ : phương trình nghiệm đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Khi  $m = -2$ , (1)  $\Leftrightarrow 0x = 16$ : phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

Khi  $m = 2$ , phương trình (1) nghiệm đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Khi  $m = -2$ , phương trình (1) vô nghiệm.

Khi  $m \neq \pm 2$ , phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $x = \frac{2m}{m+2}$ . □

**Ví dụ 2.** Cho phương trình  $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$ . Tìm  $m$  để phương trình vô nghiệm.

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$ . (1)

Điều kiện:  $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1. \end{cases}$

Ta có  $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2 \Leftrightarrow (m-3)x = 2$  (2).

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi hoặc phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất bằng 0 hoặc -1.

TH1: Phương trình (2) vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} m-3=0 \\ 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$ .

TH2: Phương trình (2) có nghiệm duy nhất bằng 0 hoặc -1  $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} \frac{2}{3-m} = 0 \\ \frac{2}{3-m} = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m=5$ .

Vậy  $m \in \{3; 5\}$  thỏa yêu cầu bài toán. □

**Ví dụ 3.** Giải và biện luận phương trình  $\frac{x-m}{x-1} = \frac{x+3}{x-2}$  theo tham số  $m$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\frac{x-m}{x-1} = \frac{x+3}{x-2}$  (1)

Điều kiện:  $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Ta có:

(1)  $\Rightarrow (x-m)(x-2) = (x-1)(x+3)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - mx + 2m = x^2 + 2x - 3$

$\Leftrightarrow (m+4)x = 2m+3$  (2)

TH1:  $m = -4$ . Phương trình (2) trở thành  $0 = -5$  (phương trình vô nghiệm).

TH2:  $m \neq -4$ . Phương trình (2)  $\Leftrightarrow x = \frac{2m+3}{m+4}$ .

Khi  $\frac{2m+3}{m+4} = 1 \Leftrightarrow 2m+3 = m+4 \Leftrightarrow m=1$ , (1) vô nghiệm.

Vì  $\frac{2m+3}{m+4} = 2 \Leftrightarrow 2m+3 = 2m+8 \Leftrightarrow 3=8$ : vô lý nên  $\frac{2m+3}{m+4} \neq 2, \forall m \neq -4$ .

Kết luận:

Khi  $m = -4$  hoặc  $m = 1$ , phương trình (1) vô nghiệm.

Khi  $m \neq -4$  và  $m \neq 1$ , phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $x = \frac{2m+3}{m+4}$ . □

**Ví dụ 4.** Giải và biện luận phương trình  $\frac{x-m}{x-2} + \frac{m^2-2m}{x} = 1$  theo tham số  $m$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\frac{x-m}{x-2} + \frac{m^2-2m}{x} = 1$  (1)

Điều kiện:  $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Ta có:

$$(1) \Rightarrow x(x - m) + (x - 2)(m^2 - 2m) = x(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + (m^2 - 2m)x - 2m^2 + 4m = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2)x = 2m^2 - 4m \quad (2)$$

$$\text{TH1: } m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2. \end{cases}$$

Khi  $m = 1$ , (2)  $\Leftrightarrow 0x = -2$ : phương trình vô nghiệm. Khi đó phương trình (1) vô nghiệm.

Khi  $m = 2$ , (2)  $\Leftrightarrow 0x = 0$ : phương trình nghiệm đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó phương trình (1) nghiệm đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{TH2: } m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}. \text{ Phương trình (2) } \Leftrightarrow x = \frac{2m^2 - 4m}{m^2 - 3m + 2} = \frac{2m}{m - 1}.$$

Khi  $\frac{2m}{m - 1} = 0 \Leftrightarrow m = 0$ , phương trình (1) vô nghiệm.

$$\forall i \frac{2m}{m - 1} = 2 \Leftrightarrow 2m = 2m - 1 \Leftrightarrow 0 = -1: \text{ vô lý nên } \frac{2m}{m - 1} \neq 2, \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}.$$

Kết luận:

Khi  $\begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}$ , phương trình (1) vô nghiệm.

Khi  $m = 2$ , phương trình (1) nghiệm đúng  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ .

Khi  $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1, \\ m \neq 2 \end{cases}$ , phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $x = \frac{2m}{m - 1}$ . □

**Ví dụ 5.** Giải và biện luận phương trình  $\frac{x + 1}{x - m + 1} = \frac{x}{x + m + 2}$  theo tham số  $m$ .

**Lời giải.**

$$\text{Xét phương trình } \frac{x + 1}{x - m + 1} = \frac{x}{x + m + 2} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq m - 1 \\ x \neq -(m + 2). \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1) } \Leftrightarrow (m + 3)x + m + 2 = (-m + 1)x \Leftrightarrow (2m + 2)x = -(m + 2) \quad (*)$$

$$\text{TH1: } 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, (*) \Leftrightarrow 0x = -1: \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{TH2: } 2m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1. \text{ Phương trình (*) có nghiệm } x = -\frac{m + 2}{2(m + 1)}.$$

$$-\frac{m + 2}{2(m + 1)} \neq m - 1 \Leftrightarrow 2m^2 + m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$-\frac{m + 2}{2(m + 1)} \neq -(m + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Khi  $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; -1; -2; -\frac{1}{2}\right\}$ , phương trình (1) có nghiệm:  $x = -\frac{m + 2}{2(m + 1)}$ .

Khi  $m \in \left\{0; -2; -\frac{1}{2}\right\}$ , phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận:

Khi  $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; -1; -2; -\frac{1}{2}\right\}$ , phương trình (1) có nghiệm:  $x = -\frac{m + 2}{2(m + 1)}$ .

Khi  $m \in \left\{0; -1; -2; -\frac{1}{2}\right\}$ , phương trình (1) vô nghiệm. □

**Ví dụ 6.** Giải và biện luận phương trình  $(2m^2 + 5m + 2)x^2 - 4mx + 2 = 0$  theo tham số  $m$ .

**Lời giải.**

$$\text{TH1: } 2m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Khi  $m = -2$ , phương trình trở thành  $8x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ .

Khi  $m = -\frac{1}{2}$ , phương trình trở thành  $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

TH2:  $2m^2 + 5m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$  khi đó phương trình đã cho là phương trình bậc hai.

Ta có  $\Delta' = 4m^2 - 2(2m^2 + 5m + 2) = -2(5m + 2)$ .

Khi  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2(5m + 2) > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{5}$  khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{2m \pm \sqrt{-2(5m + 2)}}{2m^2 + 5m + 2}.$$

Khi  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{5}$  phương trình có nghiệm kép  $x = -5$ .

Khi  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{5}$  phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

Khi  $m = -2$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{1}{4}$ .

Khi  $m = -\frac{1}{2}$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -1$ .

Khi  $m = -\frac{2}{5}$ , phương trình có nghiệm kép  $x = -5$ .

Khi  $m < -\frac{2}{5}$  và  $m \neq -2$ , phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x = \frac{2m \pm \sqrt{-2(5m + 2)}}{2m^2 + 5m + 2}$ .

Khi  $m > -\frac{2}{5}$ , phương trình vô nghiệm. □

**Ví dụ 7.** Giải và biện luận phương trình  $2x^2 - 6x + 3m - 5 = 0$  theo tham số  $m$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Nhận thấy hệ số  $a = 2 \neq 0$  nên phương trình đã cho là phương trình bậc hai.

- Thực hiện việc tính biệt thức  $\Delta'$  và biện luận theo  $\Delta'$ .

Phương trình có  $\Delta' = 9 - 2(3m - 5) = -6m + 19$ .

Nếu  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > \frac{19}{6}$  thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{19}{6}$  thì phương trình đã cho có nghiệm kép  $x = \frac{3}{2}$ .

Nếu  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{19}{6}$  thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt  $x = \frac{3 \pm \sqrt{-6m + 19}}{2}$ . □

**Ví dụ 8.** Giải và biện luận phương trình  $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + m - 2 = 0$  theo tham số  $m$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Nhận thấy hệ số  $a = m + 1$  nên ta cần xét hai trường hợp là  $a = 0$  hoặc  $a \neq 0$ .

TH1: Nếu  $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$  khi đó phương trình đã cho trở thành:  $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ .

TH2: Nếu  $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$  khi đó phương trình đã cho là phương trình bậc hai có

$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m + 1)(m - 2) = 8m + 9$ .

Nếu  $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{9}{8}$ , phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}$ , phương trình đã cho có nghiệm kép  $x = 5$ .

Nếu  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{9}{8}$ , phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x = \frac{2m + 1 \pm \sqrt{8m + 9}}{2(m + 1)}$ .

Kết luận:

Khi  $m = -1$ , phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

Khi  $m < -\frac{9}{8}$ , phương trình (1) vô nghiệm.

Khi  $m = -\frac{9}{8}$ , phương trình (1) có nghiệm kép  $x = 5$ .

Khi  $m > -\frac{9}{8}$  và  $m \neq -1$ , phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $x = \frac{2m + 1 \pm \sqrt{8m + 9}}{2(m + 1)}$ . □



**Dạng 7. Tìm điều kiện tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước**

$ax + b = 0$

**Trường hợp 1.** Phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow a \neq 0$ .

**Trường hợp 2.** Phương trình có nghiệm với mọi  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0, b = 0$ .

**Trường hợp 3.** Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$ .

$ax^2 + bx + c = 0$

**Trường hợp 1.** Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0. \end{cases}$

**Trường hợp 2.** Phương trình có một nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta = 0. \end{cases}$

**Trường hợp 3.** Phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow a \neq 0, \Delta > 0$ .

**Trường hợp 4.** Phương trình nghiệm đúng  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0, b = 0, c = 0$ .

Khi phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thì  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$

**Ví dụ 1.** Tìm  $m$  để phương trình  $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$  có nghiệm duy nhất.

**Lời giải.**

Phương trình có nghiệm duy nhất khi  $(m^2 - 4m + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3. \end{cases} \quad \square$

**Ví dụ 2.** Tìm  $m$  để phương trình  $(4m + 5)x = 3x + 6m + 3$  có nghiệm.

**Lời giải.**

Cách 1:

Xét phương trình  $(4m + 5)x = 3x + 6m + 3 \Leftrightarrow (4m + 5)x - 3x = 6m + 3$   
 $\Leftrightarrow (4m + 2)x = 6m + 3 \Leftrightarrow 2(2m + 1)x = 3(2m + 1). \quad (1)$

Khi  $m = -\frac{1}{2}$  thì phương trình (1) trở thành:  $0x = 0$ , phương trình nghiệm đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Khi  $m \neq -\frac{1}{2}$  thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $x = \frac{3}{2}$ .

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm  $\forall m \in \mathbb{R}$ .

Cách 2:

Xét phương trình  $(4m + 5)x = 3x + 6m + 3 \Leftrightarrow (4m + 5)x - 3x = 6m + 3$   
 $\Leftrightarrow (4m + 2)x = 6m + 3 \Leftrightarrow 2(2m + 1)x = 3(2m + 1) \quad (1)$

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} 2(2m + 1) = 0 \\ 3(2m + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$ . Suy ra không tồn tại giá trị  $m$

để phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi  $m$ . □

**Ví dụ 3.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$ . Tìm để phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1^2 + x_2^2 = 20$ .

**Lời giải.**

Phân tích

- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt

- Biến đổi  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$  để sử dụng định lý Vi-et cho phương trình bậc hai có nghiệm.

Phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi và chỉ khi  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 - m^2 + 3m - 4 > 0 \Leftrightarrow m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3(*)$

Ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1x_2 = m^2 - 3m + 4. \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow (2m - 2)^2 - 2(m^2 - 3m + 4) = 20$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -3. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (\*), vậy  $m = 4$  thỏa yêu cầu bài toán. □

**Ví dụ 4.** Cho phương trình  $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$  (1). Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Sử dụng định lý Vi-ét cho phương trình bậc hai có nghiệm.

Cách 1:

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m - 2)^2 - (m - 1)(m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m - 2)}{m - 1} \\ x_1x_2 = \frac{m - 3}{m - 1}. \end{cases}$$

Khi đó  $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2(m - 2)}{m - 1} + \frac{m - 3}{m - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m - 6}{m - 1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$

Vậy  $1 < m < 3$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Vì khi  $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ , (1) là phương trình bậc nhất nên  $m = 1$  không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét  $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ . Vì  $(m - 1) - 2(m - 2) + m - 3 = 0$  (tức  $a + b + c = 0$ ) nên phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm  $x = 1$  và  $x = \frac{m - 3}{m - 1}$ .

Yêu cầu bài toán tương đương với 
$$\begin{cases} \frac{m - 3}{m - 1} \neq 1 \\ 1 + \frac{m - 3}{m - 1} + 1 \cdot \frac{m - 3}{m - 1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{2m - 6}{m - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy  $1 < m < 3$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**Ví dụ 5.** Cho hai phương trình  $x^2 - mx + 2 = 0$  và  $x^2 + 2x - m = 0$ . Tìm  $m$  để một nghiệm của phương trình này và một nghiệm của phương trình kia có tổng là 3.

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Giả sử  $x_0$  là một nghiệm của một phương trình. Khi đó một nghiệm của phương trình còn lại là  $3 - x_0$
- Thay hai nghiệm vào hai phương trình tương ứng để tìm tham số  $m$ .

Gọi  $x_0$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 - mx + 2 = 0$ .

Suy ra  $3 - x_0$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 + 2x - m = 0$ .

Khi đó ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} x_0^2 - mx_0 + 2 = 0 \\ (3 - x_0)^2 + 2(3 - x_0) - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x_0^2 - 8x_0 + 15 & (1) \\ x_0^2 - mx_0 + 2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được:  $x_0^2 - (x_0^2 - 8x_0 + 15)x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x_0 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{21 - 3\sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{21 + 3\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Vậy  $m \in \left\{ 3; \frac{21 + 3\sqrt{5}}{2}; \frac{21 - 3\sqrt{5}}{2} \right\}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**Dạng 8. Phương trình trùng phương**

**Bài toán 1:** Giải và biện luận phương trình chứa tham số. Để giải và biện luận phương trình:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  (1),  $a \neq 0$ , ta thực hiện các bước:

B1: Đặt  $t = x^2$  với điều kiện  $t \geq 0$ .

B2: Khi đó, phương trình (1) trở thành:  $at^2 + bt + c = 0$ . (2)

B3: Khi đó

a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow$  (2) có nghiệm  $t_1 < 0 = t_2$ .

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  (2) có nghiệm  $t_1 < 0 < t_2$ .

c. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  (2) có nghiệm  $0 = t_1 < t_2$ .

d. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  (2) có nghiệm  $0 < t_1 < t_2$ .

**Bài toán 2:** Tìm điều kiện tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2 \Rightarrow t \geq 0$ .

Phương trình đã cho trở thành  $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$

Với  $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Với  $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ .

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm. □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $x^4 - 2018x^2 - 2019 = 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2 \Rightarrow t \geq 0$ .

Phương trình đã cho tương đương  $t^2 - 2018t - 2019 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 < 0 \\ t = 2019. \end{cases}$

Với  $t = 2019 \Rightarrow x^2 = 2019 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2019}$ .

Vậy phương trình có 2 nghiệm. □

**Ví dụ 3.** Cho phương trình  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ . Tính tổng các nghiệm của phương trình.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ).

Phương trình đã cho trở thành  $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ .

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 0. □

**Ví dụ 4.** Cho phương trình  $x^4 - (m + 2)x^2 + m = 0$ . Tìm  $m$  để

- ① Có nghiệm duy nhất.
- ② Có hai nghiệm phân biệt.
- ③ Có ba nghiệm phân biệt.
- ④ Có bốn nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2, t \geq 0$ .

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:  $t^2 - (m + 2)t + m = 0$ . (2)

① Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm  $t_1, t_2$  thỏa mãn  $t_1 \leq 0 = t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \leq 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{không tồn tại } m.$$

Vậy không tồn tại  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy  $m < 0$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

③ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt  $t_1, t_2$  thỏa mãn

$$0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0 \\ m = 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy  $m = 0$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

④ Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0 \\ m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Vậy  $m > 0$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**Ví dụ 5.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^4 - 2(m - 1)x^2 + 4m - 8 = 0$  có 4 nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ).

Ta có phương trình  $t^2 - 2(m - 1)t + 4m - 8 = 0$ . (2)

PT (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)^2 - 4m + 8 > 0 \\ 4m - 8 > 0 \\ 2(m - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Vậy  $m > 2$  và  $m \neq 3$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**Ví dụ 6.** Cho phương trình  $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 1 = 0$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Khi giải phương trình trùng phương, ta đặt ẩn phụ để đưa về phương trình bậc hai (chú ý điều kiện của ẩn phụ).
- Nếu phương trình bậc hai có biệt thức  $\Delta$  là số chính phương thì ta tìm cụ thể hai nghiệm, so sánh hai nghiệm rồi đưa ra điều kiện cho nghiệm.
- Nếu phương trình bậc hai có biệt thức  $\Delta$  không là số chính phương thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình với ẩn phụ có nghiệm kép dương hoặc hai nghiệm trái dấu.

Cách 1: Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ) phương trình đã cho trở thành  $t^2 - 2mt + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m - 1 \\ t = m + 1. \end{cases}$

(trong đó  $m + 1 > m - 1$ ).

Do đó yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow m + 1 > 0 > m - 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$ .

Vậy  $m \in (-1; 1)$ .

Cách 2: Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ) phương trình đã cho trở thành  $t^2 - 2mt + m^2 - 1 = 0$ . (2)

Do đó yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  phương trình (2) có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \\ m^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1 \text{ (vì } \Delta' = 1, \forall m \in \mathbb{R}).$$

Vậy  $m \in (-1; 1)$ . □

**Dạng 9. Dùng định nghĩa, tính chất của giá trị tuyệt đối và phương pháp bình phương hai vế**

① Sử dụng định nghĩa  $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A \leq 0. \end{cases}$

② Tính chất  $|A| \geq 0$  và  $|A| \geq A$ .

③ Bình phương hai vế  $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$ .

• Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối (GTTĐ), ta tìm cách để khử dấu GTTĐ, bằng cách:

– Dùng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ.

– Bình phương hai vế.

– Đặt ẩn phụ.

• Phương trình dạng  $|f(x)| = |g(x)|$  ta có thể giải bằng cách biến đổi tương đương như sau

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

hoặc

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x).$$

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $|2x + 1| = |x^2 - 3x - 4|$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương  $\begin{cases} 2x + 1 = x^2 - 3x - 4 \\ 2x + 1 = -(x^2 - 3x - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ .

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2}$  và  $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ . □

**Chú ý:** Phương trình này, ta không sử dụng phương pháp bình phương hai vế để tránh giải phương trình bậc cao (bậc 4).

**Ví dụ 2.** Giải phương trình:  $|3x - 2| = 3 - 2x$ .

**Lời giải.**

**Cách 1:**

+ Với  $3 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$  ta có VT  $\geq 0$  và VP  $< 0$  suy ra phương trình vô nghiệm.

+ Với  $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$  khi đó hai vế của phương trình không âm. Do đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} |3x - 2|^2 &= (3 - 2x)^2 \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 &= 4x^2 - 12x + 9 \\ \Leftrightarrow 5x^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \pm 1$ .

**Cách 2:**

+ Với  $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$ . Phương trình tương đương với  $3x - 2 = 3 - 2x \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$  (thỏa mãn).

+ Với  $3x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ . Phương trình tương đương với  $-(3x - 2) = 3 - 2x \Leftrightarrow x = -1$  (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \pm 1$ . □

**Chú ý:** Phương trình này, ta có thể sử dụng biến đổi tương đương sau đây

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g^2(x). \end{cases}$$

**Ví dụ 3.** Giải phương trình  $|2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| = 0$ .

**Lời giải.**

Vì  $|2x - 5| \geq 0$ ,  $|2x^2 - 7x + 5| \geq 0$  nên  $|2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| \geq 0$ .

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2x - 5 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ \left[ \begin{array}{l} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{5}{2}$ . □

**Chú ý:** Phương trình dạng  $|f(x)| + |g(x)| = h(x)$  có thể được giải tổng quát bằng cách xét khoảng để phá các dấu giá trị tuyệt đối.

**Ví dụ 4.** Giải phương trình  $|x - 1| + |2x + 1| = |3x|$ . (\*)

**Lời giải.**

Trường hợp 1:  $x \geq 1$ . Khi đó (\*)  $\Leftrightarrow x - 1 + 2x + 1 = 3x \Leftrightarrow 0x = 0$  (luôn đúng với mọi  $x \geq 1$ ).

Trường hợp 2:  $0 \leq x < 1$ . Khi đó (\*)  $\Leftrightarrow 1 - x + 2x + 1 = 3x \Leftrightarrow x = 1$  (loại).

Trường hợp 3:  $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ . Khi đó (\*)  $\Leftrightarrow 1 - x + 2x + 1 = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$  là nghiệm.

Trường hợp 4:  $x < -\frac{1}{2}$ . Khi đó (\*)  $\Leftrightarrow 1 - x - 2x - 1 = -3x \Leftrightarrow 0x = 0$  (luôn đúng với mọi  $x < -\frac{1}{2}$ ).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$ . □

## 1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình  $|3x - 2| = x^2 + 2x + 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x^2 + 2x + 3 \geq 0$  (luôn đúng với mọi  $x$  vì  $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0, \forall x$ ). Khi đó

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = x^2 + 2x + 3 \\ -3x + 2 = x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 5 = 0 \quad (2) \\ x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (3). \end{cases}$$

Giải (2). Ta có  $x^2 - x + 5 = 0$ . Phương trình (2) vô nghiệm.

Giải (3). Ta có  $x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $|x^2 + 3x - 2| = x - 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ . Khi đó

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 2 = x - 1 \\ x^2 + 3x - 2 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (2) \\ x^2 + 4x - 3 = 0 \quad (3). \end{cases}$$

Giải (2). Ta có  $x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$  (loại).

Giải (3). Ta có  $x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{7} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -2 - \sqrt{7} \text{ (loại)}. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = -2 + \sqrt{7}$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình:  $|x^3 - 1| = |x^2 - 3x + 2|$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |x^3 - 1| = |x^2 - 3x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 = x^2 - 3x + 2 \\ -x^3 + 1 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \quad (1) \\ x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2). \end{cases}$$

Giải (1). Ta có

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 3x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 - x^2) + (3x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x - 1) + 3(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1. \end{aligned}$$

Giải (2). Ta có

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 3x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 - 1) + (x^2 - 3x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x - 1) &= 0 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \pm \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = 1$  và  $x = -1 \pm \sqrt{2}$ . □

**Bài 4.** Giải phương trình  $|x - 1| = |x^2 - 3x + 2|$ .

**Lời giải.**

Ta có  $|x - 1| = |x^2 - 3x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = x^2 - 3x + 2 \\ -x + 1 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + 1 = 0 & (2). \end{cases}$

Giải (1). Ta có  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Giải (2). Ta có  $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = 1$  và  $x = 3$ . □

**Bài 5.** Giải phương trình  $|x^2 - 1| = |x^2 - 4x + 3|$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| = |x^2 - 4x + 3| &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 \\ -x^2 + 1 = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ 2(x^2 - 2x + 1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2(x - 1)^2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = 1$ . □

**Bài 6.** Giải phương trình  $|2x^2 - 1| = |4x + 1|$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$|2x^2 - 1| = |4x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = 4x + 1 \\ -2x^2 + 1 = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x - 2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + 4x = 0 & (2). \end{cases}$$

Giải (1). Ta có  $2x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ .

Giải (2). Ta có  $2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = 0$ ,  $x = -2$  và  $x = 1 \pm \sqrt{2}$ . □

**Bài 7.** Giải phương trình  $|3x - 1| = |2x^2 - 3x + 1|$ .

**Lời giải.**

Ta có  $|3x - 1| = |2x^2 - 3x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2x^2 - 3x + 1 \\ -3x + 1 = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x + 2 = 0 \\ 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 0. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = 0$  và  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ . □

**Bài 8.** Giải phương trình  $|2x^2 - 1| = |x^2 + x + 1|$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |2x^2 - 1| = |x^2 + x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = x^2 + x + 1 \\ -2x^2 + 1 = x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 & (1) \\ 3x^2 + x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1). Ta có } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$\text{Giải (2). Ta có } 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = -1, x = 0, x = 2$  và  $x = -\frac{1}{3}$ . □

**Bài 9.** Giải phương trình  $|2x^2 - 3x| = |2x + 1|$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |2x^2 - 3x| = |2x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x = 2x + 1 \\ 2x^2 - 3x = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 1 = 0 & (1) \\ 2x^2 - x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1). Ta có } 2x^2 - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Giải (2). Ta có  $2x^2 - x + 1 = 0$ . Phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$ . □

**Bài 10.** Giải phương trình  $|2x^2 - 3x| = |2x + 1|$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |2x^2 - 3x| = |2x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x = 2x + 1 \\ 2x^2 - 3x = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 1 = 0 & (1) \\ 2x^2 - x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1). Ta có } 2x^2 - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Giải (2). Ta có  $2x^2 - x + 1 = 0$ . Phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$ . □

**Bài 11.** Giải phương trình  $|2x + 5| = x^2 + 5x + 1$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |2x + 5| = x^2 + 5x + 1 \quad (1)$$

Điều kiện  $x^2 + 5x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5 + \sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$ . Khi đó

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5 = x^2 + 5x + 1 \\ -2x - 5 = x^2 + 5x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 & (2) \\ x^2 + 7x + 6 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2). Ta có } x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{thoả mãn}) \\ x = -4 & (\text{loại}). \end{cases}$$

$$\text{Giải (3). Ta có } x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{loại}) \\ x = -6 & (\text{thoả mãn}). \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x \in \{1; -6\}$ . □

**Bài 12.** Giải phương trình  $|2x + 1| = x^2 + x + 1$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |2x + 1| = x^2 + x + 1 \quad (1).$$

Điều kiện  $x^2 + x + 1 \geq 0$  (luôn đúng với mọi  $x$  vì  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$ ). Khi đó

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x^2 + x + 1 \\ -2x - 1 = x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 & (2) \\ x^2 + 3x + 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2). Ta có } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$



Giải (3). Ta có  $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = 0$ ;  $x = 2$  và  $x = \pm 1$ . □

**Bài 13.** Giải phương trình  $|x + 3| + |7 - x| = 10$ .

**Lời giải.**

TH1: Với  $x \geq 7$ , phương trình đã cho trở thành  $x + 3 + x - 7 = 10 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$  (thỏa mãn).

TH2: Với  $-3 \leq x < 7$ , phương trình đã cho trở thành  $x + 3 + 7 - x = 10 \Leftrightarrow 0x = 0$  (đúng với mọi  $x$ ).

TH3:  $x < -3$ , phương trình đã cho trở thành  $-x - 3 + 7 - x = 10 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$  (loại).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = [-3; 7]$ . □

**Bài 14.** Giải phương trình  $|x^2 - x| + |2x - 1| = 1$ .

**Lời giải.**

TH1: Với  $x \geq 1$ , phương trình đã cho trở thành  $x^2 - x + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (loại)} \\ x = 1 \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$

TH2: Với  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ , phương trình đã cho trở thành  $-x^2 + x + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (loại)}. \end{cases}$

TH3: Với  $0 \leq x < \frac{1}{2}$ , phương trình đã cho trở thành  $-x^2 + x + 1 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$

TH4: Với  $x < 0$ , phương trình đã cho trở thành  $x^2 - x + 1 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (loại)}. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = 0$  và  $x = 1$ . □

**Bài 15.** Giải phương trình  $|x - 1| + |x + 2| + |x - 3| = 14$ .

**Lời giải.**

Ta có  $|x - 1| + |x + 2| + |x - 3| = 14$ .

TH1. Với  $x \geq 3$ , phương trình đã cho trở thành

$$x - 1 + x + 2 + x - 3 = 14 \Leftrightarrow 3x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3} \text{ (thỏa mãn)}.$$

TH2. Với  $1 \leq x < 3$ , phương trình đã cho trở thành

$$x - 1 + x + 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (loại)}.$$

TH3. Với  $-2 \leq x < 1$ , phương trình đã cho trở thành

$$1 - x + x + 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow x = -8 \text{ (loại)}.$$

TH4. Với  $x < -2$ , phương trình đã cho trở thành

$$1 - x - x - 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow -3x = 12 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = \frac{16}{3}$  và  $x = -4$ . □

### Dạng 10. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối bằng cách đặt ẩn phụ.

#### • Phương pháp

Trường hợp nếu biến đổi đưa được phương trình về dạng  $f(|u(x)|) = 0$ .

— Ta đặt ẩn phụ  $t = |u(x)|$ . (1)

— Phương trình trở thành  $f(t) = 0$ . (2)

Giải phương trình (2) tìm được  $t$ , thay  $t$  vào (1) ta tìm được  $x$ .

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $(x + 1)^2 - 3|x + 1| + 2 = 0$ .

**Lời giải.**

**Nhận xét.** Do  $(x + 1)^2 = |x + 1|^2$  nên ta nghĩ đến việc đặt  $t = |x + 1|$  với điều kiện  $t \geq 0$ .

Đặt  $t = |x + 1|$ ,  $t \geq 0$ .

Phương trình trở thành

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = 2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

— Với  $t = 1$  ta có  $|x + 1| = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

— Với  $t = 2$  ta có  $|x + 1| = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-3; -2; 0; 1\}$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $4x(x - 1) = |2x - 1| + 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình tương đương với  $4x^2 - 4x - 1 - |2x - 1| = 0$ . (1)

Đặt  $t = |2x - 1|$ ,  $t \geq 0$

$$\Rightarrow t^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = t^2 - 1.$$

Phương trình (1) trở thành  $t^2 - 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2. \end{cases}$

Vì  $t \geq 0 \Rightarrow t = 2$  nên  $|2x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$  (thỏa mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$ . □

**Ví dụ 3.** Giải phương trình  $x^2 + \frac{9}{(x - 1)^2} + 1 = 2x + 7 \left| \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} \right|$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 1$ .

Phương trình tương đương  $(x - 1)^2 + \frac{9}{(x - 1)^2} = 7 \left| x - 1 - \frac{3}{x - 1} \right|$ . (1)

Đặt  $t = \left| x - 1 - \frac{3}{x - 1} \right|$ ,  $t \geq 0$ .

Suy ra  $t^2 = (x - 1)^2 + \frac{9}{(x - 1)^2} - 6 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + \frac{9}{(x - 1)^2} = t^2 + 6$ .

Phương trình (1) trở thành  $t^2 + 6 = 7t \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = 6 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Với  $t = 1$  ta có

$$\begin{aligned} & \left| x - 1 - \frac{3}{x-1} \right| = 1 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} \right| = 1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = 1 \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Với  $t = 6$  ta có

$$\begin{aligned} & \left| x - 1 - \frac{3}{x-1} \right| = 6 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} \right| = 6 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = 6 \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = -6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 8x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4 \pm 2\sqrt{3} \\ x = -2 \pm 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; 4 \pm 2\sqrt{3}; -2 \pm 2\sqrt{3} \right\}$ . □

### 1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình  $(2x - 1)^2 - 3|2x - 1| - 4 = 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = |2x - 1|, t \geq 0$ .

Phương trình trở thành:  $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Với  $t = 4$  ta có  $|2x - 1| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 4 \\ 2x - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $\left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right| - 2 \left| \frac{x + 2}{2x - 2} \right| = 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Đặt  $t = \left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right|, t \geq 0$  thì  $\left| \frac{x + 2}{2x - 2} \right| = \frac{1}{t}$ .

Phương trình trở thành

$$t - 2 \cdot \frac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } \left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2 \text{ (vô nghiệm)} \\ \frac{2x - 1}{x + 2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 1 = -2(x + 2) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình  $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} + \left| \frac{2x - 4}{x - 1} \right| = 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 1$ .

$$\text{Phương trình tương đương } \left( \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| \right)^2 + 2 \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| - 3 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right|, t \geq 0.$$

Phương trình (1) trở thành

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -3 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \text{ ta có } \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 2}{x - 1} = 1 \text{ (vô nghiệm)} \\ \frac{x - 2}{x - 1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2 = -(x - 1) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ . □

**Bài 4.** Giải phương trình  $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left| 2x - \frac{1}{x} \right| - 6 = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 0$ .

$$\text{Đặt } t = \left| 2x - \frac{1}{x} \right|, t \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } t^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \Rightarrow 4x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 4.$$

$$\text{Phương trình trở thành } t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -2 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \text{ ta có } \left| 2x - \frac{1}{x} \right| = 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{x} = 1 \\ 2x - \frac{1}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm 1 \right\}$ . □

**Bài 5.** Giải phương trình  $\frac{x^4 - 6x^2 + 4}{x^2} = \left| \frac{x^2 - 2}{x} \right|$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 0$ .

$$\text{Phương trình tương đương } x^2 + \frac{4}{x^2} - \left| x - \frac{2}{x} \right| - 6 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \left| x - \frac{2}{x} \right|, t \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } t^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4.$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (nhận)} \\ t = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Với  $t = 2$  ta có

$$\begin{aligned} & \left| x - \frac{2}{x} \right| = 2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{2}{x} = 2 \\ x - \frac{2}{x} = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1 \pm \sqrt{3}; -1 \pm \sqrt{3}\}$ . □

**Dạng 11. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối có tham số.**

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $|mx + 2m| = |mx + x + 1|$ . (\*)

**Lời giải.**

Ta có  $|mx + 2m| = |mx + x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2m = mx + x + 1 \\ mx + 2m = -(mx + x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m - 1 \\ (2m + 1)x = -2m - 1. \end{cases} \quad (1)$

Giải (1)

- Với  $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$  thì phương trình trở thành  $0x = 0$  suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$  thì phương trình tương đương với  $x = -1$ .

**Kết luận**

$m = -\frac{1}{2}$  phương trình (\*) nghiệm đúng với mọi  $x$ .

$m \neq -\frac{1}{2}$  phương trình (\*) có hai nghiệm là  $x = -1$  và  $x = 2m - 1$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình:  $|mx + 2x - 1| = |x - 1|$ .

**Lời giải.**

Ta có  $|mx + 2x - 1| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)x = 0 & (2) \\ (m + 3)x = 2. & (3) \end{cases}$

Với phương trình (2) ta có

$m = -1$  thì phương trình (2) nghiệm đúng với mọi  $x$ .

$m \neq -1$  thì phương trình (2) có nghiệm  $x = 0$ .

Với phương trình (3) ta có

$m = -3$  thì phương trình (3) vô nghiệm.

$m \neq -3$  thì phương trình (3) có nghiệm  $x = \frac{2}{m + 3}$ .

**Kết luận**

- $m = -1$  phương trình (\*) nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- $m = -3$  phương trình (\*) có nghiệm  $x = 0$ .
- $m \neq -1$  và  $m \neq -3$  phương trình (\*) có nghiệm  $x = 0$  và  $x = \frac{2}{m + 3}$ .

□

**Ví dụ 3.** Tìm  $m$  để phương trình  $|x^2 + x| = |mx^2 - (m + 1)x - 2m - 1|$  có ba nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & |x(x + 1)| = |(x + 1)(mx - 2m - 1)| \\ \Leftrightarrow & |x + 1| [|x| - |mx - 2m - 1|] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -1 \\ |x| = |mx - 2m - 1|. \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} mx - 2m - 1 = x \\ mx - 2m - 1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)x = 1 + 2m & (1) \\ (m + 1)x = 1 + 2m. & (2) \end{cases}$

Nếu  $m = 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt. Nếu  $m = -1$  thì phương trình (2) vô nghiệm khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt.

Nếu  $m \neq \pm 1$  thì (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 2m}{m - 1} \\ x = \frac{1 + 2m}{m + 1}. \end{cases}$

Suy ra để phương trình ban đầu có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1 + 2m}{m - 1} \neq -1 \\ \frac{1 + 2m}{m + 1} \neq -1 \\ \frac{1 + 2m}{m - 1} \neq \frac{1 + 2m}{m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{2}{3} \\ m \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy với  $m \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 0; 1\right\}$  thì phương trình có ba nghiệm phân biệt. □

**1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Cho phương trình  $x^2 - 2x - 2|x - 1| + m + 3 = 0$ . Giải phương trình khi  $m = -2$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2|x - 1| + m + 2 = 0$ .

Đặt  $t = |x - 1|, t \geq 0$  ta có phương trình:  $t^2 - 2t + m + 2 = 0$ .

Khi  $m = -2$  ta có  $t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2. \end{cases}$

Suy ra nghiệm phương trình là  $x = 1, x = 3, x = -1$ . □

**Bài 2.** Cho phương trình  $x^2 - 2x - 2|x - 1| + m + 3 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm.

**Lời giải.**

Phương trình  $\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2|x - 1| + m + 2 = 0$ .

Đặt  $t = |x - 1|, t \geq 0$  ta có phương trình  $t^2 - 2t + m + 2 = 0$ . (1)

Phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow$  phương trình (1) có nghiệm  $t \geq 0$ .

$\Leftrightarrow m = -t^2 + 2t - 2$  có nghiệm  $t \geq 0 \Leftrightarrow$  Đồ thị hàm số  $f(t) = -t^2 + 2t - 2$  với  $t \in [0; +\infty)$  cắt trục hoành  $\Leftrightarrow m \leq -2$ . □

**Bài 3.** Giải và biện luận các phương trình sau  $|mx + 2m| = |x + 1|$ . (\*)

**Lời giải.**

Ta có (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2m = x + 1 \\ mx + 2m = -(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)x = 1 - 2m & (1) \\ (m + 1)x = -2m - 1. & (2) \end{cases}$

Giải (1).

- Với  $m = 1$  phương trình trở thành  $0x = -1$  phương trình vô nghiệm.
- Với  $m \neq 1$  phương trình tương đương với  $x = \frac{1 - 2m}{m - 1}$ .

Giải (2).

— Với  $m = -1$  phương trình trở thành  $0x = 1$  phương trình vô nghiệm.

— Với  $m \neq -1$  phương trình tương đương với  $x = \frac{-2m - 1}{m + 1}$ .

Kết luận:  $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$  phương trình có nghiệm là  $x = \frac{-3}{2}$ .

Với  $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$  phương trình có nghiệm là  $x = \frac{1 - 2m}{m - 1}$  và  $x = \frac{-2m - 1}{m + 1}$ . □

**Bài 4.** Giải và biện luận các phương trình sau  $|mx + 2x| = |mx - 1|$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |mx + 2x| = |mx - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x = mx - 1 \\ mx + 2x = -(mx - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ (2m + 2)x = 1. \end{cases} \quad (*)$$

Với phương trình (\*) ta có

$m = -1$  thì phương trình (\*) vô nghiệm.

$m \neq -1$  thì phương trình (\*) có nghiệm  $x = \frac{1}{2m + 2}$ .

Kết luận

—  $m = -1$  phương trình có nghiệm  $x = -\frac{1}{2}$ .

—  $m \neq -1$  phương trình có nghiệm  $x = -\frac{1}{2}$  và  $x = \frac{1}{2m + 2}$ . □

### Dạng 12. Phương pháp nâng lên lũy thừa

Một số dạng phương trình cơ bản

$$\text{— } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$\text{— } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

$$\text{— } \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}.$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$$

Với điều kiện trên, bình phương hai vế phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned} f(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} + g(x) &= h(x) \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} &= h(x) - g(x) - f(x). \end{aligned}$$

Đến đây ta đưa về phương trình dạng 2.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2 - x}$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

Áp dụng phương trình dạng  $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 4 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -2$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

Áp dụng phương trình dạng  $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

Ta có

$$\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 1$ . □

**Ví dụ 3.** Giải phương trình  $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

Áp dụng phương trình dạng  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 18 - 2x + 2\sqrt{(15 - x)(3 - x)} = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \sqrt{(15 - x)(3 - x)} = 9 + x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 3 \\ (15 - x)(3 - x) = (9 + x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 3 \\ 36x + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -1$ . □

### **1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x + 5}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ 3x^2 - 4x - 4 = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -1; x = 3$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $\sqrt{3x - 4} = x - 3$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{3x - 4} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 3x - 4 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 9x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 + \sqrt{29}}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{9 + \sqrt{29}}{2}$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình  $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0$ .

**Lời giải.**



Ta có

$$(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 0; x = 2; x = -\frac{1}{2}$ . □

**Bài 4.** Giải phương trình  $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+4} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} \\ \Leftrightarrow & x+4 = 1-x + 2\sqrt{1-3x+2x^2} + 1-2x \\ \Leftrightarrow & \sqrt{1-3x+2x^2} = 2x+1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 1-3x+2x^2 = (2x+1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 0. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu, phương trình đã cho có nghiệm  $x = 0$ . □

### Dạng 13. Phương pháp dùng hằng đẳng thức

Sử dụng các hằng đẳng thức sau

—  $A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ .

—  $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0. \end{cases}$

—  $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B. \end{cases}$

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $4\sqrt{x+3} = 1 + 4x + \frac{3}{x}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x+3} = 1 + 4x + \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow & 4x\sqrt{x+3} = x + 4x^2 + 3 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{x+3} + x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x - \sqrt{x+3})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x+3} = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + 3 = 4x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 1$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình:  $4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ .

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} &4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1} \\ &\Leftrightarrow (4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3) + (2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + 3 = 4x^2 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 1$ . □

**Ví dụ 3.** Giải phương trình  $12\sqrt{x} + 2\sqrt{x-1} = 3x + 9$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} &12\sqrt{x} + 2\sqrt{x-1} = 3x + 9 \\ &\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = 4x - 2 \cdot 2\sqrt{x} \cdot 3 + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + 1)^2 = (2\sqrt{x} - 3)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + 1 = 2\sqrt{x} - 3 \\ \sqrt{x-1} + 1 = -2\sqrt{x} + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + 4 = 2\sqrt{x} \\ \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x} = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + 8\sqrt{x-1} + 16 = 4x \\ x - 1 + 4\sqrt{x(x-1)} + 4x = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt{x-1} = 3x - 15 \\ 4\sqrt{x(x-1)} = 5 - 5x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 64(x-1) = (3x-15)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 16x(x-1) = 25(1-x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 9x^2 - 154x + 289 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 9x^2 - 34x + 25 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \begin{cases} x = \frac{77 - \sqrt{3328}}{9} \\ x = \frac{77 + \sqrt{3328}}{9} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{25}{9} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{77 + \sqrt{3328}}{9} \text{ (thỏa mãn).} \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{77 + \sqrt{3328}}{9}; x = 1$ . □

### **1** BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình  $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ .

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} &2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4 \\ &\Leftrightarrow x + 3 + 2\sqrt{x+3} + 1 = 9x^2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} + 1)^2 = 9x^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + 1 = 3x \\ \sqrt{x+3} + 1 = -3x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 3x - 1 \\ \sqrt{x+3} = -3x - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x + 3 = (3x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 1 \geq 0 \\ x + 3 = (-3x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 7x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ 9x^2 + 5x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{9} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{97}}{18} \\ x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 1; x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18}$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $4\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = x + 7$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Khi đó, ta có

$$4\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = x + 7$$

$$\Leftrightarrow x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4 + \sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + \sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2 = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 4 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 1$ . □

**Bài 3.** Giải phương trình  $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{1}{2}(x + y + z)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 4 \\ z \geq 9. \end{cases}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} + 6\sqrt{z-9} = x+y+z \\ \Leftrightarrow & x-1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + y-4 - 4\sqrt{y-4} + 4 + z-9 - 6\sqrt{z-9} + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 + (\sqrt{z-9}-3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ \sqrt{y-4}-2=0 \\ \sqrt{z-9}-3=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{y-4}=2 \\ \sqrt{z-9}=3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-1=1 \\ y-4=4 \\ z-9=9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=2 \\ y=8 \\ z=18 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $(x; y; z) = (2; 8; 18)$ . □

**Bài 4.** Giải phương trình  $x(5x^3 + 2) - 2(\sqrt{2x+1} - 1) = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ .

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & x(5x^3 + 2) - 2(\sqrt{2x+1} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & 5x^4 + (2x + 1 - 2\sqrt{2x+1} + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & 5x^4 + (\sqrt{2x+1} - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{2x+1} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 1 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 0 \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 0$ . □

### Dạng 14. Đặt ẩn phụ

#### a. Đặt một ẩn phụ hoàn toàn

Dùng ẩn phụ chuyển phương trình chứa căn thức thành một phương trình với một ẩn phụ

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1. \end{cases} \quad (1)$

Phương trình tương đương  $2(x^2 - 2x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 3 = 0$ .

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3}, t \geq 0$ .

Khi đó phương trình trở thành:  $2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$ .

Thay  $t = 1$  ta có  $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$  (thỏa mãn điều kiện (1)).

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x = 1 + \sqrt{5}; x = 1 - \sqrt{5}$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 + 5x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \\ x \leq \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$ .

Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow 3(x^2 + 5x + 1) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} - 5 = 0$ . (1)

Đặt  $t = \sqrt{x^2 + 5x + 1}, (t \geq 0)$ .

Phương trình (1) trở thành  $3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (TM)} \\ t = -\frac{5}{3} \text{ (Loại)}. \end{cases}$

Với  $t = 1$  ta được  $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta có hai nghiệm của phương trình là  $x = 0, x = -5$ . □

**Ví dụ 3.** Giải phương trình  $(x - 1)(x + 3) + 2(x - 1)\sqrt{\frac{x + 3}{x - 1}} = 8$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \leq -3 \\ x > 1. \end{cases}$

Đặt  $t = (x - 1)\sqrt{\frac{x + 3}{x - 1}} \Rightarrow t^2 = (x - 1)(x + 3)$ .

Phương trình đã cho trở thành  $t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4. \end{cases}$

Với  $t = 2$  ta được  $(x - 1)\sqrt{\frac{x + 3}{x - 1}} = 2 \Rightarrow (x - 1)(x + 3) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{2} \text{ (TM)} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \text{ (Loại)}. \end{cases}$

Với  $t = -4$  ta được  $(x - 1)\sqrt{\frac{x + 3}{x - 1}} = -4 \Rightarrow (x - 1)(x + 3) = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{5} \text{ (Loại)} \\ x = -1 - 2\sqrt{5} \text{ (TM)}. \end{cases}$

Vậy phương trình có các nghiệm là  $x = -1 + 2\sqrt{2}, x = -1 - 2\sqrt{5}$ . □

**Ví dụ 4.** Giải phương trình:  $x(x + 5) = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow x^2 + 5x - 2 - 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} + 4 = 0$ . (1)

Đặt  $t = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2}$ .

Phương trình (1) trở thành  $t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(t^2 - 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t^2 - 2t + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}. \end{cases}$

Suy ra  $\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3. \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-3; -2\}$ . □

### **1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Giải phương trình  $x^2 + x + 12\sqrt{x + 1} = 36$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -1$ .

Đặt  $t = \sqrt{x+1}, (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 - 1$ . Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (t^2 - 1)^2 + t^2 - 1 + 12t = 36 \\ \Leftrightarrow & t^4 - t^2 + 12t - 36 = 0 \\ \Leftrightarrow & (t - 2)(t^3 + 2t^2 + 3t + 18) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t = 2 \\ t^3 + 2t^2 + 3t + 18 = 0 \text{ (vô nghiệm)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $t = 2$  ta được  $\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 3$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -1$ .

Đặt  $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}, (t \geq 0)$ . Khi đó  $t^2 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = t^2 - 4$ .

Phương trình đã cho trở thành  $t = t^2 - 4 - 16 \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \text{ (TM)} \\ t = -4 \text{ (Loại)}. \end{cases}$

Với  $t = 5$  ta có  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow x = 3$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = 3$ . □

### Dạng 15. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Dùng ẩn phụ chuyển phương trình chứa căn thức thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa  $x$ .

**Phương pháp:** Ta lưu ý có những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt tiêu để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp. Khi đó ta chọn lựa một trong hai hướng sau:

— Hướng 1: Lựa chọn phương pháp khác.

— Hướng 2: Thử để phương trình ở dạng “chứa ẩn phụ nhưng hệ số vẫn chứa ẩn  $x$  ban đầu”. Trong hướng này ta thường được một phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn  $x$  ban đầu) có biệt số  $\Delta$  là một số chính phương (hoặc bình phương của biểu thức).

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $(4x - 1)\sqrt{x^3 + 1} = 2x^3 + 2x + 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -1$ .

Đặt  $t = \sqrt{x^3 + 1}, t \geq 0$ . Ta có  $t^2 = x^3 + 1$ .

Khi đó phương trình có dạng  $2t^2 - (4x - 1)t + 2x - 1 = 0$ .

Ta có  $\Delta = (4x - 1)^2 - 8(2x - 1) = (4x - 3)^2$ . Do đó phương trình có nghiệm

$$t = \frac{4x - 1 \pm (4x - 3)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x - 1 \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó có } \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^3 + 1 = (2x - 1)^2 \\ x^3 + 1 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x = 2; x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -3$ .

Đặt  $t = \sqrt{x+3}$ , ( $t \geq 0$ ). Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 3xt + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (t-x)(t-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = x \\ \sqrt{x+3} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = 1. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình có hai nghiệm  $x = 1$ ;  $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ . □

**1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Giải phương trình  $6x^2 - 10x + 5 = (4x - 1)\sqrt{6x^2 - 6x + 5}$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 5 - (4x - 1)\sqrt{6x^2 - 6x + 5} - 4x = 0$ . (1)

Đặt  $t = \sqrt{6x^2 - 6x + 5}$ , ( $t \geq 0$ ). Phương trình (1) trở thành

$$t^2 - (4x - 1)t - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4x. \end{cases}$$

Với  $t = 1$  thì  $\sqrt{6x^2 - 6x + 5} = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 4 = 0$  (vô nghiệm).

Với  $t = 4x$  thì

$$\sqrt{6x^2 - 6x + 5} = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ 6x^2 - 6x + 5 = 16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ 10x^2 + 6x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{59}}{10} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{59}}{10}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{-3 + \sqrt{59}}{10}$ . □

**Dạng 16. Đặt một ẩn phụ chuyển về hệ phương trình**

**Ví dụ 1.** Giải phương trình:  $x^2 = \sqrt{2-x} + 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \leq 2$ .

Đặt  $t = \sqrt{2-x}$ , ( $t \geq 0$ ). Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = t + 2 \\ t^2 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x \\ t = x - 1. \end{cases}$$

Với  $t = -x$  ta được  $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = -1$  (Loại) \\  $x = -2 \Rightarrow t = 2$  (TM).

Với  $t = x - 1$  ta được  $\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  (TM) \\  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow t = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$  (Loại).

Kết hợp với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm  $x = -2$ ;  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $x\sqrt[3]{35-x^3}(x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30$ .



**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt[3]{35 - x^3}$ . Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xt(x+t) = 30 \\ x^3 + t^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+t = 5 \\ x \cdot t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ t = 3 \\ x = 3 \\ t = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 2; x = 3$ . □

**1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Giải phương trình  $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt[3]{2x - 1} \Leftrightarrow t^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x = t^3 + 1$ .

Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \text{ (TM)} \\ x^2 + t^2 + xt + 2 = 0 \text{ (Vô nghiệm)}. \end{cases}$

Với  $x = t$  có  $x = \sqrt[3]{2x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Vậy phương trình có 3 nghiệm  $x = 1; x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình  $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x - 2}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $y = \sqrt[3]{3x - 2} \Leftrightarrow y^3 = 3x - 2 \Leftrightarrow 3x = y^3 + 2$ .

Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ (TM)} \\ x^2 + y^2 + xy + 3 = 0 \text{ (Vô nghiệm)}. \end{cases}$

Với  $x = y$  có:  $x = \sqrt[3]{3x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 1; x = -2$ . □

**Dạng 17. Đặt hai ẩn phụ**

*Bên cạnh phương pháp đặt một ẩn phụ, có rất nhiều bài toán cần dùng nhiều ẩn phụ và tùy theo đặc thù của bài toán đã cho, ta thu được các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng. Chẳng hạn đối với phương trình  $\sqrt[m]{a - f(x)} + \sqrt[m]{b + f(x)} = c$  ta có thể đặt*

$$\begin{cases} u = \sqrt[m]{a - f(x)} \\ v = \sqrt[m]{b + f(x)} \end{cases}$$

*Khi đó suy ra  $u^m + v^m = a + b$ .*

*Ta thu được hệ phương trình  $\begin{cases} u^m + v^m = a + b \\ u + v = c. \end{cases}$*

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{10 - x^2} = 5$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ .

Đặt  $u = \sqrt{x^2 + 3}; v = \sqrt{10 - x^2}, (u, v \geq 0)$ . Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u \cdot v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \\ u = 3 \\ v = 2. \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Với } \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}.$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-1; 1; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \leq \frac{6}{5}$ .

Đặt  $u = \sqrt[3]{3x-2}$ ;  $v = \sqrt{6-5x}$ ; ( $v \geq 0$ ). Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} 2u + 3v = 8 & (1) \\ 5u^3 + 3v^2 = 8. & (2) \end{cases}$

Từ (1) có  $v = \frac{8-2u}{3}$ , thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0 &\Leftrightarrow (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ 15u^2 - 26u + 20 = 0 \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases} &\Leftrightarrow u = -2. \end{aligned}$$

Thay  $u = -2$  có  $v = 4$  khi đó  $\begin{cases} \sqrt[3]{3x-2} = -2 \\ \sqrt{6-5x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$  (Thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -2$ . □

### 1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình  $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \leq 12$ .

Đặt  $u = \sqrt[3]{24+x}$ ;  $v = \sqrt{12-x}$  ( $v \geq 0$ ). Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} u + v = 6 & (1) \\ u^3 + v^2 = 36. & (2) \end{cases}$

Từ (1) có  $v = 6 - u$ , thế vào (2) ta được  $u^3 + u^2 - 12u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 + u - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 3 \\ u = -4. \end{cases}$

Với  $u = 0$  có  $v = 6$  khi đó  $\begin{cases} \sqrt[3]{24+x} = 0 \\ \sqrt{12-x} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = -24$  (Thỏa mãn điều kiện).

Với  $u = 3$  có  $v = 3$  khi đó  $\begin{cases} \sqrt[3]{24+x} = 3 \\ \sqrt{12-x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$  (Thỏa mãn điều kiện).

Với  $u = -4$  có  $v = 10$  khi đó  $\begin{cases} \sqrt[3]{24+x} = -4 \\ \sqrt{12-x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = -88$  (Thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có ba nghiệm  $x = -24$ ;  $x = 3$ ;  $x = -88$ . □

### Dạng 18. Đặt hai ẩn phụ chuyển về giải một phương trình hai ẩn

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $2x + 1 + x\sqrt{x^2+2} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $a = \sqrt{x^2+2}$ ;  $b = \sqrt{x^2+2x+3}$  ( $a, b > 0$ ).

Từ đó  $\Rightarrow x = \frac{b^2 - a^2 - 1}{2}$ .

Phương trình đã cho trở thành

$$(b - a) \left[ (a + b) + \frac{(a + b)^2}{2} + \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{-1}{2}$ . □

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $\sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{2x + 1} = 1 + x - 2x^2$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\sqrt{4x^2 - 1} = a; \sqrt{2x + 1} = b$  ( $a, b \geq 0$ ).

Ta có  $1 + x - 2x^2 = \frac{-1}{2}(4x^2 - 1) + \frac{1}{2}(2x + 1)$ .

Phương trình trở thành

$$a - b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \Leftrightarrow (b - a)(a + b + 2) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Thay vào phương trình ta được  $\sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x + 1} \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$ .

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 1; x = \frac{-1}{2}$ . □

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình  $x^2 + \sqrt{x^2 + 1} = x + \sqrt{x + 1}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $a = \sqrt{x^2 + 1}, b = \sqrt{x + 1}$  ( $a, b \geq 0$ )  $\Rightarrow a^2 - b^2 = x^2 - x$ .

Phương trình đã cho trở thành  $a^2 - b^2 + a = b \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b$ .

Ta có  $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ .

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 0; x = 1$ . □

### Dạng 19. Phương pháp nhân liên hợp

*Phương pháp:*

- Dự đoán nghiệm  $x = x_0$  bằng máy tính bỏ túi (*SHIFT - SOLVE* hay *ALPHA - CALC*).
- Tách, ghép phù hợp sau khi nhân liên hợp xuất hiện nhân tử chung  $(x - x_0)$  hoặc bội của  $(x - x_0)$  trong phương trình nhằm đưa về phương trình tích số  $(x - x_0) \cdot g(x) = 0$ .
- Các công thức thường dùng trong nhân liên hợp

Biểu thức	Biểu thức liên hợp	Tích
$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A + B$
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A - B$

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\sqrt{x + 1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$ . (\*)

**Lời giải.**

**Phân tích:** Sử dụng máy tính, ta tìm được một nghiệm là  $x = \frac{1}{2}$  và ta có  $\begin{cases} (3x) - (x + 1) = 2x - 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1) \end{cases}$ .

Điều kiện  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (4x^2 - 1) + (\sqrt{3x} - \sqrt{x+1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1) + \frac{3x - x - 1}{(\sqrt{3x} + \sqrt{x+1})} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1) \left( 2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}} \right) = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có  $\forall x \geq 0 \Rightarrow 2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}} > 0$  nên  $(1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{1}{2}$ . □

### 1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình  $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6$ . (\*)

**Lời giải.**

Nhận thấy rằng  $\begin{cases} (2x - 3) - x = x - 3 \\ 2x - 6 = 2(x - 3). \end{cases}$

Điều kiện  $x \geq \frac{3}{2}$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} - 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left( \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} - 2 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Giải (1)

Có  $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2$  (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 3$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình:  $(3x + 1)\sqrt{x^2 + 3} = 3x^2 + 2x + 3$ . (\*)

**Lời giải.**

Do  $x = -\frac{1}{3}$  không là nghiệm phương trình, nên với  $x \neq -\frac{1}{3}$  ta được:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = \frac{3x^2 + 2x + 3}{3x + 1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} - 2x = \frac{3x^2 + 2x + 3}{3x + 1} - 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3 - 4x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + 2x} = \frac{-3x^2 + 3}{3x + 1} \Leftrightarrow 3(1 - x^2) \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2x} - \frac{1}{3x + 1} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 = 0(1) \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2x} - \frac{1}{3x + 1} = 0 \end{cases} \quad (2). \end{aligned}$$

(1)  $\Leftrightarrow x = \pm 1$ .

(2)  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} + 2x = 3x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 3 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ .

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = \pm 1$ . □

### Dạng 20. Phương pháp biến đổi thành phương trình tích

*Phương pháp:* Dùng các phép biến đổi, đồng nhất kết hợp với việc tách, nhóm, ghép thích hợp để đưa phương trình về dạng tích đơn giản hơn và biết cách giải.

*Một số biến đổi thường gặp*

—  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  với  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của  $f(x) = 0$ .

- Chia Hoocner để đưa về dạng tích số ("Đầu rơi, nhân tới, cộng chéo").
- Các hằng đẳng thức thường gặp.
- $u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0$ .
- $au + bv = ab + vu \Leftrightarrow (u - b)(v - a) = 0$ .

**Ví dụ 1.** Giải phương trình:  $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ . (\*)

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq \frac{1}{2}$ . Biến đổi đưa về phương trình tích số

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} - x + x^2 - (2x - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{2x - 1} - x) + x^2 - (\sqrt{2x - 1})^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{2x - 1} - x) + (x - \sqrt{2x - 1})(x + \sqrt{2x - 1}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{2x - 1})(-1 + x + \sqrt{2x - 1}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 1} = x \\ \sqrt{2x - 1} = 1 - x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 1 = x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x - 1 = (1 - x)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 - \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình là  $x = 1 \vee x = 2 - \sqrt{2}$ . □

### 1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình:  $x^2 + \sqrt{x + 5} = 5$ . (\*)

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$ .

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow x^2 - (x + 5) + (x + \sqrt{x + 5}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{x + 5})^2 + (x + \sqrt{x + 5}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x + 5})(x + \sqrt{x + 5}) + (x + \sqrt{x + 5}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x + \sqrt{x + 5})(x + 1 - \sqrt{x + 5}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 5} = -x(1) \\ \sqrt{x + 5} = x + 1 \end{cases} \quad (2).
 \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x + 5 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình  $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ . □

**Bài 2.** Giải phương trình:  $x + 2\sqrt{7 - x} = 2\sqrt{x - 1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$ . (\*)

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ -x^2 + 8x - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7$ .

$$(*) \Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{7 - x} - \sqrt{(7 - x)(x - 1)} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2) - \sqrt{x-7}(\sqrt{x-1}-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-7}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{x-7} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

□

### Dạng 21. Phương pháp đánh giá hai vế

*Phương pháp:* Để giải được phương trình hay bất phương trình bằng bất đẳng thức ta dựa vào hai ý tưởng sau:

— Biến đổi phương trình về dạng  $f(x) = g(x)$  mà trong đó

$$- \begin{cases} f(x) \leq a \\ g(x) \geq a \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} f(x) \geq a \\ g(x) \leq a \end{cases} \text{ với } a \text{ là hằng số.}$$

— Lúc đó, nghiệm của phương trình là tất cả các giá trị  $x$  thỏa mãn hệ  $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a. \end{cases}$

— Biến đổi phương trình về dạng  $f(x) = a$  với  $a$  là hằng số mà trong đó:

— Ta dùng bất đẳng thức hoặc đánh giá được kết quả:  $f(x) \geq a$  hay  $f(x) \leq a$ .

— Lúc đó, nghiệm phương trình là tất cả các giá trị  $x$  thỏa mãn dấu của đẳng thức xảy ra.

#### Các bất đẳng thức quen thuộc

— Bất đẳng thức Cauchy

$$- \text{ Với } x, y \geq 0 \text{ thì } \begin{cases} x + y \geq 2\sqrt{xy} & (1) \\ x^2 + y^2 \geq 2xy & (2) \end{cases} \text{ Dấu " = " xảy ra khi } x = y.$$

$$- \text{ Với } x, y \in \mathbb{R} \text{ thì } \begin{cases} xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 & (3) \\ (x+y)^2 \geq 4xy & (4) \end{cases} \text{ Dấu " = " xảy ra khi } x = y.$$

$$- x, y, z \geq 0 \text{ thì } \begin{cases} x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} & (5) \\ xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 & (6) \end{cases} \text{ Dấu " = " xảy ra khi } x = y = z.$$

— Mở rộng cho  $n$  số  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  không âm ta có:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ . Dấu " = " xảy ra khi  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ .

— Bất đẳng thức Bunhiacôpxki ( $B \cdot C \cdot S$ ).

$$- \text{ Với } x, y \text{ bất kỳ, ta luôn có: } \begin{cases} (a \cdot x + b \cdot y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) & (7) \\ |a \cdot x + b \cdot y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} & (8). \end{cases}$$

Dấu " = " xảy ra khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$  hay  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ .

$$- \text{ Với } x, y, z \text{ bất kỳ: } \begin{cases} (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) & (9) \\ |a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} & (10). \end{cases}$$

Dấu " = " xảy ra khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$  hay  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ .

— Bất đẳng thức cộng mẫu số (BDT Cauchy Schwarz) là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức BCS.

$$- \text{ Với } a, b \in \mathbb{R} \text{ và } x, y > 0, \text{ ta luôn có: } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (11).$$

– Với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $x, y, z > 0$ , ta luôn có:  $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$  (12).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ .

— Bất đẳng thức về trị tuyệt đối

Điều kiện	Nội dung
$x \in \mathbb{R}$	$ x  \geq 0,  x  \geq x,  x  \geq -x$
$x > 0$	$ x  \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$
	$ x  \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$
$a, b \in \mathbb{R}$	$ a  -  b  \leq  a+b  \leq  a  +  b .$

**Ví dụ 1.** Giải phương trình:  $2\sqrt{7x^3 - 11x^2 + 25x - 12} = x^2 + 6x - 1.$  (\*)

**Lời giải.**

**Phân tích:** Đây là bài toán có dạng  $\sqrt{A} = B$  nhưng ta sẽ nhận được phương trình bậc bốn và khi đó cần tới kỹ năng nhẩm nghiệm của phương trình bậc cao và phép chia đa thức để chuyển phương trình về dạng tích số. Nhưng nếu ta để ý đến biểu thức trong  $\sqrt{7x^3 - 11x^2 + 25x - 12} = \sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}$  mà có  $(7x-4) + (x^2-x+3) = (x^2+6x-1)$  làm ta liên tưởng đến việc đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy ngược dấu dạng:  $2\sqrt{ab} \leq a+b.$

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)} = x^2+6x-1 \quad (1).$$

Điều kiện:  $x \geq \frac{4}{7}$  ( $x^2-x+3 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ ).

Ta có:  $VT = 2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)} \leq x^2+6x-1 = VP.$

Dấu "=" xảy ra  $(7x-4) = (x^2-x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là  $\begin{cases} x = 1 \\ x = 7. \end{cases}$  □

### 1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải phương trình:  $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}.$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq -\frac{3}{2}.$

Với điều kiện  $x \geq -\frac{3}{2}$  áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm  $(2x+3); 1$

$$\begin{aligned} (2x+3) + 1 &\geq 2\sqrt{(2x+3) \cdot 1} = x^2 + 4x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x+4 &\geq x^2 + 4x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1. \end{aligned}$$

So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là  $x = -1.$  □

**Bài 2.** Giải phương trình:  $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2(x-1)}.$  (\*)

**Lời giải.**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2}. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot (x-3) &\stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 &\leq \sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2}. \quad (2) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{1} = \frac{x-3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 5 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow$  phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 5$ . □

### **F** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 - 4)x = 3m + 6$  vô nghiệm.

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m = \pm 2$ .                      D.  $m = -2$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $mx - m = 0$  vô nghiệm.

- A.  $m \in \emptyset$ .                      B.  $m = \{0\}$ .                      C.  $m \in \mathbb{R}^+$ .                      D.  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\begin{cases} m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 3.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m$  vô nghiệm.

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m = 3$ .                      D.  $m = 6$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 4.** Cho phương trình  $(m + 1)^2x + 1 = (7m - 5)x + m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho vô nghiệm.

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = 2; m = 3$ .                      C.  $m = 2$ .                      D.  $m = 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình viết lại  $(m^2 - 5m + 6)x = m - 1$ .

Phương trình vô nghiệm khi  $\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 5.** Cho hai hàm số  $y = (m + 1)x^2 + 3m^2x + m$  và  $y = (m + 1)x^2 + 12x + 2$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hai hàm số đã cho không cắt nhau.

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m = -2$ .                      C.  $m = \pm 2$ .                      D.  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Đồ thị hai hàm số không cắt nhau khi và chỉ khi phương trình

$$(m + 1)x^2 + 3m^2x + m = (m + 1)x^2 + 12x + 2 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 4)x = 2 - m \text{ vô nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Chọn đáp án **A** □



**Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(2m - 4)x = m - 2$  có nghiệm duy nhất.

- A.  $m = -1$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m \neq -1$ .                      D.  $m \neq 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi  $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình  $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$  có nghiệm duy nhất ?

- A. 2.                      B. 19.                      C. 20.                      D. 21.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi  $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$  Vì  $m$  là các số nguyên thuộc đoạn  $[-10; 10]$  nên có 19 giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 8.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-5; 10]$  để phương trình  $(m + 1)x = (3m^2 - 1)x + m - 1$  có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử trong  $S$  bằng:

- A. 15.                      B. 16.                      C. 39.                      D. 40.

**Lời giải.**

Phương trình viết lại  $(3m^2 - m - 2)x = 1 - m$ .

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi  $3m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$ .

Mà  $m \in [-5; 10]$  và  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ .

Do đó, tổng các phần tử trong  $S$  bằng 39.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 + m)x = m + 1$  có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

- A.  $m = -1$ .                      B.  $m \neq 0$ .                      C.  $m \neq -1$ .                      D.  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình có nghiệm duy nhất khi  $m^2 + m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$  (\*) □

Khi đó, nghiệm của phương trình là  $x = \frac{1}{m}$ .

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$  (thỏa mãn (\*)).

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 10.** Cho hai hàm số  $y = (m + 1)^2x - 2$  và  $y = (3m + 7)x + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau.

- A.  $m \neq -2$ .                      B.  $m \neq -3$ .                      C.  $m \neq -2$  và  $m \neq 3$ .                      D.  $m = -2, m = 3$ .

**Lời giải.**

Đồ thị hai hàm số cắt nhau khi và chỉ khi phương trình  $(m + 1)^2x - 2 = (3m + 7)x + m$  có nghiệm duy nhất.

$\Leftrightarrow (m^2 - m - 6)x = 2 + m$  có nghiệm duy nhất.

$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -2 \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m^2 - 1)x = m - 1$  có nghiệm đúng với mọi  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = \pm 1$ .                      C.  $m = -1$ .                      D.  $m = 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho nghiệm đúng với  $\forall x \in \mathbb{R}$  hay phương trình có vô số nghiệm khi  $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 12.** Cho phương trình  $m^2x + 6 = 4x + 3m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m \neq -2$ .                      C.  $m \neq -2$  và  $m \neq 2$ .                      D.  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Phương trình viết lại  $(m^2 - 4)x = 3m - 6$ .

Phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$ .

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm khi  $m \neq -2$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 13.** Cho phương trình  $(m^2 - 3m + 2)x + m^2 + 4m + 5 = 0$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m = -2$ .                      B.  $m = -5$ .                      C.  $m = 1$ .                      D. Không tồn tại.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho nghiệm đúng với  $\forall x \in \mathbb{R}$  hay phương trình có vô số nghiệm khi

$$\begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ -(m^2 + 4m + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 14.** Cho phương trình  $(m^2 - 2m)x = m^2 - 3m + 2$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.

- A.  $m = 0$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m \neq 0$  và  $m \neq 2$ .                      D.  $m \neq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$ . Do đó, phương trình đã

cho có nghiệm khi  $m \neq 0$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 15.** Cho hai hàm số  $y = (m + 1)x + 1$  và  $y = (3m^2 - 1)x + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hai hàm số đã cho trùng nhau.

- A.  $m = 1$  hoặc  $m = -\frac{2}{3}$ .                      B.  $m \neq 1$  và  $m \neq -\frac{2}{3}$ .  
C.  $m = 1$ .                      D.  $m = -\frac{2}{3}$ .

**Lời giải.**

Đồ thị hai hàm số trùng nhau khi và chỉ khi phương trình  $(m + 1)x + 1 = (3m^2 - 1)x + m$  có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow (3m^2 - m - 2)x = 1 - m \text{ có vô số nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - m - 2 = 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 16.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

- A.  $a = 0$ .                      B.  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ .  
C.  $a = b = c = 0$ .                      D.  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Với  $a = 0$ . Phương trình trở thành  $bx = -c$ . Khi đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi  $b \neq 0$ .

Với  $a \neq 0$ . Khi đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi  $\Delta = 0$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 17.** Số  $-1$  là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

- A.  $x^2 + 4x + 2 = 0$ .                      B.  $2x^2 - 5x - 7 = 0$ .                      C.  $-3x^2 + 5x - 2 = 0$ .                      D.  $x^3 - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Với phương trình  $x^2 + 4x + 2 = 0$ . Ta có  $(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 2 = -1 \neq 0$ .

Với phương trình  $2x^2 - 5x - 7 = 0$ . Ta có  $2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 7 = 0$ .

Với phương trình  $-3x^2 + 5x - 2 = 0$ . Ta có  $-3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 2 = -10 \neq 0$ .

Với phương trình  $x^3 - 1 = 0$ . Ta có  $(-1)^3 - 1 = -2 \neq 0$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 18.** Nghiệm của phương trình  $x^2 - 7x + 12 = 0$  có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số nào sau đây?

**A.**  $y = x^2$  và  $y = -7x + 12$ .

**B.**  $y = x^2$  và  $y = -7x - 12$ .

**C.**  $y = x^2$  và  $y = 7x + 12$ .

**D.**  $y = x^2$  và  $y = 7x - 12$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7x - 12$ . Do đó, nghiệm của phương trình đã cho có thể xem là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số  $y = x^2$  và  $y = 7x - 12$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 19.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình  $x^2 - x + m = 0$  vô nghiệm?

**A.** 9.

**B.** 10.

**C.** 20.

**D.** 21.

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta = 1 - 4m$ . Phương trình vô nghiệm khi  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$  Do  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases}$ .

Nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 20.** Phương trình  $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$  vô nghiệm khi:

**A.**  $m \leq -2$ .

**B.**  $m < -2$ .

**C.**  $m > 2$ .

**D.**  $m \geq 2$ .

**Lời giải.**

Với  $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ . Khi đó phương trình trở thành  $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ .

Với  $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ . Ta có  $\Delta' = m^2 - (m - 2)(m + 1) = m + 2$ . Phương trình vô nghiệm khi  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 21.** Số nguyên  $k$  nhỏ nhất thỏa mãn phương trình  $2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0$  vô nghiệm là?

**A.**  $k = -1$ .

**B.**  $k = 1$ .

**C.**  $k = 2$ .

**D.**  $k = 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình viết lại  $(2k - 1)x^2 - 8x + 6 = 0$ . Với  $2k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ . Khi đó, phương trình trở thành  $-8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ .

Với  $2k - 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{2}$ . Ta có  $\Delta' = (-4)^2 - (2k - 1) \cdot 6 = -12k + 22$ . Khi đó, phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -12k + 22 < 0 \Leftrightarrow k > \frac{11}{6}$ .

Do đó, số nguyên  $k$  nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $k = 2$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 22.** Phương trình  $(m - 2)x^2 + 2x - 1 = 0$  có nghiệm kép khi

**A.**  $m = 1; m = 2$ .

**B.**  $m = 1$ .

**C.**  $m = 2$ .

**D.**  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi  $\begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 23.** Phương trình  $mx^2 + 6 = 4x + 3m$  có nghiệm duy nhất khi

**A.**  $m \in \emptyset$ .

**B.**  $m = 0$ .

**C.**  $m \in \mathbb{R}$ .

**D.**  $m \neq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình viết lại  $mx^2 - 4x + (6 - 3m) = 0$ .

Với  $m = 0$ . Khi đó, phương trình trở thành  $4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ . Do đó,  $m = 0$  là một giá trị cần tìm.

Với  $m \neq 0$ . Ta có  $\Delta' = (-2)^2 - m(6 - 3m) = 3m^2 - 6m + 4 = 3(m - 1)^2 + 1 > 0$  Khi đó, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt nên  $m \neq 0$  không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 24.** Phương trình  $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$  có nghiệm duy nhất khi

- A.  $m = 0$ .                      B.  $m = -1$ .                      C.  $m = 0, m = -1$ .                      D.  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Với  $m = 0$ . Khi đó, phương trình trở thành  $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ . Do đó,  $m = 0$  là một giá trị cần tìm.

Với  $m \neq 0$ . Ta có  $\Delta' = [-(m+1)]^2 - m(m+1) = m+1$ . Khi đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 25.** Phương trình  $(m+1)x^2 - 6(m+1)x + 2m + 3 = 0$  có nghiệm kép khi

- A.  $m = -1$ .                      B.  $m = -1, m = -\frac{6}{7}$ .                      C.  $m = -\frac{6}{7}$ .                      D.  $m = \frac{6}{7}$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi  $\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 7m^2 + 13m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 26.** Phương trình  $2(x^2 - 1) = x(mx + 1)$  có nghiệm duy nhất khi:

- A.  $m = \frac{17}{8}$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m = 2, m = \frac{17}{8}$ .                      D.  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Phương trình viết lại  $(2-m)x^2 - x - 2 = 0$ .

Với  $2-m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ . Khi đó, phương trình trở thành  $-x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ . Do đó,  $m = 2$  là một giá trị cần tìm.

Với  $2-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ . Ta có  $\Delta = (-1)^2 - 4(2-m) \cdot (-2) = -8m + 17$ . Khi đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi  $\Delta = 0 \Leftrightarrow -8m + 17 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 27.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m-2)x^2 - 2x + 1 - 2m = 0$  có nghiệm duy nhất. Tổng của các phần tử trong  $S$  bằng

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B. 3.                      C.  $\frac{7}{2}$ .                      D.  $\frac{9}{2}$ .

**Lời giải.**

Với  $m = 2$ , phương trình trở thành  $-2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ . Do đó  $m = 2$  là một giá trị cần tìm. Với  $m \neq 2$ , phương trình đã cho là phương trình bậc hai có  $\Delta' = 2m^2 - 5m + 3$ . Để phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$  hoặc  $m = 1$ . Vậy  $S = \left\{1; \frac{3}{2}; 2\right\}$ . Vậy tổng các phần tử trong  $S$  bằng  $1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{2}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 28.** Phương trình  $(m-1)x^2 + 6x - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi

- A.  $m > -8$ .                      B.  $m > -\frac{5}{4}$ .                      C.  $m > -8, m \neq 1$ .                      D.  $m > -\frac{5}{4}, m \neq 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi  $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -8 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 29.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực  $m$  thuộc đoạn  $[-5; 5]$  để phương trình  $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt?

- A. 5.                      B. 6.                      C. 9.                      D. 10.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi  $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{4}{5} \end{cases}$ .

Do  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases}$  nên có 5 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 30.** Phương trình  $(m^2 + 2)x^2 + (m - 2)x - 3 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi

- A.  $0 < m < 2$ .      B.  $m > 2$ .      C.  $m \in \mathbb{R}$ .      D.  $m \leq 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi  $\begin{cases} m^2 + 2 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 13m^2 - 4m + 28 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 31.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = 2x + m$  tiếp xúc với parabol  $P: y = (m - 1)x^2 + 2mx + 3m - 1$ .

- A.  $m = 1$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = 0$ .      D.  $m = 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$(m - 1)x^2 + 2mx + 3m - 1 = 2x + m \Leftrightarrow (m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 1 = 0. \quad (*)$$

đường thẳng  $d$  tiếp xúc với  $P$  khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = (m1)^2 - (m1)(2m1) = m(m1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 32.** Phương trình  $x^2 + m = 0$  có nghiệm khi

- A.  $m > 0$ .      B.  $m < 0$ .      C.  $m \leq 0$ .      D.  $m \geq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình tương đương với  $x^2 = -m$ . Do vế trái của phương trình không âm nên để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 33.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-20; 20]$  để phương trình  $x^2 - 2mx + 144 = 0$  có nghiệm. Tổng của các phần tử trong  $S$  bằng

- A. 21.      B. 18.      C. 1.      D. 0.

**Lời giải.**

Phương trình có nghiệm khi  $\Delta' = m^2 - 144 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 12^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 12 \\ m \leq -12 \end{cases}$ . Vì  $m$  là số nguyên thuộc đoạn

$[-20; 20]$  nên  $m$  thuộc tập  $\{-20; -19; -18; \dots; -12; 12; 13; 14; \dots; 20\}$ . Do đó tổng các phần tử trong tập  $S$  bằng 0.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hai đồ thị hàm số  $y = -x^2 - 2x + 3$  và  $y = x^2 - m$  có điểm chung.

- A.  $m = -\frac{7}{2}$ .      B.  $m < -\frac{7}{2}$ .      C.  $m > -\frac{7}{2}$ .      D.  $m \geq -\frac{7}{2}$ .

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm  $-x^2 - 2x + 3 = x^2 - m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m - 3 = 0$ . (\*) Để hai đồ thị hàm số có điểm chung khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 2(-m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 35.** Phương trình  $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có nghiệm khi

- A.  $m \geq -\frac{5}{4}$ .      B.  $m \leq -\frac{5}{4}$ .      C.  $m = -\frac{5}{4}$ .      D.  $m = \frac{5}{4}$ .

**Lời giải.**

Với  $m = 1$ , phương trình trở thành  $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ . Do đó  $m = 1$  thỏa mãn.

Với  $m \neq 1$ , ta có  $\Delta = 9 + 4(m - 1) = 4m + 5$ .

Phương trình có nghiệm khi  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}$ . Vì  $m \neq 1$  nên  $-\frac{5}{4} \leq m \neq -1$ .

Hợp hai trường hợp ta được  $m \geq -\frac{5}{4}$  là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 36.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình  $mx^2 - mx + 1 = 0$  có nghiệm.

- A. 17.      B. 18.      C. 20.      D. 21..

**Lời giải.**

Nếu  $m = 0$  thì phương trình trở thành  $1 = 0$  do đó phương trình vô nghiệm.

Khi  $m \neq 0$ , phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta = m^2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$ .

Kết hợp điều kiện  $m \neq 0$ , ta được:  $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$ . Vì  $m$  là số nguyên thuộc  $[-10; 10]$  nên  $m$  thuộc  $\{-10; -9; -8; \dots; -1\} \cup$

$\{4; 5; 6; \dots; 10\}$ . Vậy có tất cả 17 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 37.** Biết rằng phương trình  $x^2 - 4x + m + 1 = 0$  có một nghiệm bằng 3. Nghiệm còn lại của phương trình bằng

- A. -1.      B. 1.      C. 2.      D. 4..

**Lời giải.**

Vì phương trình đã cho có nghiệm bằng 3 nên thay  $x = 3$  vào phương trình, ta được

$$9 - 12 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Với  $m = 2$  phương trình trở thành  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 38.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $3x^2 - (m + 2)x + m - 1 = 0$  có một nghiệm gấp đôi nghiệm còn lại.

- A.  $m \in \left\{\frac{5}{2}; 7\right\}$ .      B.  $m \in \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\}$ .      C.  $m \in \left\{0; \frac{2}{5}\right\}$ .      D.  $m \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 16 > 0 \Leftrightarrow (m - 4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$ . (\*) Theo

định lí Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 1}{3} \\ x_1 + x_2 = \frac{m + 2}{3} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{9}(m + 2) \\ x_2 = \frac{1}{9}(m + 2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 1}{3} \end{cases}$ .

Suy ra  $\frac{2}{81}(m + 2)^2 = \frac{m - 1}{3} \Leftrightarrow 2m^2 - 19m + 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ m = 7 \end{cases}$  (thỏa mãn(\*))

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 39.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $3x^2 - 2(m + 1)x + 3m - 5 = 0$  có một nghiệm gấp ba nghiệm còn lại.

- A.  $m = 7$ .      B.  $m = 3$ .      C.  $m = 3; m = 7$ .      D.  $m \in \emptyset$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 16 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Theo định lí Viet, ta có 
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{3m-5}{3} \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{3} \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m+1}{2} \\ x_2 = \frac{m+1}{6} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3m-5}{3} \end{cases}$$

Suy ra  $\frac{(m+1)^2}{12} = \frac{3m-5}{3} \Leftrightarrow m^2 - 10m + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 7 \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 40.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(x-1)(x^2-4mx-4) = 0$  ba nghiệm phân biệt.

- A.  $m \in \mathbb{R}$ .                      B.  $m \neq 0$ .                      C.  $m \neq \frac{3}{4}$ .                      D.  $m \neq -\frac{3}{4}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(x-1)(x^2-4mx-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 4mx - 4 = 0 (*) \end{cases}$ . Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $(*)$  có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 + 4 > 0 \\ g(1) = 1 - 4m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{4}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 41.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi

- A.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .                      B.  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .                      D.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0$ . Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình là  $x_1$  và  $x_2$ . Do  $x_1$  và  $x_2$  cùng dấu nên  $x_1x_2 > 0$  hay  $P > 0$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 42.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

- A.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .                      B.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .                      D.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0$ . Khi đó, gọi 2 nghiệm của phương trình là  $x_1$  và  $x_2$ . Do  $x_1$  và  $x_2$  là hai nghiệm âm nên  $\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 43.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

- A.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .                      B.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .                      D.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0$ . Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình là  $x_1$  và  $x_2$ . Do  $x_1$  và  $x_2$  là hai nghiệm dương nên  $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 44.** Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

- A.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .                      B.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .                      D.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0$ . Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình là  $x_1$  và  $x_2$ . Do  $x_1$  và  $x_2$  là hai nghiệm dương nên  $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 45.** Phương trình  $x^2 - mx + 1 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt khi

- A.  $m < -2$ .                      B.  $m > 2$ .                      C.  $m \geq -2$ .                      D.  $m \neq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ m < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 46.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-5; 5]$  để phương trình  $x^2 + 4mx + m^2 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt?

- A. 5.                      B. 6.                      C. 10.                      D. 11.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m < 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Do  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases}$  nên  $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$  do đó có 5 giá trị của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 47.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $mx^2 + x + m = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt là

- A.  $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .                      B.  $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .                      C.  $m \in (0; 2)$ .                      D.  $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - 4m^2 > 0 \\ -\frac{1}{m} < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 48.** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2; 6]$  để phương trình  $x^2 + 4mx + m^2 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt. Tổng các phần tử trong  $S$  bằng:

- A. -3.                      B. 2.                      C. 18.                      D. 21.

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vì  $m$  nguyên và thuộc  $[-2; 6]$  nên  $m$  thuộc  $\{-2; -1\}$ . Do đó, tổng các phần tử trong  $S$  bằng -3.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 49.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt là:

- A.  $m \in (-1; 1)$ .                      B.  $m \in (1; +\infty)$ .                      C.  $m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .                      D.  $m \in (-\infty; -1)$ .



**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m + 2 > 0 \\ S = 2(m + 1) > 0 \\ P = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -1 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$ . Vậy với

$m > 1$  thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 50.** Phương trình  $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi

- A.  $m > 1$ .                      B.  $m < 1$ .                      C.  $m \geq 1$ .                      D.  $m \leq 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \frac{-1}{m - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 51.** Giả sử phương trình  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm là  $x_1, x_2$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2)$  theo  $m$ .

- A.  $P = 3m^2 - 10m + 6$ .    B.  $P = 3m^2 + 10m - 5$ .    C.  $P = 3m^2 - 10m + 1$ .    D.  $P = 3m^2 + 10m + 1$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1x_2 = m^2 + 2 \\ x_1 + x_2 = 2m + 1 \end{cases}$ .

Thay vào  $P$ , ta được  $P = 3(m^2 + 2) - 5(2m + 1) = 3m^2 - 10m + 1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 52.** Giả sử phương trình  $x^2 - 3x - m = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm là  $x_1, x_2$ . Tính giá trị biểu thức  $P = x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1)$  theo  $m$ .

- A.  $P = -m + 9$ .                      B.  $P = 5m + 9$ .                      C.  $P = m + 9$ .                      D.  $P = -5m + 9$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1) = x_1^2 - x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 - x_2^2 \cdot x_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2) \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$  Thay vào  $P$ , ta được  $P = 3^2 - 2(-m) - (-m) \cdot 3 = 5m + 9$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 53.** Giả sử phương trình  $2x^2 - 4ax - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = |x_1 - x_2|$ .

- A.  $T = \frac{4a^2 + 2}{3}$ .                      B.  $T = \sqrt{4a^2 + 2}$ .                      C.  $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2}$ .                      D.  $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{4}$ .

**Lời giải.**

Vì  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $2x^2 - 4ax - 1 = 0$ . Theo định lý Viet, ta có

$$x_1 + x_2 = -\left(-\frac{4a}{2}\right) = 2a \text{ và } x_1x_2 = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Ta có  $T = |x_1 - x_2| \Leftrightarrow T^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \quad (2)$ .

Từ (1) và (2) suy ra  $T^2 = (2a)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4a^2 + 2 \Rightarrow T = \sqrt{4a^2 + 2} > 0$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 54.** Cho phương trình  $x^2 + px + q = 0$  trong đó  $p > 0, q > 0$ . Nếu hiệu các nghiệm của phương trình bằng 1. Khi đó  $p$  bằng

- A.  $\sqrt{4q + 1}$ .                      B.  $\sqrt{4q - 1}$ .                      C.  $-\sqrt{4q + 1}$ .                      D.  $q + 1$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của phương trình  $x^2 + px + q = 0$ .

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p < 0 \\ x_1x_2 = q > 0 \end{cases}$  (vì  $p, q > 0$ ). (1)

Từ giả thiết, ta có  $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$ . (2)

Từ (1), (2) suy ra  $p^2 - 4q = 1 \Leftrightarrow p^2 = 4q + 1 \Leftrightarrow p = \sqrt{4q + 1} > 0$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 55.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị nguyên của  $m$  sao cho biểu thức  $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$  có giá trị nguyên.

- A.  $m = -2$ .                      B.  $m = -1$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m - 3$ . Để phương trình có hai nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}$ . Theo định

lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$ . Khi đó

$$P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1} = \frac{2m - 1}{4} + \frac{5}{4(2m + 1)} \Rightarrow 4P = 2m - 1 + \frac{5}{2m + 1}.$$

Do  $m \geq \frac{3}{4}$  nên  $2m + 1 \geq \frac{5}{2}$ .

Để  $P \in \mathbb{Z}$  thì ta phải có  $(2m + 1)$  là ước của 5, suy ra  $2m + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 2$ .

Thử lại với  $m = 2$ , ta được  $P = 1$ : thỏa mãn

Chọn đáp án **D** □

**Câu 56.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để biểu thức  $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $m = \frac{1}{2}$ .                      B.  $m = 1$ .                      C.  $m = 2$ .                      D.  $m = -12$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$ .

Phương trình có hai nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$ . (\*)

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$ . Khi đó

$$P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = m^2 + 2 - 2(2m + 2) - 6 = (m - 2)^2 - 12 \geq -12.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m = 2$  thỏa (\*).

Chọn đáp án **C** □

**Câu 57.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$ .

- A.  $P_{\max} = \frac{1}{2}$ .                      B.  $P_{\max} = 2$ .                      C.  $P_{\max} = \frac{25}{4}$ .                      D.  $P_{\max} = \frac{9}{4}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 2) = -m^2 + 4$ .

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' = 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ . (\*)

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = \frac{m^2 - 2}{2} \end{cases}$ . Khi đó

$$\begin{aligned} A &= |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4| = |m^2 - m - 6| \\ &= |(m + 2)(m - 3)| = -(m + 2)(m - 3) \\ &= -m^2 + m + 6 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}; \quad (\text{do } -2 \leq m \leq 2). \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m = \frac{1}{2}$  thỏa (\*).

Chọn đáp án **C** □

**Câu 58.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = |x_1 + x_2 + x_1x_2|$

- A.  $P_{\max} = \frac{1}{4}$ .      B.  $P_{\max} = 1$ .      C.  $P_{\max} = \frac{9}{8}$ .      D.  $P_{\max} = \frac{9}{16}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = (m - 1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m = m(1 - m)$ .

Phương trình có hai nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$  (\*).

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$ . Khi đó

$$P = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2| = |2(m - 1) + 2m^2 - 3m + 1| = 2 \left| m^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \right| = 2 \left| \left( m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right|$$

Vì  $0 \leq m \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \left( m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{16} \Rightarrow \left( m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \leq 0$ .

Do đó  $P = 2 \left| \left( m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right| = 2 \left( \frac{9}{16} - \left( m - \frac{1}{4} \right)^2 \right) = \frac{9}{8} - 2 \left( m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{8}$ .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m = \frac{1}{4}$ : thỏa mãn (\*).

Chọn đáp án **C** □

**Câu 59.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để biểu thức  $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $m = \frac{1}{2}$ .      B.  $m = 1$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0$ , với mọi  $m$ . Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$ . Suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2.$$

Khi đó  $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$ . Suy ra

$$P - 1 = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} - 1 = \frac{2m + 1 - m^2 - 2}{m^2 + 2} = -\frac{(m - 1)^2}{m^2 + 2} \leq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó  $P \leq 1, \forall m \in \mathbb{R}$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m = 1$

Chọn đáp án **B** □

**Câu 60.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$ .

- A.  $P_{\min} = -2$ .      B.  $P_{\min} = -\frac{1}{2}$ .      C.  $P_{\min} = 0$ .      D.  $P_{\min} = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0$ , với mọi  $m$ . Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$ .

Suy ra  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2$ . Khi đó

$$P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$$

Suy ra  $P + \frac{1}{2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} + \frac{1}{2} = \frac{2(2m + 1) + m^2 + 2}{2(m^2 + 2)} = \frac{(m + 2)^2}{2(m^2 + 2)} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ .

Suy ra  $P \geq -\frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{R}$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m = -2$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 61.** Nếu  $m \neq 0$  và  $n \neq 0$  là các nghiệm của phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  thì tổng  $m + n$  bằng

- A.  $-\frac{1}{2}$ .                      B.  $-1$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $1$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} m + n = -m \\ m.n = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2m \\ m = 1 \end{cases} (n \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = -1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 62.** Giả sử các nghiệm của phương trình  $x^2 + px + q = 0$  là lập phương các nghiệm của phương trình  $x^2 + mx + n = 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $p + q = m^3$ .                      B.  $p = m^3 + 3mn$ .                      C.  $p = m^3 - 3mn$ .                      D.  $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{p}{q}$ .

**Lời giải.**

Giả sử phương trình  $x^2 + px + q = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_3, x_4$ . Theo bài ra, ta có

$$\begin{cases} x_1 = x_3^3 \\ x_2 = x_4^3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_3^3 + x_4^3 = (x_3 + x_4) [(x_3 + x_4)^2 - 3x_3x_4]. \quad (*)$$

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_3 + x_4 = -m \\ x_3x_4 = n \end{cases}$ , thay vào (\*), ta được  $-p = -m(m^2 - 3n)$ .

Vậy  $p = m(m^2 - 3n) = m^3 - 3mn$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 63.** Cho hai phương trình  $x^2 - 2mx + 1 = 0$  và  $x^2 - 2x + m = 0$ . Có hai giá trị của  $m$  để phương trình này có một nghiệm là nghịch đảo của một nghiệm của phương trình kia. Tính tổng  $S$  của hai giá trị  $m$  đó.

- A.  $S = -\frac{5}{4}$ .                      B.  $S = 1$ .                      C.  $S = -\frac{1}{4}$ .                      D.  $S = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $x_0$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 2mx + 1 = 0$ . Điều kiện:  $x_0 \neq 0$ . Suy ra  $\frac{1}{x_0}$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x + m = 0$ .

Khi đó, ta có hệ  $\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + 1 = 0 \\ \left(\frac{1}{x_0}\right)^2 - \frac{2}{x_0} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + 1 = 0 & (1) \\ mx_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2), ta được  $x_0^2(1 - m) - 2x_0(m - 1) = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(x_0^2 + 2x_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x_0 = -2 \end{cases}$ .

Với  $x_0 = -2$  thay vào (1), ta được  $(-2)^2 - 2m \cdot (-2) + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{4}$ .

Vậy tổng tất cả giá trị của  $m$  cần tìm là  $m_1 + m_2 = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 64.** Cho hai phương trình  $x^2 - mx + 2 = 0$  và  $x^2 + 2x - m = 0$ . Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để một nghiệm của phương trình này và một nghiệm của phương trình kia có tổng là 3?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

Gọi  $x_0$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 - mx + 2 = 0$ . Suy ra  $3 - x_0$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 + 2x - m = 0$ .

Khi đó, ta có hệ  $\begin{cases} x_0^2 - mx_0 + 2 = 0 \\ (3 - x_0)^2 + 2(3 - x_0) - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - mx_0 + 2 = 0 & (1) \\ m = x_0^2 - 8x_0 + 15 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được  $x_0^2 - (x_0^2 - 8x_0 + 15)x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$  Có 3 giá trị của  $m$  cần tìm

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 65.** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực khác 0. Biết  $c$  và  $d$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  và  $a, b$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + cx + d = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $S = a + b + c + d$ .

- A.  $S = -2$ .                      B.  $S = 0$ .                      C.  $S = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $S = 2$ .

**Lời giải.**

Vì  $c, d$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  suy ra  $c + d = -a$ .

Vì  $a, b$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + cx + d = 0$  suy ra  $a + b = -c$ .

Khi đó, ta có hệ  $\begin{cases} c + d = -a \\ a + b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -d \\ a + c = -b \end{cases} \Leftrightarrow b = d$ .

Lại có  $\begin{cases} c^2 + ac + b = 0 \\ a^2 + ca + d = 0 \end{cases} \Rightarrow c^2 - a^2 + b - d = 0 \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c \end{cases}$ .

Với  $a = -c$  thì từ  $c + d = -a \Rightarrow d = 0$ : mâu thuẫn giả thiết.

Với  $a = c$  thì từ  $c + d = -a \Rightarrow d = -2c$  và từ  $a + b = -c \Rightarrow b = -2c$ .

Ta có  $c^2 + ac + b = 0 \Rightarrow 2c^2 - 2c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \text{ (loại)} \\ c = 1 \text{ (nhận)} \end{cases}$ .

Khi đó  $S = a + b + c + d = c - 2c + c - 2c = -2c = -2 \cdot 1 = -2$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 66.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$  là

- A.  $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$ .                      B.  $S = \{1\}$ .                      C.  $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ .                      D.  $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 1$ . Khi đó  $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1} \Leftrightarrow 2x = \frac{3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$  thỏa mãn điều kiện  $\Rightarrow S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 67.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x-2}} = -\frac{4}{\sqrt{x-2}}$  là:

- A.  $S = \{1; 4\}$ .                      B.  $S = \{1\}$ .                      C.  $S = \emptyset$ .                      D.  $S = \{4\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x > 2$ . Khi đó

$$\frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x-2}} = -\frac{4}{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$\Rightarrow S = \{4\}$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 68.** Phương trình  $\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

$$\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \neq 0 \\ \frac{2x(x-5)}{x(x-5)} = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \neq 0 \\ 2 = x - 3 \end{cases} \Rightarrow S = \emptyset.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 69.** Gọi  $x_0$  là nghiệm của phương trình  $1 - \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $x_0 \in (-5; -3)$ .                      B.  $x_0 \in [-3; -1]$ .                      C.  $x_0 \in (-1; 4)$ .                      D.  $x_0 \in [4; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{2-x} &= \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)} \\ \Leftrightarrow (2-x)(x+3) - 2(x+3) &= 10(2-x) - 50 \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 70.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\frac{(m^2 + 1)x - 1}{x + 1} = 1$  trong trường hợp  $m \neq 0$  là

- A.  $S = \left\{ \frac{m+1}{m^2} \right\}$ .      B.  $S = \emptyset$ .      C.  $S = \mathbb{R}$ .      D.  $S = \left\{ \frac{2}{m^2} \right\}$ .

**Lời giải.**

$$\frac{(m^2 + 1)x - 1}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (m^2 + 1)x - 1 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{m^2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 71.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\frac{(2m^2 + 3)x + 6m}{x} = 3$  khi  $m \neq 0$  là

- A.  $S = \emptyset$ .      B.  $S = \left\{ -\frac{3}{m} \right\}$ .      C.  $S = \mathbb{R}$ .      D.  $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lời giải.**

$$\frac{(2m^2 + 3)x + 6m}{x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (2m^2 + 3)x + 6m = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{m}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 72.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1$  vô nghiệm?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Lời giải.**

$$\frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ mx = -3 \quad (*) \end{cases}$$

— với  $m = 0$  thì (\*) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

— với  $m \neq 0$  thì phương trình đã cho vô nghiệm khi (\*) có nghiệm  $x = \pm 1 \Leftrightarrow m = \pm 3$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 73.** Phương trình  $\frac{2mx - 1}{x + 1} = 3$  có nghiệm duy nhất khi

- A.  $m \neq \frac{3}{2}$ .      B.  $m \neq 0$ .      C.  $m \neq 0$  và  $m \neq \frac{3}{2}$ .      D.  $m \neq -\frac{1}{2}$  và  $m \neq \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\frac{2mx - 1}{x + 1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (2m - 3)x = 4. \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi  $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 \neq 0 \\ x = \frac{4}{2m - 3} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ m \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 74.** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-3; 5]$  để phương trình  $\frac{x - m}{x + 1} = \frac{x - 2}{x - 1}$  có nghiệm. Tổng các phần tử trong tập  $S$  bằng

A. -1.                      B. 8.                      C. 9.                      D. 10.

Lời giải.

$$\frac{x - m}{x + 1} = \frac{x - 2}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ mx = m + 2. \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm khi  $\begin{cases} m \neq 0 \\ x = 1 + \frac{2}{m} \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$ .

Vì  $m \in \mathbb{Z}, m \in [-3; 5]$  nên  $m \in S = \{-3; -2; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 75.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[1; 20]$  để phương trình  $\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{m}{4 - x^2} = \frac{x + 3}{x + 2}$  có nghiệm.

A. 4.                      B. 18.                      C. 19.                      D. 20.

Lời giải.

$$\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{m}{4 - x^2} = \frac{x + 3}{x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ 2x = -m - 8 \end{cases}$$

. Phương trình có nghiệm khi  $x = \frac{m}{2} - 4 \neq \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 12 \\ m \neq 4 \end{cases}$ . Suy ra có tất cả 18 số nguyên  $m$  thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 76.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $|3x - 2| = 3 - 2x$  là

A.  $S = \{-1; 1\}$ .                      B.  $S = \{-1\}$ .                      C.  $S = \{1\}$ .                      D.  $S = \{0\}$ .

Lời giải.

$$\begin{aligned} &|3x - 2| = 3 - 2x \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ |3x - 2|^2 = (3 - 2x)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 9x^2 - 12x + 4 = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 5x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow S = \{-1; 1\}$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 77.** Phương trình  $|2x - 4| - 2x + 4 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. Vô số.

Lời giải.

Phương trình  $\Leftrightarrow |2x - 4| = 2x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 2x - 4 = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ .

Do đó, phương trình có vô số nghiệm

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 78.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $|2x - 1| = x - 3$  là:

A.  $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$ .                      B.  $S = \emptyset$ .                      C.  $S = \left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$ .                      D.  $S = \{-2\}$ .

Lời giải.

Phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (2x - 1)^2 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

Vậy  $S = \emptyset$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 79.** Tổng các nghiệm của phương trình  $|x^2 + 5x + 4| = x + 4$  bằng

- A. -12.                      B. -6.                      C. 6.                      D. 12.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & |x^2 + 5x + 4| = x + 4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ (x^2 + 5x + 4)^2 = (x + 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (x^2 + 5x + 4)^2 - (x + 4)^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -4 \\ (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x^2 + 6x + 8 = 0 \\ x^2 + 4x = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x = -2, x = -4 \\ x = 0, x = -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 + (-2) + (-4) = -6.$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 80.** Gọi  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  là hai nghiệm của phương trình  $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17$ . Tính giá trị biểu thức  $P = x_1^2 + x_2$ .

- A.  $P = 16.$                       B.  $P = 58.$                       C.  $P = 28.$                       D.  $P = 22.$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & |x^2 - 4x - 5| = 4x - 17 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x - 17 \geq 0 \\ |x^2 - 4x - 5|^2 = (4x - 17)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ (x^2 - 4x - 5)^2 = (4x - 17)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 22) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 - 22 = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ \begin{cases} x = 2 \vee x = 6 \\ x = \pm\sqrt{22} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = \sqrt{22}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow P = (\sqrt{22})^2 + 6 = 28.$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 81.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $|x - 2| = |3x - 5|$  là

- A.  $S = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{7}{4} \right\}.$                       B.  $S = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{7}{4} \right\}.$                       C.  $S = \left\{ -\frac{7}{4}; -\frac{3}{2} \right\}.$                       D.  $S = \left\{ -\frac{7}{4}; \frac{3}{2} \right\}.$

**Lời giải.**

Phương trình  $\Leftrightarrow |x - 2|^2 = |3x - 5|^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9x^2 - 30x + 25$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 26x + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{7}{4} \right\}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 82.** Tổng các nghiệm của phương trình  $|x + 2| = 2|x - 2|$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}.$                       B.  $\frac{2}{3}.$                       C. 6.                      D.  $\frac{20}{3}.$

**Lời giải.**



Phương trình  $\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4(x - 2)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0$ . Do đó, tổng các nghiệm của phương trình bằng  $-\frac{b}{a} = \frac{20}{3}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 83.** Phương trình  $|2x + 1| = |x^2 - 3x - 4|$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.    B. 1.    C. 2.    D. 4.

**Lời giải.**

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x^2 - 3x - 4 \\ 2x + 1 = -(x^2 - 3x - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 84.** Phương trình  $|2x - 4| + |x - 1| = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.    B. 1.    C. 2.    D. Vô số.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} |2x - 4| \geq 0 \\ |x - 1| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x - 4| + |x - 1| \geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} |2x - 4| = 0 \\ |x - 1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ . Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 85.** Tổng các nghiệm của phương trình  $|2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| = 0$  bằng

- A. 6.    B.  $\frac{5}{2}$ .    C.  $\frac{7}{2}$ .    D.  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} |2x - 5| \geq 0 \\ |2x^2 - 7x + 5| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| \geq 0.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2x - 5 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 86.** Phương trình  $(x + 1)^2 - 3|x + 1| + 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.    B. 1.    C. 2.    D. 4.

**Lời giải.**

Đặt  $t = |x + 1|, t \geq 0$ . Phương trình trở thành  $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$  hoặc  $t = 2$ .

- Với  $t = 1$  ta có  $|x + 1| = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = -2$  hoặc  $x = 0$ .
- Với  $t = 2$  ta có  $|x + 1| = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow x = -3$  hoặc  $x = 1$ .

Vậy phương trình có bốn nghiệm là  $x = -3, x = -2, x = 0, x = 1$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 87.** Tổng các nghiệm của phương trình  $4x(x - 1) = |2x - 1| + 1$  bằng:

- A. 0.    B. 1.    C. 2.    D. -2.

**Lời giải.**

$$4x(x - 1) = |2x - 1| + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - |2x - 1| - 1 = 0.$$

Đặt  $t = |2x - 1|, t \geq 0$ . Suy ra  $t^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x = t^2 - 1$ . Phương trình trở thành

$$t^2 - 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ ta có } |2x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 88.** Với giá trị nào của  $a$  thì phương trình  $3|x| + 2ax = -1$  có nghiệm duy nhất?

- A.  $a > \frac{3}{2}$ .                      B.  $a < \frac{-3}{2}$ .                      C.  $\begin{cases} a \neq \frac{3}{2} \\ a \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$ .                      D.  $\begin{cases} a < \frac{-3}{2} \\ a > \frac{3}{2} \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Để thấy,  $x = 0$  không là nghiệm của phương trình đã cho.

— Xét  $x \in (-\infty; 0)$ : Phương trình trở thành  $-3x + 2ax = -1 \Leftrightarrow (2a - 3)x = -11$ .

Phương trình 1 có nghiệm duy nhất khi  $2a - 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$ . Khi đó, nghiệm của phương trình là  $x = \frac{-1}{2a - 3}$ . Mà  $x < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2a - 3} < 0 \Leftrightarrow 2a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$ .

— Xét  $x \in (0; +\infty)$ : Phương trình trở thành  $3x + 2ax = -1 \Leftrightarrow (2a + 3)x = -12$ . Phương trình 2 có nghiệm duy nhất khi  $2a + 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{3}{2}$ . Khi đó, nghiệm của phương trình là  $x = \frac{-1}{2a + 3}$ . Mà  $x > 0 \Rightarrow \frac{-1}{2a + 3} > 0 \Leftrightarrow 2a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{3}{2}$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 89.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $|x| + 1 = x^2 + m$  có nghiệm duy nhất.

- A.  $m = 0$ .                      B.  $m = 1$ .                      C.  $m = -1$ .                      D. Không có  $m$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $\Leftrightarrow |x|^2 - |x| + (m - 1) = 0$ .

Đặt  $t = |x|, t \geq 0$ , phương trình trở thành  $t^2 - t + m - 1 = 0 (*)$ .

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow (*)$  có nghiệm duy nhất  $t = 0$ .

Với  $t = 0$  là nghiệm của phương trình  $(*) \Rightarrow 0^2 - 0 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ .

Thử lại, thay  $m = 1$  vào phương trình  $(*)$ , thấy phương trình có 2 nghiệm  $t = 0$  và  $t = 1$ : Không thỏa mãn

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 90.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-5; 5]$  để phương trình  $|mx + 2x - 1| = |x - 1|$  có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 8.                      B. 9.                      C. 10.                      D. 11.

**Lời giải.**

$$|mx + 2x - 1| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)x = 0 & (1) \\ (m + 3)x = 2 & (2) \end{cases}$$

Xét (1), ta có

—  $m = -1$  thì phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

—  $m \neq -1$  thì phương trình có nghiệm  $x = 0$ .

Xét (2), ta có

—  $m = -3$  thì phương trình vô nghiệm.

—  $m \neq -3$  thì phương trình có nghiệm  $x = \frac{2}{m + 3}$ .

Vì  $\frac{2}{m + 3} \neq 0, \forall m \neq -3$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là  $x = 0, x = \frac{2}{m + 3}$  khi  $m \neq -1$  và  $m \neq -3$ .

Mà  $m \in [-5; 5]$  và  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$  có 9 giá trị  $m$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 91.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\sqrt{2x - 3} = x - 3$  là:

- A.  $S = \{6; 2\}$ .                      B.  $S = \{2\}$ .                      C.  $S = \{6\}$ .                      D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Cách 1:  $\sqrt{2x - 3} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x - 3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \Leftrightarrow x = 6. \\ x = 6 \end{cases} \end{cases}$

Cách 2: Thử đáp án. Thay  $x = 2$  vào phương trình ta được  $\sqrt{2 \cdot 2 - 3} = 2 - 3$  (sai).

Thay  $x = 6$  vào phương trình ta được  $\sqrt{2 \cdot 6 - 3} = 6 - 3$  (đúng).

Vậy  $x = 6$  là nghiệm của phương trình

Chọn đáp án **C** □

**Câu 92.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$  là:

- A.  $S = \{0; 2\}$ .      B.  $S = \{2\}$ .      C.  $S = \{0\}$ .      D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Cách 1:  $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ .

Cách 2: Thử đáp án. Thay  $x = 0$  vào phương trình ta được  $\sqrt{0^2 - 4} = 0 - 2$  (sai).

Thay  $x = 2$  vào phương trình ta được  $\sqrt{2^2 - 4} = 2 - 2$  (đúng).

Vậy  $x = 2$  là nghiệm của phương trình

Chọn đáp án **B** □

**Câu 93.** Tổng các nghiệm của phương trình  $(x - 2)\sqrt{2x + 7} = x^2 - 4$  bằng:

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $2x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} (x - 2)\sqrt{2x + 7} &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow (x - 2)\sqrt{2x + 7} &= (x - 2)(x + 2) \\ \Leftrightarrow (x - 2)[\sqrt{2x + 7} - (x + 2)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \sqrt{2x + 7} - (x + 2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{2x + 7} = x + 2 \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có  $\sqrt{2x + 7} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x + 7 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 1, x = 2$  nên tổng hai nghiệm của phương trình là  $1 + 2 = 3$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 94.** Phương trình  $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 5.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ . Ta có

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5. \end{cases}$$

So với điều kiện  $x > 2$  thì  $x = 5$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 95.** Phương trình  $\sqrt{2 - x} + \frac{4}{\sqrt{2 - x} + 3} = 2$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - x} + \frac{4}{\sqrt{2 - x} + 3} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2 - x}(\sqrt{2 - x} + 3) + 4 &= 2(\sqrt{2 - x} + 3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \sqrt{2 - x} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Vậy  $x = 1$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **(B)**

□

**Câu 96.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x-1} + m = 0$  có đúng bốn nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \frac{x^2}{x-1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - tx + t = 0 (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t + t \neq 0 \\ \Delta_t = t^2 - 4t \end{cases}$$

Với mỗi  $t$  thỏa mãn  $\Delta_t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t > 4 \end{cases}$  thì (\*) có hai nghiệm  $x$  phân biệt. Mặt khác phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + 2t + m = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ \begin{cases} t = -1 - \sqrt{1-m} < 0 (**). \\ t = -1 + \sqrt{1-m} \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi (\*\*) có hai nghiệm  $t$  phân biệt thỏa mãn điều kiện  $\Delta_t > 0$  hay

$$\begin{cases} m < 1 \\ \begin{cases} -1 + \sqrt{1-m} < 0 \\ -1 + \sqrt{1-m} > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \begin{cases} 1 - m < 1 \\ 1 - m > 25 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < -24. \end{cases}$$

□

**Câu 97.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$  có nghiệm.

A.  $m \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$ .

B.  $m \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .

C.  $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$ .

D.  $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \rightarrow \begin{cases} |t| \geq 2 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}. \text{ Khi đó phương trình đã cho trở thành } f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0 (*)$$

(Phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt  $t_1 < 0 < t_2$  do  $ac < 0$ ). Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (\*) có ít nhất một nghiệm  $t$  thỏa mãn  $|t| \geq 2$ , hay ít nhất một trong hai số  $2; -2$  phải

$$\text{nằm giữa hai nghiệm } t_1, t_2; \text{ hay } \begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m \leq 0 \\ 3 + 4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m \leq -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

**Câu 98.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + \frac{4}{x^2} - 4\left(x - \frac{2}{x}\right) + m - 1 = 0$  có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

A.  $m < -8$ .

B.  $-8 < m < 1$ .

C.  $0 < m < 1$ .

D.  $m \leq -8$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } x - \frac{2}{x} = t \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 - tx - 2 = 0 (*) \\ x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4. \end{cases}. \text{ Phương trình } (*) \text{ có } ac < 0 \text{ nên có hai nghiệm phân}$$

biệt trái dấu với mọi  $t \in \mathbb{R}$ . Do đó (\*) nếu có nghiệm lớn hơn 1 thì có duy nhất một nghiệm như thế  $\Leftrightarrow x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow g(1) < 0 \Leftrightarrow -t - 1 < 0 \Leftrightarrow t > -1$ .

Mặt khác phương trình đã cho trở thành  $f(t) = t^2 - 4t + m + 3 = 0 (**)$ . Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm  $x_1, x_2$  lớn hơn 1 khi và chỉ khi (\*\*) có hai nghiệm phân biệt  $t_1, t_2$  lớn hơn  $-1$ , hay

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - m - 3 > 0 \\ (t_1 + 1)(t_2 + 1) = t_1 t_2 + (t_1 + t_2) + 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > -8. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 99.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(x^2 + 2x + 4)^2 2m(x^2 + 2x + 4) + 4m - 1 = 0$  có đúng hai nghiệm.

A.  $m \in (3; 4)$ .

B.  $m \in (-\infty; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$ .

C.  $m \in (4; +\infty) \cup \{2 + \sqrt{3}\}$ .

D.  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(x^2 + 2x + 4)^2 2m(x^2 + 2x + 4) + 4m - 1 = 0$ . (1)

Đặt  $t = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 - t = 0$ . (2)

Phương trình (1) trở thành  $g(t) = t^2 - 2mt + 4m - 1 = 0$ . (3)

Phương trình 2 có nghiệm khi  $\Delta'_{(2)} = t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3$ . Khi  $t = 3$  thì phương trình 2 có nghiệm kép  $x = -1$ . Phương trình (1) có đúng hai nghiệm khi:

TH1: Phương trình (3) có nghiệm kép lớn hơn 3. Phương trình (3) có nghiệm kép khi  $\Delta'_{(3)} = m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}$ .

— Với  $m = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$  Phương trình 3 có nghiệm  $t = 2 - \sqrt{3} < 3$ : Không thỏa mãn.

— Với  $m = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$  Phương trình 3 có nghiệm  $t = 2 + \sqrt{3} > 3$ : Thỏa mãn.

TH2: Phương trình (3) có 2 nghiệm  $t_1, t_2$  thỏa mãn  $t_1 < 3 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4m + 1 > 0 \\ g(3) = -2m + 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - \sqrt{3} \\ m > 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow m > 4. \\ m > 4 \end{cases}$$

Hợp hai trường hợp ta được  $m \in (4; +\infty) \cup \{2 + \sqrt{3}\}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 100.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + 2mx + 2m|x + m| + m^2 + 3 - 2m = 0$  có nghiệm.

A.  $m \in (\infty; -3] \cup [1; +\infty)$ .

B.  $m \in (\infty; -3] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

C.  $m \in [1; +\infty)$ .

D.  $m \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & x^2 + 2mx + 2m|x + m| + m^2 + 3 - 2m = 0 \\ \Leftrightarrow & (|x + m| + m)^2 = m^2 + 2m - 3 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \geq 0 \\ \left[ \begin{aligned} |x + m| &= -\sqrt{m^2 + 2m - 3} - m(1) \\ |x + m| &= \sqrt{m^2 + 2m - 3} - m(2) \end{aligned} \right. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có  $m^2 + 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$ .

— Nếu  $m \leq -3$ , thì  $\sqrt{m^2 + 2m - 3} - m \geq 0$ , suy ra (2) có nghiệm, do đó phương trình đã cho có nghiệm.

— Nếu  $m \geq 1$  thì (1) vô nghiệm, do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm  
 $\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 3} - m \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \geq m^2 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$ .

Vậy  $m \in (\infty; -3] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 101.** Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình  $\sqrt{2x - 1} = x - 2$  bằng

A. 6.

B. 1.

C. 5.

D. 2.

**Lời giải.**

$$\sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1; x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 5.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 102.** Giả sử  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$ . Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2$  bằng

- A.  $\frac{95}{9}$ .                      B. 11.                      C. 7.                      D.  $-\frac{1}{9}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi và chỉ khi

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{3}.$$

Áp dụng hệ thức vi-ét ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1x_2 = m^2 + 1. \end{cases}$

Khi đó  $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4(m+2) - (m^2 + 1) = -m^2 + 4m + 7$ .

Xét hàm số  $P(m) = -m^2 + 4m + 7, \forall m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ . Ta có  $P'(m) = -2m + 4 \geq 0, \forall m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ .

Suy ra hàm số  $P(m)$  đồng biến trên  $\left[0; \frac{4}{3}\right]$ . Do đó  $\max_{x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]} P(m) = P\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{95}{9}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 103.** Số nghiệm của phương trình  $(x+3)(x - \sqrt{4-x^2}) = 0$  là

- A. 2.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 0.

**Lời giải.**

$$(x+3)(x - \sqrt{4-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \\ \sqrt{4-x^2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = \sqrt{2} & (\text{nhận}) \\ x = -\sqrt{2} & (\text{loại}). \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 104.** Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình  $\sqrt{2x-1} = x-2$  bằng

- A. 6.                      B. 1.                      C. 5.                      D. 2.

**Lời giải.**

$$\text{Phương trình } \sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 105.** Giả sử  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$ . Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2$  bằng

- A.  $\frac{95}{9}$ .                      B. 11.                      C. 7.                      D.  $-\frac{1}{9}$ .

**Lời giải.**

Phương trình bậc hai có nghiệm  $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ .

Theo hệ thức Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1x_2 = m^2 + 1. \end{cases}$

Khi đó  $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4(m+2) - (m^2 + 1) = -m^2 + 4m + 7$ .

Xét hàm số  $f(m) = -m^2 + 4m + 7$  trên  $\left[0; \frac{4}{3}\right]$ . Bảng biến thiên hàm số  $f(m)$  trên  $\left[0; \frac{4}{3}\right]$ :

$x$	0	$\frac{4}{3}$
$f(m)$	7	$\frac{95}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của  $P$  bằng  $\max_{\left[0; \frac{4}{3}\right]} f(m) = \frac{95}{9}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 106.** Số nghiệm của phương trình  $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$  là

- A. 0.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện của phương trình:  $x \geq 2$ .

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \sqrt{x - 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x = 2$  và  $x = 3$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 107.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + mx - m + 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu là

- A.  $[1; +\infty)$ .                      B.  $(1; +\infty)$ .                      C.  $(1; 10)$ .                      D.  $(-2 + \sqrt{8}; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 + mx - m + 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow -m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 108.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để bất phương trình  $2|x - m| + x^2 + 2 > 2mx$  thỏa mãn với mọi  $x$ .

- A.  $m > -\sqrt{2}$ .                      B. Không tồn tại  $m$ .                      C.  $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ .                      D.  $m < \sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Bất phương trình tương đương với

$$(x - m)^2 + 2|x - m| + 1 > m^2 - 1 \Leftrightarrow (|x - m| + 1)^2 > m^2 - 1.$$

Nên để bất phương trình thỏa mãn với mọi  $x$  thì

$$m^2 - 1 < \min(|x - m| + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 109.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $2x^2 - 4mx + 2m^2 + m + 1 = 0$  có nghiệm.

- A.  $m < -1$ .                      B.  $m \leq -1$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m > 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $2x^2 - 4mx + 2m^2 + m + 1 = 0$  có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 2(2m^2 + m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 110.** Phương trình  $\sqrt{x^2 + 481} - 3\sqrt[4]{x^2 + 481} = 10$  có hai nghiệm  $\alpha, \beta$ . Khi đó tổng  $S = \alpha + \beta$  thuộc đoạn nào sau đây?

- A.  $S \in [-5; -1]$ .                      B.  $S \in [-10; -6]$ .                      C.  $S \in [2; 5]$ .                      D.  $S \in [-1; 1]$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt[4]{x^2 + 481}$ ,  $t \geq 0$ . Phương trình được viết lại thành

$$t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 & \text{(nhận)} \\ t = -2 & \text{(loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 5.$$

Vậy ta có

$$\sqrt[4]{x^2 + 481} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 481 = 625 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Suy ra tổng  $S = \alpha + \beta = -2 + 2 = 0 \in [-1; 1]$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 111.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt{x^2 - x - m} = x - 1$  có nghiệm là

- A.  $[-\frac{1}{4}; +\infty)$ .      B.  $[0; +\infty)$ .      C.  $(0; +\infty)$ .      D.  $[1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{x^2 - x - m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = m + 1. \end{cases}$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $m + 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 0$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 112.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + mx + 4 = 0$  có nghiệm.

- A.  $-4 \leq m \leq 4$ .      B.  $m \leq -4$  hoặc  $m \geq 4$ .  
C.  $m \leq -2$  hoặc  $m \geq 2$ .      D.  $-2 \leq m \leq 2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta = m^2 - 16$ . Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 113.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$  có đồ thị là  $(C_m)$ . Với giá trị nào của tham số  $m$  thì đường thẳng  $d: y = 2mx - 4m + 3$  cắt  $(C_m)$  tại ba điểm phân biệt?

- A.  $m \in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{9}; +\infty) \setminus \{\frac{9}{8}\}$ .      B.  $m \in (0; \frac{4}{9})$ .  
C.  $m \in (\frac{4}{9}; +\infty)$ .      D. Không tồn tại  $m$ .

**Lời giải.**

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình

$$\begin{aligned} x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1 &= 2mx - 4m + 3 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - (3m - 2)x - 2m + 1) &= 0 \end{aligned}$$

có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình  $x^2 - (3m - 2)x - 2m + 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khác 2. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 2^2 - 2(3m - 2) - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 4m > 0 \\ 9 - 8m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{9} \\ m \neq \frac{9}{8}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 114.** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = x^2 - 2x + 3$  là

- A. 2.      B. 3.      C. 1.      D. 0.

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 2x + 5} > 0$ . Ta được phương trình  $t = t^2 - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{loại}) \\ t = 2 & (\text{thỏa mãn}). \end{cases}$

Do đó  $x^2 - 2x + 5 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ . Vậy phương trình có một nghiệm  $x = 1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 115.** Số nghiệm của phương trình  $(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$  là

- A. 2.      B. 3.      C. 0.      D. 1.

**Lời giải.**



Ta có

$$\begin{aligned} & (x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12 \\ \Leftrightarrow & (x+3)\sqrt{10-x^2} = (x+3)(x-4) \\ \Leftrightarrow & (x+3)(\sqrt{10-x^2} - (x-4)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 10-x^2 \geq 0 \\ x = -3 \\ \sqrt{10-x^2} = x-4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì với  $x$  thỏa  $10-x^2 \geq 0$  thì  $x-4 < 0$  nên phương trình  $\sqrt{10-x^2} = x-4$  vô nghiệm.  
 Vậy  $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$  có nghiệm duy nhất  $x = -3$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 116.** Cho phương trình  $x^2 - 2x - 2|x - m| + 1 = 0$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt?

- A. 4.                                      B. 1.                                      C. 3.                                      D. 2.

**Lời giải.**

Ta biến đổi phương trình thành

$$\begin{aligned} (x-1)^2 = 2|x-m| & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ (x-1)^2 = -2(x-m) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 2m + 1 = 0. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Để phương trình ban đầu có 3 nghiệm thì xảy ra các khả năng sau. Một trong hai phương trình trên có nghiệm kép và phương trình còn lại có 2 nghiệm phân biệt khác nghiệm kép đó. Hoặc 2 phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt và có đúng một nghiệm chung. Ta xét cụ thể các trường hợp như sau:

**TH1:** Phương trình (1) có nghiệm kép. Tức là  $\Delta'_1 = 4 - 2m - 1 = 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ .

Thử lại ta thấy  $m = \frac{3}{2}$  thỏa mãn.

**TH2:** Phương trình (2) có nghiệm kép. Tức là  $\Delta'_2 = 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ .

Thử lại ta thấy với  $m = \frac{1}{2}$  thỏa mãn.

**TH3:** Hai phương trình có nghiệm chung. Cộng từng vế của 2 phương trình lại ta được

$$2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Khi đó  $m = 1$ . Thử lại ta thấy với  $m = 1$  thỏa mãn.

Vậy có 3 giá trị của  $m$  thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 117.** Phương trình  $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$  có nghiệm là  $a \pm \sqrt{b}$  thì  $2a - b$  bằng

- A. 2.                                      B. 1.                                      C. 3.                                      D. 4.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với:  $2(x^2 + x + 1) + 3(x-1) = 7\sqrt{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)}$ .

Điều kiện  $x \geq 1$ . Đặt  $u = \sqrt{x-1}$  và  $v = \sqrt{x^2 + x + 1}$  ( $u \geq 0, v > 0$ ).

Phương trình trở thành  $3u^2 + 2v^2 - 7uv = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 7 \cdot \frac{u}{v} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = 2$  hoặc  $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$ .

Xét trường hợp  $\frac{u}{v} = 2$  suy ra  $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 5 = 0$  (vô nghiệm).

Xét trường hợp  $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$  suy ra  $3\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}$ .

Vậy  $a = 4, b = 6$  nên  $2a - b = 2$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 118.** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình sau có nghiệm thực.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - (m^2 + m + 2)\left(x + \frac{1}{x}\right) + m^3 + 2m + 2 = 0.$$

A.  $m \geq 2$ .

B.  $0 \leq m \leq 2$ .

C.  $m \leq -2$ .

D.  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định là  $x \neq 0$ .

Đặt  $t = x + \frac{1}{x}$ , với  $|t| \geq 2$ . Khi đó  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ . Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - (m^2 + m + 2)t + m^3 + 2m = 0. \quad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm  $t$  thỏa mãn  $|t| \geq 2$ .  
Ta có

$$\begin{aligned} & t^2 - (m^2 + m + 2)t + m^3 + 2m = 0 \\ \Leftrightarrow & (t - m)(t - m^2 - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t - m = 0 \\ t - m^2 - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t = m \\ t = m^2 + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì  $m^2 + 2 \geq 2, \forall m \in \mathbb{R}$  nên phương trình (\*) có ít nhất một nghiệm  $t$  thỏa mãn  $|t| \geq 2$ .

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị thực của tham số  $m$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 119.** Phương trình  $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi nào?

A.  $-1 < m < 3$ .

B.  $-1 < m < 2$ .

C.  $-2 < m < 1$ .

D.  $1 < m < 2$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow (m + 1) \cdot (m - 2) < 0$ .

Giải ra được  $-1 < m < 2$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 120.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x - m} = 0$  có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } (x^2 - 5x + 4)\sqrt{x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x = m \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \\ x = m. \end{cases} \end{cases}$$

Do đó để phương trình đề cho có đúng hai nghiệm phân biệt thì  $1 \leq m < 4$ .

Vì  $m$  nguyên nên sẽ có 3 giá trị nguyên của  $m$  là  $\{1, 2, 3\}$  thỏa bài toán.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 121.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $3\sqrt{5 - x} + 3\sqrt{5x - 4} = 2x + 7$ .

A. 5.

B. 10.

C. 51.

D. 1.

**Lời giải.**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ 5x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq x \leq 5.$$

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{5 - x} - 6 + 3\sqrt{5x - 4} - 3 = 2(x - 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{9(1 - x)}{3\sqrt{5 - x} + 6} + \frac{45(x - 1)}{3\sqrt{5x - 4} + 3} = 2(x - 1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ \frac{-3}{\sqrt{5 - x} + 2} + \frac{15}{\sqrt{5x - 4} + 1} = 2 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow f(x) = \frac{15}{\sqrt{5x - 4} + 1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{5 - x} + 2} = g(x) \quad (**).$$

Ta thấy phương trình (\*\*) có nghiệm  $x = 4$ .

Mặt khác, trên  $\left(\frac{4}{5}; 5\right)$ , hàm số  $f(x)$  nghịch biến, hàm số  $g(x)$  đồng biến. Do đó,  $(**)$  có nghiệm duy nhất  $x = 4$ .

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là  $1 + 4 = 5$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 122.** Biết tập nghiệm của bất phương trình  $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$  có dạng  $[a; b)$ . Tính  $A = a + b$ .

- A. 12.                      B. 19.                      C. 16.                      D. 18.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14. \end{cases}$$

Phương trình có tập nghiệm là  $S = [5; 14)$ . Suy ra  $A = 5 + 14 = 19$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 123.** Cho  $f(x) = (m + 1)x^2 + (m^2 - 5m - 4)x - 8\sqrt{x + 1} - 3m^2 + 6m + 19$ . Tổng các giá trị của  $m$  để  $f(x) \geq 0, \forall x \in [-1; +\infty)$  bằng

- A. -3.                      B. 3.                      C. -1.                      D. 1.

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt{x + 1}$ , suy ra  $t \in [0; +\infty)$ .

Biến đổi biểu thức  $f(x)$ , ta được

$$\begin{aligned} f(t) &= (m + 1)t^4 + (m^2 - 7m - 6)t^2 - 8t - 4m^2 + 12m + 24 \\ &= (t - 2)[(m + 1)(t + 2)(t^2 + 4) + (m^2 - 7m - 6)(t + 2) - 8]. \end{aligned}$$

Đặt  $g(t) = (m + 1)(t + 2)(t^2 + 4) + (m^2 - 7m - 6)(t + 2) - 8$  với  $t \in [0; +\infty)$ .

Yêu cầu bài toán trở thành: Tìm tất cả các giá trị tham số  $m$  để  $g(t) = 0$  có nghiệm  $t = 2$  đơn hoặc nghiệm  $t = 2$  bội lẻ.

$$\text{Suy ra } g(2) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1. \end{cases}$$

— Khi  $m = 0$ , suy ra

$$g(t) = (t + 2)(t^2 + 4) - 6(t + 2) - 8 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t^2 + 4t + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Vậy  $m = 0$  thỏa mãn.

— Khi  $m = -1$ , suy ra  $g(t) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ . Vậy  $m = -1$  thỏa mãn, tổng các giá trị của  $m$  là  $-1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 124.** Cho phương trình  $x^3 + x^2 - (m + 1)x + 8 = (x - 3)\sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6}$ . Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của  $m$  và  $m \leq 10$  sao cho phương trình có nghiệm. Tính tổng  $T$  các phần tử của  $S$ .

- A.  $T = 10$ .                      B.  $T = 19$ .                      C.  $T = 9$ .                      D.  $T = 52$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x^3 + x^2 - mx + 6 \geq 0$ . Khi đó

$$\text{PT} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - mx + 6 - (x - 3)\sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6} - (x - 2) = 0.$$

Đặt  $t = \sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6}$ , với  $t \geq 0$ . Phương trình trở thành

$$t^2 - (x - 3)t - (x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = x - 2. \end{cases}$$

Với  $t = x - 2$ , ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6} = x - 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^3 + x^2 - mx + 6 = (x - 2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 + 2 = (m - 4)x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + \frac{2}{x} = m - 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x \geq 2$ , ta thấy  $m - 4 = x^2 + \frac{2}{x} = \left(x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}\right) - \frac{14}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} - \frac{14}{2} = 5$ .

Do đó  $m \geq 9 \Rightarrow S = \{9; 10\} \Rightarrow T = 19$ .

Chọn đáp án **B**

□

**Câu 125.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$  có nghiệm duy nhất. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc  $S$  bằng

- A.** 0.                              **B.** -6.                              **C.** 10.                              **D.** -1.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $0 \leq x \leq 1$ .

Ta có nhận xét nếu  $x_0 \in [0; 1]$  là nghiệm của phương trình thì  $1 - x_0$  cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì  $x_0 = 1 - x_0$  hay  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

Thay  $x = \frac{1}{2}$  vào phương trình ta được  $m = 0$  hoặc  $m = \pm 1$ .

— Với  $m = 0$ , ta có phương trình ban đầu trở thành  $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

— Với  $m = -1$ , ta có phương trình ban đầu trở thành  $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{1-x})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

— Với  $m = 1$ , ta có phương trình ban đầu trở thành  $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{1-x})^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; x = 0$ .

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là  $m = 0$  hoặc  $m = -1$ .

Chọn đáp án **D**

□

**Câu 126.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $|x^2 - 3x - 3 + m| = x + 1$  có 4 nghiệm phân biệt?

- A.** 1.                              **B.** 2.                              **C.** 3.                              **D.** 4.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |x^2 - 3x - 3 + m| = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 2 + m = 0 \\ x^2 - 4x - 4 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 = m \\ -x^2 + 4x + 4 = m \end{cases} \end{cases}$$

Số nghiệm là số điểm chung của  $d: y = m$  với hai đồ thị của hàm số  $y = -x^2 + 2x + 2$  và  $y = -x^2 + 4x + 4$  ứng với  $x \geq -1$ .

Vẽ  $(P): y = -x^2 + 2x + 2$  đỉnh  $I(1; 3)$ ;

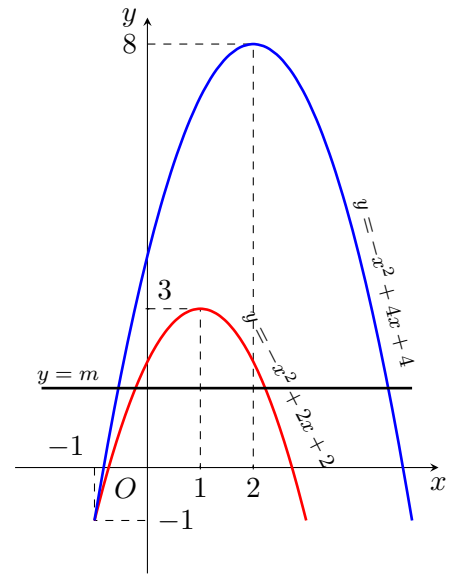
Vẽ  $(P'): y = -x^2 + 4x + 4$  đỉnh  $I'(2; 8)$ .

$(P)$  và  $(P')$  nối nhau tại điểm  $A(-1; -1)$ ;

Căn cứ vào hình vẽ, ta được  $-1 < m < 3$  thì  $(P)$  và  $(P')$  cắt nhau tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vì  $m$  nguyên nên  $m \in \{0; 1; 2\}$ .

Vậy có 3 giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án **C**

□

**Câu 127.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $|x^2 - 3x - 3 + m| = x + 1$  có 4 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |x^2 - 3x - 3 + m| = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 2 + m = 0 \\ x^2 - 4x - 4 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -x^2 + 2x + 2 = m \\ -x^2 + 4x + 4 = m \end{cases}$$

Số nghiệm là số điểm chung của  $d: y = m$  với hai đồ thị của hàm số  $y = -x^2 + 2x + 2$  và  $y = -x^2 + 4x + 4$  ứng với  $x \geq -1$ .

Vẽ  $(P): y = -x^2 + 2x + 2$  đỉnh  $I(1; 3)$ ;

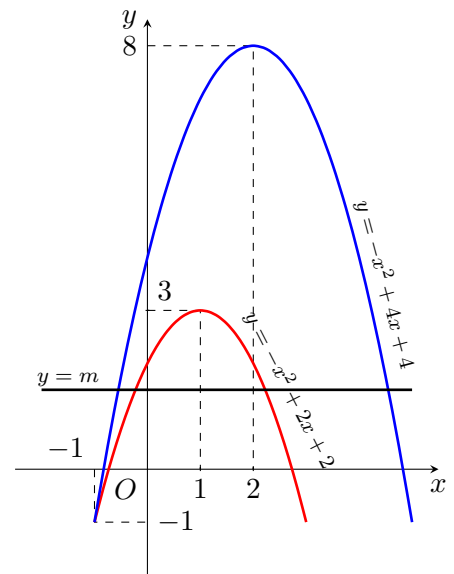
Vẽ  $(P'): y = -x^2 + 4x + 4$  đỉnh  $I'(2; 8)$ .

$(P)$  và  $(P')$  nối nhau tại điểm  $A(-1; -1)$ ;

Căn cứ vào hình vẽ, ta được  $-1 < m < 3$  thì  $(P)$  và  $(P')$  cắt nhau tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vì  $m$  nguyên nên  $m \in \{0; 1; 2\}$ .

Vậy có 3 giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án **C**

□

**Câu 128.** Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{3|x| + 1}{|x| + 2} - m = 0$  có hai nghiệm

thực phân biệt là khoảng  $(a; b)$ . Tính  $a + b$ .

A.  $\frac{7}{2}$ .

B.  $\frac{3}{2}$ .

C.  $\frac{5}{2}$ .

D.  $\frac{9}{2}$ .

**Lời giải.**

Nhận xét: Nếu phương trình có nghiệm  $x = a$  thì nó cũng có nghiệm  $x = -a$ .

Từ nhận xét trên, ta chỉ cần xét phương trình với  $x \geq 0$ .

Với  $x \geq 0$ , phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3x + 1}{x + 2} - m = 0 \Leftrightarrow (3 - m)x = 2m - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2m - 1}{3 - m} \quad (2)$$

(do  $m = 3$  không thỏa mãn).

Do đó để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) phải có đúng 1 nghiệm

dương  $\Leftrightarrow \frac{2m-1}{3-m} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 3$ .

Khi đó  $a = \frac{1}{2}, b = 3$ . Vậy  $a + b = \frac{7}{2}$ .

Nhận xét: Ta có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 129.** Số nghiệm của phương trình  $20x^3(1-x)^3 = \frac{4}{25}$  trên khoảng  $(0; 1)$  là  
**A.** 6.                                      **B.** 3.                                      **C.** 2.                                      **D.** 1.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 20x^3(1-x)^3 &= \frac{4}{25} \\ \Leftrightarrow (5x-5x^2)^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow -5x^2+5x-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \in (0; 1) \\ x = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \in (0; 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 130.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{2|x|-1}{|x|+2} = m$  có 2 nghiệm phân biệt.

**A.**  $m \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$ .                                      **B.**  $m \in \left(-2; \frac{1}{2}\right)$ .                                      **C.**  $m \in (0; 3)$ .                                      **D.**  $m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .

**Lời giải.**

$$\frac{2|x|-1}{|x|+2} = m \Leftrightarrow |x| = \frac{2m+1}{2-m} \text{ với } m \neq 2.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $\frac{2m+1}{2-m} > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 131.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho phương trình  $2\sqrt{x+1} = x+m$  có nghiệm thực.

**A.**  $m \leq 3$ .                                      **B.**  $m \leq 2$ .                                      **C.**  $m \geq 3$ .                                      **D.**  $m \geq 2$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$

$$2\sqrt{x+1} = x+m \Leftrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+m-1=0 \tag{3.1}$$

Đặt  $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$ , khi đó phương trình (3.1) trở thành

$$t^2 - 2t + m - 1 = 0 \tag{3.2}$$

Để (3.1) có nghiệm thực thì (3.2) phải có nghiệm thực không âm. Giả sử (3.2) có hai nghiệm phân biệt thì ta thấy tổng hai nghiệm  $S = 2$  luôn dương nên (3.2) không thể có hai nghiệm đều âm. Suy ra để (3.2) có nghiệm thực không âm thì  $\Delta' = 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 132.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(a; b)$  với  $a, b \in (0; 10)$  để phương trình  $(x^2+ax+b)^2+a(x^2+ax+b)+b = x$  có bốn nghiệm thực phân biệt.

**A.** 33.                                      **B.** 32.                                      **C.** 34.                                      **D.** 31.

**Lời giải.**

Đặt  $u = x^2 + ax + b$  ta có hệ phương trình  $\begin{cases} u^2 + au + b = x & (1) \\ u = x^2 + ax + b & (2). \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được  $\begin{cases} (u-x)(u+x+a+1) = 0 \\ u = x^2 + ax + b. \end{cases}$

$$\text{TH1: } \begin{cases} u = x \\ u = x^2 + ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ x^2 + (a-1)x + b = 0(3) \end{cases}, \Delta_1 = (a-1)^2 - 4b.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} u = -x - a - 1 \\ u = x^2 + ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -x - a - 1 \\ x^2 + (a+1)x + a + b + 1 = 0(4) \end{cases}, \Delta_2 = (a-1)^2 - 4b - 4.$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ (3) \text{ và } (4) \text{ không cùng nghiệm chung.} \end{cases}$

$$\bullet \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 > 4b \\ (a-1)^2 > 4b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2 > 4b + 4.$$

$$\bullet (3) \text{ và } (4) \text{ có 2 nghiệm phân biệt và có nghiệm chung } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + (a-1)x_0 + b = 0 \\ x_0^2 + (a+1)x_0 + a + b + 1 = 0 \\ (a-1)^2 > 4b + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{a+1}{2} \\ (a-1)^2 = 4b + 4 : \text{ không tồn tại } a \text{ và } b. \\ (a-1)^2 > 4b + 4 \end{cases}$$

Do đó, khi (3) và (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì chúng không có nghiệm chung.

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2 > 4b + 4$$

Xét  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  và  $a, b \in (0; 10)$ :

Với  $a \in \{1; 2; 3\}$  (loại).

Với  $a = 4$  thì  $b = 1$  (Có 1 cặp số  $(a; b)$  thoả mãn).

Với  $a = 5$  thì  $b \in \{1; 2\}$ , (Có 2 cặp số  $(a; b)$  thoả mãn).

Với  $a = 6$  thì  $b \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ , (Có 5 cặp số  $(a; b)$  thoả mãn).

Với  $a = 7$  thì  $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  (Có 7 cặp số  $(a; b)$  thoả mãn).

Với  $a = 8$  thì  $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  (Có 9 cặp số  $(a; b)$  thoả mãn).

Với  $a = 9$  thì  $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  (Có 9 cặp số  $(a; b)$  thoả mãn).

Vậy ta được tổng số các cặp  $(a; b)$  thoả mãn là:

$$1 + 2 + 5 + 7 + 9 + 9 = 33.$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 133.** Phương trình  $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện  $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ .

Ta có

$$(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (loại)} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = 3$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 134.** Phương trình  $\sqrt{(x-3)^2(5-3x)} + 2x = \sqrt{3x-5} + 4$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (x-3)^2(5-3x) \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Thế  $x = \frac{5}{3}$  vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{10}{3} = 4 \quad (\text{vô lý}).$$

Do đó, phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 135.** Gọi  $a, b$  là hai nghiệm của phương trình  $|3x - 2| = |x - 4|$  sao cho  $a < b$ . Tính  $M = 3a + 2b$ .

- A.  $M = 5$ .                      B.  $M = -5$ .                      C.  $M = 0$ .                      D.  $M = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $|3x - 2| = |x - 4| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = x - 4 \\ 3x - 2 = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = \frac{3}{2}$ . Do đó  $M = 0$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 136.** Phương trình  $x^4 - 7x^2 + 1 = 0$  có tích tất cả các nghiệm bằng

- A. 4.                      B. 7.                      C. 1.                      D. -1.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ). Ta có  $t^2 - 7t + 1 = 0$ . (1)

Vì  $\Delta = 45 > 0$  nên phương trình (1) có hai nghiệm  $t_1, t_2$  phân biệt thỏa mãn  $t_1 \cdot t_2 = 1$ . Do đó tích tất cả các nghiệm của phương trình  $x^4 - 7x^2 + 1 = 0$  bằng 1.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 137.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $|x^2 - 2x - 1| = |x^2 - 2|$  bằng

- A. 1.                      B.  $-\frac{3}{2}$ .                      C.  $\frac{3}{2}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $|x^2 - 2x - 1| = |x^2 - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2 \\ x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 2x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{cases}$ .

Do đó tổng tất cả các nghiệm bằng  $\frac{3}{2}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 138.** Có bao nhiêu giá trị  $m$  sao cho phương trình  $x^2 + 2mx + 4 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn đẳng thức  $x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = 4$ ?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 4.

**Lời giải.**

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta' = m^2 - 4 > 0$ .

Áp dụng Vi-ét ta có

$x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 4m^2 - 12 = 4 \Rightarrow m^2 = 4$  (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy không có giá trị nào của  $m$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 139.** Phương trình  $|(m^2 - 4)x + 2| = 2018$  vô nghiệm khi và chỉ khi

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m = -2$ .                      C.  $m = \pm 2$ .                      D.  $-2 < m < 2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $|(m^2 - 4)x + 2| = 2018 \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)x + 2 = 2018 \\ (m^2 - 4)x + 2 = -2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)x = 2016 & (1) \\ (m^2 - 4)x = -2020 & (2) \end{cases}$

Để phương trình  $|(m^2 - 4)x + 2| = 2018$  vô nghiệm thì phương trình (1) và phương trình (2) vô nghiệm  $\Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 140.** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{2 - x} = 1$  là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 0.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ .



Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= 1 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow 3x+1 = 3-x+2\sqrt{2-x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x-1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x = 4x^2-4x+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 141.** Tích các nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2+x+1} = x^2+x-1$  là

- A. 0.                      B. -3.                      C. -1.                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x^2+x+1 \geq 0$  (luôn đúng), do đó  $x \in \mathbb{R}$ .

Đặt  $\sqrt{x^2+x+1} = t$  ( $t \geq 0$ ), ta có

$$t = t^2 - 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Với  $t = 2$ , ta có  $\sqrt{x^2+x+1} = 2 \Leftrightarrow x^2+x-3 = 0 \Rightarrow$  tích các nghiệm của phương trình là -3.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 142.** Tích tất cả các nghiệm của phương trình  $\frac{1}{x^2+x+2} - \frac{1}{x^2+x-2} = 1$  là

- A. 1.                      B.  $-\frac{5}{2}$ .                      C. 0.                      D. -1.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x^2+x+2 \neq 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1; x \neq 2$ .

Đặt  $x^2+x = t$ , ta có

$$\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2} = 1 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Với  $t = 0$ , ta có  $x^2+x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;  $xx = -1 \Rightarrow$  tích các nghiệm của phương trình là 0.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 143.** Số các giá trị nguyên **không** dương của tham số  $m$  để phương trình  $x^4 - 4x^2 - 6 - m^3 = 0$  có đúng 2 nghiệm phân biệt là

- A. 2018.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 0.

**Lời giải.**

Ta có  $x^4 - 4x^2 - 6 - m^3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 6 + m^3$ .

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ), ta có  $t^2 - 4t = m^3 + 6$ .

Xét hàm  $f(t) = t^2 - 4t$  trên miền  $[0; +\infty)$  ta có tọa độ đỉnh  $(2; -4)$ . Ta có bảng biến thiên

$t$	0	2	$+\infty$
$f(t)$	0	-4	$+\infty$

Để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng  $y = m^3 + 6$  phải cắt đồ thị  $y = f(t)$

tại đúng một điểm có hoành độ  $t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 6 = -4 \\ m^3 + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\sqrt[3]{6} \\ m = -\sqrt[3]{10}. \end{cases}$

Do  $m$  là số nguyên không dương nên  $m = 0, m = 1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 144.** Cho phương trình  $\sqrt{x^2 - 8x + m} = 2x - 1$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình đã cho vô nghiệm.

- A.  $m \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$ .      B.  $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ .      C.  $m \in \left(-\infty; \frac{15}{4}\right)$ .      D.  $m \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{x^2 - 8x + m} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 8x + m = (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 + 4x = m - 1. \end{cases}$

Xét  $f(x) = 3x^2 + 4x$  trên miền  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$  ta có bảng biến thiên

$x$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{11}{4}$	$+\infty$

Để phương trình đã cho vô nghiệm thì  $m - 1 < \frac{11}{4} \Leftrightarrow m < \frac{15}{4}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 145.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $|x^2 - 2x| + 3x - x^2 = m$  có nghiệm.

- A.  $m \in [0; +\infty)$ .      B.  $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ .  
 C.  $m \in \mathbb{R}$ .      D.  $m \in [0; 2]$ .

**Lời giải.**

Xét  $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$ . Ta có bảng xét dấu của biểu thức  $x^2 - 2x$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x$		$-$	$+$	$+$
$x - 2$		$-$	$+$	$+$
$x^2 - 2x$		$+$	$-$	$+$

Khi đó  $f(x) = |x^2 - 2x| + 3x - x^2 = \begin{cases} x & \text{với } x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty) \\ -2x^2 + 5x & \text{với } x \in (0; 2). \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của  $y = |x^2 - 2x| + 3x - x^2$

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{4}$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$\frac{25}{8}$	$0$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 146.** Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-2018; 2018]$  để phương trình

$$x^2 + (2 - m)x + 4 = 4\sqrt{x^3 + 4x}$$

có nghiệm là

- A. 2019.      B. 2020.      C. 2021.      D. 2018.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x \geq 0$ . Do  $x = 0$  không là nghiệm của phương trình, nên chia cả hai vế cho  $x$  ta có

$$x + 2 - m + \frac{4}{x} = 4\sqrt{x + \frac{4}{x}}$$

Đặt  $t = \sqrt{x + \frac{4}{x}}$ , áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì  $t \geq 2$ .

Khi đó phương trình trở thành  $t^2 - 4t + 2 = m$ .

Xét hàm số  $f(t) = t^2 - 4t + 2, t \geq 2$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	2	$+\infty$
$y$	-2	$+\infty$

Vậy để phương trình có nghiệm thì  $m \geq -2$ . Hay có 2021 giá trị nguyên  $m \in [-2018; 2018]$  thỏa mãn.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 147.** Số các giá trị nguyên âm của  $m$  để phương trình  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - m = 0$  có nghiệm là

- A. 2018.                      B. 2019.                      C. 0.                      D. 1.

**Lời giải.**

Ta có:  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - m = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) = m$ .

Đặt  $t = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - t = 0$ . Để có nghiệm thì  $\Delta = 1 + 4t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{1}{4}$ .

Xét hàm số  $f(t) = t^2 + 2t, t \geq -\frac{1}{4}$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$y$	$-\frac{7}{16}$	$+\infty$

Vậy để phương trình có nghiệm thì  $m \geq -\frac{7}{16}$ , hay không có giá trị nguyên âm nào của  $m$  thỏa mãn.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 148.** Cho phương trình  $x^2 + 2(m + 1)x + 2m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$ . Phương trình bậc hai nào sau đây có hai nghiệm là  $-2x_1$  và  $-2x_2$ ?

- A.  $t^2 - 4(m + 1)t + 4(2m + 3) = 0$ .                      B.  $t^2 - 4(m + 1)t - 4(2m + 3) = 0$ .  
 C.  $t^2 - 4(m + 1)t + 2(2m + 3) = 0$ .                      D.  $t^2 + 4(m + 1)t + 4(2m + 3) = 0$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m + 1) \\ x_1 x_2 = 2m + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2x_1) + (-2x_2) = 4(m + 1) \\ (-2x_1) \cdot (-2x_2) = 4(2m + 3) \end{cases}$ . Khi đó theo định lý

Vi-ét đảo thì phương trình nhận  $-2x_1$  và  $-2x_2$  là nghiệm là  $t^2 - 4(m + 1)t + 4(2m + 3) = 0$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 149.** Cho phương trình  $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{2m + x - x^2}$  (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì  $m \in [a; b]$ . Giá trị  $a^2 + b^2$  bằng

- A. 2.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\ 2m + x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 2m + x - x^2 \geq 0 \end{cases}$ .

Phương trình (1) tương đương với  $-x^2 + 3x - 2 = 2m + x - x^2 \Leftrightarrow x = m + 1$ .

Để phương trình có nghiệm thì ta có  $1 \leq m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$ .

Vậy  $a = 0, b = 1$  nên  $a^2 + b^2 = 1$ .

Chọn đáp án **B** □

**DÁP ÁN**

1. B	2. A	3. C	4. B	5. A	6. D	7. B	8. C	9. D	10. C
11. A	12. B	13. D	14. D	15. C	16. B	17. B	18. D	19. B	20. B

21. C	22. B	23. B	24. C	25. C	26. C	27. D	28. C	29. A	30. C
31. C	32. C	33. D	34. D	35. A	36. A	37. B	38. A	39. C	40. D
41. A	42. C	43. B	44. B	45. A	46. A	47. D	48. A	49. B	50. A
51. C	52. B	53. B	54. A	55. D	56. C	57. C	58. C	59. B	60. B
61. B	62. C	63. C	64. D	65. A	66. C	67. D	68. A	69. D	70. D
71. B	72. D	73. D	74. D	75. B	76. A	77. D	78. B	79. B	80. C
81. A	82. D	83. D	84. A	85. B	86. D	87. B	88. D	89. D	90. B
91. C	92. B	93. D	94. A	95. B	97. D	98. B	99. C	100. B	101. C
102. A	103. A	104. C	105. A	106. B	107. B	108. C	109. B	110. D	111. B
112. B	113. A	114. C	115. D	116. C	117. A	118. D	119. B	120. C	121. A
122. B	123. C	124. B	125. D	126. C	127. C	128. A	129. C	130. D	131. B
132. A	133. A	134. A	135. C	136. C	137. C	138. A	139. C	140. A	141. B
142. C	143. C	144. C	145. C	146. C	147. C	148. A	149. B		

# BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

## Dạng 1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

— Phương pháp

**Khái niệm:** Phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là hệ thức dạng:  $ax + by = c$  (1).  
Trong đó  $a, b, c$  là ba số cho trước với  $a, b$  không đồng thời bằng 0.

— Tập hợp nghiệm của phương trình

a) Một nghiệm của phương trình (1) là một cặp số  $(x_0, y_0)$  sao cho  $ax_0 + by_0 = c$ .

b) Phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by = c$  luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng  $ax + by = c$ , kí hiệu là  $(d)$ .

- Nếu  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$  thì công thức nghiệm là

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c - ax}{b} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{c - by}{a} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Khi đó đường thẳng  $(d)$  song song hoặc trùng với trục  $Ox$ , cắt  $Oy$  tại điểm có tung độ  $\frac{c}{b}$ .

- Nếu  $a \neq 0$  và  $b = 0$  thì công thức nghiệm là

$$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng  $(d)$  song song hoặc trùng với trục  $Oy$ , cắt  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $\frac{c}{a}$ .

**Ví dụ 1.** Trong các cặp số  $(2; -1)$ ,  $(0; \frac{3}{2})$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình:  $4x + 2y = 3$ ?

**Lời giải.**

**Phân tích**

Cặp  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$  nếu khi thay  $x = x_0, y = y_0$  vào phương trình ta được hai vế bằng nhau.

Xét cặp số  $(2; -1)$ . Thay  $x = 2, y = -1$  vào phương trình  $4x + 2y = 3$  ta được

$$\begin{cases} VT = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 6 \\ VP = 3 \end{cases} \Rightarrow VT \neq VP.$$

Suy ra  $(2; -1)$  không là nghiệm của phương trình  $4x + 2y = 3$ .

Xét cặp số  $(0; \frac{3}{2})$ . Thay  $x = 0, y = \frac{3}{2}$  vào phương trình  $4x + 2y = 3$  ta được

$$\begin{cases} VT = 4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \\ VP = 3 \end{cases} \Rightarrow VT = VP.$$

Suy ra  $(0; \frac{3}{2})$  không là nghiệm của phương trình  $4x + 2y = 3$ . □

**Ví dụ 2.** Với mỗi phương trình sau, tìm nghiệm tổng quát của phương trình và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó

①  $x - y = 2$

②  $2x + y = 3$

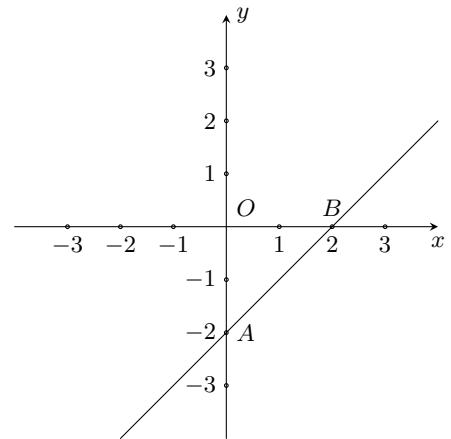
**Lời giải.**

①  $x - y = 2$

• Ta có phương trình:  $x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$ .  
Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 2. \end{cases}$$

• Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình  $y = x - 2$   
Cho  $x = 0 \Rightarrow y = -2$  ta được  $A(0; -2)$ .  
Cho  $y = 0 \Rightarrow x = 2$  ta được  $B(2; 0)$ .  
Biểu diễn cặp điểm  $A(0; -2), B(2; 0)$  trên hệ trục tọa độ và đường thẳng  $AB$  chính là tập nghiệm của phương trình  $x - y = 2$ .

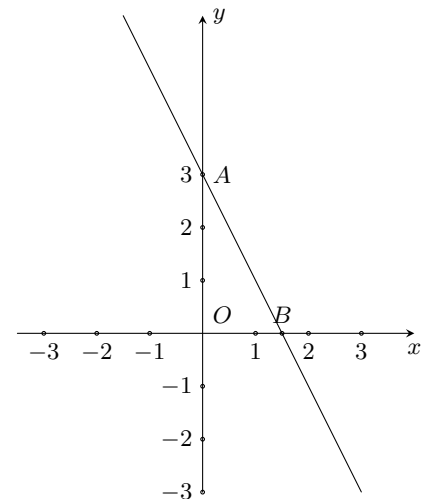


②  $2x + y = 3$

• Ta có phương trình:  $2x + y = 3 \Leftrightarrow y = -2x + 3$ .  
Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2x + 3. \end{cases}$$

• Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình  $y = -2x + 3$   
Cho  $x = 0 \Rightarrow y = 3$  ta được  $A(0; 3)$ .  
Cho  $y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$  ta được  $B(\frac{3}{2}; 0)$ .  
Biểu diễn cặp điểm  $A(0; 3), B(\frac{3}{2}; 0)$  trên hệ trục tọa độ và đường thẳng  $AB$  chính là tập nghiệm của phương trình  $y = -2x + 3$ .



□

**Ví dụ 3.** Cho phương trình  $2x - 3y = 8$  (1).

- ① Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1).
- ② Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

**Lời giải.**

① Xét  $2x - 3y = 8(1) \Rightarrow y = \frac{2x - 8}{3}$ .

Cho  $x$  là một giá trị  $t$  tùy ý ta tính được giá trị tương ứng của  $y$ .

Ta được công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) là  $\begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = \frac{2t - 8}{3}. \end{cases}$

② Ta có  $y = \frac{2x - 8}{3} = \frac{3x - x - 8}{3} = x - \frac{x + 8}{3}$ .

Đặt  $t = \frac{x + 8}{3}$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow x = 3t - 8$ .

Khi đó nghiệm nguyên của phương trình (1) là

$$\begin{cases} x = 3t - 8 \\ y = 3t - 8 - t \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 3t - 8 \\ y = 2t - 8 \end{cases} (t \in \mathbb{Z}).$$

Cho  $t$  là một giá trị nguyên nào đó ta được một nghiệm nguyên của phương trình (1).

$$\text{Ví dụ như, với } t = 1 \text{ thì } \begin{cases} x = -5 \\ y = -6. \end{cases}$$

$$\text{với } t = 2 \text{ thì } \begin{cases} x = -2 \\ y = -4. \end{cases}$$

□

**Ví dụ 4.** Tìm nghiệm nguyên  $(x, y)$  của phương trình  $(x - 4)y^2 = x^2$ . (2)

**Lời giải.**

• Với  $x = 4$  thì (2) trở thành:  $0 \cdot y^2 = 16$  (vô lý)  $\Rightarrow$  phương trình (2) vô nghiệm.

• Với  $x \neq 4$  thì  $y^2 = \frac{x^2}{x - 4} = \frac{x^2 - 16 + 16}{x - 4} = x + 4 + \frac{16}{x - 4}$ .

Do  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{16}{x - 4} \in \mathbb{Z}$ .

Do đó  $x - 4$  là ước của 16  $\Rightarrow x - 4 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}$ .

Ta có

$x - 4$	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
$x$	-12	-4	0	2	3	5	6	8	12	20
$y^2$	-9	-2	0	-2	-9	25	18	16	18	25
$y$			0			$\pm 5$	$\pm 3\sqrt{2}$	$\pm 4$	$\pm 3\sqrt{2}$	$\pm 5$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình (2) là

$$(0; 0), (5; 5), (5; -5), (8; 4), (8; -4), (20; 5), (20; -5).$$

□

**Ví dụ 5.** Kiểm tra xem các cặp số  $(1; 2)$  và  $(1; 0)$  có là nghiệm của phương trình  $3x - y = 1$  không? Tìm thêm một nghiệm khác của phương trình.

**Lời giải.**

• Cặp số  $(1; 2)$  là nghiệm của phương trình  $3x - y = 1$  vì  $3 \cdot 1 - 2 = 1$ .

• Cặp số  $(1; 0)$  là không nghiệm của phương trình  $3x - y = 1$  vì  $3 \cdot 1 - 0 \neq 1$ .

• Chọn  $x = 2$ , ta có  $3 \cdot 2 - y = 1 \Leftrightarrow y = 5$ .

Vậy cặp số  $(2; 5)$  là một nghiệm của phương trình  $3x - y = 1$ .

□

### Dạng 2. Hệ pt bậc nhất hai ẩn; hệ pt bậc nhất ba ẩn (không chứa tham số)

a. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  (3)

Trong đó  $x, y$  là hai ẩn; các chữ còn lại là hệ số.

Nếu cặp số  $(x_0; y_0)$  đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì  $(x_0; y_0)$  được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (3).

Giải hệ phương trình (3) là tìm tập nghiệm của nó.

— Giải hệ (3) bằng phương pháp cộng đại số (biến đổi hệ phương trình đã cho thành hệ phương trình tương đương).

- Nhân các vế của hai phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ đã cho để được một phương trình mới (phương trình một ẩn).
- Dùng phương trình một ẩn thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

- Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.
- Giải hệ (3) bằng phương pháp thế (biến đổi hệ phương trình đã cho thành hệ phương trình tương đương).
  - Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
  - Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

### Nhận xét

- Phương pháp thế sẽ sử dụng thuận tiện hơn khi một trong hai phương trình của hệ có các hệ số của  $x$  hoặc  $y$  là 1 hay -1. Khi đó chỉ cần rút  $x$  hoặc  $y$  ở phương trình có hệ số là 1 hay -1 này và thay vào phương trình còn lại để giải hệ.
- Đối với các hệ phương trình mà không có hệ số nào của  $x$  và  $y$  là 1 hay -1 thì việc sử dụng phương pháp thế làm phát sinh các phân số và việc cộng trừ dễ làm ta sai sót. Khi đó dùng phương pháp cộng đại số giúp các em đỡ nhầm lẫn hơn trong các phép tính.

b. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó  $x, y, z$  là ba ẩn; các chữ còn lại là hệ số.

Mỗi bộ ba số  $(x_0, y_0, z_0)$  nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ thì được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (4).

Giải hệ (4) bằng cách biến đổi hệ về dạng tam giác bằng phương pháp khử dần ẩn số.

**Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = -3 \\ 2x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \text{ Ta có: } \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 11y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là  $(x; y) = (2; 1)$ .

$$\textcircled{2} \text{ Ta có: } \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = -3 \\ 2x + 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - x + y \\ 2x + y + z = -3 \\ 2x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - x + y \\ 2x + y + (3 - x + y) = -3 \\ 2x + 2y + (3 - x + y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - x + y \\ x + 2y = -6 \\ x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 1 \\ z = 12. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là  $(x; y; z) = (-8; 1; 12)$ .

□

**Ví dụ 2.** Ở một hội chợ, vé vào cửa được bán ra với giá 15.000 đồng cho trẻ em và 40.000 đồng cho người lớn. Trong một ngày, có 2.600 người khách tham quan hội chợ và ban tổ chức hội chợ thu được 91.500.000 đồng. Hỏi có bao nhiêu người lớn và bao nhiêu trẻ em vào tham dự hội chợ trong ngày đó?

**Lời giải.**



Gọi  $x, y$  lần lượt là số trẻ em, người lớn vào tham quan hội chợ trong ngày.

Điều kiện  $x, y$  là các số nguyên dương.

Theo giả thiết của bài toán, ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 2.600 \\ 15.000x + 40.000y = 91.500.000. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được 
$$\begin{cases} x = 500 \\ y = 2.100. \end{cases}$$

Vậy có 500 trẻ em và 2.100 người lớn tham gia hội chợ trong ngày đó. □

**Ví dụ 3.** Biết  $(a; b)$  là một nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
. Tính tổng  $S = a^2 + b^2$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ 3 - y - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy  $(a; b) = (2; 1)$ . Do đó:  $S = a^2 + b^2 = 5$ . □

**Ví dụ 4.** Biết  $a, b, c$  là ba số thực thỏa mãn hệ phương trình 
$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \end{cases}$$
. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình  $ax^2 + 2bx + c = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 2b = 2 \\ 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy  $ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ . □

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ -x + 3y + 2z = -16. \end{cases}$$

**Lời giải.**

**Phân tích**

Làm giảm số ẩn bằng cách cộng từng vế phương trình (2) và phương trình (3)

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ -x + 3y + 2z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 2x + 4y - 6z = 20 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 9y - 7z = 10 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 4. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là  $(x; y; z) = (2; -2; 4)$ . □

**Ví dụ 6.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 8 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ x - y + 2z = 2. \end{cases}$$

**Lời giải.**

**Phân tích**

Làm giảm số ẩn bằng cách trừ từng vế phương trình (2) và phương trình (3)

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 8 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y + z = 8 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \\ 3y - 5z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y + z = 8 \\ y + 7z = 8 \\ 3y - 5z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là  $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ . □

**Dạng 3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có tham số**

— Giải và biện luận hệ phương trình

**Phương pháp:**

$$\text{Cho hệ phương trình: } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (*)$$

Để giải và biện luận hệ phương trình (\*), ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1. Từ hai phương trình của (\*), sau khi dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số, ta thu được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2. Giải và biện luận hệ phương trình mới, từ đó đi đến kết luận về giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

— Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

**Phương pháp:**

- Bước 1: Giải hệ phương trình tìm nghiệm  $(x; y)$  theo tham số  $m$ .
- Bước 2: Thay nghiệm  $(x; y)$  vừa tìm được vào biểu thức điều kiện.
- Bước 3: Giải điều kiện tìm  $m$ .
- Bước 4: Trả lời yêu cầu bài toán.

— Tìm mối liên hệ giữa  $(x; y)$  không phụ thuộc vào tham số  $m$

**Phương pháp:**

- Bước 1: Giải hệ phương trình tìm được nghiệm  $(x; y)$  theo tham số  $m$ .
- Bước 2: Dùng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế làm mất tham số  $m$  và kết luận.

**Ví dụ 1.** Giải và biện luận theo tham số  $m$  hệ phương trình  $\begin{cases} y = 3 - x \\ mx + 2(3 - x) = 1. \end{cases}$

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Hệ phương trình đã cho có thể dùng phương pháp thế để chuyển bài toán biện luận hệ phương trình về bài toán biện luận phương trình bậc nhất một ẩn.

**Cách 1:**

$$\text{Hệ phương trình tương đương } \begin{cases} y = 3 - x \\ mx + 2(3 - x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ (m - 2)x = -5 \end{cases} \quad (I).$$

Xét phương trình  $(m - 2)x = -5$  (1)

- Nếu  $m \neq 2$  thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất  $x = \frac{-5}{m - 2}$ .

$$\text{Khi đó hệ (I) có một nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{-5}{m - 2} \\ y = 3 - \left(-\frac{5}{m - 2}\right) = 3 + \frac{5}{m - 2}. \end{cases}$$

- Nếu  $m = 2$  thì phương trình (1) trở thành  $0x = -5$  (vô lý).

$\Rightarrow$  phương trình (1) vô nghiệm.

$\Rightarrow$  hệ (I) vô nghiệm.

**Kết luận:**

—  $m \neq 2$ : hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\frac{-5}{m - 2}; \frac{1 - 3m}{m - 2}\right)$ .

—  $m = 2$ : hệ vô nghiệm.

**Cách 2:**

Ta có  $\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} = 2 - m$ .  $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ .  $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3m$ .

- Trường hợp 1:  $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ : Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{2 - m} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1 - 3m}{2 - m} \end{cases}$ .

- Trường hợp 2:  $\mathcal{D} = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Ta có  $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = 5 \neq 0 \forall m \end{cases}$  nên hệ phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

—  $m \neq 2$ : hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left( \frac{5}{2 - m}; \frac{1 - 3m}{2 - m} \right)$ .

—  $m = 2$ : hệ vô nghiệm.

□

**Ví dụ 2.** Giải và biện luận theo tham số  $m$  hệ phương trình:  $\begin{cases} y = m + 1 - mx \\ 4x + m(m + 1 - mx) = 2 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Hệ phương trình đã cho có thể dùng phương pháp thế để chuyển bài toán biện luận hệ phương trình về bài toán biện luận phương trình bậc nhất một ẩn, nhưng phải qua nhiều bước biến đổi và công kênh trong việc kết luận nghiệm. Do đó, ta nên dùng định thức để giải và biện luận trực tiếp hệ trên.

**Cách 1:**

Hệ phương trình tương đương  $\begin{cases} y = m + 1 - mx \\ 4x + m(m + 1 - mx) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 1 - mx \\ (4 - m^2)x = -m^2 - m + 2 \end{cases} (I)$ .

Xét phương trình  $(4 - m^2)x = -m^2 - m + 2$  (1).

- Nếu  $4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$  thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất

$$x = \frac{-m^2 - m + 2}{4 - m^2} = \frac{-(m - 1)(m + 2)}{(2 - m)(2 + m)} = -\frac{m - 1}{2 - m} = \frac{m - 1}{m - 2}.$$

Khi đó hệ (I) có một nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = \frac{m - 1}{m - 2} \\ y = m + 1 - m \cdot \left( \frac{m - 1}{m - 2} \right) = \frac{-2}{m - 2} \end{cases}$ .

- Nếu  $m = 2$  thì phương trình (1) trở thành  $0x = -4$  (vô lý).

$\Rightarrow$  phương trình (1) vô nghiệm.

$\Rightarrow$  hệ (I) vô nghiệm.

- Nếu  $m = -2$  thì phương trình (1) trở thành  $0x = 0$  (đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ ).

$\Rightarrow$  phương trình (1) có vô số nghiệm.

$\Rightarrow$  hệ (I) có vô số nghiệm  $(x; y)$  thỏa  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ .

Kết luận:

—  $m \neq 2$  và  $m \neq -2$ : hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left( \frac{m - 1}{m - 2}; \frac{-2}{m - 2} \right)$ .

—  $m = -2$ : hệ có vô số nghiệm  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ .

—  $m = 2$ : hệ vô nghiệm.

**Cách 2:**

Ta có  $\mathcal{D} = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2)$ .

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 4 = -2(m+2).$$

- Trường hợp 1:  $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2. \end{cases}$

Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m-1}{m-2} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{m-2}. \end{cases}$

- Trường hợp 2:  $\mathcal{D} = 0 \Leftrightarrow m = 2$  hoặc  $m = -2$ .

\* Với  $m = 2$

Ta có  $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = 4 \neq 0 \end{cases}$  nên hệ phương trình vô nghiệm.

\* Với  $m = -2$

Ta có  $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases}$  nên hệ phương trình có vô số nghiệm  $(x; y)$  thỏa  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1. \end{cases}$

*Kết luận:*

—  $m \neq 2$  và  $m \neq -2$ : hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\frac{m-1}{m-2}; \frac{-2}{m-2}\right)$ .

—  $m = -2$ : hệ có vô số nghiệm  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1. \end{cases}$

—  $m = 2$ : hệ vô nghiệm.

□

**Ví dụ 3.** Giải và biện luận theo tham số  $m$  hệ phương trình  $\begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m+1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2. \end{cases}$

**Lời giải.**

**Phân tích**

- Cả 2 phương trình trong hệ đều có 2 biểu thức chung là  $\sqrt{x+1}$  và  $\sqrt{y}$ . Điều này giúp ta liên hệ đến phương pháp dùng ẩn phụ để giải hệ phương trình.
- Có thể khái quát cách giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ (mục đích là để chuyển hệ đã cho về hệ cơ bản).
  - Tìm điều kiện của các ẩn ban đầu để từng phương trình trong hệ có nghĩa.
  - Đặt ẩn mới và tìm điều kiện cho ẩn mới (nếu có).
  - Giải hệ phương trình với ẩn mới theo điều kiện ràng buộc của ẩn mới (nếu có).
  - Trở lại ẩn ban đầu và giải hệ theo điều kiện của ẩn ban đầu.

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{y} \geq 0. \end{cases}$

Hệ phương trình trở thành  $\begin{cases} mu + v = m+1 \\ u + mv = 2. \end{cases}$

Khi đó ta có

—  $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$

—  $D_u = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2).$

—  $D_v = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$

— **TH1:**  $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} u = \frac{D_u}{D} = \frac{m+2}{m+1} \\ v = \frac{D_v}{D} = \frac{1}{m+1}. \end{cases}$

Vì điều kiện  $u, v \geq 0$  nên ta có  $\begin{cases} \frac{m+2}{m+1} \geq 0 \\ \frac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$

Khi đó ta được  $\begin{cases} \sqrt{x+1} = \frac{m+2}{m+1} \\ \sqrt{y} = \frac{1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{(m+2)^2}{(m+1)^2} \\ y = \frac{1}{(m+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m+3}{(m+1)^2} \\ y = \frac{1}{(m+1)^2}. \end{cases}$

— **TH2:**  $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$  hoặc  $m = -1.$

Khi  $m = 1$   
Ta có  $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases}$  nên hệ phương trình có vô số nghiệm thỏa  $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2 \\ x \geq -1 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Khi  $m = -1$   
Ta có  $\begin{cases} D = 0 \\ D_u = 2 \neq 0 \end{cases}$  nên hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy khi

—  $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$  hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left( \frac{2m+3}{(m+1)^2}; \frac{1}{(m+1)^2} \right).$

—  $m = 1$  hệ có vô số nghiệm  $(x; y)$  thỏa  $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2 \\ x \geq -1 \\ y \geq 0. \end{cases}$

—  $m \leq -1$  hệ vô nghiệm.

□

**Ví dụ 4.** Tìm các giá trị thực của tham số  $m, n$  để hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + (m+1)y = m + 2n - 1 \\ nx + (1-m)y = 3. \end{cases}$  có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (-3; 2).$

**Lời giải.**

Hệ có nghiệm có nghiệm  $(x; y) = (-3; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + (m+1)2 = m + 2n - 1 \\ -3n + (1-m)2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2n = 3 \\ 2m + 3n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -1. \end{cases}$

Vậy  $m = 1; n = -1$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**Ví dụ 5.** Định các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1. \end{cases}$  có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

**Lời giải.**

— Với  $m = 0$ , hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$  (loại vì  $x, y \in \mathbb{Z}$ ).

— Với  $m \neq 0$ , hệ phương trình  $\begin{cases} 2mx + 4y = 2m + 2 \\ 2mx + m^2y = 2m^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = 2m^2 - 3m - 2 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = (m - 2)(2m + 1) \\ 2x + my = 2m - 1. \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$  (1).

Vậy với  $m \neq \pm 2$  hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{m - 1}{m + 2} = 1 - \frac{3}{m + 2} \\ y = \frac{(m - 2)(2m + 1)}{m^2 - 4} = \frac{2m + 1}{m + 2} = 2 - \frac{3}{m + 2}. \end{cases}$$

Để  $x, y$  là những số nguyên  $\Leftrightarrow m + 2 \in \{1; -1; 3; -3\} \Leftrightarrow m \in \{-5; -3; \pm 1\}$  (thỏa điều kiện (1)).

Vậy  $m \in \{-5; -3; \pm 1\}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**Ví dụ 6.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2 - m \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$  có nghiệm.

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y = 2 - m \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - m - x \\ x^2 + (2 - m - x)^2 + x(2 - m - x) = 3. \end{cases}$  (\*)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm.

$x^2 + (2 - m - x)^2 + x(2 - m - x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + (m - 2)x + m^2 - 4m + 1 = 0.$

Khi đó

$$\begin{aligned} \Delta &= (m - 2)^2 - 4(m^2 - 4m + 1) = -3m^2 + 12m \\ \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4. \end{aligned}$$

Vậy với  $0 \leq m \leq 4$  thì hệ phương trình có nghiệm. □

### **A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$  là

- A.  $(x; y; z) = (5; 3; 3)$ .    B.  $(x; y; z) = (4; 5; 2)$ .    C.  $(x; y; z) = (2; 4; 5)$ .    D.  $(x; y; z) = (3; 5; 3)$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Từ phương trình  $x + y + z = 11$  suy ra  $z = 11 - x - y$ . Thay vào hai phương trình còn lại ta được hệ phương trình, ta được  $\begin{cases} 2x - y + 11 - x - y = 5 \\ 3x + 2y + 11 - x - y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ . Từ đó ta được

$z = 11 - 4 - 5 = 2$ . Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (4; 5; 2)$ .

Cách 2. Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (4; 5; 2)$  là nghiệm của hệ phương trình

Chọn đáp án **B** □

**Câu 2.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 2 \\ z + 2x = 3 \end{cases}$  là:

- A.  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ .    B.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ .    C.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ .    D.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Từ phương trình  $z + 2x = 3$  suy ra  $z = 3 - 2x$ . Thay vào hai phương trình còn lại ta được hệ phương trình, ta được  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2(3 - 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ . Từ đó ta được  $z = 3 - 2.1 = 1$ . Vậy hệ

phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$ .

Cách 2. Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình

Chọn đáp án **D** □

**Câu 3.** Bộ  $(x; y; z) = (2; -1; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây ?

A. 
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

B. 
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

C. 
$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

D. 
$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = 6 \\ 10x - 4y - z = 2 \end{cases}$$

**Lời giải.**

Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (2; -1; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 4.** Bộ  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây ?

A. 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z = -5 \\ y + 4z = -17 \end{cases}$$

B. 
$$\begin{cases} x + 7y - z = -2 \\ -5x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

C. 
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$$

D. 
$$\begin{cases} x + 2y + z = -2 \\ x - y + z = 4 \\ -x - 4y - z = 5 \end{cases}$$

**Lời giải.**

Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 5.** Gọi  $(x_0; y_0; z_0)$  là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$
. Tính giá trị của biểu thức

$P = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ .

A.  $P = 1$ .

B.  $P = 2$ .

C.  $P = 3$ .

D.  $P = 14$ .

**Lời giải.**

Ta có 
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 1 & (1) \\ x - y + 2z = 2 & (2) \\ -x + 2y + 2z = 3 & (3) \end{cases}$$
. Phương trình (2)  $\Leftrightarrow x = y - 2z + 2$ . Thay vào (1), ta được

$$3(y - 2z + 2) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 4y - 9z = -5 \quad (*)$$

Phương trình (3)  $\Leftrightarrow x = 2y + 2z - 3$ . Thay vào (1), ta được

$$3(2y + 2z - 3) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 7y + 3z = 10 \quad (**)$$

Từ (\*) và (\*\*), ta có 
$$\begin{cases} 4y - 9z = -5 \\ 7y + 3z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$
. Suy ra  $x = 1$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (1; 1; 1) \Rightarrow P = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 6.** Gọi  $(x_0; y_0; z_0)$  là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$
. Tính giá trị của biểu thức

$P = x_0 y_0 z_0$ .

- A.  $P = -40$ .                      B.  $P = 40$ .                      C.  $P = 1200$ .                      D.  $P = -1200$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y + z = 11 & (1) \\ 2x - y + z = 5 & (2) \\ 3x + 2y + z = 24 & (3) \end{cases}$ . Phương trình (3)  $\Leftrightarrow z = 24 - 3x - 2y$ . Thay vào (1) và (2) ta được hệ phương

trình

$$\begin{cases} x + y + 24 - 3x - 2y = 11 \\ 2x - y + 24 - 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = -13 \\ -x - 3y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$$

Suy ra  $z = 24 - 3.4 - 2.5 = 2$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (4; 5; 2) \Rightarrow P = 4.5.2 = 40$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 7.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$  có duy nhất một

nghiệm.

- A.  $m = \frac{10}{3}$ .                      B.  $m = 10$ .                      C.  $m = -10$ .                      D.  $m = -\frac{10}{3}$ .

**Lời giải.**

Từ hệ phương trình đã cho ta suy ra  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ .

Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất khi  $(1; -2)$  là nghiệm của phương trình  $2mx +$

$5y - m = 0$  tức là  $2m.1 + 5.(-2) - m = 0 \Leftrightarrow m = 10$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 8.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = 1 \\ my + z = 1 \\ x + mz = 1 \end{cases}$  vô nghiệm.

- A.  $m = -1$ .                      B.  $m = 0$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Từ hệ phương trình đã cho suy ra  $z = 1 - my$ . Thay vào hai phương trình còn lại, ta được

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + m(1 - my) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - m^2y = 1 - m \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ x - m^2(1 - mx) = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ (1 + m^3)x = m^2 - m + 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\begin{cases} 1 + m^3 = 0 \\ m^2 - m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m^2 - m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$ .

Cách 2. (Thử trực tiếp) Thay  $m = -1$  vào hệ phương trình ta được hệ phương trình  $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$ . Sử

dụng MTCT ta thấy hệ vô nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 9.** Một đoàn xe tải chở 290 tấn xi măng cho một công trình xây đập thủy điện. Đoàn xe có 57 chiếc gồm ba loại, xe chở 3 tấn, xe chở 5 tấn và xe chở 7,5 tấn. Nếu dùng tất cả xe 7,5 tấn chở ba chuyến thì được số xi măng bằng tổng số xi măng do xe 5 tấn chở ba chuyến và xe 3 tấn chở hai chuyến. Hỏi số xe mỗi loại?

- A. 18 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 20 xe chở 7,5 tấn.  
 B. 20 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.  
 C. 19 xe chở 3 tấn, 20 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.  
 D. 20 xe chở 3 tấn, 18 xe chở 5 tấn và 19 xe chở 7,5 tấn.



**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số xe tải chở 3 tấn,  $y$  là số xe tải chở 5 tấn và  $z$  là số xe tải chở 7,5 tấn.

Điều kiện:  $x, y, z$  nguyên dương.

Theo giả thiết của bài toán ta có 
$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7,5z = 290. \\ 22,5z = 6x + 15y \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $x = 20, y = 19, z = 18$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 10.** Có ba lớp học sinh 10A, 10B, 10C gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp 10C trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

- A. 10A có 40 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 45 em.
- B. 10A có 45 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 40 em.
- C. 10A có 45 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 43 em.
- D. 10A có 43 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 45 em.

**Lời giải.**

Gọi số học sinh của lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là  $x, y, z$ .

Điều kiện:  $x, y, z$  nguyên dương. Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y + z = 128 \\ 3x + 2y + 6z = 476. \\ 4x + 5y = 375 \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $x = 40, y = 43, z = 45$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 11.** Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 gam hương liệu, 9 lít nước và 210 gam đường để pha chế nước ngọt loại I và nước loại II. Để pha 1 lít nước ngọt loại I cần 10 gam đường, 1 lít nước và 4 gam hương liệu. Để pha chế 1 lít nước ngọt loại II cần 30 gam đường, 1 lít nước và 1 gam hương liệu. Mỗi lít nước ngọt loại I được thưởng 80 điểm, mỗi lít nước ngọt loại II được thưởng 60 điểm. Hỏi số điểm thưởng cao nhất có thể của mỗi đội trong cuộc thi là bao nhiêu?

- A. 540.
- B. 600.
- C. 640.
- D. 720.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số lít nước ngọt loại I,  $y$  là số lít nước ngọt loại II.

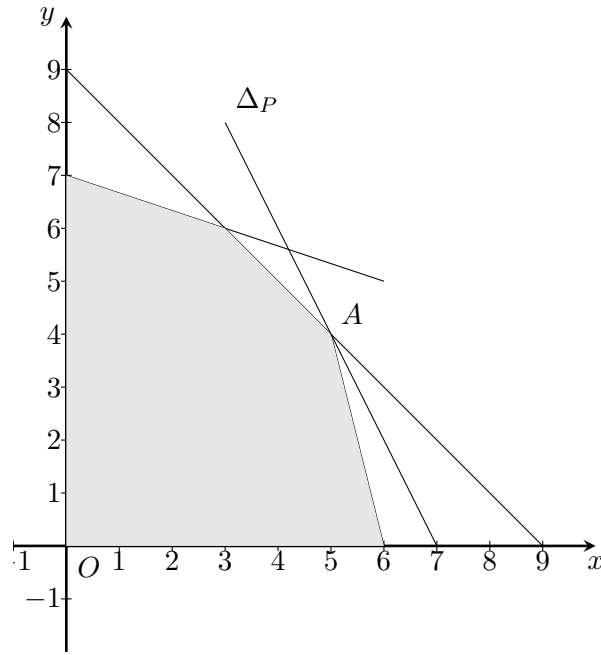
Ta có điều kiện về vật liệu ban đầu 
$$\begin{cases} 10x + 30y \leq 210 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 21 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Điểm thưởng đạt được là  $P = 80x + 60y$ .

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của  $P$  trong miền  $D$  được cho bởi hệ điều kiện (\*).

Biến đổi  $P = 80x + 60y \Leftrightarrow 80x + 60y - P = 0$  là họ đường thẳng  $\Delta_P$  trong hệ tọa độ  $Oxy$ .

Miền  $D$  được xác định trong hình vẽ bên dưới



Giá trị lớn nhất của  $P$  ứng với  $\Delta_P$  đi qua  $A(5; 4)$ , suy ra  $80 \cdot 5 + 60 \cdot 4 - P = 0 \Leftrightarrow P = 640$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 12.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{5}{x+3} - \frac{9}{y-2} = 50 \\ \frac{1}{x+3} + \frac{1}{y-2} = 154 \end{cases}$  có nghiệm là  $(x_0; y_0)$ . Khi đó  $x_0 + y_0$  bằng

- A.  $x_0 + y_0 = \frac{121}{140}$ .      B.  $x_0 + y_0 = 38$ .      C.  $x_0 + y_0 = -\frac{121}{140}$ .      D.  $x_0 + y_0 = -38$ .

**Lời giải.**

Đặt  $u = \frac{1}{x+3}$ ,  $v = \frac{1}{y-2}$ . Khi đó, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 5u - 9v = 50 \\ 3u + 7v = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 28 \\ \frac{1}{y-2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{83}{28} \\ y = \frac{21}{10} \end{cases}$$

Vậy  $x_0 + y_0 = -\frac{121}{140}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases}$  có nghiệm.

- A.  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .      B.  $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ .      C.  $[1; +\infty)$ .      D.  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương với  $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2m^2 - m \end{cases}$  nên  $x, y$  là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 2X + 2m^2 - m = 0. \tag{1}$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm, tức là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 + m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 14.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 10$ .

A.  $m = 1$ .

B.  $m = \pm 1$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = 0$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 3m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{3 - m}{m^2 + 1} \end{cases}.$$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 &\Leftrightarrow \left(\frac{1 + 3m}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{3 - m}{m^2 + 1}\right)^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow 1 + 6m + 9m^2 + 9 - 6m + m^2 = 10(m^4 + 2m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 10m^4 + 10m^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 0 \\ m^2 = -1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 15.** Gọi  $m_1, m_2$  là các giá trị của  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} (y - 2)x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = m^2 \end{cases}$  có đúng 4 nghiệm nguyên. Khi đó  $m_1^2 + m_2^2$  bằng

A. 10.

B. 9.

C. 20.

D. 4.

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} (y - 2)(x - 1) = 3 \\ (y - 2)^2 + (x - 1)^2 = m^2. \end{cases}$

Hệ có nghiệm nguyên  $(x_0; y_0)$  thì  $(x_0 - 1) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ .

— Nếu  $(x_0 - 1)^2 = 1$  thì  $(y_0 - 2)^2 = 9 \Rightarrow m^2 = 10$ .

— Nếu  $(x_0 - 1)^2 = 9$  thì  $(y_0 - 2)^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 10$ .

Do đó  $m_1 = -\sqrt{10}, m_2 = \sqrt{10}$  nên  $m_1^2 + m_2^2 = 20$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 16.** Gọi  $(x; y)$  là nghiệm dương của hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$ . Tổng  $x + y$  bằng

A. 12.

B. 8.

C. 16.

D. 0.

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 8 - x \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ -y^2 = 64 - 16x \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 + 16x - 192 = 0 \\ y^2 = 128 - x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y^2 = 64 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -24 \\ y^2 = -448 \end{cases} \text{ (vô lý)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 8 \\ y = -8. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì  $(x; y)$  là nghiệm dương nên  $x + y = 16$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 17.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - 6y = -2. \end{cases}$

- A.  $(x; y) = (1; 2)$ .      B.  $(x; y) = (2; 1)$ .      C.  $(x; y) = (1; 1)$ .      D.  $(x; y) = (-1; -1)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 8 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 18.** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn đồng thời các biểu thức  $x + 2y + 3z - 10 = 0$ ;  $3x + y + 2z - 13 = 0$  và  $2x + 3y + z - 13 = 0$ . Tính  $T = 2(x + y + z)$

- A.  $T = 12$ .      B.  $T = -12$ .      C.  $T = -6$ .      D.  $T = 6$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(x; y; z)$  thỏa hệ:  $\begin{cases} x + 2y + 3z - 10 = 0 \\ 3x + y + 2z - 13 = 0 \\ 2x + 3y + z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$

Khi đó  $T = 2(x + y + z) = 2(3 + 2 + 1) = 12$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 19.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases}$  có nghiệm là  $(x_1; y_1)$  và  $(x_2; y_2)$ . Tính  $S = x_1 + x_2$ .

- A.  $S = 2$ .      B.  $S = 0$ .      C.  $S = -1$ .      D.  $S = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 - 1 = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 20.** Gọi  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$  là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases}$ .

Tính  $|x_1 - x_2|$ .

- A. 3.      B. 2.      C. 1.      D. 0.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Đặt  $u = x + y$  và  $v = xy$ , hệ phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u^2 - 3v + u = 8 \\ 3u + v = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u^2 - 3(1 - 3u) + u = 8 \\ v = 1 - 3u \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u^2 + 10u - 11 = 0 \\ v = 1 - 3u \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 - 3u = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -11 \\ v = 1 - 3u = 34. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $\begin{cases} u = 1 \\ v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$

Với  $\begin{cases} u = -11 \\ v = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -11 \\ xy = 34 \end{cases}$  (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $(-1; 2), (2; -1)$ .

Do đó  $|x_1 - x_2| = |-1 - 2| = 3$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 21.** Tìm các giá trị của  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m & (2) \end{cases}$$

- A.  $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ .      B.  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ .      C.  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .      D.  $[1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Phương trình (2) tương đương  $xy(x + y) = 4m^2 - 2m$ .

Từ phương trình (1), thế  $y = 2 - x$  xuống (2) ta có  $x(2 - x) \cdot 2 = 4m^2 - 2m$ , hay

$$x^2 - 2x + 2m^2 - m = 0.$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình này có nghiệm, hay  $\Delta' \geq 0$ . Điều này tương đương với

$$1 - (2m^2 - m) \geq 0.$$

Giải bất phương trình trên ta được  $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 22.** Bốn học sinh cùng góp tổng cộng 60 quyển tập để tặng các bạn học sinh trong một lớp học tình thương. Học sinh thứ hai, ba, tư góp số tập lần lượt bằng  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$  tổng số tập của ba học sinh còn lại. Khi đó số tập mà học sinh thứ nhất góp là

- A. 10 quyển.      B. 12 quyển.      C. 13 quyển.      D. 15 quyển.

**Lời giải.**

Gọi  $a, b, c, d$  lần lượt là số sách của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ tư nộp.

(Với  $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ )

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a + b + c + d = 60 \\ b = \frac{1}{2}(a + c + d) \\ c = \frac{1}{3}(a + b + d) \\ d = \frac{1}{4}(a + b + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 60 \\ 3b = 60 \\ 4c = 60 \\ 5d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 20 \\ c = 15 \\ d = 12. \end{cases}$$

Vậy số tập mà học sinh thứ nhất góp là 13.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 23.** Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm?

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y. \end{cases}$$

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Lời giải.**

Vì với mọi giá trị thực của  $x$  thì  $(x; 0)$  không là nghiệm của hệ nên

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + (y + x) = 4 \\ \frac{x^2 + 1}{y}(y + x - 2) = 1. \end{cases}$$

Đặt  $a = \frac{x^2 + 1}{y}$ ,  $b = y + x$ . Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a(b - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a(4 - a - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 1 \\ y + x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + 1 = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có tất cả là hai nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 24.** Tìm nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$ .

- A.  $(x; y) = \left(\frac{10}{7}; \frac{1}{7}\right)$ .      B.  $(x; y) = (2; 1)$ .      C.  $(x; y) = \left(-\frac{10}{7}; \frac{1}{7}\right)$ .      D.  $(x; y) = (-2; -1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4y - 2) - y + 3 = 0 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{7} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 25.** Hệ phương trình  $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0 \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2 \end{cases}$  có các nghiệm là  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$  (với  $x_1, y_1, x_2, y_2$  là các số vô tỉ). Tìm  $S = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$ .

- A. 20.      B. 0.      C. 10.      D. 22.

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0 \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - |xy| = -2 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$

Xét hai trường hợp

— TH1. Nếu  $x = 0$ , hệ trở thành  $\begin{cases} y^2 = -2 \\ y^2 = 4 \end{cases}$  (vô nghiệm).

— TH2. Nếu  $x \neq 0$ , đặt  $y = kx$ , hệ trở thành  $\begin{cases} k^2x^2 - |k|x^2 = -2 \\ x^2 + 2kx^2 + 2k^2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(k^2 - |k|) = -2 & (1) \\ x^2(1 + 2k + 2k^2) = 4 & (2) \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} -2k^2 + 2|k| = 1 + 2k + 2k^2 &\Leftrightarrow 4k^2 + 2k - 2|k| + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4k^2 + 1 = 0 & \text{khi } k \geq 0 \\ 4k^2 + 4k + 1 = 0 & \text{khi } k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (2) ta được  $x^2 = 8 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$

Vậy  $S = 8 + 8 + 2 + 2 = 20$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 26.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$  có nghiệm.

- A.  $m \neq 4$ .      B.  $m \neq -2$ .      C.  $m \neq 2$ .      D.  $m \neq -4$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - 2y = 1 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 4)x = 5 \\ y = 2 - 2x \end{cases}$$

Hệ đã có nghiệm khi và chỉ khi phương trình  $(m + 4)x = 5$  có nghiệm  $\Leftrightarrow m \neq -4$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 27.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 \end{cases}$  ta được hai nghiệm  $(x_1; y_1)$  và  $(x_2; y_2)$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2$ .

- A.  $T = -25$ .      B.  $T = 0$ .      C.  $T = 25$ .      D.  $T = 50$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y & (1) \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 & (2) \end{cases}$$

Ta có (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - x - y \geq 0 \\ y^2 - x^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 24x - 24y + 144 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 12 \\ x^2 + (y - 12)x - 12y + 72 = 0 \quad (3) \end{cases}$

Mặt khác khi thay  $\sqrt{y^2 - x^2} = 12 - x - y$  và (2) ta được:  $x^2 + (y - 12)x + 12 = 0 \quad (4)$ .  
 Từ (3) và (4) ta được phương trình  $12y - 60 = 0 \Leftrightarrow y = 5$ .

Thay  $y = 5$  vào (4) ta được  $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$ .

Nhận xét (3; 5) và (4; 5) thỏa hệ phương trình.

Vậy nghiệm của hệ  $(x_1; y_1) = (3; 5) \vee (x_2; y_2) = (4; 5) \Rightarrow T = 3^2 + 4^2 - 5^2 = 0$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 28.** Các ông Xuân, Hạ, Thu, Đông cùng góp chung số vốn 600 tỉ đồng để thành lập một công ty. Số tiền ông Xuân, Hạ, Thu góp lần lượt bằng  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  tổng số tiền của ba người còn lại. Hỏi ông Đông góp bao nhiêu tiền?

- A. 200 tỉ đồng.                      B. 150 tỉ đồng.                      C. 120 tỉ đồng.                      D. 130 tỉ đồng.

**Lời giải.**

Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số tiền của ông Xuân, Hạ, Thu đã góp vốn. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} [y + z + (600 - x - y - z)] \\ y = \frac{1}{3} [x + z + (600 - x - y - z)] \\ z = \frac{1}{4} [x + y + (600 - x - y - z)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 150 \\ z = 120. \end{cases}$$

Vậy ông Đông góp số tiền là  $600 - x - y - z = 130$  tỉ đồng.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 29.** Cho đường thẳng  $(d_1): y = x + 7$ , đường thẳng  $(d_2): y = ax - 4$  và đường thẳng  $(d_3): y = 2x + 8$ . Biết rằng  $(d_1), (d_2)$  và  $(d_3)$  đồng quy tại  $M(b; c)$ , tính tổng  $S = a + b + c$ .

- A. -5.                      B. 6.                      C. -1.                      D. -10.

**Lời giải.**

Tọa độ giao điểm của  $(d_1)$  và  $(d_3)$  thỏa hệ

$$\begin{cases} y = x + 7 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6. \end{cases}$$

$(d_1), (d_2)$  và  $(d_3)$  đồng quy tại  $M(b; c)$  suy ra  $M(-1; 6)$ .

Ta có  $M \in (d_2)$  nên  $6 = -a - 4 \Leftrightarrow a = -10$ .

Vậy  $S = -10 - 1 + 6 = -5$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 30.** Phương trình  $m^2x + 2 = x + 2m$  có tập nghiệm là  $S = \mathbb{R}$  khi và chỉ khi

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m = -1$ .                      C.  $m = \pm 1$ .                      D.  $m \neq \pm 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $m^2x + 2 = x + 2m \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2m - 2$ .

Phương trình  $m^2x + 2 = x + 2m$  có tập nghiệm là  $S = \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 31.** Có bao nhiêu giá trị dương của tham số  $m$  để phương trình  $(m - 1)^2x - 3 = 4x - m$  có nghiệm dương.

- A. Vô số.                      B. 2.                      C. 0.                      D. 1.

**Lời giải.**

Ta có  $(m - 1)^2x - 3 = 4x - m \Leftrightarrow (m^2 - 2m - 3)x = 3 - m$ . (1)

TH1. Với  $m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1; m = 3$ .

- Với  $m = -1$ , ta có (1)  $\Leftrightarrow 0 = 2$  (vô lí).
- Với  $m = 3$ , ta có (1)  $\Leftrightarrow 0 = 0$  (đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ).

TH2. Với  $m^2 - 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$  và  $m \neq 3$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{m+1}$ . Để phương trình có nghiệm dương thì  $-\frac{1}{m+1} > 0 \Leftrightarrow m < -1$ .

Vậy có một giá trị dương của  $m$  để phương trình có nghiệm dương.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 32.** Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 gam hương liệu, 9 lít nước và 210 gam đường để pha chế nước ngọt loại I và nước loại II. Để pha 1 lít nước ngọt loại I cần 10 gam đường, 1 lít nước và 4 gam hương liệu. Để pha chế 1 lít nước ngọt loại II cần 30 gam đường, 1 lít nước và 1 gam hương liệu. Mỗi lít nước ngọt loại I được thưởng 80 điểm, mỗi lít nước ngọt loại II được thưởng 60 điểm. Hỏi số điểm thưởng cao nhất có thể của mỗi đội trong cuộc thi là bao nhiêu?

- A. 540.                      B. 600.                      C. 640.                      D. 720.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số lít nước ngọt loại I,  $y$  là số lít nước ngọt loại II.

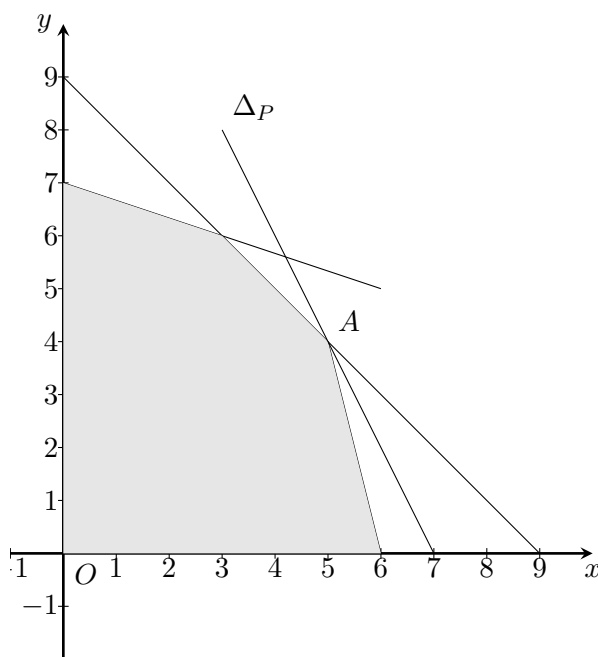
Ta có điều kiện về vật liệu ban đầu 
$$\begin{cases} 10x + 30y \leq 210 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 21 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Điểm thưởng đạt được là  $P = 80x + 60y$ .

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của  $P$  trong miền  $D$  được cho bởi hệ điều kiện (\*).

Biến đổi  $P = 80x + 60y \Leftrightarrow 80x + 60y - P = 0$  là họ đường thẳng  $\Delta_P$  trong hệ tọa độ  $Oxy$ .

Miền  $D$  được xác định trong hình vẽ bên dưới



Giá trị lớn nhất của  $P$  ứng với  $\Delta_P$  đi qua  $A(5; 4)$ , suy ra  $80 \cdot 5 + 60 \cdot 4 - P = 0 \Leftrightarrow P = 640$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 33.** Hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{5}{x+3} - \frac{9}{y-2} = 50 \\ \frac{x+3}{y-2} + \frac{y-2}{x+3} = 154 \end{cases}$$
 có nghiệm là  $(x_0; y_0)$ . Khi đó  $x_0 + y_0$  bằng

- A.  $x_0 + y_0 = \frac{121}{140}$ .                      B.  $x_0 + y_0 = 38$ .                      C.  $x_0 + y_0 = \frac{-121}{140}$ .                      D.  $x_0 + y_0 = -38$ .

**Lời giải.**



Đặt  $u = \frac{1}{x+3}$ ,  $v = \frac{1}{y-2}$ . Khi đó, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 5u - 9v = 50 \\ 3u + 7v = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 28 \\ \frac{1}{y-2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{83}{28} \\ y = \frac{21}{10} \end{cases}$$

Vậy  $x_0 + y_0 = -\frac{121}{140}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases}$  có nghiệm.

- A.  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .      B.  $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ .      C.  $[1; +\infty)$ .      D.  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương với  $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2m^2 - m \end{cases}$  nên  $x, y$  là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 2X + 2m^2 - m = 0. \tag{1}$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm, tức là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 + m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 35.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 10$ .

- A.  $m = 1$ .      B.  $m = \pm 1$ .      C.  $m = -1$ .      D.  $m = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 3m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{3 - m}{m^2 + 1} \end{cases}$ .

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 &\Leftrightarrow \left(\frac{1 + 3m}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{3 - m}{m^2 + 1}\right)^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow 1 + 6m + 9m^2 + 9 - 6m + m^2 = 10(m^4 + 2m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 10m^4 + 10m^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 0 \\ m^2 = -1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 36.** Gọi  $m_1, m_2$  là các giá trị của  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} (y-2)x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = m^2 \end{cases}$  có đúng 4 nghiệm nguyên. Khi đó  $m_1^2 + m_2^2$  bằng

- A. 10.      B. 9.      C. 20.      D. 4.

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} (y-2)(x-1) = 3 \\ (y-2)^2 + (x-1)^2 = m^2 \end{cases}$ .

Hệ có nghiệm nguyên  $(x_0; y_0)$  thì  $(x_0 - 1) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ .

— Nếu  $(x_0 - 1)^2 = 1$  thì  $(y_0 - 2)^2 = 9 \Rightarrow m^2 = 10$ .

— Nếu  $(x_0 - 1)^2 = 9$  thì  $(y_0 - 2)^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 10$ .

Do đó  $m_1 = -\sqrt{10}$ ,  $m_2 = \sqrt{10}$  nên  $m_1^2 + m_2^2 = 20$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 37.** Gọi  $(x; y)$  là nghiệm dương của hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$ . Tổng  $x + y$  bằng

A. 12.    B. 8.    C. 16.    D. 0.

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 8 - x \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ -y^2 = 64 - 16x \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 + 16x - 192 = 0 \\ y^2 = 128 - x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y^2 = 64 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -24 \\ y^2 = -448 \end{cases} \text{ (vô lý)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 8 \\ y = -8. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì  $(x; y)$  là nghiệm dương nên  $x + y = 16$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 38.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - 6y = -2. \end{cases}$

- A.  $(x; y) = (1; 2)$ .                          B.  $(x; y) = (2; 1)$ .                          C.  $(x; y) = (1; 1)$ .                          D.  $(x; y) = (-1; -1)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 8 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 39.** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn đồng thời các biểu thức  $x + 2y + 3z - 10 = 0$ ;  $3x + y + 2z - 13 = 0$  và  $2x + 3y + z - 13 = 0$ . Tính  $T = 2(x + y + z)$

- A.  $T = 12$ .    B.  $T = -12$ .    C.  $T = -6$ .    D.  $T = 6$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(x; y; z)$  thỏa hệ:  $\begin{cases} x + 2y + 3z - 10 = 0 \\ 3x + y + 2z - 13 = 0 \\ 2x + 3y + z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$

Khi đó  $T = 2(x + y + z) = 2(3 + 2 + 1) = 12$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 40.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases}$  có nghiệm là  $(x_1; y_1)$  và  $(x_2; y_2)$ . Tính  $S = x_1 + x_2$ .

- A.  $S = 2$ .    B.  $S = 0$ .    C.  $S = -1$ .    D.  $S = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 - 1 = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 41.** Tìm các giá trị của  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m & (2) \end{cases}$$

- A.  $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ .      B.  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ .      C.  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .      D.  $[1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Phương trình (2) tương đương  $xy(x + y) = 4m^2 - 2m$ .

Từ phương trình (1), thế  $y = 2 - x$  xuống (2) ta có  $x(2 - x) \cdot 2 = 4m^2 - 2m$ , hay

$$x^2 - 2x + 2m^2 - m = 0.$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình này có nghiệm, hay  $\Delta' \geq 0$ . Điều này tương đương với

$$1 - (2m^2 - m) \geq 0.$$

Giải bất phương trình trên ta được  $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 42.** Biết  $m$  là giá trị để hệ bất phương trình  $\begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \end{cases}$  có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $m \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ .      B.  $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$ .      C.  $m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .      D.  $m \in (-2; -1)$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ \sqrt{2xy + m} \geq 1 - (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ 2xy + m \geq 1 - 2x - 2y + (x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \leq 1(I) \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq m + 1(II) \end{cases}$$

Tập nghiệm của (I) là phần nằm giữa hai đường thẳng  $d : y = -x; d' : y = -x + 1$  và trên  $d'$ .

Nếu  $m \leq -1$  thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu  $m > -1$  thì tập nghiệm của (II) là hình tròn (C) (kể cả biên) có tâm  $A(1; 1)$  bán kính  $R = \sqrt{m + 1}$ .

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi  $d'$  là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Nghĩa là:  $\sqrt{m + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi  $m = -\frac{1}{2}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 43.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases}$  có nghiệm là  $(x_1; y_1)$  và  $(x_2; y_2)$ . Tính  $(x_1 + x_2)$ .

A. 2.      B. 0.      C. -1.      D. 1.

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1.$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 44.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  (biết  $m \geq -2019$ ) để hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2\sqrt[3]{y} - 2x^2 + x\sqrt[3]{y} = m \end{cases} \quad (I)$$

có nghiệm thực?

- A. 2021.      B. 2019.      C. 2020.      D. 2018.

**Lời giải.**

Đặt  $z = \sqrt[3]{y}$  khi đó hệ phương trình (I) trở thành

$$\begin{cases} x^2 + x - z = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2z - 2x^2 + xz = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2x - z = 1 - 2m \\ 2x(x^2 - x) - z(x^2 - x) = m \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2x - z = 1 - 2m \\ (x^2 - x)(2x - z) = m \end{cases} \quad (II).$$

Đặt  $\begin{cases} u = x^2 - x \\ v = 2x - z \end{cases}$  điều kiện  $u \geq -\frac{1}{4}$ .

Hệ phương trình (II) trở thành  $\begin{cases} u + v = 1 - 2m \\ uv = m. \end{cases}$

Khi đó  $u, v$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - (1 - 2m)X + m = 0$  (\*).

Để thỏa mãn bài toán khi (\*) có hai nghiệm trong đó có ít nhất một nghiệm thuộc  $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ .

Mà (\*)  $\Leftrightarrow X - X^2 = (2X + 1)m$ .

Để thấy  $X = -\frac{1}{2}$  không là nghiệm của phương trình (\*) nên (\*)  $\Leftrightarrow m = \frac{X - X^2}{2X + 1}$ .

Xét hàm số  $g(X) = \frac{X - X^2}{2X + 1}$  trên  $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ .

Ta có  $g'(X) = \frac{(1 - 2X)(2X + 1) - (X - X^2)}{(2X + 1)^2} = \frac{1 - X - 3X^2}{(2X + 1)^2}$ .

Xét  $g'(X) = 0$  suy ra  $1 - X - 3X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ X = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

$X$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
$g'(X)$			+	0	-
$g(X)$				$-\frac{\sqrt{13}}{2}$	
			$-\frac{5}{8}$		$-\infty$

Chọn đáp án **C**

□

**Câu 45.** Gọi  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$  là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases}$ .

Tính  $|x_1 - x_2|$ .

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ , điều kiện:  $S^2 - 4P \geq 0$ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 3P = 8 \quad (1) \\ P + 3S = 1 \quad (2). \end{cases}$$

Từ (1)  $\Rightarrow P = 1 - 3S$ . Thay vào (2) ta được:

$$S^2 + S - 3(1 - 3S) = 8 \Leftrightarrow S^2 + 10S - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ S = -11 \end{cases}.$$

$$\text{TH1: } S = 1 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

TH2:  $S = -11 \Rightarrow P = 34$  (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy  $|x_1 - x_2| = 3$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 46.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 \end{cases}$  ta được hai nghiệm  $(x_1; y_1)$  và  $(x_2; y_2)$ . Tính giá

trị biểu thức  $T = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2$

A.  $T = -25$ .

B.  $T = 0$ .

C.  $T = 25$ .

D.  $T = 50$ .

**Lời giải.**

Phương pháp

— Đặt điều kiện cho hệ phương trình xác định.

— Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế sau đó tính giá trị của biểu thức.

Cách giải:

Điều kiện:  $y^2 \geq x^2$ .

$$\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y & (1) \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y & (1) \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - y \geq 0 \\ x^2 + 2x\sqrt{y^2 - x^2} + y^2 - x^2 = 144 - 24y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 12 \\ 2x\sqrt{y^2 - x^2} = 144 - 24y & (*) \end{cases}$$

Thế (2) vào (\*) ta được:  $2.12 = 144 - 24y \Leftrightarrow y = 5$  (tm)

$$\Rightarrow x\sqrt{25 - x^2} = 12 \Leftrightarrow x^2(25 - x^2) = 144$$

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 = 16 + 9 - 5^2 = 0$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 47.** Trong các hệ phương trình được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, hệ phương trình nào vô nghiệm?

A.  $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

**Lời giải.**

Hệ phương trình  $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$  có  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$  nên vô nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 48.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases}$

A.  $(-1; -2)$ .

B.  $(10; 5)$ .

C.  $(-10; -5)$ .

D.  $(1; 2)$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương  $\begin{cases} x = 3y - 5 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 49.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$  tương đương với hệ phương trình nào sau đây?

A.  $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x - y = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x = 2 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

**Lời giải.**

Cộng theo vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho ta được  $2x + y = 8$ . Vậy hệ phương trình đã cho tương đương  $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 50.** Tìm tập nghiệm của phương trình  $2x - y = 4$ .

- A.  $\{(2; 0)\}$ .      B.  $\{(x; 2x - 4) | x \in \mathbb{R}\}$ .      C.  $\{2x - 4; x | x \in \mathbb{R}\}$ .      D.  $\emptyset$ .

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 4. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 51.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 3x - 6y = 6. \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $(2; 0)$  là một nghiệm của hệ phương trình.  
 B. Biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình trên là một đường thẳng.  
 C. Biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình trên là một điểm.  
 D. Tập nghiệm của hệ phương trình là  $\{(2; 0)\}$ .

**Lời giải.**

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $(2; 0)$ . Do đó khẳng định “Biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình trên là một đường thẳng” là sai.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 52.** Gọi  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{2x_0^2 + 3y_0^2}{4}$  là

- A.  $A = \frac{11}{4}$ .      B.  $A = \frac{9}{4}$ .      C.  $A = \frac{13}{2}$ .      D.  $A = 4$ .

**Lời giải.**

Có  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy  $(x_0; y_0) = (2; 1)$ , suy ra  $A = \frac{2x_0^2 + 3y_0^2}{4} = \frac{11}{4}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 53.** Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A.  $x - 2y = 1$ .      B.  $x^2 - 2y - 1 = 0$ .      C.  $x - 2y + z - 1 = 0$ .      D.  $xy - 2y - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  có dạng  $ax + by = c$  trong đó  $a, b, c$  là các hệ số với điều kiện  $a, b$  không đồng thời bằng không.

Vậy  $x - 2y = 1$  là phương trình bậc nhất hai ẩn.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 54.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2z = 9. \end{cases}$

- A.  $(1; 2; 3)$ .      B.  $(-1; -2; -3)$ .      C.  $(\frac{29}{13}; \frac{34}{13}; \frac{15}{13})$ .      D.  $(\frac{19}{17}; \frac{48}{17}; \frac{61}{17})$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 4x - 2y + 2z = 6 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 5x - z = 2 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 10x - 2z = 4 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 13x = 13 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 55.** Một hình chữ nhật có chu vi 200 cm, chiều dài hơn chiều rộng là 10 cm. Số đo chiều dài, chiều rộng lần lượt là bao nhiêu?

- A. 55 cm, 45 cm.      B. 105 cm, 95 cm.      C. 45 cm, 55 cm.      D. 20 cm, 10 cm.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  (cm),  $y$  (cm) lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ( $0 < y \leq x$ ). Khi đó ta có

$$\begin{cases} 2(x + y) = 200 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55 \\ y = 45. \end{cases}$$

Vậy chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 55 cm, 45 cm.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 56.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m. \end{cases}$

Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất.

- A.  $m \neq 1$ .      B.  $m \neq -1$ .      C.  $m \neq \pm 1$ .      D.  $m = \pm 1$ .

**Lời giải.**

— Xét  $m = 0$  khi đó ta có hệ  $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ . Khi đó, hệ phương trình có nghiệm  $(0; 0)$ .

— Xét  $m \neq 0$ , hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} m^2x + my = m^2 \\ x + my = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)x = m^2 - m \\ x + my = m. \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 57.** Tìm nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ -x + 2z + 3y = -16. \end{cases}$

- A.  $(2; -2)$ .      B.  $(-2; 2; 4)$ .      C.  $(2; -2; -4)$ .      D.  $(2; -1; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ -x + 3y + 2z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 2x + 4y - 6z = 20 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 9y - 7z = 10 \\ 5y - z = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 9y - 7z = 10 \\ 35y - 7z = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 2x - 5y + z = 10 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 \cdot (-2) - 4 = 10 \\ y = -2 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -4. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x, y, z) = (2; -2; -4)$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 58.** Tìm  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:  $\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x - 3y = 2018. \end{cases}$

- A.  $m \neq \frac{3}{2}$ .      B.  $m \neq -\frac{2}{3}$ .      C.  $m \neq -\frac{3}{2}$ .      D.  $m \neq \frac{2}{3}$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2x + 2my = 1 \\ 2x - 3y = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 3)y = -2017 \\ 2x - 3y = 2018 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $2m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 59.** Tính tổng  $3a + b$ , biết rằng  $(a; b)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 2x - 4y = 3. \end{cases}$

A.  $3a + b = 2$ .                      B.  $3a + b = 3$ .                      C.  $3a + b = 4$ .                      D.  $3a + b = 5$ .

**Lời giải.**

Dễ thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $\left(\frac{23}{14}; \frac{1}{14}\right)$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 60.** Tìm độ dài hai cạnh của một tam giác vuông biết rằng khi ta tăng mỗi cạnh lên 2 thì diện tích tăng lên 17, khi ta giảm chiều dài cạnh này đi 3 và cạnh kia đi 1 thì diện tích giảm đi 11. Độ dài hai cạnh lần lượt là

- A. 5 và 10.                      B. 4 và 7.                      C. 2 và 3.                      D. 5 và 6.

**Lời giải.**

Gọi hai cạnh có độ dài lần lượt là  $x$  và  $y$ .

$$\text{Khi đó ta có } \frac{1}{2}(x+2)(y+2) = \frac{1}{2}xy + 17 \Leftrightarrow x + y = 15 \tag{1}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2}(x-3)(y-1) = \frac{1}{2}xy - 11 \Leftrightarrow -x - 3y = -25 \Leftrightarrow x + 3y = 25 \tag{2}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 61.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục là 3 và tích hai chữ số đó lớn hơn tổng hai chữ số đó 17 đơn vị.

- A. 36.                      B. 47.                      C. 58.                      D. 69.

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm  $\overline{ab}$  với  $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}$  và  $a, b \leq 9$ .

$$\text{Theo giả thiết ta có } b = a + 3, \tag{1}.$$

$$\text{Mặt khác ta có } ab = a + b + 17, \tag{2}.$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } a(a+3) = a + a + 3 + 17 \Leftrightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -5 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy  $a = 4 \Rightarrow b = 7$  nên số cần tìm là 47.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 62.** Tìm tập nghiệm  $S$  của hệ phương trình  $\begin{cases} x + 3|y| = 1 \\ x + y = -3. \end{cases}$

- A.  $S = \{(-5; 2), (-2; -1)\}$ .                      B.  $S = \{(-5; -2), (-2; -1)\}$ .  
 C.  $S = \{(5; -2), (5; 2)\}$ .                      D.  $S = \{(2; 1), (-2; 1)\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{*Với } y \geq 0, \text{ ta có } \begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

$$\text{*Với } y < 0, \text{ ta có } \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Vậy các nghiệm của hệ là  $(-5; 2)$  và  $(-2; -1)$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 63.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất.

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m \neq \pm 1$ .                      C.  $m = -1$ .                      D.  $m \neq 1$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = m^2 - 1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 = m(m+1) - 2 = m^2 + m - 2.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 = 2m - (m+1) = m - 1.$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện là  $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □



**Câu 64.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$  có vô số nghiệm khi nào?

A.  $m \neq \pm 1$ .

B.  $m = 0$ .

C.  $m = 0$  hoặc  $m = -1$ .

D.  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = m^2 - 1$ .

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 = m^2 + m$ .

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 = m + 1$ .

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi  $D = D_x = D_y = 0$ .

Suy ra  $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m^2 + m = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 65.** Giả sử hệ phương trình  $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất  $(x_0, y_0)$ . Đẳng thức nào sau đây

luôn đúng với mọi giá trị của  $m$ ?

A.  $x_0 + y_0 = 0$ .

B.  $x_0 + y_0 = 1$ .

C.  $x_0 - y_0 = 1$ .

D.  $x_0^2 - y_0^2 = 1$ .

**Lời giải.**

Từ phương trình đầu ta có  $x = my$ .

Thay vào phương trình còn lại ta có  $(m^2 - 1)y = m + 1 \Leftrightarrow y = \frac{m + 1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m - 1}$ , ( $m \neq \pm 1$ ).

Suy ra  $x = \frac{m}{m - 1}$ , hay  $(x_0; y_0) = \left(\frac{m}{m - 1}; \frac{1}{m - 1}\right)$ .

Vậy  $x_0 - y_0 = 1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 66.** Điều kiện của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + (2 - m)y = m \end{cases}$  có nghiệm duy nhất là

A.  $m \neq \pm 1$ .

B.  $m \neq 1$ .

C.  $m \neq -1$ .

D.  $m = \pm 1$ .

**Lời giải.**

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1 \neq 0$ .

Suy ra  $m \neq 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 67.** Phương trình  $(m + 1)x - (2m - 1)y = 3m$  luôn có nghiệm cố định  $(a, b)$  với mọi giá trị của  $m$ . Tính  $ab$ .

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

**Lời giải.**

Có  $(m + 1)x - (2m - 1)y = 3m \Leftrightarrow mx + x - 2my + y = 3m \Leftrightarrow m(x - 2y - 3) + x + y = 0$ .

Để phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$  thì  $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 68.** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} 2mx + 3y = 5 \\ (m + 1)x + y = 0 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  thỏa

mãn  $x + y > 0$ .

A.  $-3 < m < 0$ .

B.  $m > 0$  hoặc  $m < -3$ .

C.  $m \geq 0$ .

D.  $m < -3$ .

**Lời giải.**

Xét hệ phương trình  $\begin{cases} 2mx + 3y = 5 & (1) \\ (m + 1)x + y = 0 & (2) \end{cases}$ .

Từ phương trình (2) ta có  $y = -(m + 1)x$ , thay vào phương trình (1) ta được

$$2mx - 3(m + 1)x = 5 \Leftrightarrow -(m + 3)x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{m + 3} \quad (m \neq -3).$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{5(m + 1)}{m + 3} = \frac{5m + 5}{m + 3}.$$

$$\text{Do đó } x + y = \frac{5m}{m + 3}.$$

$$\text{Vậy } x + y > 0 \Leftrightarrow \frac{5m}{m + 3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 69.** Khi  $m$  thay đổi, quỹ tích giao điểm của hai đường thẳng  $d : \frac{mx}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0$  và  $d' : -\frac{x}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{my}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$  là

- A. một đường thẳng.      B. tập rỗng.      C. một đường tròn.      D. mặt phẳng  $Oxy$ .

**Lời giải.**

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} \frac{mx}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{my}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1. \end{cases}$

$$\text{Ta có } D = \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)^2 = 1, D_x = \frac{-1}{\sqrt{m^2 + 1}}, D_y = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là  $(x, y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{m^2 + 1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)$ . Dễ thấy  $x^2 + y^2 = 1$  nên quỹ tích giao điểm là đường tròn.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 70.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = -7 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases}$  có nghiệm là

- A.  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ .      B.  $(1; 2)$ .      C.  $(-1; 2)$ .      D.  $(-1; -2)$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = -7 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -1 \\ \frac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 71.** Tập hợp các nghiệm  $(x, y)$  của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -6x + 9y = -12 \end{cases}$  là

- A. một đường thẳng.      B. toàn bộ mặt phẳng  $Oxy$ .  
C. nửa mặt phẳng.      D.  $\emptyset$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = -\frac{1}{3}$  nên hệ vô số nghiệm hay hai đường thẳng trùng nhau nên tập hợp nghiệm của hệ chính là một đường thẳng.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 72.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y+1} = 4 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{3}{y+1} = 5 \end{cases}$  có nghiệm là

- A.  $\left(\frac{7}{2}; -\frac{2}{7}\right)$ .      B.  $\left(\frac{2}{5}; -\frac{7}{5}\right)$ .      C.  $\left(-\frac{2}{7}; \frac{7}{2}\right)$ .      D.  $\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{x-1}; v = \frac{1}{y+1}, \text{ hệ trở thành } \begin{cases} 3u + 2v = 4 \\ 2u + 3v = 5 \end{cases}, \text{ giải hệ ta được } u = \frac{2}{5}; v = \frac{7}{5}.$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{7}{2}; y = -\frac{2}{7}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 73.** Số nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$  là

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 0.

**Lời giải.**

$$\text{Có } \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 74.** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$  có duy nhất nghiệm khi

- A.  $m = 10$ .                                      B.  $m = \frac{10}{3}$ .                                      C.  $m = -10$ .                                      D.  $m = -\frac{10}{3}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Có } \begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Thay vào phương trình còn lại ta được  $2m - 10 - m = 0 \Leftrightarrow m = 10$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 75.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{3(x+y)}{x-y} = -7 \\ \frac{5x-y}{y-x} = \frac{5}{3} \end{cases}$  có

- A. 0 nghiệm.                                      B. 1 nghiệm.                                      C. 2 nghiệm.                                      D. 3 nghiệm.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x \neq y$ .

Hệ phương trình tương đương với  $\begin{cases} 3(x+y) = -7(x-y) \\ 3(5x-y) = 5(y-x) \end{cases}$ .

Khi đó hệ trở thành  $\begin{cases} 10x - 4y = 0 \\ 20x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  (Không thỏa điều kiện).

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 76.** Số nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} (x+3)(y-5) = xy \\ (x-2)(y+5) = xy \end{cases}$  là

- A. 1 nghiệm.                                      B. 0 nghiệm.                                      C. 2 nghiệm.                                      D. 3 nghiệm.

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} xy - 5x + 3y - 15 = xy \\ xy + 5x - 2y - 10 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3y = 15 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 25. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm (12; 25).

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 77.** Số nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{6x-3}{y-1} - \frac{2y}{x+1} = 5 \\ \frac{4x-2}{y-1} - \frac{4y}{x+1} = 2 \end{cases}$  là

- A. 1 nghiệm.                                      B. 2 nghiệm.                                      C. 3 nghiệm.                                      D. 0 nghiệm.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} u = \frac{2x-1}{y-1} \\ v = \frac{y}{x+1} \end{cases}$ . Hệ trở thành  $\begin{cases} 3u - 2v = 5 \\ 2u - 4v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Ta được hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{2x-1}{y-1} = 2 \\ \frac{y}{x+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 78.** Xét tập hợp các điểm có tọa độ  $(x; y)$  là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ . Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

- A.  $a^2 + b^2 \neq 0, c = 0$ .    B.  $a = b = 0, c \neq 0$ .    C.  $a = b = c = 0$ .    D.  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện để tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng đi qua gốc tọa độ là  $a^2 + b^2 \neq 0, c = 0$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 79.** Xét tập hợp các điểm có tọa độ  $(x; y)$  là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ . Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng song song với trục tung.

- A.  $a = 0, b \neq 0, c = 0$ .    B.  $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ .    C.  $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ .    D.  $a \neq 0, b = c = 0$ .

**Lời giải.**

Để đường thẳng song song với trục tung thì  $b = 0$ , còn  $a, c$  đều phải khác 0.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 80.** Xét tập hợp các điểm có tọa độ  $(x; y)$  là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ . Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng song song với trục hoành.

- A.  $a \neq 0, b = c = 0$ .    B.  $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ .    C.  $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ .    D.  $a = 0, b \neq 0, c = 0$ .

**Lời giải.**

Để đường thẳng song song trục hoành thì  $a = 0, b$  và  $c$  khác 0.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 81.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$ .

- A.  $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$ .    B.  $(x; y) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right)$ .    C.  $(x; y) = (3; 5)$ .    D.  $(x; y) = (-3; -5)$ .

**Lời giải.**

Có  $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 82.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{135}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 8 \\ \frac{27}{x+y} + \frac{21}{x-y} = 2 \end{cases}$ .

- A.  $(x; y) = (24; 3)$ .    B.  $(x; y) = (3; 24)$ .  
C.  $(x; y) = \left(\frac{8}{189}; -\frac{1}{189}\right)$ .    D.  $(x; y) = \left(-\frac{8}{189}; \frac{1}{189}\right)$ .

**Lời giải.**

Có  $\begin{cases} \frac{135}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 8 \\ \frac{27}{x+y} + \frac{21}{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{21} \end{cases}$ .

Suy ra  $\begin{cases} x+y = 27 \\ x-y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 83.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 3|x| + 5y = 9 \\ 2x - |y| = 7. \end{cases}$

- A.  $(x; y) = \left(-\frac{43}{13}; \frac{3}{13}\right)$ . B.  $(x; y) = \left(-\frac{26}{7}; \frac{3}{7}\right)$ . C.  $(x; y) = \left(\frac{43}{13}; -\frac{3}{13}\right)$ . D.  $(x; y) = \left(\frac{26}{7}; -\frac{3}{7}\right)$ .

**Lời giải.**

+ Với  $x \geq 0, y \geq 0$  ta có  $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{44}{13} \\ y = -\frac{3}{13} \end{cases}$  (loại).

+ Với  $x \geq 0, y < 0$  ta có  $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}$  (nhận).

+ Với  $x < 0, y \geq 0$  ta có  $\begin{cases} -3x + 5y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{44}{7} \\ y = \frac{39}{7} \end{cases}$  (loại).

+ Với  $x < 0, y < 0$  ta có  $\begin{cases} -3x + 5y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$  (loại).

Chọn đáp án **D** □

**Câu 84.** Một lớp học có 36 học sinh được phân thành 3 nhóm  $A, B, C$  để thảo luận trong giờ học toán. Biết nhóm  $A$  ít hơn nhóm  $B$  là 2 học sinh, tổng số học sinh nhóm  $A$  và  $C$  gấp đôi số học sinh nhóm  $B$ . Hỏi số lượng học sinh từng nhóm  $A, B, C$  lần lượt là bao nhiêu?

- A. 10; 12; 14. B. 12; 10; 14. C. 14; 12; 10. D. 12; 14; 16.

**Lời giải.**

Gọi  $A, B, C$  lần lượt là số học sinh của 3 nhóm  $A, B, C$  ( $0 < A, B, C < 36; A, B, C \in \mathbb{N}$ ). Theo đề ta có

$$\begin{cases} A + B + C = 36 \\ B - 2 = A \\ A + C = 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 36 \\ A - B = -2 \\ A - 2B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 10 \\ B = 12 \\ C = 14. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 85.** Hiện nay, tuổi của cha gấp bốn lần tuổi của con và tổng số tuổi của hai cha con là 50. Hỏi bao nhiêu năm nữa tuổi cha gấp ba lần tuổi con ?

- A. 6 năm. B. 7 năm. C. 5 năm. D. 8 năm.

**Lời giải.**

Gọi tuổi của con hiện nay là  $x$  ( $x > 0$ ). Theo đề bài tuổi của cha là  $4x$  và  $4x + x = 50$ , hay  $x = 10$ . Gọi số năm nữa mà tuổi cha gấp ba lần tuổi con là  $y$  ( $y > 0$ ). Ta có  $40 + y = 3(10 + y)$ , hay  $y = 5$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 86.** Biết hai hệ phương trình  $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ (m + 1)x + 2z = 2m - 1 \end{cases}$  và  $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x + ny - 2nz = 3 \end{cases}$  có nghiệm chung.

Tính giá trị  $m + n$ .

- A. 5. B. 3. C. -5. D. -3.

**Lời giải.**

Gọi  $(x_0; y_0; z_0)$  là nghiệm chung của hai hệ đã cho.

Suy ra  $(x_0; y_0; z_0)$  sẽ là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ .

Giải hệ này ta được  $(x_0; y_0; z_0) = (1; 0; 1)$ .

Thay vào các phương trình còn lại ta tìm được  $m = 4, n = -1$ .

Vậy  $m + n = 3$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 87.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a + 1)x + y = 0. \end{cases}$  Tìm điều kiện của tham số  $a$  để hệ đã cho có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

- A.  $a \neq -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+3}; \frac{5a+5}{a+3}\right)$ .
- B.  $a = -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+3}; \frac{5a+5}{a+3}\right)$ .
- C.  $a = -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+1}; \frac{5a+5}{a+3}\right)$ .
- D.  $a \neq -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+1}; \frac{5a+5}{a+3}\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $D = \begin{vmatrix} 2a & 3 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} = -a - 3, D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5, D_y = \begin{vmatrix} 2a & 5 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix} = -5(a+1)$ .

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì  $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -3$ .  
 Với  $a \neq -3$ , hệ có nghiệm duy nhất là  $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{a+3} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{5a+5}{a+3} \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 88.** Cho đồng nhất thức  $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$ . Tính  $A + B + C$ .

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

**Lời giải.**

Với  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ , ta có  $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1)^2 + B(x - 2) + C(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)^2}$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 1 = (A + C)x^2 + (2A + B - C)x + A - 2B - 2C$ .

Đồng thức trên đúng với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 2A + B - C = 0 \\ A - 2B - 2C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = 0 \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Do đó  $A + B + C = 1$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 89.**

Cho bảng  $3 \times 3$  như hình bên, hãy tìm  $e$  biết rằng  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  là các số khác nhau thuộc tập số tự nhiên từ 1 đến 9, và tổng các hàng ngang, hàng dọc, đường chéo đều bằng nhau.

$a$	$b$	$c$
$d$	$e$	$f$
$g$	$h$	$i$

- A. 3.
- B. 5.
- C. 7.
- D. 9.

**Lời giải.**

Ta có  $a + b + c = d + e + f = g + h + i = k$  với  $k$  là số tự nhiên.

Do đó  $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 3k$ .

Mà  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  là một hoán vị của các số tự nhiên từ 1 đến 9 nên

$$1 + 2 + \dots + 9 = 3k \Leftrightarrow \frac{9(1+9)}{2} = 3k \Leftrightarrow k = 15$$

$a$	$b$	$c$
$d$	$e$	$f$
$g$	$h$	$i$

Lại có:  $\begin{cases} d + e + f = k \\ b + e + h = k \\ a + e + i = k \\ c + e + g = k \end{cases}$  suy ra  $a + b + c + d + 4e + f + g + h + i = 4k$

$$\Leftrightarrow 3e + (a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 4k \Leftrightarrow e = 5.$$

Chọn đáp án **B** □

**Câu 90.** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(a; b)$  sao cho hệ sau vô nghiệm  $\begin{cases} ax + y = 2 \\ 10x + by = 4. \end{cases}$

- A.  $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (2; 5), (5; 2)\}$ .
- B.  $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (2; 5)\}$ .
- C.  $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (-1; -10), (-10; -1), (2; 5), (-2; -5), (-5; -2)\}$ .
- D.  $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (-1; -10), (-10; -1), (2; 5), (5; 2), (-2; -5), (-5; -2)\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = ab - 10, D_x = 2b - 4, D_y = 4a - 20$ .

Điều kiện cần để hệ vô nghiệm là:  $D = 0 \Leftrightarrow ab = 10$  vì  $a, b \in \mathbb{Z}$  nên các cặp số thỏa mãn:

$(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (-1; -10), (-10; -1), (2; 5), (5; 2), (-2; -5), (-5; -2)\}$ .

Điều kiện đủ để hệ vô nghiệm là  $D_x \neq 0$  hoặc  $D_y \neq 0$ . Kiểm tra thì cặp  $\begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$  không thỏa mãn.

Vậy có 7 cặp số thỏa yêu cầu bài toán là

$$(a, b) \in \{(1, 10), (10, 1), (-1; -10), (-10; -1), (2; 5), (-2; -5), (-5; -2)\}.$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 91.** Tìm  $a, b$  để hệ  $\begin{cases} (m+3)x + 4y = 5a + 3b + m \\ x + my = ma - 2b + 2m - 1 \end{cases}$  có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

- A.  $(a; b) = (14; -1)$ .      B.  $(a; b) = (14; -1)$ .      C.  $(a; b) = (14; -1)$ .      D.  $(a; b) = (14; -1)$ .

**Lời giải.**

$$(I) \begin{cases} (m+3)x + 4y = 5a + 3b + m \\ x + my = ma - 2b + 2m - 1 \end{cases}$$

Ta có:  $D = m^2 + 3m - 4$ .

Nếu  $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$  và  $m \neq 4$  hệ có nghiệm với mọi  $a, b$ .

Để hệ có nghiệm với mọi  $m$  thì hệ phải có nghiệm với  $m = 1$  và  $m = -4$ .

$$\text{--- } m = 1 \text{ thì } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 5a + 3b + 1 \\ x + y = a - 2b + 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra hệ có nghiệm } \Leftrightarrow 5a + 3b + 1 = 4(a - 2b + 1) \Leftrightarrow 5a + 3b + 1 = 4a - 8b + 4 \Leftrightarrow a + 11b = 3 \quad (1)$$

$$\text{--- } m = -4 \text{ thì } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 5a + 3b - 4 \\ x - 4y = -4a - 2b - 9 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra hệ có nghiệm } \Leftrightarrow 5a + 3b - 4 = 4a + 2b + 9 \Leftrightarrow a + b = 13 \quad (2)$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm với mọi } m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 11b = 3 \\ a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = -1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 92.** Tìm  $m$  nguyên để hệ  $\begin{cases} mx + y - 2m = 0 \\ x + my - (m + 1) = 0 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  và  $x, y$  là các số nguyên.

- A.  $m = -2$  hoặc  $m = 0$ .      B.  $m = \pm 1$ .  
C.  $m = 2$ .      D.  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = m^2 - 1, D_x = 2m^2 - m - 1, D_y = m^2 - m$ .

Để hệ có nghiệm duy nhất thì  $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$  (\*)

$$\text{Với điều kiện } (*), \text{ hệ có nghiệm là } (x, y) = \left( \frac{2m+1}{m+1}; \frac{m}{m+1} \right) = \left( 2 - \frac{1}{m+1}; 1 - \frac{1}{m+1} \right).$$

Để nghiệm của hệ thỏa mãn  $x, y$  là các số nguyên thì  $m + 1$  là ước của 1.

TH1:  $m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ .

TH2:  $m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 93.** Tìm điều kiện của số nguyên  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = a \\ x + (m+1)y = b \end{cases}$  có nghiệm duy nhất  $(x, y)$

$(x, y$  là các số nguyên) với mọi giá trị nguyên của  $a, b$ .

- A.  $m = 0$ .      B.  $m = \pm 1$ .  
C.  $m = 0$  hoặc  $m = -1$ .      D.  $m = 1$  hoặc  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = m(m+1) + 1 = m^2 + m + 1, D_x = a(m+1) + b, D_y = bm - a$ . Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  trong đó  $x, y$  là các số nguyên với mọi  $a, b$  nguyên thì  $D$  là ước của 1.

$$\text{TH1: } m^2 + m + 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

TH2:  $m^2 + m + 1 = -1 \Leftrightarrow m^2 + m + 2 = 0$  (vô nghiệm).

Chọn đáp án **C** □

**Câu 94.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = m - 1 \\ 2x - y = m + 3 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất  $(a, b)$  và  $a^2 + b^2$  nhỏ nhất.

- A.  $m = -\frac{3}{2}$ .                      B.  $m = \frac{1}{2}$ .                      C.  $m = -1$ .                      D.  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Nghiệm của hệ phương trình cho bởi công thức  $(a, b) = \left(\frac{3m + 5}{5}; \frac{m - 5}{5}\right)$ .

$$a^2 + b^2 = \frac{10m^2 + 20m + 50}{25} = \frac{10(m + 1)^2 + 40}{25} \geq \frac{8}{5}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 95.** Biết rằng khi  $a, b$  thay đổi thỏa mãn  $ab \neq 0$  thì giao điểm của hai đường thẳng  $d : ax + by = 0$  và  $d' : bx - ay = 1$  luôn nằm trên đường tròn đơn vị tâm  $O(0, 0)$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $ab$ .

- A.  $\frac{1}{4}$ .                      B. 1.                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D. 2.

**Lời giải.**

Tọa độ giao điểm  $M$  của  $d$  và  $d'$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx - ay = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-a}{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow M \left( \frac{b}{a^2 + b^2}; \frac{-a}{a^2 + b^2} \right).$$

Vì  $M$  thuộc vào đường tròn tâm  $O(0, 0)$ , bán kính 1 nên  $\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-a}{a^2 + b^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$ .

Ta có  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}$ . Dấu bằng xảy ra khi  $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  hoặc  $a = b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 96.**

Cho một bảng ô vuông  $3 \times 3$  như hình bên. Ta điền các số từ 1 đến 9 vào các ô vuông trong bảng sao cho mỗi số được điền vào đúng một ô và tổng các số trên mỗi hàng ngang, mỗi cột và hai đường chéo đều bằng nhau. Hỏi số ở vị trí trung tâm của bảng là bao nhiêu?


- A. 4.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 7.

**Lời giải.**

Ta kí hiệu các số lần lượt từ trái qua phải, từ trên xuống là  $a_1, a_2, \dots, a_9$ . Vì tổng của các số trên mỗi hàng ngang, mỗi cột và hai đường chéo bằng nhau nên mỗi tổng đó bằng 15.

Ta có hệ phương trình

$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_7$	$a_8$	$a_9$

$$\begin{cases} a_1 + a_5 + a_9 = 15 \\ a_3 + a_5 + a_7 = 15 \\ a_2 + a_5 + a_8 = 15 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 15. \end{cases}$$

Cộng bốn phương trình trên ta có  $\sum_{i=1}^9 a_i + 3a_5 = 60 \Leftrightarrow 45 + 3a_5 = 60 \Leftrightarrow a_5 = 5$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 97.** Số nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2|x - 6| + 3|y + 1| = 5 \\ 5|x - 6| - 4|y + 1| = 1 \end{cases}$  là

- A. 4.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = |x - 6| \\ v = |y + 1| \end{cases}, u \geq 0, v \geq 0$ .

Hệ phương trình trở thành  $\begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 5u - 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1. \end{cases}$



Khi đó, ta nhận được  $\begin{cases} 1 = |x - 6| \\ 1 = |y + 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = \pm 1 \\ y + 1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ y = -2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(7; 0)$ ,  $(7; -2)$ ,  $(5; 0)$ ,  $(5; -2)$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 98.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} 2m^2x + 3(m - 1)y = 3 \\ m(x + y) - 2y = 2 \end{cases}$  vô nghiệm.

- A.  $m = 3$  hoặc  $m = \frac{1}{2}$ .    B.  $m = 6$  hoặc  $m = \frac{1}{5}$ .    C.  $m = 1$  hoặc  $m = \frac{1}{3}$ .    D.  $m = 2$  hoặc  $m = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương với  $\begin{cases} 2m^2x + 3(m - 1)y = 3 \\ mx + (m - 2)y = 2 \end{cases}$

Ta có  $D = 2m^3 - 7m^2 + 3m$ ,  $D_x = -3m$ ,  $D_y = 4m^2 - 3m$ .

Hệ đã cho vô nghiệm trong hai trường hợp:

TH1:  $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 7m^2 + 3m = 0 \\ -3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

TH2:  $\begin{cases} D = 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 7m + 3m = 0 \\ 4m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm khi  $m = 3$  hoặc  $m = \frac{1}{2}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 99.** Tìm các giá trị của  $b$  sao cho với mọi  $a$  thì hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1 - a)y = b^2 \end{cases}$  có nghiệm.

- A.  $b = 0$ .    B.  $b = 1$ .    C.  $b = 2$ .    D.  $b = 4$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = 1 - a - 2a^2$ .

Nếu  $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases}$  thì hệ phương trình có nghiệm.

Khi  $a = -1$ , hệ trở thành  $\begin{cases} x - 2y = b \\ x - 2y = -b^2 \end{cases}$ .

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi  $b = -b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -1 \end{cases}$ .

Khi  $a = \frac{1}{2}$ , hệ trở thành  $\begin{cases} x + y = b \\ x + y = 2b^2 \end{cases}$ .

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi  $b = 2b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ .

Vậy hệ có nghiệm với mọi  $a \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} b = 0 \\ b = -1 \\ b = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow b = 0$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 100.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} (2m + 1)x - 3y = 3m - 2 \\ (m + 3)x - (m + 1)y = 2m \end{cases}$  Tìm  $m$  để hệ có duy nhất nghiệm  $(x; y)$  thỏa  $x \geq 2y$ .

- A.  $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m < -2 \end{cases}$ .    B.  $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ .    C.  $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 2 \\ m < -2 \end{cases}$ .    D.  $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = -2(m - 2)(m + 2)$ ,  $D_x = -(m - 2)(3m + 1)$ ,  $D_y = (m - 2)(m - 3)$ .

Hệ có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi  $m \neq \pm 2$  (\*)

Với điều kiện (\*), hệ có nghiệm duy nhất và 
$$\begin{cases} x = \frac{3m + 1}{2(m + 2)} \\ y = -\frac{m - 3}{2(m + 2)} \end{cases}$$

Ta có  $x \geq 2y \Leftrightarrow \frac{3m + 1}{2(m + 2)} \geq -\frac{2(m - 3)}{2(m + 2)} \Leftrightarrow \frac{5m - 5}{2(m + 2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < -2. \end{cases}$

Kết hợp điều kiện (\*) ta được 
$$\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m < -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 101.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} (2m + 1)x - 3y = 3m - 2 \\ (m + 3)x - (m + 1)y = 2m. \end{cases}$$
 Tìm  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  sao cho  $P = x^2 + 3y^2$  nhỏ nhất.

- A.  $m = \frac{4}{3}$ .      B.  $m = \frac{8}{9}$ .      C.  $m = \frac{3}{4}$ .      D.  $m = \frac{1}{9}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = -2(m - 2)(m + 2)$ ,  $D_x = -(m - 2)(3m + 1)$ ,  $D_y = (m - 2)(m - 3)$ .

Hệ có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi  $m \neq \pm 2$  (\*)

Với điều kiện (\*), hệ có nghiệm duy nhất và 
$$\begin{cases} x = \frac{3m + 1}{2(m + 2)} \\ y = -\frac{m - 3}{2(m + 2)} \end{cases}$$

$P = x^2 + 3y^2 = \frac{3m^2 - 3m + 7}{m^2 + 4m + 4} \Leftrightarrow (3 - P)m^2 - (3 + 4P)m + 7 - 4P = 0$  (1)

\*  $P = 3$  thì (1) có nghiệm  $m = -\frac{1}{3}$ .

\*  $P \neq 3$  thì (1) có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta = 100P - 75 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{4}$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $m = \frac{4}{3}$ .

Vậy  $P$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $m = \frac{4}{3}$  và  $\text{Min}P = \frac{3}{4}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 102.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}$$
 vô nghiệm.

- A.  $m = -3$ .      B.  $m \neq 0$ .      C.  $m \neq -3$ .      D.  $m = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}$$
, suy ra  $(m + 3)x = 11$ . Phương trình  $(m + 3)x = 11$  vô nghiệm khi và chỉ khi  $m = -3$ .

Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi  $m = -3$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 103.** Xét tập hợp các điểm có tọa độ  $(x; y)$  là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ . Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng cắt hai trục  $Ox$  và  $Oy$  tại hai điểm phân biệt.

- A.  $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ .      B.  $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ .      C.  $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ .      D.  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ .

**Lời giải.**

Xét các điểm  $(x; y)$  là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ . Tập hợp các điểm đó là một đường thẳng cắt trục  $Ox$  và  $Oy$  khi và chỉ khi  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$ . Các giao điểm của đường thẳng đó và các trục  $Ox, Oy$  lần lượt là  $A\left(\frac{c}{a}; 0\right)$  và  $B\left(0; \frac{c}{b}\right)$ . Do đó hai điểm  $A, B$  phân biệt khi và chỉ khi  $c \neq 0$ . Vậy điều kiện của  $a, b, c$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 104.** Tìm một số có hai chữ số, biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng  $\frac{4}{5}$  số ban đầu trừ đi 10.

- A. 85.                                      B. 58.                                      C. 80.                                      D. 47.

**Lời giải.**

Gọi số hàng chục là  $x$ , chữ số hàng đơn vị là  $y$ . Điều kiện bài toán là  $x, y$  là các số nguyên,  $1 \leq x \leq 9$ ,  $0 \leq y \leq 9$ . Vì số viết theo thứ tự ngược lại nhỏ hơn số ban đầu nên  $x > y$ . Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 10y = \frac{4}{5}(10x + y) - 10. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được  $(x; y) = (8; 5)$ . Từ đó suy ra số phải tìm là 85.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 105.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2|x| - y = 1 \\ mx + y = m + 1. \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

- A.  $m \neq -2$ .                                      B.  $m = 2$ .                                      C.  $m = -2$ .                                      D.  $m \neq 2$  và  $m \neq -2$ .

**Lời giải.**

— Xét  $x \geq 0$ , khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - y = 1 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 2x - 1 \\ (m + 2)x = m + 2. \end{cases} \quad (1)$$

— Xét  $x < 0$ , khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x < 0 \\ -2x - y = 1 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y = -2x - 1 \\ (m - 2)x = m + 2. \end{cases} \quad (2)$$

Tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là hợp hai tập nghiệm của hệ (1) và hệ (2).

Ta xét các trường hợp sau

- Xét  $m = 2$ , khi đó hệ phương trình (2) vô nghiệm. Hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $(1; 1)$ .
- Xét  $m = -2$ , cả hai hệ phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.
- Xét  $m \neq 2$  và  $m \neq -2$ , khi đó hệ phương trình (1) luôn có nghiệm  $(1; 1)$ .  
Hệ phương trình (2) tương đương

$$\begin{cases} x < 0 \\ y = -2x - 2 \\ x = \frac{m + 2}{m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m + 2}{m - 2} < 0 \\ y = -2x - 2 \\ x = \frac{m + 2}{m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ y = -2x - 2 \\ x = \frac{m + 2}{m - 2} \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi hệ (2) vô nghiệm hay  $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 106.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 3x + (m - 5)y = 6 \\ 2x + (m - 1)y = 4. \end{cases}$

Kết luận nào sau đây **sai**?

- A. Hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .
- B. Tồn tại giá trị của  $m$  để hệ vô nghiệm.
- C. Hệ có vô số nghiệm khi  $m = -7$ .
- D. Khi  $m = -7$  thì biểu diễn tập nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  là đường thẳng  $y = \frac{1}{4}(x - 2)$ .

**Lời giải.**

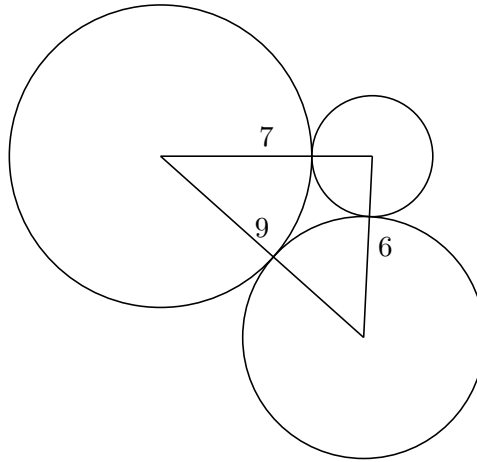
Hệ vô nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{m - 5}{m - 1} \neq \frac{6}{4} \Rightarrow$  không tồn tại giá trị của  $m$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 107.** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh  $AB, BC, CA$  lần lượt là 9, 7 và 6. Ba đường tròn tâm  $A$ , tâm  $B$ , tâm  $C$  đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Bán kính của ba đường tròn đó lần lượt là

- A. 6; 5 và 2.                      B. 4; 5 và 3.                      C. 4; 5 và 2.                      D. 8; 5 và 1.

**Lời giải.**



Gọi bán kính ba đường tròn tâm  $A$ , tâm  $B$ , tâm  $C$  lần lượt là  $a, b, c$ . Ba đường tròn đôi một tiếp xúc ngoài với nhau nên ta lập được hệ sau:

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ b + c = 7 \\ a + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 108.** Hai vòi nước chảy chung vào một bể thì sau  $4\frac{4}{5}$  giờ thì đầy bể. Mỗi giờ lượng nước vòi 1 chảy bằng  $\frac{3}{2}$  lượng nước vòi 2. Vậy mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu sẽ đầy bể?

- A. Vòi 1 là 8 h, vòi 2 là 12 h.                      B. Vòi 1 là 12 h, vòi 2 là 8 h.  
C. Vòi 1 là 12 h, vòi 2 là 16 h.                      D. Vòi 1 là 16 h, vòi 2 là 12 h.

**Lời giải.**

Gọi thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là  $x$  và  $y$ .

Suy ra mỗi giờ vòi 1 và 2 chảy được là  $\frac{1}{x}$  và  $\frac{1}{y}$  bể.

Ta có  $\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y}$ .

Mặt khác  $\frac{24}{5} \cdot \frac{1}{x} + \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{y} = 1$ .

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} = 0 \\ \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{x} + \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 109.** Tìm độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, biết rằng khi ta tăng mỗi cạnh 2 cm thì diện tích tăng  $17\text{ cm}^2$ ; khi ta giảm chiều dài cạnh này 3 cm và cạnh kia 1 cm thì diện tích giảm  $11\text{ cm}^2$ . Độ dài hai cạnh lần lượt là

- A. 5 cm và 10 cm.                      B. 4 cm và 7 cm.                      C. 2 cm và 3 cm.                      D. 5 cm và 6 cm.

**Lời giải.**

Gọi hai cạnh có độ dài lần lượt là  $x$  và  $y$ .

$$\text{Khi đó ta có } \frac{1}{2}(x+2)(y+2) = \frac{1}{2}xy + 17 \Leftrightarrow x + y = 15 \tag{1}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2}(x-3)(y-1) = \frac{1}{2}xy - 11 \Leftrightarrow -x - 3y = -25 \Leftrightarrow x + 3y = 25 \tag{2}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 110.** Một công ti có 100 xe chở khách gồm hai loại, xe chở được 4 khách và xe chở được 7 khách. Dùng tất cả số xe đó, tối đa công ti chở một lần được 490 khách. Gọi  $x, y$  lần lượt là số xe chở được 4 khách và số xe chở được 7 khách. Tìm  $x$  và  $y$ .

- A.  $x = 30, y = 70$ .      B.  $x = 40, y = 60$ .      C.  $x = 70, y = 30$ .      D.  $x = 60, y = 40$ .

**Lời giải.**

Ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 7y = 490 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 70 \\ y = 30. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 111.** Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi  $4p$  m. Nếu mở rộng miếng đất đó bằng cách tăng một cạnh thêm 4 m và cạnh kia tăng thêm 3 m thì diện tích miếng đất tăng thêm  $252 \text{ m}^2$ . Tìm điều kiện của  $p$  và tính các kích thước  $x$  và  $y$  của miếng đất đó theo  $p$ .

- A.  $x = 8p - 240, y = 240 - 6p$  với  $p > 0$ .      B.  $x = 16p - 240, y = 240 - 12p$  với  $p > 0$ .  
C.  $x = 8p - 240, y = 240 - 6p$  với  $30 < p < 40$ .      D.  $x = 16p - 240, y = 240 - 12p$  với  $15 < p < 20$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x + y) = 4p \\ (x + 4)(y + 3) = xy + 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2p \\ 3x + 4y = 240 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được:  $x = 8p - 240$  và  $y = 240 - 6p$

Vì  $x > 0, y > 0$  nên 
$$\begin{cases} 8p - 240 > 0 \\ 240 - 6p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 30 < p < 40.$$

Vậy kích thước miếng đất là  $x = 8p - 240$  m và  $y = 240 - 6p$  m với điều kiện  $30 < p < 40$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 112.** Có ba lớp 10A, 10B và 10C gồm 128 em học sinh cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp 10C trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số học sinh của lớp 10A, 10B, 10C. Tìm  $x, y$  và  $z$ .

- A.  $x = 45, y = 45, z = 38$ .      B.  $x = 38, y = 45, z = 45$ .  
C.  $x = 40, y = 43, z = 45$ .      D.  $x = 45, y = 40, z = 43$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x, y, z$  là các số nguyên dương. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 128 \\ 4x + 3y = 60 \\ 3x + 2y + 6z = 476 \\ 4x + 5y = 375. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được  $(x, y, z) = (40; 43; 45)$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 113.** Ba cô Lan, Hương và Thúy cùng thuê một loại áo giống nhau. Số áo của Lan thuê trong 1 giờ ít hơn tổng số áo của Hương và Thúy thuê trong 1 giờ là 5 áo. Tổng số áo của Lan thuê trong 4 giờ và Hương thuê trong 3 giờ là 60 áo. Số áo của Lan thuê trong 2 giờ cộng với số áo của Hương thuê trong 5 giờ và số áo của Thúy thuê trong 3 giờ tất cả được 76 áo. Trong 1 giờ số áo thuê được của Lan, Hương và Thúy lần lượt là  $x, y$  và  $z$ . Tìm  $x, y$  và  $z$ .

- A.  $x = 5, y = 6, z = 10$ .      B.  $x = 9, y = 8, z = 6$ .      C.  $x = 10, y = 6, z = 5$ .      D.  $x = 9, y = 6, z = 8$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x, y, z$  là các số nguyên dương. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} x = y + z - 5 \\ 4x + 3y = 60 \\ 2x + 5y + 3z = 76. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được  $(x, y, z) = (9; 8; 6)$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 114.** Một chủ cửa hàng bán lẻ mang 1500000 đồng đến ngân hàng đổi tiền xu để trả lại cho người mua. Ông ta đổi được tất cả 1450 đồng tiền xu các loại 2000 đồng, 1000 đồng và 500 đồng. Biết rằng số tiền xu loại 1000 đồng bằng hai lần hiệu của số tiền xu loại 500 đồng với số tiền xu loại 2000 đồng. Gọi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  lần lượt là số đồng xu loại 2000 đồng, 1000 đồng, 500 đồng. Tìm  $x$ ,  $y$  và  $z$ .

A.  $x = 600$ ,  $y = 500$ ,  $z = 350$ .

B.  $x = 412$ ,  $y = 313$ ,  $z = 725$ .

C.  $x = 350$ ,  $y = 500$ ,  $z = 600$ .

D.  $x = 725$ ,  $y = 313$ ,  $z = 412$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x$ ,  $y$ ,  $z$  là các số nguyên dương. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 1450 \\ 2000x + 1000y + 500z = 1500000 \\ y = 2(z - x). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được  $(x, y, z) = (350; 500; 600)$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 115.** Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2a - 1 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn  $x > y$ .

A.  $a > \frac{1}{2}$ .

B.  $a > \frac{1}{3}$ .

C.  $a > -\frac{1}{2}$ .

D.  $a < \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Hệ có nghiệm  $\begin{cases} x = a \\ y = 1 - a. \end{cases}$

Theo giả thiết thì  $x > y \Leftrightarrow a > 1 - a \Leftrightarrow 2a > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 116.** Tìm độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng khi tăng mỗi cạnh 2 cm thì diện tích tăng  $17 \text{ cm}^2$ , khi giảm chiều dài cạnh này 3 cm và cạnh kia 1 cm thì diện tích giảm  $11 \text{ cm}^2$ .

A. 5 cm và 6 cm.

B. 5 cm và 10 cm.

C. 4 cm và 7 cm.

D. 2 cm và 3 cm.

**Lời giải.**

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông là  $a$  và  $b$ , ( $a, b > 0$ ). Khi đó, theo đề bài ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+2)(b+2) = \frac{1}{2}ab + 17 \\ \frac{1}{2}(a-3)(b-1) = \frac{1}{2}ab - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 15 \\ a + 3b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5. \end{cases}$$

Vậy hai cạnh của tam giác vuông đã cho là 5 cm và 10 cm.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 117.** Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau  $\frac{24}{5}$  giờ sẽ đầy bể. Trong mỗi giờ, lượng nước của vòi một chảy được bằng  $\frac{3}{2}$  lần lượng nước của vòi thứ hai. Hỏi vòi thứ hai chảy riêng một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

A. 12 giờ.

B. 10 giờ.

C. 8 giờ.

D. 3 giờ.

**Lời giải.**

Giả sử, trong một giờ vòi thứ hai chảy được  $x$  phần của bể ( $x > 0$ ).

Suy ra, trong một giờ vòi một chảy được  $\frac{3}{2}x$  phần của bể.

Khi đó, trong một giờ cả hai vòi cùng chảy được  $\frac{3}{2}x + x = \frac{5}{2}x$  phần của bể. (1)

Mặt khác, hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau  $\frac{24}{5}$  giờ sẽ đầy bể. Suy ra, trong một giờ hai vòi cùng chảy được  $\frac{5}{24}$  bể. (2)

Từ (1) và (2) ta được  $\frac{5}{2}x = \frac{5}{24} \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$ .

Do đó, trong một giờ vòi thứ hai chảy được  $\frac{1}{12}$  phần của bể.

Vậy nếu vòi thứ hai chảy riêng một mình thì sau 12 giờ sẽ đầy bể.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 118.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$  có số nghiệm là

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

**Lời giải.**

Từ phương trình  $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$  thế vào phương trình  $x^2 + y^2 = 5$  ta được.

$$x^2 + (1 - x)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(-1, 2)$  và  $(2, -1)$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 119.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** vô số.

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{13} \\ y = \frac{9}{13} \end{cases}. \text{ Vậy hệ có 1 nghiệm.}$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 120.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$  với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất?

- A.**  $m \in \{-1; 1; 0\}$ . **B.**  $m \in \mathbb{R}$ . **C.**  $m \in \{-1; 1\}$ . **D.**  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } (I): \begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x + my = 3m \\ x + my = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)x = m - 1 \\ y = 3 - mx. \end{cases} \quad (1)$$

Hệ  $(I)$  có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow (1)$  có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 121.** Tìm nghiệm  $(x; y)$  của hệ:  $\begin{cases} 0,3x - 0,2y - 0,33 = 0 \\ 1,2x + 0,4y - 0,6 = 0. \end{cases}$

- A.** Vô nghiệm. **B.**  $(0,7; 0,6)$ . **C.**  $(0,7; 0,6)$ . **D.**  $(0,6; 0,7)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0,3x - 0,2y - 0,33 = 0 \\ 1,2x + 0,4y - 0,6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0,33 \\ 1,2x + 0,4y = 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = -0,6. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(0,7; -0,6)$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 122.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y = 1 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 5 \quad (2). \end{cases}$$

Từ (1)  $\Leftrightarrow x = 1 - y$  thay vào (2) ta được

$$(1 - y)^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$  và  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 123.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$  với  $(x_0; y_0)$  là nghiệm. Tính  $A = x_0^2 + y_0^2$ .

A.  $A = \frac{298}{25}$ .

B.  $A = \frac{982}{25}$ .

C.  $A = \frac{228}{25}$ .

D.  $A = \frac{928}{25}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6x + 2y = 0 & (1) \\ x + y = 8 & (2). \end{cases}$$

Từ (2)  $\Leftrightarrow x = 8 - y$  thay vào (1) ta được

$$(8 - y)^2 - y^2 + 6(8 - y) + 2y = 0 \Leftrightarrow 112 - 20y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{28}{5} \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

Hay hệ phương trình có nghiệm là  $\begin{cases} x_0 = \frac{12}{5} \\ y_0 = \frac{28}{5}. \end{cases}$

Vậy  $A = x_0^2 + y_0^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2 = \frac{928}{25}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 124.** Có ba đội học sinh gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em ở đội số 1 trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em ở đội số 2 trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em ở đội số 3 trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba đội trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu em học sinh?

- A. Đội 1 có 43 em, đội 2 có 45 em, đội 3 có 40 em.
- B. Đội 1 có 40 em, đội 2 có 43 em, đội 3 có 45 em.
- C. Đội 1 có 45 em, đội 2 có 43 em, đội 3 có 40 em.
- D. Đội 1 có 45 em, đội 2 có 40 em, đội 3 có 43 em.

**Lời giải.**

Gọi số học sinh ở ba đội lần lượt là  $x, y, z$  (điều kiện  $x, y, z \in \mathbb{N}$ ).

Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 128 \\ 3x + 2y + 6z = 476 \\ 4x + 5y = 375 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 43 \\ z = 45. \end{cases}$$

Vậy đội 1 có 40 em, đội 2 có 43 em, đội 3 có 45 em.

Chọn đáp án **B** □

**Câu 125.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x - 2my = 1 - m^2 \\ 2mx - 4y = 3 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

- A.  $m \neq 1$ .
- B.  $m \neq 1$  hoặc  $m \neq -1$ .
- C.  $m \neq -1$ .
- D.  $m \neq 1$  và  $m \neq -1$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$1 \cdot (-4) - 2m \cdot (-2m) \neq 0 \Leftrightarrow -4 + 4m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

Vậy  $m \neq -1$  và  $m \neq 1$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 126.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = m^2 + m \end{cases}$ . Tập tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hệ có nghiệm là  $[a; b]$ . Tính  $a + 2b$ .

- A. -3.
- B. 0.
- C. -1.
- D. 3.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy(x + y) = m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \frac{m^2 + m}{2}. \end{cases}$$



Khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 2t + \frac{m^2 + m}{2} = 0. \quad (*)$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm, tức là

$$1 - \frac{m^2 + m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|m + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1.$$

Vậy  $m \in [-2; 1]$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Suy ra  $a = -2, b = 1$ . Cho nên  $a + 2b = -2 + 2 \cdot 1 = 0$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 127.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$  có nghiệm  $(x_0; y_0)$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $S = x_0 + y_0$  bằng

- A. -2.                      B. 1.                      C. 0.                      D. 2.

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Khi đó  $S = 1 + 1 = 2$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 128.** Hệ phương trình  $\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất khi

- A.  $m = -\frac{8}{5}$ .                      B.  $m \neq \frac{8}{5}$ .                      C.  $m = \frac{8}{5}$ .                      D.  $m \neq -\frac{8}{5}$ .

**Lời giải.**

Ta có định thức  $D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5m - 8$ .

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì  $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{8}{5}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 129.** Trong thư viện một trường THPT X trên địa bàn tỉnh Bạc Liêu có 3 kệ sách lớn (được đánh dấu là kệ (I), kệ (II), kệ (III)) và có tất cả 1035 cuốn sách, biết số sách ở kệ (I) nhiều hơn số sách ở kệ (II) là 93 cuốn nhưng ít hơn tổng số sách ở kệ (II) và kệ (III) là 517 cuốn. Số cuốn sách ở kệ (III) là

- A. 166 cuốn.                      B. 259 cuốn.                      C. 529 cuốn.                      D. 610 cuốn.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  (cuốn) là số cuốn sách ở kệ (I) ( $x \in \mathbb{N}^*$ ). Khi đó số sách ở kệ (II) là  $x - 93$ .

Số cuốn sách ở kệ (III) là  $1035 - x - (x - 93) = 1128 - 2x$ .

Theo giả thiết số cuốn sách ở kệ (I) ít hơn tổng số sách ở kệ (II) và kệ (III) là 517 cuốn nên ta có

$$x = (x - 93) + (1128 - 2x) - 517 \Leftrightarrow x = 259 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy số cuốn sách ở kệ (III) là  $1128 - 2x = 610$  cuốn.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 130.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} -2x + 5y = 9 \\ 4x + 2y = 11 \end{cases}$  là

- A.  $\left(\frac{37}{24}; -\frac{29}{12}\right)$ .                      B.  $\left(-\frac{37}{24}; \frac{29}{12}\right)$ .                      C.  $\left(\frac{37}{24}; \frac{29}{12}\right)$ .                      D.  $\left(-\frac{37}{24}; -\frac{29}{12}\right)$ .

**Lời giải.**

Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} -2x + 5y = 9 \\ 4x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{37}{24} \\ y = \frac{29}{12}. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $\left(\frac{37}{24}; \frac{29}{12}\right)$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 131.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -6 \\ 3x + 8y - z = 12. \end{cases}$$

A.  $\left(\frac{181}{43}; -\frac{7}{43}; -\frac{83}{43}\right)$ .    B.  $\left(-\frac{181}{43}; \frac{7}{43}; -\frac{83}{43}\right)$ .    C.  $\left(-\frac{181}{43}; -\frac{7}{43}; \frac{83}{43}\right)$ .    D.  $\left(\frac{181}{43}; \frac{7}{43}; \frac{83}{43}\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -6 \\ 3x + 8y - z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{181}{43} \\ y = \frac{7}{43} \\ z = \frac{83}{43}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 132.** Hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 6x + 5y + 4z = 4 \end{cases}$$
 có nghiệm là

A. (1; 2; 0).    B. (1; -2; 2).    C. (0; 1; 2).    D. (-1; -2; 0).

**Lời giải.**

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 6x + 5y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ y + 7z = 12 \\ y + 5z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (1; -2; 2).

Chọn đáp án **B** □

**Câu 133.** Một cửa hàng bán giày dép, ngày thứ nhất cửa hàng bán được tổng cộng 30 đôi giày gồm và giày và dép. Ngày thứ 2 của hàng khuyến mại giảm giá nên số đôi giày bán được tăng 10%, số đôi dép bán được tăng 20% so với ngày thứ nhất và dép bán được ngày thứ hai là 35 đôi. Hỏi trong ngày thứ nhất cửa hàng bán được số đôi giày và dép lần lượt là bao nhiêu?

- A. 15 và 15.    B. 20 và 10.    C. 10 và 20.    D. 25 và 5.

**Lời giải.**

Gọi số dép bán được ngày thứ nhất là  $x$  với  $x \in \mathbb{N}^*$  và  $x < 30$ .

Số đôi dép bán được ngày thứ hai là  $x + 20\%x = \frac{6x}{5}$ .

Gọi số dép bán được ngày thứ nhất là  $y$  với  $y \in \mathbb{N}^*$  và  $y < 30$ .

Số đôi dép bán được ngày thứ hai là  $y + 10\%y = \frac{11y}{10}$ .

Theo giả thiết ta được hệ 
$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{6x}{5} + \frac{11y}{10} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 134.** Cặp số  $(x; y)$  nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}?$$

A. (10; 1).    B. (2; 1).    C. (-1; -8).    D. (1; -2).

**Lời giải.**

Ta có 
$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 8x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 135.** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn các điều kiện  $a - b - c = 6, b = a - 9, c = b + 7$ . Tính giá trị của biểu thức  $\mathcal{P} = 3a - 2b + c$ .

- A.  $\mathcal{P} = 4$ .    B.  $\mathcal{P} = 10$ .    C.  $\mathcal{P} = -48$ .    D.  $\mathcal{P} = 26$ .

**Lời giải.**

Ta có  $b = a - 9$  và  $c = b + 7 = a - 9 + 7 = a - 2$ .

Thay vào  $a - b - c = 6 \Rightarrow a - (a - 9) - (a - 2) = 6 \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow b = -4$  và  $c = 3$ .

Khi đó  $\mathcal{P} = 3a - 2b + c = 15 + 8 + 3 = 26$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 136.** Hiện nay tuổi của cha gấp bốn lần tuổi của con và tổng số tuổi của hai cha con là 50. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa tuổi cha gấp ba lần tuổi con?

- A. 5 năm.                      B. 7 năm.                      C. 6 năm.                      D. 8 năm.

**Lời giải.**

Gọi tuổi cha và con hiện nay lần lượt là  $4x$  và  $x$ , với  $x > 0$ .

Theo bài ra ta có  $4x + x = 50 \Leftrightarrow x = 10$ .

Giả sử sau  $y$  năm, ( $y > 0$ ) thì tuổi cha gấp ba lần tuổi con, khi đó ta có

$$40 + y = 3(10 + y) \Leftrightarrow 2y = 10 \Leftrightarrow y = 5.$$

Vậy, sau 5 năm nữa thì tuổi cha gấp ba lần tuổi con.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 137.** Đồ thị của hàm số  $y = ax + b$  đi qua các điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(-2; 0)$ . Khi đó  $a - b$  bằng

- A. 2.                              B. -1.                              C. 0.                              D. 3.

**Lời giải.**

$$\text{Đồ thị hàm số } y = ax + b \text{ đi qua } A, B \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy  $a - b = -1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 138.** Hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$  vô nghiệm khi

- A.  $m = 1$ .                      B.  $m \neq -1$  và  $m \neq 1$ .                      C.  $m = -1$ .                      D.  $m \neq 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = m^2 - 1$ ,  $D_x = m^2 + m - 2$  và  $D_y = m - 1$ .

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} D = 0 \\ \begin{cases} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ \begin{cases} m^2 + m - 2 \neq 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \\ \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 139.** Cho  $x, y$  thỏa mãn  $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$ . Kết quả của  $x + y$  là

- A.  $\frac{27}{11}$ .                      B.  $\frac{4}{5}$ .                      C.  $\frac{5}{4}$ .                      D.  $\frac{11}{27}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{11} \\ y = \frac{2}{11} \end{cases} \text{ Do đó } x + y = \frac{17}{11}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 140.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + y^2 + xy = 1 \end{cases}$ . Cặp số  $(x; y)$  nào dưới đây là nghiệm của hệ phương

trình đã cho?

- A.  $(1; 1)$ .                      B.  $(-1; 1)$ .                      C.  $(1; -1)$ .                      D.  $(-1; 0)$ .

**Lời giải.**

Nhận thấy  $x = 1, y = -1$  thỏa mãn hệ phương trình nên  $(1; -1)$  là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 141.** Tìm tất cả các hệ số thực  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + y = m + 1 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất.

A.  $m < 0$  hoặc  $m = \frac{-\sqrt{2} + 2}{2}$ .

B.  $m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right\}$ .

C.  $m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}; \frac{-3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$ .

D.  $m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}; \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-y + m + 1)^2 + 2y^2 = 3 \\ x = -y + m + 1 \end{cases}$ .

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $(-y + m + 1)^2 + 2y^2 = 3$  có nghiệm duy nhất.

Ta có  $(-y + m + 1)^2 + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow 3y^2 - 2(m + 1)y + (m + 1)^2 - 3 = 0$  là phương trình bậc hai có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $\Delta' = -2(m + 1)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}; \frac{-3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 142.** Cặp số  $(x_0; y_0)$  với  $x_0 > 0$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 3xy = 19. \end{cases}$  Giá trị của biểu thức  $A = x_0^2 - y_0$  bằng

A. 10.

B. 11.

C. 9.

D. 12.

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 3xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^2 - 5xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$

Vậy  $(x_0; y_0) = (3; -1)$  nên  $A = x_0^2 - y_0 = 10$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 143.** Bộ  $(x; y; z) = (2; -1; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

A.  $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9. \end{cases}$

B.  $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6. \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

C.  $\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = 6 \\ 10x - 4y - z = 2. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \\ 2 \cdot 2 - (-1) + 1 \cdot 1 = 6 \\ 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = 9 \end{cases}$  nên  $(2; -1; 1)$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 144.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$  là

A.  $(x; y) = (3; 11)$ .

B.  $(x; y) = (-3; 1)$ .

C.  $(x; y) = (13; 1)$ .

D.  $(x; y) = (3; 1)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq 2, y \neq 0$ . Đặt  $\begin{cases} a = \frac{1}{x-2} \\ b = \frac{1}{y} \end{cases}$  thì hệ phương trình được viết lại

$$\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2b = 10 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a = 13 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 5 \cdot 1 - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

—  $a = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$  (thỏa mãn).

—  $b = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow y = 1$  (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (3; 1)$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 145.** Tìm một số có hai chữ số, biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng  $\frac{4}{5}$  số ban đầu trừ đi 10.

- A. 85.                                      B. 75.                                      C. 57.                                      D. 58.

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm là  $\overline{ab}$ , với  $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 8; 9\}$  và  $a \neq 0$ .

Theo đề bài ta có  $\overline{ba} = \frac{4}{5} \cdot \overline{ab} - 10 \Rightarrow 10b + a = \frac{4}{5} \cdot (10a + b) - 10 \Leftrightarrow 35a - 46b = 50$ .

Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} a - b = 3 \\ 35a - 46b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}$ .

Vậy, số cần tìm là 85.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 146.** Cặp số  $(x; y)$  nào dưới đây là nghiệm của phương trình  $2x - y - 4 = 0$ ?

- A.  $(x; y) = (1; -2)$ .                      B.  $(x; y) = (3; -2)$ .                      C.  $(x; y) = (2; 1)$ .                      D.  $(x; y) = (1; 2)$ .

**Lời giải.**

Thay  $x = 1, y = -2$  vào phương trình thấy thỏa mãn. Do đó cặp số  $(x; y) = (1; -2)$  là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 147.** Tìm  $x$  sao cho  $\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ 10z = -5 \end{cases}$ .

- A.  $x = \frac{5}{2}$ .                                      B.  $x = -\frac{5}{2}$ .                                      C.  $x = \frac{7}{2}$ .                                      D.  $x = -\frac{7}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} & (1) \\ -y + z = -3 & (2) \\ 10z = -5 & (3) \end{cases}$ .

Từ (3)  $\Rightarrow z = -\frac{1}{2}$ . Thay  $z = -\frac{1}{2}$  vào (2) ta được  $-y - \frac{1}{2} = -3 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$ . Thay  $y = \frac{5}{2}$  và  $z = -\frac{1}{2}$  vào (1) ta được  $x + 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 148.** Tìm nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ .

- A.  $(-2; -1)$ .                                      B.  $(3; 1)$ .                                      C.  $(2; 3)$ .                                      D.  $(2; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 149.** Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm là  $(1; 1)$ ?

- A.  $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ y = 7 \end{cases}$ .                                      B.  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x = -2 \end{cases}$ .                                      C.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ .                                      D.  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Thay  $x = 1, y = 1$  vào từng hệ phương trình ta thấy thỏa mãn hệ phương trình  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 150.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1 nghiệm.      B. 2 nghiệm.      C. vô nghiệm.      D. vô số nghiệm.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 12 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 151.** Hệ phương trình:  $\begin{cases} x - y = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$  vô nghiệm với giá trị của  $m$  là

- A.  $m = 0$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\begin{cases} x - y = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(m - 1) = m + 1. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 152.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$ . Tính  $S = x + y$ .

- A.  $S = 3$ .      B.  $S = 1$ .      C.  $S = 2$ .      D.  $S = 4$ .

**Lời giải.**

ĐKXD:  $x \neq 2; y \neq 0$ .

Đặt  $\frac{1}{x-2} = a; \frac{1}{y} = b$ .

Khi đó, hệ đã cho trở thành:  $\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$\Rightarrow S = 1 + 3 = 4$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 153.** Nghiệm của hệ phương trình:  $\begin{cases} -3x + 2y + z = 9 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 4x + 3y - z = -11 \end{cases}$  là

- A.  $\left(-\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$ .      B.  $\left(-\frac{11}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$ .      C.  $\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ .      D.  $\left(-\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ .

**Lời giải.**

Nghiệm của hệ là  $\left(-\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 154.** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.      B. 0.      C. 2.      D. Vô số.

**Lời giải.**

Vì  $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$  nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 155.** Trong một ngày hội mua sắm, cửa hàng *T* đã tiến hành giảm giá và bán đồng giá nhiều sản phẩm. Các loại áo bán đồng giá *x* (đồng), các loại mũ bán đồng giá *y* (đồng), các loại túi xách bán đồng giá *z* (đồng). Ba người bạn Nga, Lan, Hòa đã cùng nhau mua sắm tại cửa hàng *T*. Nga mua 2 chiếc áo, 1 mũ, 3 túi xách hết 730.000 đồng; Lan mua 1 chiếc áo, 2 mũ, 1 túi xách hết 410.000 đồng; Hòa mua 3 chiếc áo, 2 túi xách hết 600.000 đồng. Hỏi *x, y, z* lần lượt là bao nhiêu?

- A.** 150.000; 80.000; 100.000.
- B.** 200.000; 100.000; 250.000.
- C.** 100.000; 80.000; 150.000.
- D.** 150.000; 250.000; 350.000.

**Lời giải.**

Theo giả thiết đề bài, ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + y + z = 730.000 \\ x + 2y + z = 410.000 \\ 3x + 2z = 600.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100.000 \\ y = 80.000 \\ z = 150.000 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 156.** Gọi  $(x_0; y_0; z_0)$  là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}.$$
 Tính giá trị biểu thức

$P = x_0 + y_0 + z_0.$

- A.**  $P = 1.$
- B.**  $P = -3.$
- C.**  $P = 3.$
- D.**  $P = 0.$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} 3x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow P = x + y + z = 3.$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 157.** Hệ phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A.**  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$
- B.**  $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$
- C.**  $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$
- D.**  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

**Lời giải.**

- Hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$  có  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  nên có vô số nghiệm.
- Hệ phương trình  $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$  có  $\frac{5}{1} \neq \frac{2}{1}$  nên có nghiệm duy nhất.
- Hệ phương trình  $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$  có  $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$  nên có vô số nghiệm.
- Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$  có  $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{5}$  nên vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 158.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$  với  $a, b, c$  là các tham số. Tìm điều kiện của  $b$  để với mọi  $a$  luôn tìm được  $c$  sao cho hệ phương trình có nghiệm.

- A.**  $-\frac{3}{4} \leq b \leq \frac{3}{4}.$
- B.**  $-\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}.$
- C.**  $-\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}.$
- D.**  $-\frac{1}{3} \leq b \leq \frac{1}{3}.$

**Lời giải.**

Ta có  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1, D_x = \begin{vmatrix} b & 1 \\ c^2 + c & a \end{vmatrix} = ba - c^2 - c, D_y = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & c^2 + c \end{vmatrix} = ac^2 + ac - b.$

Trường hợp  $D \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$  và  $a \neq -1$  thì hệ phương trình luôn có nghiệm.

Trường hợp  $D = 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$  hoặc  $a = -1$ . Khi đó hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $D = D_x = D_y = 0.$

— Khi  $a = 1$  thì  $D_x = b - c - c^2$  và  $D_y = c^2 + c - b$ . Do đó, hệ phương trình có nghiệm khi

$$D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow c^2 + c - b = 0.$$

Như thế, điều kiện của  $b$  để tìm được  $c$  sao cho hệ có nghiệm là  $\Delta = 1 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}$ .

— Khi  $a = -1$  thì  $D_x = -c^2 - c - b$  và  $D_y = -c^2 - c - b$ . Do đó, hệ phương trình có nghiệm khi

$$D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow -c^2 - c - b = 0 \Leftrightarrow c^2 + c + b = 0.$$

Như thế, điều kiện của  $b$  để tìm được  $c$  sao cho hệ có nghiệm là  $\Delta = 1 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}$ .

Vậy điều kiện của  $b$  là  $-\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 159.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$  với  $m$  là tham số. Khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x_0; y_0)$ , hãy tìm hệ thức liên hệ giữa  $x_0, y_0$  không chứa tham số  $m$ .

- A.  $x_0 + 2y_0 = 2$ .      B.  $x_0 + 3y_0 = 1$ .      C.  $x_0 - 2y_0 = 6$ .      D.  $x_0 + 5y_0 = 1$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = mx - 1 \\ (2m+1)^2 x = 4(2m+1) \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $m \neq -\frac{1}{2}$ . Khi đó nghiệm duy nhất của hệ là

$$\begin{cases} x_0 = \frac{4}{2m+1} \\ y_0 = \frac{2m-1}{2m+1} = 1 - \frac{2}{2m+1} \end{cases} \Rightarrow 2y_0 + x_0 = 2.$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 160.** Gọi  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$ . Tính giá trị của biểu thức

$M = x_0 + y_0$ .

- A.  $M = 7$ .      B.  $M = 5$ .      C.  $M = 4$ .      D.  $M = 6$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq \frac{y}{2}$  và  $x \neq -3y$ . Đặt  $\begin{cases} u = \frac{1}{2x-y} \\ v = \frac{1}{x+3y} \end{cases}$ .

Theo giả thiết ta có hệ  $\begin{cases} 27u + 32v = 7 \\ 45u - 48v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{9} \\ v = \frac{1}{8} \end{cases}$ .

Suy ra  $\begin{cases} \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{x+3y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y = 9 \\ x+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ .

Vậy  $M = 6$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 161.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$  có nghiệm  $(x_0; y_0)$ . Khi đó  $x_0 + y_0$  bằng bao nhiêu?



A.  $\frac{3}{2}$ .

B.  $-\frac{3}{2}$ .

C.  $-\frac{5}{2}$ .

D.  $\frac{5}{2}$ .

Lời giải.

Ta có  $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{5}{2}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 162.** Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo chuyển động của nó là một cung parabol trong mặt phẳng, phương trình quỹ đạo có dạng  $h = at^2 + bt + c$  (trong đó  $h$  là độ cao của quả bóng so với mặt đất (m) và  $t$  là thời gian tính từ lúc bị đá lên (s)). Giả thiết rằng quả bóng được đá từ độ cao 1,2 m. Sau 1 giây nó đạt độ cao 8,5 m và sau 2 giây khi đá lên nó ở độ cao 6 m. Phương trình quỹ đạo chuyển động của quả bóng là

A.  $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$ .

B.  $h = 4,9t^2 + 12,2t + 1,2$ .

C.  $h = -4,9t^2 - 12,2t + 1,2$ .

D.  $h = 4,9t^2 - 12,2t + 1,2$ .

Lời giải.

Ta có  $\begin{cases} h(0) = 1,2 \\ h(1) = 8,5 \\ h(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases} \Rightarrow h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 163.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{3}{2x+1} - \frac{5}{y+2} = -2 \\ \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{y+2} = 5 \end{cases}$  có nghiệm là  $(x_0; y_0)$ . Tổng  $x_0 + y_0$  bằng bao nhiêu?

A. -2.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

Đặt  $u = \frac{1}{2x+1}$ ;  $v = \frac{1}{y+2}$  ta có hệ phương trình  $\begin{cases} 3u - 5v = -2 \\ 2u + 3v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$ .

Khi đó  $\begin{cases} \frac{1}{2x+1} = 1 \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x + y = -1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 164.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ 7x + 4y - 2z = -7 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$  là

A.  $(-1; 2; -3)$ .

B.  $(1; -2; 3)$ .

C.  $(1; -2; -3)$ .

D.  $(-1; 2; 3)$ .

Lời giải.

Ta có  $\begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ 7x + 4y - 2z = -7 \\ x - y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x; y; z) = (1; -2; 3)$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 165.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ .

A.  $(x; y) = (1; 2)$ .

B.  $(x; y) = (2; 1)$ .

C.  $(x; y) = (-2; 1)$ .

D.  $(x; y) = (-1; 2)$ .

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (1; 2)$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 166.** Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm là  $(1; 1; -1)$ ?

A.  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + y + 5z = -1 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - y + 3z = -1 \\ z = 0 \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} x = 3 \\ x - y + z = -2 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

**Lời giải.**

Xét hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + y + 5z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y = 3 \\ 2y - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$ . Vậy nghiệm hệ phương trình là  $(1; 1; -1)$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 167.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$  là

A.  $(1; -\frac{1}{2})$ .      B.  $(0; -\frac{5}{2})$ .      C.  $(1; 1)$ .      D.  $(1; 2)$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ 6x - 2(4 - 3x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 168.** Tìm nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 3x - 2y - z = 7 \\ -4x + 3y - 2z = 15 \\ -x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$

A.  $(-5; -7; 8)$ .      B.  $(5; -7; -8)$ .      C.  $(-5; -7; -8)$ .      D.  $(-5; 7; -8)$ .

**Lời giải.**

**Cách 1**

Lấy phương trình đầu trừ cho phương trình thứ 3 và cộng cho phương trình thứ 2 về theo về ta được

$$3y - 6z = 27 \Leftrightarrow y = 2z + 9.$$

Thế vào hai phương trình đầu ta được

$$\begin{cases} 3x - 5z = 25 \\ -4x + 4z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ z = -8. \end{cases}$$

Do đó  $y = -7$  và ta được nghiệm của hệ là  $(-5; -7; -8)$ .

**Cách 2**

Sử dụng tính năng giải hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn của máy tính ta được nghiệm là  $(-5; -7; -8)$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 169.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x + y + xy = 19 \end{cases}$  là

A.  $(4; 3); (3; 4)$ .      B.  $(4; 3)$ .      C.  $(3; 4)$ .      D.  $(0; \sqrt{27}); (19; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x + y + xy = 19 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 37 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (19 - xy)^2 - xy = 37 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^2 - 39xy + 324 = 0 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 27 \\ xy = 12 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 27 \\ x + y = -8 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 27 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ x = 4 \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $(4; 3); (3; 4)$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 170.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = m - 1 \end{cases}$  vô nghiệm, suy ra

- A.  $m = 6$ .                      B.  $m = 11$ .                      C.  $m \neq 11$ .                      D.  $m \neq 6$ .

**Lời giải.**

Theo bài ra, hệ phương trình đã cho vô nghiệm nên  $\frac{5}{m-1} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \neq 11$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 171.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = m \\ x - my = 2 \end{cases}$ . Tất cả các giá trị của  $m$  để hệ trên có nghiệm duy nhất là

- A.  $m$  khác 1 và  $-1$ .                      B.  $m \in \emptyset$ .  
C.  $m$  khác 0.                      D.  $m = 1$  hoặc  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = 1 - m^2$ .

Hệ có nghiệm duy nhất khi  $1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m$  khác 1 và  $-1$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 172.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = m \\ -x + my = -1 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất.

- A.  $m = \pm 1$ .                      B.  $m \neq -1$ .                      C.  $m \neq 1$ .                      D.  $m \neq \pm 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$ .

Để hệ có nghiệm duy nhất thì  $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 173.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$  là

- A.  $(x; y) = (3; 11)$ .                      B.  $(x; y) = (-3; 1)$ .                      C.  $(x; y) = (13; 1)$ .                      D.  $(x; y) = (3; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 174.** Hệ bất trình  $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ (x-1)(x^2 + 5x + 4) \geq 0 \end{cases}$  có số nghiệm nguyên là

- A. 2.                      B. 1.                      C. Vô số.                      D. 3.

**Lời giải.**

$x$	$-\infty$	$-4$	$-1$	$1$	$+\infty$		
$x - 1$	-		-	-	0	+	
$x^2 + 5x + 4$	+	0	-	0	+	+	
$(x - 1)(x^2 + 5x + 4)$	-	0	+	0	-	0	+

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ (x-1)(x^2 + 5x + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1 \\ 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

do  $x$  là số nguyên nên  $x \in \{-1; 1\}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 175.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2 - 3x < x + 6$  là

- A.  $(-1; +\infty)$ .      B.  $(-\infty; -1)$ .      C.  $(-\infty; 1)$ .      D.  $(1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2 - 3x < x + 6 \Leftrightarrow 4x > -4 \Leftrightarrow x > -1$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 176.** Bất phương trình  $|x - 5| \leq 4$  có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 10.      B. 8.      C. 9.      D. 7.

**Lời giải.**

Ta có  $|x - 5| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq -4 \\ x - 5 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 9$ .

Trên  $[1; 9]$ , phương trình  $|x - 5| \leq 4$  có 9 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 177.** Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $mx + 4 > 0$  nghiệm đúng với mọi  $|x| < 8$  là

- A.  $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .      B.  $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ .  
C.  $m \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .      D.  $m \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $|x| < 8 \Leftrightarrow x \in (-8; 8)$ .

- ① Xét  $m = 0 \Leftrightarrow$  bất phương trình  $mx + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ , suy ra bất phương trình có nghiệm đúng với  $|x| < 8$ .
- ② Xét  $m > 0$ : Bất phương trình  $mx + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{m}$ . Bất phương trình nghiệm đúng  $\forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow -8 \geq -\frac{4}{m} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ .
- ③ Xét  $m < 0$ : Bất phương trình  $mx + 4 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{m}$ . Bất phương trình nghiệm đúng  $\forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow 8 \geq -\frac{4}{m} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 0$ .

Kết hợp 3 trường hợp trên, ta được giá trị của  $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 178.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\sqrt{x - 2007} > \sqrt{2017 - x}$  là

- A.  $[2017; +\infty)$ .      B.  $(-\infty; 2017)$ .      C.  $\{2017\}$ .      D.  $\emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x \geq 2017 \\ x \leq 2017 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2017$

Thử  $x = 2017$  vào bất phương trình không thỏa mãn. Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 179.** Tập nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} \frac{2x - 1}{3} < -x + 1 \\ \frac{4 - 3x}{2} < 3 - x \end{cases}$  là

- A.  $\left(-2; \frac{4}{5}\right)$ .      B.  $\left[-2; \frac{4}{5}\right]$ .      C.  $\left(-2; \frac{3}{5}\right)$ .      D.  $\left[-1; \frac{1}{3}\right)$ .

**Lời giải.**

Hệ bất phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 < -3x + 3 \\ 4 - 3x < 6 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < \frac{4}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho  $\left(-2; \frac{4}{5}\right)$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 180.** Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình  $(2 - x)(x + 1)(3 - x) \leq 0$  là

- A. 1.                                      B. 4.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Lời giải.**

Ta có  $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ;  $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ;  $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$ .

Bảng xét dấu

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$3$	$+\infty$			
VT		-	0	+	0	-	0	+

Suy ra  $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3]$ .

Vậy số nghiệm nguyên dương của bất phương trình là 2.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 181.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$  có tập xác định  $\mathbb{R}$ .

- A. 4.                                      B. 6.                                      C. 3.                                      D. 5.

**Lời giải.**

Hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$  có tập xác định  $\mathbb{R}$  khi  $x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 182.** Gọi  $S$  là tập nghiệm của bất phương trình  $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$ . Tập hợp nào sau đây là phần bù của  $S$ ?

- A.  $(-\infty; 0) \cup [10; +\infty)$ .    B.  $(-\infty; 2] \cup (10; +\infty)$ .    C.  $(-\infty; 2) \cup [10; +\infty)$ .    D.  $(0; 10)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x \geq 2$ .

$$\text{Ta có } \sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4} \Leftrightarrow \sqrt{5x - 1} > \sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 4}$$

$$\Leftrightarrow 5x - 1 > x - 1 + 2x - 4 + 2\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{2x - 4} \Leftrightarrow x + 2 > \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10 \Rightarrow S = [2; 10].$$

Phần bù của  $S$  là  $(-\infty; 2) \cup [10; +\infty)$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 183.** Với  $x$  thuộc tập hợp nào dưới đây thì biểu thức  $f(x) = \frac{2 - x}{2x + 1}$  không âm?

- A.  $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .                                      B.  $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$ .  
 C.  $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ .                                      D.  $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2 - x}{2x + 1} \geq 0.$$

Bảng xét dấu

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$	
$2 - x$		+	0	-	
$2x + 1$		-	0	+	
$f(x)$		-	+	0	-

$$\text{Vậy } S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right].$$

Chọn đáp án **B** □

**Câu 184.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$  bằng

- A.  $\frac{8}{11}$ .                                      B.  $\frac{11}{4}$ .                                      C.  $\frac{11}{8}$ .                                      D.  $\frac{4}{11}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow f(x) \leq \frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$ .

Suy ra giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  bằng  $\frac{8}{11}$  khi  $x = \frac{5}{2}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 185.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $(m - 1)^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 < 1$ ?

- A.**  $1 < m < 3$ .      **B.**  $1 < m < 2$ .      **C.**  $m > 2$ .      **D.**  $m > 3$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m + 3 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m - 2)^2 - (m - 2)(m - 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Theo định lí Vi-et ta có:  $x_1 + x_2 = \frac{2m - 4}{m - 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 3}{m - 1}$ .

Theo đề ta có:  $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2m - 4}{m - 1} + \frac{m - 3}{m - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m - 6}{m - 1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$ .

Vậy  $1 < m < 3$  là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 186.** Ba kho hàng  $A, B$  và  $C$  có tất cả 1035 tấn thóc, biết số thóc ở kho  $A$  nhiều hơn số thóc ở kho  $B$  là 93 tấn nhưng ít hơn tổng số thóc ở kho  $B$  và kho  $C$  là 517 tấn. Tính số thóc ở kho  $C$ .

- A.** 166 tấn thóc.      **B.** 529 tấn thóc.      **C.** 259 tấn thóc.      **D.** 610 tấn thóc.

**Lời giải.**

Gọi số thóc ở các kho hàng  $A, B, C$  lần lượt là  $a, b, c$  tấn thóc.

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c = 1035 \\ a - b = 93 \\ b + c - a = 517 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 259 \\ b + c = 776 \\ a - b = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 259 \\ b = 166 \\ c = 610 \end{cases}$$

Vậy kho  $C$  có 610 tấn thóc.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 187.** Bạn An và bạn Tâm đến một cửa hàng văn phòng phẩm để mua bút chì và bút bi. Bạn An mua 3 bút chì và 2 bút bi với giá 13500 đồng, bạn Tâm của 2 bút chì và 4 bút bi với giá 17000 đồng. Vậy giá mỗi bút chì và mỗi bút bi tương ứng là

- A.** 3000 đồng và 3500 đồng.      **B.** 2000 đồng và 3000 đồng.  
**C.** 2500 đồng và 3500 đồng.      **D.** 2500 đồng và 3000 đồng.

**Lời giải.**

Gọi giá mỗi bút chì và mỗi bút bi lần lượt là  $x, y$  đồng. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13500 \\ 2x + 4y = 17000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 13500 \\ x + 2y = 8500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5000 \\ x + 2y = 8500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2500 \\ y = 3000. \end{cases}$$

Vậy giá mỗi bút chì và mỗi bút bi tương ứng là 2500 đồng và 3000 đồng.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 188.** Tìm  $m$  để  $f(x) = (m - 2)x + 2m - 1$  là nhị thức bậc nhất.

- A.**  $m \neq 2$ .      **B.**  $\begin{cases} m \neq 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$ .      **C.**  $m > 2$ .      **D.**  $m < 1$ .

**Lời giải.**

Để  $f(x) = (m - 2)x + 2m - 1$  là nhị thức bậc nhất thì  $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 189.** Khi hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2my - z = 1 \\ 2x - my - 2z = 2 \\ x - (m + 4)y - z = 1 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y; z)$  với  $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$ , giá trị  $T =$

$2017x - 2018y - 2017z$  là

- A.  $T = -2017$ .      B.  $T = 2018$ .      C.  $T = 2017$ .      D.  $T = -2018$ .

**Lời giải.**

Kí hiệu  $\begin{cases} x + 2my - z = 1 & (1) \\ 2x - my - 2z = 2 & (2) \\ x - (m + 4)y - z = 1 & (3) \end{cases}$ .

Do  $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$ , từ (1) và (3) ta có  $\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ .

Ta có  $T = 2017x - 2018y - 2017z = 2017(x - z) = 2017$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 190.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + 2xy + 8x = 3y^2 + 12y + 9 \\ x^2 + 4y + 18 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3y+1} = 0 \end{cases}$  có nghiệm là  $(a; b)$ . Khi đó giá trị biểu thức  $T = 5a^2 + 4b^2$

- A.  $T = 24$ .      B.  $T = 21$ .      C.  $T = 5$ .      D.  $T = 4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq -7 \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} (*)$

$\begin{cases} x^2 + 2xy + 8x = 3y^2 + 12y + 9(1) \\ x^2 + 4y + 18 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3y+1} = 0(2) \end{cases}$ .

Có: (1)  $\Leftrightarrow x^2 + 2(y+4)x - 3y^2 - 12y - 9 = 0$ , ta coi (1) là phương trình bậc hai ẩn  $x$  và  $y$  là tham số, giải  $x$  theo  $y$  ta được  $\begin{cases} x = -3y - 9 \\ x = y + 1 \end{cases}$ ,

Với  $x = -3y - 9$  thì (\*)  $\Rightarrow \begin{cases} -3x - 9 \geq -7 \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{2}{3} \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$  (Vô lý).

Với  $x = y + 1$  thì

(2)  $\Rightarrow x^2 + 4x - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3x-2} + 14 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3x-2})^2 + (\sqrt{x+7} - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3x-2} \\ \sqrt{x+7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$  (thỏa mãn)  $\Rightarrow y = 1$  (thỏa mãn).

Hệ phương trình có nghiệm là (2; 1)  $\Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow T = 24$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 191.** Các nghiệm của hệ  $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$  là

- A.  $(x; y) = (-3 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}); (x; y) = (-3 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3})$ .  
 B.  $(x; y) = (-3 - \sqrt{3}; -3 + \sqrt{3}); (x; y) = (-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3})$ .  
 C.  $(x; y) = (-3; -2); (x; y) = (3; 2)$ .  
 D.  $(x; y) = (-3; 3); (x; y) = (2; 2)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases} (1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy - 2x - y + 2) - x + 1 - y + 2 = 21 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-2) - (x-1) - (y-2) = 21 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 38 \end{cases} (2)$

Đặt  $u = x - 1; v = y - 2$  ta được hệ phương trình  $\begin{cases} uv - (u+v) = 21 \\ u^2 + v^2 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv - (u+v) = 21 \\ (u+v)^2 - 2uv = 38 \end{cases}$

Đặt  $S = u + v$ ;  $P = uv$  ta được hệ phương trình  $\begin{cases} P - S = 21 \\ S^2 - 2P = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 21 \\ S^2 - 2S - 80 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases}.$$

+ Khi  $\begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases}$  thì  $u; v$  là nghiệm của phương trình:  $X^2 + 8X + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 + \sqrt{3} \\ v = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} u = -4 - \sqrt{3} \\ v = -4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -4 + \sqrt{3} \\ y - 2 = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 = -4 - \sqrt{3} \\ y - 2 = -4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + \sqrt{3} \\ y = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 - \sqrt{3} \\ y = -2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

+ Khi  $\begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases}$  thì  $u; v$  là nghiệm của phương trình:  $X^2 - 10X + 31 = 0$  (vô nghiệm).

Chọn đáp án **A** □

**Câu 192.** Cho  $(x; y)$  với  $x, y$  nguyên là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} xy + y^2 + x = 7y(1) \\ \frac{x^2}{y} + x = 12(2) \end{cases}$  thì tích  $xy$

bằng

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 4.

**Lời giải.**

Điều kiện  $y \neq 0$ .

Hệ phương trình tương đương với  $\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 7 & (1) \\ x \left( \frac{x}{y} + 1 \right) = 12 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và  $x, y$  là số nguyên nên  $y$  là ước của  $x$ .

Từ (2) ta có  $x$  là ước của 12.

+  $x = \pm 1$  thì  $\frac{\pm 1}{y} + 1 = \pm 12$  (loại).

+  $x = \pm 2$  thì  $\frac{\pm 2}{y} + 1 = \pm 6$  (loại).

+  $x = 3$  thì  $\frac{3}{y} + 1 = 4 \Leftrightarrow y = 1$  (thỏa mãn)  $\Rightarrow xy = 3$ .

+  $x = -3$  thì  $-\frac{3}{y} + 1 = -4$  (loại)

+  $x = 4$  thì  $\frac{4}{y} + 1 = 3$  (loại).

+  $x = -4$  thì  $-\frac{4}{y} + 1 = -3 \Leftrightarrow y = 1$  (loại vì không thỏa mãn (1) ).

+  $x = 6$  thì  $\frac{6}{y} + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 6$  (loại vì không thỏa mãn (1) ).

+  $x = -6$  thì  $-\frac{6}{y} + 1 = -2 \Leftrightarrow y = 2$  (loại vì không thỏa mãn (1) ).

+  $x = 12$  thì  $\frac{12}{y} + 1 = 1$  vô nghiệm.

+  $x = -12$  thì  $-\frac{12}{y} + 1 = -1 \Leftrightarrow y = 6$  (loại vì không thỏa mãn (1) ).

Vậy có duy nhất một nghiệm nguyên  $x = 3; y = 1$  nên  $xy = 3$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 193.** Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 800 m<sup>2</sup>. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên 100 m<sup>2</sup> nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên 100 m<sup>2</sup> Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180 công. Hãy chọn phương án đúng nhất trong các phương án sau



- A. Trồng 600 m<sup>2</sup> đậu, 200 m<sup>2</sup> cà.
- C. Trồng 400 m<sup>2</sup> đậu, 200 m<sup>2</sup> cà.

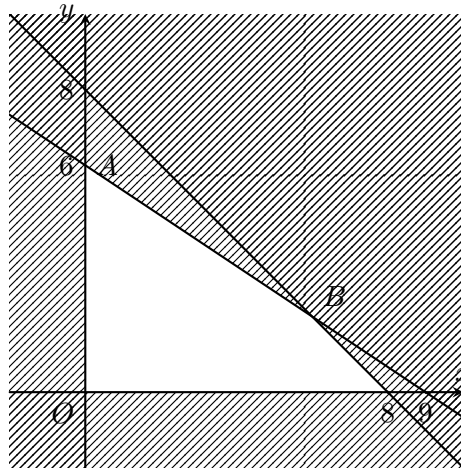
- B. Trồng 500 m<sup>2</sup> đậu, 300 m<sup>2</sup> cà.
- D. Trồng 200 m<sup>2</sup> đậu, 600 m<sup>2</sup> cà.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  m<sup>2</sup> là diện tích đất trồng đậu,  $y$  m<sup>2</sup> là diện tích đất trồng cà. Điều kiện  $x \geq 0, y \geq 0$ . Số tiền thu được là  $T = 3x + 4y$  triệu đồng.

Theo bài ra ta có 
$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Đồ thị:



Dựa đồ thị ta có tọa độ các đỉnh  $A(0; 6), B(6; 2), C(8; 0), O(0; 0)$ .  
Thay vào  $T = 3x + 4y$  ta được  $T_{\max} = 26$  triệu đồng khi trồng 600 m<sup>2</sup> đậu và 200 m<sup>2</sup> cà.  
Chọn đáp án **A** □

- Câu 194.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 10$ ?
- A.  $m = 0$ .
  - B.  $m = 1$ .
  - C.  $m = -1$ .
  - D.  $m = \pm 1$ .

**Lời giải.**

Từ phương trình thứ nhất suy ra  $x = 1 + my$  (1), thay vào phương trình thứ hai ta có

$$m(1 + my) + y = 3 \Leftrightarrow (m^2 + 1)y = 3 - m \Leftrightarrow y = \frac{3 - m}{m^2 + 1}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) có

$$x = 1 + \frac{m(3 - m)}{m^2 + 1} = \frac{3m + 1}{m^2 + 1}.$$

Vậy hệ luôn có nghiệm  $(x; y)$  với mọi  $m$ .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 &\Leftrightarrow \frac{(3m + 1)^2}{(m^2 + 1)^2} + \frac{(3 - m)^2}{(m^2 + 1)^2} = 10 \\ &\Leftrightarrow 9m^2 + 6m + 1 + 9 - 6m + m^2 = 10(m^4 + 2m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 10m^2 + 10 = 10(m^4 + 2m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow m^4 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B** □

- Câu 195.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases}$ . Giá trị  $m$  thuộc khoảng nào sau đây để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x_0; y_0)$  thỏa mãn  $2x_0 - 3y_0 = 1$  ?
- A.  $m \in (5; 9)$ .
  - B.  $m \in (-5; 1)$ .
  - C.  $m \in (0; 3)$ .
  - D.  $m \in (-4; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 1. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $(m; m + 1)$  mà  $2x_0 - 3y_0 = 1 \Leftrightarrow 2m - 3(m + 1) = 1 \Leftrightarrow m = -4$ . Vậy  $m \in (-5; 1)$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 196.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$  (I),  $m$  là tham số. Mệnh đề nào **sai**?

- A. Hệ (I) có nghiệm duy nhất  $\forall m \neq \pm 1$ .      B. Khi  $m = 1$  thì hệ (I) có vô số nghiệm.  
C. Khi  $m = -1$  thì hệ (I) vô nghiệm.      D. Hệ (I) có vô số nghiệm.

**Lời giải.**

Hệ (I) có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ .

Hệ (I) vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ .

Hệ (I) vô nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} \neq 1 \Leftrightarrow m = -1$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 197.** Có bao nhiêu giá trị  $m$  nguyên dương để hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất

$(x; y)$  sao cho biểu thức  $A = 3x - y$  nhận giá trị nguyên

- A. 4.      B. 2.      C. 3.      D. 1.

**Lời giải.**

Ta có  $\mathcal{D} = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$  nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & m \end{vmatrix} = 3m + 9; D_y = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9m - 6.$$

Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất là  $\begin{cases} x = \frac{3m + 9}{m^2 + 2} \\ y = \frac{9m - 6}{m^2 + 2} \end{cases}$ .

$$\text{Ta có } A = 3x - y = \frac{3(3m + 9)}{m^2 + 2} - \frac{9m - 6}{m^2 + 2} = \frac{33}{m^2 + 2}.$$

Để  $A$  nguyên thì  $m^2 + 2$  là ước của 33 mà  $m^2 + 2 \geq 2$  nên ta có các trường hợp sau:

- + TH1:  $m^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 1$ .  
+ TH2:  $m^2 + 2 = 11 \Leftrightarrow m = \pm 3$ .  
+ TH3:  $m^2 + 2 = 33 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{31}$  (loại).

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của  $m$  để  $A$  nguyên.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 198.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 3y = -1 \\ y - 3z = -2 \end{cases}$ .

- A.  $(2; 1; 1)$ .      B.  $(-2; 1; 1)$ .      C.  $(2; -1; 1)$ .      D.  $(2; 1; -1)$ .

**Lời giải.**

Rút  $y$  ở phương trình cuối ta có  $y = -2 + 3z$  thay vào hai phương trình đầu ta được

$$\begin{cases} x - 4 + 6z - 3z = 1 \\ x + 6 - 9z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z = 5 \\ x - 9z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1. \text{ Vậy nghiệm là } (2; 1; 1).$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 199.** Hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases}$  có nghiệm là

- A.  $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3}$ .      B.  $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$ .      C.  $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$ .      D.  $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ .

Đặt  $a = \frac{1}{x}$  và  $b = \frac{1}{y}$  thì hệ trở thành  $\begin{cases} 2a + 3b = 13 \\ 3a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ .

Vậy nghiệm của hệ là  $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 200.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hệ trên có nghiệm.

- A.  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .      B.  $[1; +\infty)$ .      C.  $[0; 2]$ .      D.  $(-\infty; -\frac{1}{2}]$ .

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy(x + y) = 4m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2m^2 - m \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm thì  $2^2 \geq 4(2m^2 - m) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 201.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = m^2 - 4 \end{cases}$  có nghiệm khi

- A.  $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$ .      B.  $m > 1$ .      C.  $m < -1$ .      D.  $m \neq \pm 1$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = m^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = m^2 - 1 \Rightarrow (x + y)^2 = m^2 - 1$$

Phương trình này có nghiệm khi  $m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 202.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3.      B. 2.      C. 1.      D. 4.

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x^2 = 3x - y & (1) \\ y^2 = 3y - x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được:  $x^2 - y^2 = 4x - 4y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 4 - x \end{cases}$ .

TH1:  $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 2 \end{cases}$ .

TH2:  $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$ .

Vậy hệ có hai nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 203.** Hệ phương trình  $\begin{cases} (2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(4x^2 - 4xy + y^2) = 0 \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} = 3 \end{cases}$  có một nghiệm  $(x_0; y_0)$ .

Khi đó  $P = x_0^2 + y_0^2$  có giá trị là

- A. 1.                                      B.  $\frac{17}{16}$ .                                      C. 3.                                      D. 2.

**Lời giải.**

Ta có 
$$\begin{cases} (2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(4x^2 - 4xy + y^2) = 0 & (1) \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} = 3 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 8x^2 + 12y^2 - 20xy = 0 \Leftrightarrow (x - y)(2x - 3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = 3y \end{cases}$

Với  $x = y$  ta có  $(2) \Rightarrow 3x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$ : phương trình vô nghiệm.

Với  $2x = 3y$  ta có  $(2) \Rightarrow 4y + \frac{1}{2y} = 3 \Leftrightarrow 8y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

Với  $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow P = 1$ .

Với  $y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \Rightarrow P = \frac{7}{16}$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 204.** Tổng số tuổi của bố, mẹ và con bằng 70. Tuổi của bố và con bằng  $\frac{4}{3}$  tuổi mẹ, tuổi mẹ gấp 6 lần tuổi con. Tuổi của bố, mẹ và con lần lượt bằng bao nhiêu?

- A. 35, 30, 5.                                      B. 36, 28, 6.                                      C. 30, 35, 5.                                      D. 28, 36, 6.

**Lời giải.**

Gọi  $x, y, z, (0 < x, y, z < 70)$ , lần lượt là tuổi của bố, mẹ và con.

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ x + z = \frac{4}{3}y \\ y = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7z = 70 \\ x - 7z = 0 \\ y = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 30 \\ z = 5. \end{cases}$$

Vậy tuổi của bố, mẹ và con lần lượt bằng 35, 30, 5.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 205.** Một số tự nhiên có hai chữ số có dạng  $\overline{ab}$ , biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng  $\frac{4}{5}$  số ban đầu trừ đi 10. Khi đó  $a^2 + b^2$  bằng

- A. 45.                                      B. 89.                                      C. 117.                                      D. 65.

**Lời giải.**

Ta có:  $|a - b| = 3 (a, b \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b \leq 9)$ .

Khi viết ngược lại ta có:  $10b + a = \frac{4}{5}(10a + b) - 10 \Leftrightarrow 35a - 46b = 50$ .

Xét hệ phương trình: 
$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 35a - 46b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}$$

Hoặc 
$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 35a - 46b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{188}{11} \\ b = -\frac{155}{11} \end{cases} \text{ (loại)}. \text{ Với } a = 8, b = 5, a^2 + b^2 = 89.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 206.** Một xe hơi khởi hành từ Krông Năng đi đến Nha Trang cách nhau 175 km. Khi về xe tăng vận tốc trung bình hơn vận tốc trung bình lúc đi là 20 km/giờ. Biết rằng thời gian dùng để đi và về là 6 giờ; vận tốc trung bình lúc đi là

- A. 60 km/giờ.                                      B. 45 km/giờ.                                      C. 55 km/giờ.                                      D. 50 km/giờ.

**Lời giải.**

Gọi  $x, y > 0$  (km/giờ) lần lượt là vận tốc trung bình lúc đi và vận tốc trung bình lúc về.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 20 \\ \frac{175}{x} + \frac{175}{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 + x(1) \\ \frac{175}{x} + \frac{175}{y} = 6(2) \end{cases}$$





**Câu 217.** Bình phương của tổng hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 6x + 8 = 0$  là

- A. 9.                                      B. 6.                                      C. 20.                                      D. 36.

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - 6x + 8 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1 = 2$  và  $x_2 = 4$  nên  $(x_1 + x_2)^2 = 36$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 218.** Trong các phương trình sau, phương trình nào **không phải** là phương trình bậc hai?

- A.  $x^2 - 3x + 2 = x(x + 5)$ .                                      B.  $(1 - \sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x = 0)$ .  
 C.  $x^2 - 3x + 2 = -x(x + 5)$ .                                      D.  $x^2 - 4 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 3x + 2 = x(x + 5) \Leftrightarrow 4x - 1 = 0$  là phương trình bậc nhất một ẩn.

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 219.** Cặp số  $(1; -1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

- A.  $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ .                                      B.  $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ .                                      C.  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ .                                      D.  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Thay cặp số  $(1; -1)$  vào từng hệ phương trình, ta nhận hệ  $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 220.** Hệ phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A.  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ .                                      B.  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y + 1 = 0 \end{cases}$ .                                      C.  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ .                                      D.  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Ta nhận thấy hệ  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ , nên hệ phương trình đó vô nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 221.** Tìm nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ .

- A.  $(x; y) = (-2; -4)$ .                                      B.  $(x; y) = (-4; -2)$ .                                      C.  $(x; y) = (4; 2)$ .                                      D.  $(x; y) = (2; 4)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 222.** Bộ ba số  $(2; -1; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

- A.  $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$ .                                      B.  $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ .  
 C.  $\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ .                                      D.  $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = 6 \\ 10x - 4y - z = 2 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 223.** Tìm nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$ .

- A.  $(x; y) = (2; 1)$ .                                      B.  $(x; y) = \left(\frac{10}{7}; \frac{1}{7}\right)$ .                                      C.  $(x; y) = \left(-\frac{10}{7}; \frac{1}{7}\right)$ .                                      D.  $(x; y) = (-2; -1)$ .

**Lời giải.**

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{7} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(-\frac{10}{7}; \frac{1}{7})$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 224.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$  là

- A.  $(x; y; z) = (5; 3; 3)$ .    B.  $(x; y; z) = (4; 5; 2)$ .    C.  $(x; y; z) = (2; 4; 5)$ .    D.  $(x; y; z) = (3; 5; 3)$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Từ phương trình  $x + y + z = 11$  suy ra  $z = 11 - x - y$ . Thay vào hai phương trình còn lại ta được hệ phương trình, ta được  $\begin{cases} 2x - y + 11 - x - y = 5 \\ 3x + 2y + 11 - x - y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ . Từ đó ta được  $z = 11 - 4 - 5 = 2$ . Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (4; 5; 2)$ .

Cách 2. Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (4; 5; 2)$  là nghiệm của hệ phương trình

Chọn đáp án **B** □

**Câu 225.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 2 \\ z + 2x = 3 \end{cases}$  là:

- A.  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ .    B.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ .    C.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ .    D.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Từ phương trình  $z + 2x = 3$  suy ra  $z = 3 - 2x$ . Thay vào hai phương trình còn lại ta được hệ phương trình, ta được  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2(3 - 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ . Từ đó ta được  $z = 3 - 2.1 = 1$ . Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$ .

Cách 2. Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình

Chọn đáp án **D** □

**Câu 226.** Bộ  $(x; y; z) = (2; -1; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây ?

- A.  $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$ .    B.  $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ .
- C.  $\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ .    D.  $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = 6 \\ 10x - 4y - z = 2 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (2; -1; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 227.** Bộ  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây ?

- A.  $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z = -5 \\ y + 4z = -17 \end{cases}$ .    B.  $\begin{cases} x + 7y - z = -2 \\ -5x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ .
- C.  $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$ .    D.  $\begin{cases} x + 2y + z = -2 \\ x - y + z = 4 \\ -x - 4y - z = 5 \end{cases}$ .

**Lời giải.**



Bằng cách sử dụng MTCT ta được  $(x; y; z) = (1; 0; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$   
 Chọn đáp án **C** □

**Câu 228.** Gọi  $(x_0; y_0; z_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 3x + y - 3z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ .  
 A.  $P = 1$ .                      B.  $P = 2$ .                      C.  $P = 3$ .                      D.  $P = 14$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} 3x + y - 3z = 1 & (1) \\ x - y + 2z = 2 & (2) \\ -x + 2y + 2z = 3 & (3) \end{cases}$ . Phương trình (2)  $\Leftrightarrow x = y - 2z + 2$ . Thay vào (1), ta được

$$3(y - 2z + 2) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 4y - 9z = -5 \quad (*)$$

Phương trình (3)  $\Leftrightarrow x = 2y + 2z - 3$ . Thay vào (1), ta được

$$3(2y + 2z - 3) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 7y + 3z = 10 \quad (**)$$

Từ (\*) và (\*\*), ta có  $\begin{cases} 4y - 9z = -5 \\ 7y + 3z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ . Suy ra  $x = 1$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (1; 1; 1) \Rightarrow P = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 229.** Gọi  $(x_0; y_0; z_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = x_0 y_0 z_0$ .  
 A.  $P = -40$ .                      B.  $P = 40$ .                      C.  $P = 1200$ .                      D.  $P = -1200$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y + z = 11 & (1) \\ 2x - y + z = 5 & (2) \\ 3x + 2y + z = 24 & (3) \end{cases}$ . Phương trình (3)  $\Leftrightarrow z = 24 - 3x - 2y$ . Thay vào (1) và (2) ta được hệ phương trình

trình

$$\begin{cases} x + y + 24 - 3x - 2y = 11 \\ 2x - y + 24 - 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = -13 \\ -x - 3y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

Suy ra  $z = 24 - 3.4 - 2.5 = 2$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y; z) = (4; 5; 2) \Rightarrow P = 4.5.2 = 40$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 230.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$  có duy nhất một nghiệm.  
 A.  $m = \frac{10}{3}$ .                      B.  $m = 10$ .                      C.  $m = -10$ .                      D.  $m = -\frac{10}{3}$ .

**Lời giải.**

Từ hệ phương trình đã cho ta suy ra  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ .

Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$  có nghiệm duy nhất khi  $(1; -2)$  là nghiệm của phương trình  $2mx + 5y - m = 0$  tức là  $2m.1 + 5.(-2) - m = 0 \Leftrightarrow m = 10$ .

Chọn đáp án **B** □

**Câu 231.** Một đoàn xe tải chở 290 tấn xi măng cho một công trình xây đập thủy điện. Đoàn xe có 57 chiếc gồm ba loại, xe chở 3 tấn, xe chở 5 tấn và xe chở 7,5 tấn. Nếu dùng tất cả xe 7,5 tấn chở ba chuyến thì được số xi măng bằng tổng số xi măng do xe 5 tấn chở ba chuyến và xe 3 tấn chở hai chuyến. Hỏi số xe mỗi loại?

- A. 18 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 20 xe chở 7,5 tấn.
- B. 20 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.
- C. 19 xe chở 3 tấn, 20 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.
- D. 20 xe chở 3 tấn, 18 xe chở 5 tấn và 19 xe chở 7,5 tấn.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số xe tải chở 3 tấn,  $y$  là số xe tải chở 5 tấn và  $z$  là số xe tải chở 7,5 tấn.

Điều kiện:  $x, y, z$  nguyên dương.

Theo giả thiết của bài toán ta có 
$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7,5z = 290. \\ 22,5z = 6x + 15y \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $x = 20, y = 19, z = 18$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 232.** Có ba lớp học sinh 10A, 10B, 10C gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp 10C trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

- A. 10A có 40 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 45 em.
- B. 10A có 45 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 40 em.
- C. 10A có 45 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 43 em.
- D. 10A có 43 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 45 em.

**Lời giải.**

Gọi số học sinh của lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là  $x, y, z$ .

Điều kiện:  $x, y, z$  nguyên dương. Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y + z = 128 \\ 3x + 2y + 6z = 476. \\ 4x + 5y = 375 \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $x = 40, y = 43, z = 45$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 233.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hệ phương trình 
$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ my + z = 1 \\ x + mz = 1 \end{cases}$$
 vô nghiệm.

- A.  $m = -1$ .
- B.  $m = 0$ .
- C.  $m = 1$ .
- D.  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Từ hệ phương trình đã cho suy ra  $z = 1 - my$ . Thay vào hai phương trình còn lại, ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + m(1 - my) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - m^2y = 1 - m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 1 - mx \\ x - m^2(1 - mx) = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ (1 + m^3)x = m^2 - m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi  $\begin{cases} 1 + m^3 = 0 \\ m^2 - m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m^2 - m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$ .

Cách 2. (Thử trực tiếp) Thay  $m = -1$  vào hệ phương trình ta được hệ phương trình 
$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1. \\ x - z = 1 \end{cases}$$
 Sử dụng MTCT ta thấy hệ vô nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

**ĐÁP ÁN**

- |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 1. B | 2. D | 3. A | 4. C | 5. C | 6. B | 7. B | 8. A | 9. B | 10. A |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|

11. C	12. C	13. D	14. D	15. C	16. C	17. C	18. A	19. D	20. A
21. B	22. C	23. B	24. C	25. A	26. D	27. B	28. D	29. A	30. A
31. D	32. C	33. C	34. D	35. D	36. C	37. C	38. C	39. A	40. D
41. B	42. B	43. D	44. C	45. A	46. B	47. D	48. D	49. D	50. B
51. B	52. A	53. A	54. A	55. A	56. C	57. C	58. C	59. D	60. A
61. B	62. A	63. B	64. D	65. C	66. B	67. B	68. B	69. C	70. A
71. A	72. A	73. A	74. A	75. A	76. A	77. A	78. A	79. C	80. C
81. C	82. A	83. D	84. A	85. C	86. B	87. A	88. B	89. B	90. C
91. D	92. A	93. C	94. C	95. C	96. B	97. A	98. A	99. A	100. A
101. A	102. A	103. D	104. A	105. B	106. B	107. C	108. A	109. A	110. C
111. C	112. C	113. B	114. C	115. A	116. B	117. A	118. D	119. A	120. D
121. B	122. B	123. D	124. B	125. D	126. B	127. D	128. D	129. D	130. C
131. D	132. B	133. C	134. D	135. D	136. A	137. B	138. C	139. A	140. C
141. C	142. A	143. A	144. D	145. A	146. A	147. D	148. D	149. D	150. A
151. C	152. D	153. D	154. A	155. C	156. C	157. D	158. C	159. A	160. D
161. D	162. A	163. C	164. B	165. A	166. A	167. C	168. C	169. A	170. C
171. A	172. D	173. D	174. A	175. A	176. C	177. A	178. D	179. A	180. C
181. D	182. C	183. B	184. A	185. A	186. D	187. D	188. A	189. C	190. A
191. A	192. C	193. A	194. B	195. B	196. D	197. B	198. A	199. D	200. A
201. A	202. B	203. A	204. A	205. B	206. D	207. D	208. C	209. D	210. C
211. D	212. A	213. B	214. A	215. D	216. D	217. D	218. A	219. B	220. C
221. C	222. A	223. C	224. B	225. D	226. A	227. C	228. C	229. B	230. B
231. B	232. A	233. A							

**B** **HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG-HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP**

**Dạng 4. Hệ phương trình đối xứng loại I**

**Định nghĩa 1.** Hệ đối xứng loại I là hệ phương trình có dạng  $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$  với  $f(x, y) = f(y, x)$  và  $g(x, y) = g(y, x)$ .

**Nhận dạng:** Khi ta hoán đổi vị trí của  $x$  và  $y$  thì  $f(x, y)$  và  $g(x, y)$  không thay đổi.

**Phương pháp:**

- Đặt  $S = x + y$  và  $P = xy$ .
- Thế các ẩn  $S, P$  vào hệ phương trình ban đầu ta được một hệ phương trình mới.
- Giải hệ phương trình mới đó ta tìm được các ẩn  $S, P$ .
- Tìm nghiệm  $(x; y)$  bằng cách giải phương trình bậc hai  $t^2 - St + P = 0$ .

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$

**Lời giải.**

Từ đề bài ta có

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ (x + y)^2 - xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 16 - xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3. \end{cases}$$

Khi đó hai số  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn  $t$  là  $t^2 - 4t + 3 = 0$ .

Ta có  $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases}$

Khi đó ta có  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$  □

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases}$

**Lời giải.**

Từ đề bài ta có

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} x^2 + y^2 = S \\ xy = P. \end{cases}$

Khi đó ta có  $\begin{cases} S^2 - P^2 = 481 \\ S + P = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - (37 - S)^2 = 481 \\ P = 37 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 74S = 1850 \\ P = 37 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 25 \\ P = 12. \end{cases}$

Suy ra  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 49 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 7 \\ xy = 12. \end{cases}$

— **TH1:**  $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12. \end{cases}$

Nên  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn  $t$  là  $t^2 - 7t + 12 = 0$ .

Ta có  $t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 3. \end{cases}$

Suy ra  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$

— **TH2:**  $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12. \end{cases}$

Nên  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn  $t$  là  $t^2 + 7t + 12 = 0$ .

Ta có  $t^2 + 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -3. \end{cases}$

Suy ra  $\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -4. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là  $S = \{(3; 4); (4; 3); (-3; -4); (-4; -3)\}$ . □

**Ví dụ 3.** Giải và biện luận số nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$  theo các giá trị của tham số  $m$ .

**Lời giải.**

Từ đề bài ta có:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ (x + y)^2 - 2xy = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ 36 - 2xy = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \frac{36 - m}{2}. \end{cases}$$

Khi đó hai số  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn  $t$  là  $t^2 - 6t + \frac{36 - m}{2} = 0$ .

Ta có  $\Delta = 36 - 2(36 - m)$ .

— **TH1:** Với  $m < 18$  thì hệ phương trình vô nghiệm.

— **TH2:** Với  $m = 18$  thì hai số  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai  $t^2 - 6t + 9 = 0$   
Ta có:  $t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ .

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3. \end{cases}$

— **TH3:** Với  $m > 18$  thì hai số  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai  $t^2 - 6t + \frac{36 - m}{2} = 0$ .

Khi đó hệ phương trình có hai nghiệm.

Kết luận,

— Với  $m < 18$  thì hệ phương trình vô nghiệm.

— Với  $m = 18$  thì hệ phương trình có một nghiệm.

— Với  $m > 18$  thì hệ phương trình có hai nghiệm. □

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 208 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2 \cdot 96 = 208 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 400 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$

hoặc  $\begin{cases} x + y = -20 \\ xy = 96 \end{cases}$

— **TH1:**  $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$ . Khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình:  $t^2 - 20t + 96 = 0$

nên  $\begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$

— **TH1:**  $\begin{cases} x + y = -20 \\ xy = 96 \end{cases}$ . Khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình:  $t^2 - 20t + 96 = 0$   
 nên  $\begin{cases} x = -8 \\ y = -12 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = -12 \\ y = -8 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho  $S = \{(8; 12), (12; 8), (-12; -8), (-8; -12)\}$ . □

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$  Điều kiện:  $S^2 - 4P \geq 0$

Hệ phương trình trên trở thành  $\begin{cases} S^2 - 2P + S = 8 \\ P + S = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 10 + 2S + S = 8 \\ P = 5 - S \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 3S - 18 = 0 \\ P = 5 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -6 \\ S = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = -6 \\ P = 11 \end{cases} \text{ (loại)} \\ \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Khi đó ta có  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai  $t^2 - 3t + 2 = 0$ .

nên  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ .

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho  $S = \{(1; 2), (2; 1)\}$ . □

**Ví dụ 6.** Tìm  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm:  $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + 1 = m. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ (x + y)^2 - 2xy + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ 64 - 2xy + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = \frac{65 - m}{2}. \end{cases}$

Khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn  $t$  là  $t^2 - 8t + \frac{65 - m}{2} = 0$ .

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow 16 - \frac{65 - m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 32 - 65 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 33$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $m \geq 33$ . □

**Ví dụ 7.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2y + xy^2 = -2 \\ x + y + xy = -1. \end{cases}$

**Lời giải.**

Đặt  $S = x + y; P = xy$  ( $S^2 - 4P \geq 0$ ). Hệ phương trình trở thành:  $\begin{cases} S \cdot P = -2 \\ S + P = -1. \end{cases}$

Suy ra  $S, P$  là nghiệm của phương trình

$X^2 + X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = -2. \end{cases}$

— **TH1:**  $\begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases}$  suy ra  $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$

Do đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 2. \end{cases}$

— **TH2:**  $\begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases}$  suy ra  $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases}$

Do đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 + 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ .

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(-1; 2); (2; -1); (-1; -1)$ . □

**Ví dụ 8.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = -7 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

**Lời giải.**

Đặt  $S = x + y; P = xy (S^2 - 4P \geq 0)$ . Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S + P = -7 \\ S^2 - 2P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -7 - S \\ S^2 + 2S + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -7 - S \\ S = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -6 \\ S = -1. \end{cases}$$

Ta có  $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6 \end{cases}$ . Do đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình

$$X^2 + X - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -3 \\ X = 2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(-3; 2); (2; -3)$ . □

**Ví dụ 9.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + y + xy = x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 = 16. \end{cases}$

**Lời giải.**

Đặt  $S = x + y; P = xy (S^2 - 4P \geq 0)$ . Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S + P = S^2 - 2P \\ S^3 - 3SP = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{3}(S^2 - S) \\ S^3 - 3SP = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{3}(S^2 - S) \\ S^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = P = 4 \\ \begin{cases} P = \frac{20}{3} \\ S = -4 \end{cases} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Ta có  $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$ . Suy ra  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ .

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(2; 2)$ . □

**Ví dụ 10.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

**Lời giải.**

Đặt  $S = x + y, P = xy$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ . Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} SP = 30 \\ S(S^2 - 3P) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{30}{S} \\ S\left(S^2 - \frac{90}{S}\right) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6. \end{cases}$$

Ta có  $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là  $(3; 2), (2; 3)$ . □

**Dạng 5. Hệ phương trình đối xứng loại II**

**Định nghĩa 2.** Hệ đối xứng loại II là hệ có dạng  $\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ F(y; x) = 0 \end{cases}$ , trong đó  $F(x; y)$  là biểu thức không đối xứng.

Hãy nói cách khác hệ đối xứng loại II là hệ mà khi ta đổi vai trò của  $x, y$  cho nhau thì phương trình của hệ này chuyển thành phương trình kia.

**Phương pháp giải:**

Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ ta được

$$F(x; y) - F(y; x) = 0 \Leftrightarrow (x - y) \cdot f(x; y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ f(x; y) = 0. \end{cases}$$

**Bài 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x. \end{cases}$

**Lời giải.**

Trừ vế với vế hai phương trình, ta được

$$x^2 - y^2 - 3x + 3y = 2y - 2x \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Do đó hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

— Trường hợp 1:  $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 5) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 5. \end{cases}$

— Trường hợp 2:  $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 2(1 - x) \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$

Vậy hệ có bốn nghiệm  $(0; 0)$ ,  $(5; 5)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(2; -1)$ .

*Nhận xét:* Nếu hệ có nghiệm  $(x_0; y_0)$  thì cũng có nghiệm  $(y_0; x_0)$ . □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình sau  $\begin{cases} x - 3y = 4 \left(\frac{y}{x}\right) \\ y - 3x = 4 \left(\frac{x}{y}\right). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x, y \neq 0$ . Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ y^2 - 3xy = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ x^2 - y^2 + 4(x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ (x - y)(x + y + 4) = 0. \end{cases}$$

— Xét  $x = y$  thì  $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = -2$ . Đối chiếu với điều kiện, ta được  $x = y = -2$ .

— Xét  $x + y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4 - x$  thì

$$x^2 + 3x(4 + x) = -4(4 + x) \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow (2x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -2.$$

Vậy hệ có nghiệm  $(-2; -2)$ . □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình sau  $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x. \end{cases}$

**Lời giải.**



$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ (x^3 - y^3) + 5(x - y) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ (x - y)(x^2 - xy + y^2 + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ (x - y) \left[ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 5 \right] = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ x^3 - 11x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{11}. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó hệ có ba nghiệm là  $(0; 0)$ ,  $(-\sqrt{11}; -\sqrt{11})$ ,  $(\sqrt{11}; \sqrt{11})$ . □

**Bài 4.** Giải hệ phương trình sau  $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x, y \geq 0$ . Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$x^2 + \sqrt{x} - (y^2 + \sqrt{y}) = 2(y - x) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) [(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})] = 0$$

Vì  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) > 0$  nên phương trình đã cho tương đương với  $x = y$ . Từ đó thay vào một trong hai phương trình ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + \sqrt{x} = 0 & \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{x} = 2x \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 1 \\ x + \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có 3 nghiệm  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ . □

**Bài 5.** Giải hệ phương trình sau  $\begin{cases} (x - 1)(y^2 + 6) = y(x^2 + 1) \\ (y - 1)(x^2 + 6) = x(y^2 + 1). \end{cases}$

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \\ yx^2 + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x. \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & 2xy(y - x) + 7(x - y) + (x - y)(x + y) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - y)(x + y - 2xy + 7) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ x + y - 2xy + 7 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Nếu  $x = y$  thay vào hệ ta có:  $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = 3. \end{cases}$

— Nếu  $x + y - 2xy + 7 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x)(1 - 2y) = 15$ .

Mặt khác khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)^2 + (2y - 5)^2 = 2$$

Đặt  $a = 2x - 5, b = 2y - 5$ . Ta có

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a+4)(b+4) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ ab + 4(a+b) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ ab = -1 \\ a+b = -8 \\ ab = 31 \end{cases}$$

Trường hợp 1:  $\begin{cases} a+b = 0 \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (3; 2), (2; 3).$

Trường hợp 2:  $\begin{cases} a+b = -8 \\ ab = 31 \end{cases}$  Trường hợp này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là  $(2; 2), (3; 3), (2; 3), (3; 2)$ . □

**Bài 6.** Giải hệ phương trình sau  $\begin{cases} x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} = y \\ y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1} = x. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{2}.$

Để ý rằng  $x = y = -\frac{1}{2}$  không phải là nghiệm.

Ta xét trường hợp  $x + y \neq -1$ .

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} - (y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1}) &= y - x \\ \Leftrightarrow (x-y)[x^2 + xy + y^2] + 4(x-y) + \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y) \left[ x^2 + xy + y^2 + 4 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Khi  $x = y$  xét phương trình

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 1 + \sqrt{2x+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x + \sqrt{2x+1} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + 1) + \frac{2x}{\sqrt{2x+1} + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x \left[ x^2 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Tóm lại, hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $x = y = 0$ . □

**Bài 7.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2}. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $xy \neq 0$ .

Hệ tương đương với  $\begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 & (1) \\ 3y^2x = x^2 + 2 & (2) \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta được

$$\begin{aligned} 3x^2y - 3xy^2 &= y^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow 3xy(x-y) + (x-y)(x+y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ 3xy + x + y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— TH1:  $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ , thế vào (1) ta được  $3x^3 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

— TH2:  $3xy + x + y = 0$ . Từ  $3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \Rightarrow y > 0$  và  $3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \Rightarrow x > 0$ .

Suy ra  $3xy + x + y > 0$ . Do đó TH2 không xảy ra.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1; 1). □

**Bài 8.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4. & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq 4 \\ -\frac{3}{2} \leq y \leq 4. \end{cases}$

Lấy (1) - (2), hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ (\sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3}) + (\sqrt{4-y} - \sqrt{4-x}) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{(x-y)}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4-y}} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ (x-y) \left( \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4-y}} \right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ x - y = 0 \left( \text{do } \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4-y}} > 0 \right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ x = y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 7 + 2\sqrt{(2x+3)(4-y)} = 16 \\ x = y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y = 3 \\ x = y = \frac{11}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện, hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  $S = \left\{ (3; 3), \left( \frac{11}{9}; \frac{11}{9} \right) \right\}$ . □

**Bài 9.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} & (1) \\ \sqrt{y^2+3} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x}. & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Lấy (1) - (2) ta được  $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{y^2+3} + 3(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$  (3)

Nhận thấy  $x = y = 0$  không là nghiệm của hệ, với  $x > 0, y > 0$  ta có

$$\begin{aligned} (3) \Leftrightarrow & \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3}} + 3 \left( \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left( \frac{x+y}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3}} + \frac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = y \left( \text{do } \frac{x+y}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3}} + \frac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (1) của hệ ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + 3} - 2 + \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1) \left[ \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 1 \left( \text{do } \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (1; 1)$ . □

**Bài 10.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} 3x^2 = y(y^2 - 2y + m) & (1) \\ 3y^2 = x(x^2 - 2x + m) & (2) \end{cases} \quad (I)$$

**Lời giải.**

— Điều kiện cần

Giả sử hệ phương trình có nghiệm là  $(x_0; y_0)$  thì  $(y_0; x_0)$  cũng là nghiệm của hệ (I). Vì vậy, để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất thì  $x_0 = y_0$ .

Thay  $x_0 = y_0$  vào hệ ta được  $x_0^3 - 5x_0^2 + mx_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 - 5x_0 + m = 0 \end{cases} \quad (*)$

Hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất thì phương trình (\*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép  $x_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 - 4m < 0 \\ \Delta = 25 - 4m = 0 \Leftrightarrow m > \frac{25}{4} \\ 5 = 0 \end{cases}$$

— Điều kiện đủ

Với  $m > \frac{25}{4}$ , ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = y(y^2 - 2y + m) & (1) \\ 3y^2 = x(x^2 - 2x + m) & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = y[(y - 1)^2 + m - 1] \\ 3y^2 = x[(x - 1)^2 + m - 1] \end{cases} \Rightarrow x, y \geq 0.$$

Cộng vế với vế của (1) và (2), ta được

$$\begin{aligned} & x(x^2 - 5x + m) + y(y^2 - 5y + m) = 0 \\ \Leftrightarrow & x \left[ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + m - \frac{25}{4} \right] + y \left[ \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + m - \frac{25}{4} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & x = y = 0. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $m > \frac{25}{4}$ . □

**Bài 11.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - 3x = y \\ y^2 - 3y = x. \end{cases}$

**Lời giải.**

DS: Có bốn nghiệm  $(0; 0), (4; 4), (1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ . □

**Bài 12.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1. \end{cases}$

**Lời giải.**

DS:  $(1; 1)$ . □

**Bài 13.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \\ y = \frac{1-x^2}{1+x^2}. \end{cases}$$

**Lời giải.**

ĐS: (1; 0), (0; 1). □

**Bài 14.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = y + 5x \\ \frac{1}{y} = x + 5y. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 0; y \neq 0$

Ta có: 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = y + 5x \\ \frac{1}{y} = x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + xy = 1 \\ 5y^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + xy = 1 \\ (x-y)(x+y) = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy nếu  $x = y$  thì hệ phương trình vô nghiệm. Xét trường hợp  $x \neq y$ , ta có

$$\begin{cases} 5x^2 + xy = 1 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . □

**Bài 15.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 1. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện :  $x, y \geq 1$ .

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} &\Rightarrow 2x - 2y + \sqrt{y-1} - \sqrt{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-y) + \frac{y-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x-1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y) \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x-1}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Khi  $x = y$  thì

$$2x + \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x-1 = (1-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Khi  $\sqrt{y-1} + \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}$  thì  $2x + 2y + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x + y = \frac{3}{4}$  (vô nghiệm vì  $x, y \geq 1$ ).

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □

**Bài 16.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 & (1) \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 & (2) \end{cases}$$

**Lời giải.**

Lấy (1) trừ (2) về với về ta được:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 - (3x - 3y) &= 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ x+y-1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1-y. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = y$  thay vào (1) ta có:

$$2x^2 - 3x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 2. \end{cases}$$

Với  $x = 1 - y$  thay vào (2) ta có  $2y^2 - 3y = (1 - y)^2 - 2 \Leftrightarrow y^2 - y + 1 = 0$  (vô nghiệm)  
 Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (1; 1) và (2; 2). □

**Bài 17.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} \\ y - 3x = 4\frac{x}{y}. \end{cases}$$

**Lời giải.**

DS:  $(x; y) = (-2; -2)$ . □

**Bài 18.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x+9} + \sqrt{y-7} = 4 \\ \sqrt{y+9} + \sqrt{x-7} = 4. \end{cases}$$

**Lời giải.**

DS:  $(x; y) = (7; 7)$ . □

**Bài 19.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + x + 2 = \sqrt{2y+11} + 2y^2\sqrt{y+4} & (1) \\ y^3 + 3y^2 + y + 2 = \sqrt{2x+11} + 2x^2\sqrt{x+4} & (2) \end{cases} \quad (x, y \geq 0).$$

**Lời giải.**

Điều kiện 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) theo vế ta được:

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 + 3(x^2 - y^2) + x - y &= \sqrt{2y+11} - \sqrt{2x+11} + 2y^2\sqrt{y+4} - 2x^2\sqrt{x+4} \\ \Leftrightarrow (x-y) \left[ x^2 + xy + y^2 + 3(x+y) + 1 + \frac{2}{\sqrt{2x+11} + \sqrt{2y+11}} + 2\frac{x^2\sqrt{x+4} + y^2\sqrt{y+4}}{x^2\sqrt{x+4} + y^2\sqrt{y+4}} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow x = y \quad (\text{do } x, y \geq 0). \end{aligned}$$

Thay  $y = x$  vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + x + 2 &= \sqrt{2x+11} + 2x^2\sqrt{x+4} \\ \Leftrightarrow (x+2 - \sqrt{2x+11}) + x^2(x+3 - 2\sqrt{x+4}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 7}{x+2 + \sqrt{2x+11}} + x^2 \cdot \frac{x^2 + 2x - 7}{x+3 + 2\sqrt{x+4}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 7) \left( \frac{x^2}{x+3 + 2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{x+2 + \sqrt{2x+11}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\sqrt{2} \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \frac{x^2}{x+3 + 2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{x+2 + \sqrt{2x+11}} = 0 \end{cases} & \quad (3). \end{aligned}$$

Với điều kiện  $x \geq 0$ , phương trình (3) vô nghiệm và ta có nghiệm  $(x; y) = (-1 + 2\sqrt{2}; -1 + 2\sqrt{2})$ . □

**Bài 20.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1). \end{cases}$$

**Lời giải.**

— Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm là  $(x_0; y_0)$  thì  $(y_0; x_0)$  cũng là nghiệm của hệ.

Vì vậy, để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất thì  $x_0 = y_0$ .

Thay  $x_0 = y_0$  vào hệ ta được  $2x_0^2 - mx_0 + m = 0$  (\*)

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình (\*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 8. \end{cases}$$

— Điều kiện đủ:

– Với  $m = 0$ , ta có hệ phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ xy + y^2 = 0. \end{cases}$

Ta thấy hệ có vô số nghiệm thỏa mãn  $y = -x$ . Vậy loại giá trị  $m = 0$ .

– Với  $m = 8$ , ta có hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} xy + x^2 = 8(y - 1) \\ xy + y^2 = 8(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y - 1) \\ \begin{cases} x = y \\ y = -x - 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x - 8 \\ 72 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Suy ra với  $m = 8$  hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (2; 2)$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi  $m = 8$ . □

### 1 HỆ ĐẲNG CẤP BẬC HAI

#### 1. Định nghĩa.

Hệ đẳng cấp bậc 2 có dạng:  $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases}$

#### 2. Phương pháp giải.

— **Cách 1:** Khử số hạng tự do để dẫn tới phương trình  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$  sau đó chia cả hai vế cho  $y^2, y \neq 0$ .

— **Cách 2:** Khử số hạng tự do để dẫn tới phương trình  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$  (1).  
Đặt  $x = ty$  khi đó (1)  $\Leftrightarrow y^2(At^2 + Bt + C) = 0$ .

— **Cách 3:** Từ hệ khử số hạng  $x^2$  (hoặc  $y^2$ ) để dẫn tới phương trình khuyết  $x^2$ . Rút  $x$  theo  $y$  rồi thế vào một trong hai phương trình của hệ ta được một phương trình trùng phương theo ẩn  $y$ .

#### 3. Áp dụng.

**Bài 21.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 & (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

**Cách 1:**  $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 24xy + 8y^2 = 120 \\ 15x^2 + 15xy + 30y^2 = 120. \end{cases}$

Khử số hạng tự do từ hệ ta được phương trình  $x^2 + 9xy - 22y^2 = 0$  (3).

— Với  $y = 0$  thì  $x = 0$  không thỏa mãn hệ nên  $y \neq 0 \Rightarrow$  chia cả hai vế của phương trình (3) cho  $y^2$  ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 9\frac{x}{y} - 22 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = -11. \end{cases}$$

— Với  $\frac{x}{y} = 2 \Leftrightarrow x = 2y$  thay vào (2) ta được

$$8y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 & \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 & \Rightarrow x = -2. \end{cases}$$

— Với  $\frac{x}{y} = -11 \Leftrightarrow x = -11y$  thay vào (2) ta được

$$112y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{14} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{14}} & \Rightarrow x = -\frac{11}{\sqrt{14}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{14}} & \Rightarrow x = \frac{11}{\sqrt{14}}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ (2; 1), (-2, -1), \left(-\frac{11}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right), \left(\frac{11}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \right\}$ .

**Cách 2:**  $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 24xy + 8y^2 = 120 \\ 15x^2 + 15xy + 30y^2 = 120. \end{cases}$

Khử số hạng tự do từ hệ ta được phương trình  $x^2 + 9xy - 22y^2 = 0$  (3).

Đặt  $x = ty$ , khi đó phương trình (3) trở thành  $y^2(t^2 + 9t - 22) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ t = 2 \\ t = -11. \end{cases}$

— Với  $y = 0$  thay vào hệ ta có  $\begin{cases} 2x^2 = 15 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow$  vô nghiệm.

— Với  $t = 2 \Rightarrow x = 2y$  (giải tiếp như cách 1).

— Với  $t = -11 \Rightarrow x = -11y$  (giải tiếp như cách 1).

**Cách 3:** Nhận thấy  $y = 0$  không thỏa hệ, nên ta có  $(0; 0)$  không là nghiệm của hệ phương trình.

Khử số hạng  $x^2$  từ hệ ta được  $xy - 3y^2 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3y^2 - 1}{y}$  (4).

Thay (4) vào (2) ta được  $14y^4 - 15y^2 + 1 = 0$ . Đặt  $t = y^2, (t \geq 0)$  ta được phương trình

$$14t^2 - 15t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{14}. \end{cases}$$

— Với  $t = 1 \Rightarrow y^2 = 1$  (giải tiếp như cách 1).

— Với  $t = \frac{1}{14} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{14}$  (giải tiếp như cách 1).

□

**Bài 22.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - xy = 2 & (1) \\ 2x^2 + 4xy - 2y^2 = m & (2) \end{cases}$  có nghiệm.

**Lời giải.**

Nhận thấy  $x = 0$  thì (1) vô lý. Từ (1) suy ra  $y = \frac{x^2 - 2}{x}$  (\*).

Thay (\*) vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$2x^2 + 4(x^2 - 2) - \frac{2(x^2 - 2)^2}{x^2} = m \Leftrightarrow 4x^4 - mx^2 - 8 = 0 \quad (3)$$

Đặt  $t = x^2 (t \geq 0)$ , khi đó (3)  $\Leftrightarrow 4t^2 - mt - 8 = 0$  (4).

Để hệ có nghiệm thì phương trình (4) phải có ít nhất một nghiệm không âm. Điều này luôn đúng vì  $a \cdot c = -32 < 0$  nên phương trình (4) luôn có hai nghiệm trái dấu. Vậy với mọi  $m$  thì hệ đã cho luôn có nghiệm. □

**Bài 23.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - 2x^2y + 2y^3 = 1 \\ x^3 - x^2y + 5xy^2 + 5y^3 = 2. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có hệ tương đương với  $\begin{cases} 2x^3 - 4x^2y + 4y^3 = 2 & (1) \\ x^3 - x^2y - 5xy^2 + 7y^3 = 2. & (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) ta được phương trình  $x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - 3y^3 = 0$ .



Để thấy với  $y = 0$  hệ trở thành  $\begin{cases} x^3 = 1 \\ x^3 = 2 \end{cases}$ . Do đó hệ vô nghiệm.

Với  $y \neq 0$ , chia cả hai vế cho  $y^3$  ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\frac{x}{y} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y.$$

Thay vào (2) ta được  $2y^3 = 2 \Leftrightarrow y = 1$ .

Vậy hệ phương trình có duy nhất một nghiệm  $(x, y) = (1, 1)$ . □

**Bài 24.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (x + y)(x^2 + xy - y^2) - 2 = 0 \\ x^2(x - 2y) + 2(y^3 + 1) - xy(x + 2y) = 0. \end{cases}$

**Lời giải.**

Hệ phương trình tương đương với  $\begin{cases} x^3 + 2x^2y - y^3 - 2 = 0 & (1) \\ x^3 - 3x^2y - 2xy^2 + 2y^3 + 2 = 0. & (2) \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình ta được

$$2x^3 + y^3 - x^2y - 2xy^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = x \\ y = -x. \end{cases}$$

— Với  $y = 2x$ , thay vào (1) ta được

$$-3x^3 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = -2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

— Với  $y = x$ , thay vào (1) ta được

$$2x^3 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

— Với  $y = -x$ , thay vào (1) ta được  $0 = 2$  (vô lý).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm  $(x, y) = (1, 1)$  và  $(x, y) = \left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, -2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$ . □

**Bài 25.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 11 \\ 2(x + y)^2 - y^2 = 14. \end{cases}$

**Lời giải.**

Biến đổi hệ phương trình ta được

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 11 \\ 2(x + y)^2 - y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 11 \\ 2x^2 + 4xy + y^2 = 14. \end{cases}$$

Có  $x = 0$  không thỏa mãn hệ phương trình, với  $x \neq 0$  đặt  $y = tx$  hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2 + t^2x^2 + 3tx^2 = 11 \\ 2x^2 + 4tx^2 + t^2x^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 + t^2 + 3t) = 11 \\ x^2(2 + 4t + t^2) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x^2(1 + t^2 + 3t) = 154 & (1) \\ 11x^2(2 + 4t + t^2) = 154. & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được phương trình

$$\begin{aligned} 14x^2(1 + t^2 + 3t) &= 11x^2(2 + 4t + t^2) \\ \Leftrightarrow 14(1 + t^2 + 3t) &= 11(2 + 4t + t^2) \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 8 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{4}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $t = 2$  thế vào phương trình (1) ta được  $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 & \Rightarrow y = -2. \end{cases}$

— Với  $t = -\frac{3}{4}$  thế vào phương trình (1) ta được  $x^2 = -9$  (vô nghiệm)

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $S = \{(1; 2); (-1; -2)\}$  □

**Bài 26.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2(2y^2 + 1)\sqrt{x} = (5xy + 3y^2 - 2)\sqrt{y} \\ xy + y^2 = 2. \end{cases}$$

**Lời giải.**

**Cách 1:** Điều kiện: 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Biến đổi hệ phương trình ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2(2y^2 + 1)\sqrt{x} = (5xy + 3y^2 - 2)\sqrt{y} \\ xy + y^2 = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4y^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 5xy\sqrt{y} + 3y^2\sqrt{y} - 2\sqrt{y} \\ xy + y^2 = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5xy\sqrt{y} + 3y^2\sqrt{y} - 4y^2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} & (1) \\ xy + y^2 = 2. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Do  $y = 0$  không thỏa mãn hệ phương trình, nên với  $y > 0$ , ta có

$$(1) \Leftrightarrow 5xy^2 + 3y^3 - 4y^2\sqrt{xy} = 2(\sqrt{xy} + y). \quad (3)$$

Thế  $2 = xy + y^2$  vào (3) ta được  $5xy^2 + 3y^3 - 4y^2\sqrt{xy} = (xy + y^2)(\sqrt{xy} + y)$ . (4)

Đặt  $x = ty, t > 0$ , phương trình (3) trở thành

$$\begin{aligned} & 5ty^3 + 3y^3 - 4y^2\sqrt{ty^2} = (ty^2 + y^2)(\sqrt{ty^2} + y) \\ \Leftrightarrow & y^3(5t + 3 - 4\sqrt{t}) = y^3(t + 1)(\sqrt{t} + 1) \\ \Leftrightarrow & 5t + 3 - 4\sqrt{t} = (t + 1)(\sqrt{t} + 1) \\ \Leftrightarrow & t\sqrt{t} - 4t + 5\sqrt{t} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{t})^3 - 4(\sqrt{t})^2 - 5\sqrt{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t} = 2 \\ \sqrt{t} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x = y. \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $x = y$  thế vào (2)  $\Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 1$ .

— Với  $x = 4y$  thế vào (2)  $\Leftrightarrow 5y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{10}}{2}$ .

So với điều kiện của hệ phương trình, tập nghiệm của hệ là  $S = \left\{ (1; 1), \left( \frac{4\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5} \right) \right\}$ .

**Cách 2:** Điều kiện: 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Biến đổi hệ phương trình ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2(2y^2 + 1)\sqrt{x} = (5xy + 3y^2 - 2)\sqrt{y} \\ xy + y^2 = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4y^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 5xy\sqrt{y} + 3y^2\sqrt{y} - 2\sqrt{y} \\ xy + y^2 = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5xy\sqrt{y} + 3y^2\sqrt{y} - 4y^2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} & (1) \\ xy + y^2 = 2. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Do  $y = 0$  không thỏa mãn hệ phương trình, nên với  $y > 0$ , ta có

$$(1) \Leftrightarrow 5xy^2 + 3y^3 - 4y^2\sqrt{xy} = 2(\sqrt{xy} + y). \quad (3)$$

Thế  $2 = xy + y^2$  vào (3) ta được  $5xy^2 + 3y^3 - 4y^2\sqrt{xy} = (xy + y^2)(\sqrt{xy} + y)$ . (4)

Chia cả hai vế của (4) cho  $y^3$ , ta được

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x}{y} + 3 - 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y} + 1\right) \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + 1\right) \\ &\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x}{y} + 3 - 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x}{y}} + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{y} \sqrt{\frac{x}{y}} - 4 \cdot \frac{x}{y} + 5 \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^3 - 4 \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 + 5 \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x = y. \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $x = y$  thế vào (2)  $\Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$ .

— Với  $x = 4y$  thế vào (2)  $\Leftrightarrow 5y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{10}}{2}$ .

So với điều kiện của hệ phương trình, tập nghiệm của hệ là  $S = \left\{ (1; 1), \left(\frac{4\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right) \right\}$ . □

**Bài 27.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ y^2 + 1 = 5(1 + x^2) \end{cases}$ . (I)

**Lời giải.**

Biến đổi hệ ta được

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 + 4(y - 4x) = 0 & (1) \\ -5x^2 + y^2 = 4. & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được  $x^3 - y^3 + (-5x^2 + y^2)(y - 4x) = 0 \Leftrightarrow 21x^3 - 5x^2y - 4xy^2 = 0$ . (3)

Dễ thấy  $(x; y) = (0; 0)$  không là nghiệm của hệ phương trình.

Đặt  $x = ty, t \neq 0, y \neq 0$ , khi đó ta có

$$(3) \Leftrightarrow -y^3(21t^3 - 5t^2 - 4t) = 0 \Leftrightarrow 21t^3 - 5t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{4}{7} \end{cases}$$

— Với  $t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}y$ . Thay vào (2), ta được  $y^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \Rightarrow x = -1 \\ y = -3 \Rightarrow x = 1. \end{cases}$

— Với  $t = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}y$ . Thay vào (2), ta được  $y^2 = -\frac{196}{31}$  nên hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $S = \{(1; -3); (-1; 3)\}$ . □

**Bài 28.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 8x^2y^3 - 13xy^2 - y = 4(x^2y - x) \\ x^2y^2 - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $(x; y) = (0; 0)$  không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét  $x \neq 0$ , chia cả hai vế của hai phương trình cho  $x^2$ , ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 8y^3 - 13\frac{y^2}{x} - \frac{y}{x^2} = 4\left(y - \frac{1}{x}\right) \\ y^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt  $z = \frac{1}{x}$ , ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^3 - 13y^2z - yz^2 = 4(y - z) \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^3 - 13y^2z - yz^2 = 2(y^2 + z^2)(y - z) & (1) \\ y^2 + z^2 = 2. & (2) \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (1) trở thành phương trình đẳng cấp bậc ba, đặt  $y = tz$ , ta được

$$(1) \Leftrightarrow 6t^3z^3 - 11t^2z^3 - 3tz^3 + 2z^3 = 0 \Leftrightarrow z^3(6t^3 - 11t^2 - 3t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t^3 - 11t^2 - 3t + 2 = 0 \text{ (vì } z = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ không là nghiệm của hệ)} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

—  $t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}z = \frac{1}{3x}$ . Theo đề, ta có

$$x^2y^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm  $S_1 = \left\{ \left( -\frac{\sqrt{5}}{3}; -\frac{\sqrt{5}}{5} \right); \left( \frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\}$ .

—  $t = 2 \Leftrightarrow y = 2z = \frac{2}{x}$ , tương tự  $x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ .

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm  $S_2 = \left\{ \left( -\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{2\sqrt{10}}{5} \right); \left( \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2\sqrt{10}}{5} \right) \right\}$ .

—  $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}z = -\frac{1}{2x}$ , tương tự  $x^2 = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}$ .

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm  $S_3 = \left\{ \left( -\frac{\sqrt{10}}{4}; \frac{\sqrt{10}}{5} \right); \left( \frac{\sqrt{10}}{4}; -\frac{\sqrt{10}}{5} \right) \right\}$ .

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $\left( -\frac{\sqrt{5}}{3}; -\frac{\sqrt{5}}{5} \right); \left( \frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt{5}}{5} \right); \left( -\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{2\sqrt{10}}{5} \right); \left( \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2\sqrt{10}}{5} \right); \left( -\frac{\sqrt{10}}{4}; \frac{\sqrt{10}}{5} \right); \left( \frac{\sqrt{10}}{4}; -\frac{\sqrt{10}}{5} \right)$ . □

**Bài 29.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6. \end{cases}$

Do  $x = 0, y = 0$  không phải là nghiệm của hệ nên ta đặt  $x = ty, t \neq 0$ .

Khi đó phương trình hệ trở thành  $\begin{cases} y^3(t^3 - 1) = y(8t + 2) \\ y^2(t^2 - 3) = 6. \end{cases}$

Từ đó ta suy ra

$$6(t^3 - 1) = (8t + 2)(t^2 - 3) \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 12t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \\ t = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

— Với  $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y^2(t^2 - 3) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1. \end{cases}$

$$\text{— Với } t = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = -4y \\ y^2(t^2 - 3) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \pm \frac{\sqrt{78}}{13}. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là  $(3; 1), (-3; -1), \left(-\frac{4\sqrt{78}}{13}; \frac{\sqrt{78}}{13}\right), \left(\frac{4\sqrt{78}}{13}; -\frac{\sqrt{78}}{13}\right)$ . □

**Bài 30.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $x = 0, y = 0$  không phải là nghiệm của hệ nên ta đặt  $x = ty, t \neq 0$ .

Khi đó phương trình hệ trở thành  $\begin{cases} y^3(t^3 + 1 - t) = 1 \\ y^4(4t^4 + 1) = y(4t + 1). \end{cases}$

Từ đó ta suy ra  $(t^3 - t + 1)(4t + 1) = 4t^4 + 1 \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \\ t = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$

$$\text{— Với } t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y^2(t^3 - t + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3}{5} \\ y = \pm \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\text{— Với } t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2(t^3 - t + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right); (1; 1), (-1; -1)$ . □

**Bài 31.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - 9y^2 + 32 = 0 \\ 3(x^2 - y^2) = 2(x^2 + xy). \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $3(x^2 - y^2) = 2(x^2 + xy) \Leftrightarrow x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 3y. \end{cases}$

— Với  $x = -y$  thế vào phương trình  $x^2 - 9y^2 + 32 = 0$  ta được  $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$ .

Do đó có hai nghiệm của hệ là  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$

— Với  $x = 3y$  thế vào phương trình  $x^2 - 9y^2 + 32 = 0$  ta được  $9y^2 - 9y^2 = -32$  (vô lý), suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$  □

**Bài 32.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 111x - 10y = 0. \end{cases}$

**Lời giải.**

Với  $x = 0, y = 0$  hệ phương trình trở thành  $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ , suy ra  $(x; y) = (0; 0)$  là một nghiệm của hệ phương trình.

Với  $x \neq 0$  đặt  $x = ty$  (1), hệ phương trình đã cho được viết lại là

$$\begin{cases} 14x^2 - 21t^2x^2 + 22x - 39tx = 0 \\ 35x^2 + 28t^2x^2 + 111x - 10tx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (14 - 21t^2)x^2 = (39t - 22)x \\ (35 + 28t^2)x^2 = (10t - 111)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{39t - 22}{14 - 21t^2} \\ x = \frac{10t - 111}{35 + 28t^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Suy ra  $\frac{39t - 22}{14 - 21t^2} = \frac{10t - 111}{35 + 28t^2} \Leftrightarrow 186t^3 - 421t^2 + 175t + 112 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$ .

— Thay  $t = -\frac{1}{3}$  vào (2) suy ra  $x = \frac{39t - 22}{14 - 21t^2} = -3$ .

— Thay  $x = -3$  vào (1) suy ra  $y = 1$ .

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1. \end{cases}$  □

**Bài 33.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 \\ x^3 - 3x - 3xy = 6. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $y \geq -1$ . Hệ được viết lại thành  $\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2x(y+1) = 1 \\ x^3 - 3x(y+1) = 6. \end{cases}$

Ta thấy các phương trình của hệ đều là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với  $x$  và  $\sqrt{y+1}$ .

Dễ thấy  $y = -1$  không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Xét  $y > -1$ , đặt  $x = t\sqrt{y+1}$  thay vào hệ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{(y+1)^3}(t^2 - 2t) = 1 \\ \sqrt{(y+1)^3}(t^3 - 3t) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t^3 - 3t - 6(t^2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3. \end{cases}$$

— Nếu  $t = 0$  thì  $x = 0$ . Không thỏa mãn hệ.

— Nếu  $t = 3 \Leftrightarrow 27\sqrt{(y+1)^3} - 9\sqrt{(y+1)^3} = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$ .

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\sqrt[3]{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1\right)$ . □

## CHUYÊN ĐỀ 1: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

### Dạng 6. Phương pháp thế ẩn

Từ một trong hai phương trình, rút  $y$  theo  $x$  (hoặc ngược lại) thế vào phương trình còn lại. Giải phương trình ẩn  $x$  để tìm  $x$ , sau đó tìm được  $y$  tương ứng.

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 26. \end{cases}$$

**Lời giải.**

$$\text{Biến đổi hệ về dạng } \begin{cases} y = 2 - x \\ x^3 + (2 - x)^3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(-1; 3)$  và  $(3; -1)$ . □

**Ví dụ 2.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - y - m = 0 \\ y^2 + 2x - 2m - 3 = 0. \end{cases}$$

- ① Giải hệ phương trình tại  $m = 1$ .
- ② Tìm  $m$  để hệ phương trình có hai cặp nghiệm phân biệt  $(x_1; y_1)$  và  $(x_2; y_2)$  thỏa mãn  $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ .

**Lời giải.**

① Biến đổi hệ về dạng 
$$\begin{cases} y = x - m \\ (x - m)^2 + 2x - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - m \\ x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0. \end{cases}$$

Với  $m = 1$  ta được 
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3. \end{cases} \end{cases}$$

② Biến đổi tiếp hệ về dạng 
$$\begin{cases} y = x - m \\ (x - m - 1)(x - m + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - m \\ \begin{cases} x - m - 1 = 0 \\ x - m + 3 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = m + 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = m - 3 \\ y_2 = -3. \end{cases} \end{cases}$$

Hay với mọi  $m$  phương trình luôn có hai nghiệm.

Điều kiện của đề trở thành  $(m + 1)^2 + 1 = (m - 3)^2 + 9 \Leftrightarrow 8m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ . □

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Biến đổi hệ phương trình dưới dạng 
$$\begin{cases} (x - y)^2(x + y) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x + y)^2 - 4xy](x + y) = 3 \\ (x + y)[(x + y)^2 - 2xy] = 15. \end{cases} \quad (*)$$

Trừ hai vế của phương trình cho nhau ta được  $2xy(x + y) = 12 \Rightarrow x + y = \frac{6}{xy}$  ( $xy \neq 0$ ).

Thay  $x + y$  vào (\*) ta được  $\left[ \left( \frac{6}{xy} \right)^2 - 4xy \right] \cdot \frac{6}{xy} = 3 \Leftrightarrow xy = 2 \Rightarrow x + y = 3$ .

Khi đó hệ phương trình tương đương với 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Suy ra  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(1; 2)$  và  $(2; 1)$ . □

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x + 2)\sqrt{y + 1} = (x + 1)^2. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $y \geq -1$ .

Phương trình đầu bài tương đương

$$\begin{aligned} 2x^2(y - x^2) + (y^3 - x^6) = 0 &\Leftrightarrow 2x^2(y - x^2) + (y - x^2)(y^2 + yx^2 + x^4) \\ \Leftrightarrow (y - x^2)(2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $y - x^2 = 0$  ta có  $y = x^2$ . Thế vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned} (x + 2)\sqrt{x^2 + 1} = (x + 1)^2 &\Leftrightarrow (x\sqrt{x^2 + 1} - 2x) + (2\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1)) = 0 \\ \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2 + 1} - 2) + \sqrt{x^2 + 1}(2 - \sqrt{x^2 + 1}) = 0 &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} - 2)(x - \sqrt{x^2 + 1}) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 1} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 3 \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = 3 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = x^2 \end{cases} \end{cases} &\text{(vô nghiệm).} \end{aligned}$$

— Với  $2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + \left(y + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , thay vào phương trình sau không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(\sqrt{3}; 3)$  và  $(-\sqrt{3}; 3)$ . □

**1 BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**Bài 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 - 2y = 4. \end{cases}$

**Lời giải.**

Từ phương trình đầu ta được  $x = \frac{5 + 3y}{2}$ , thế vào phương trình sau ta được

$$3\left(\frac{5 + 3y}{2}\right)^2 - y^2 - 2y = 4 \Leftrightarrow 23y^2 + 82y + 59 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{59}{23}. \end{cases}$$

Với  $y = 1$  thì  $x = -1$ , với  $y = -\frac{59}{23}$  thì  $x = -\frac{62}{23}$ .

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(1; -1)$  và  $\left(-\frac{62}{23}; -\frac{59}{23}\right)$ . □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x + 1} = x + y + 7. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq -1, y \geq 0$ .

Từ phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} [x^3 - (y - 1)^3] + x - y + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - y + 1)[x^2 + x(y - 1) + (y - 1)^2 + 1] = 0 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = y - 1$$

(vì  $x^2 + x(y - 1) + (y - 1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ )

Thế  $x = y - 1$  vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned} (y - 1)\sqrt{y} + y\sqrt{y} &= 2y + 6 \Leftrightarrow 2y\sqrt{y} - 2y - \sqrt{y} - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{y} - 2)(2y + 2\sqrt{y} + 3) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow y = 4. \end{aligned}$$

Với  $y = 4$  suy ra  $x = 3$ .

Vậy hệ phương trình có một nghiệm (3; 4). □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ 2y^2 - 2y + 1 = 3xy. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x > 0, y \neq 0$ .

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \Leftrightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy \Leftrightarrow y^2 + y(\sqrt{x} - 2x) - 2x\sqrt{x} = 0.$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo biến  $y$ , ta có

$$\Delta_x = (\sqrt{x} - 2x)^2 + 8x\sqrt{x} = x + 4x\sqrt{x} + 4x^2 = (\sqrt{x} + 2x)^2 > 0$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm là 
$$\begin{cases} y = \frac{(2x - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 2x)}{2} = -\sqrt{x} \\ y = \frac{(2x - \sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 2x)}{2} = 2x. \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình tương đương với  $\begin{cases} y = -\sqrt{x} \\ y^2 + (y - 1)^2 = -3x\sqrt{x} \end{cases}$  (1) hoặc  $\begin{cases} y = 2x \\ 2y^2 - 2y + 1 = 3xy \end{cases}$  (2).

Ta có (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{x} \\ y^2 + (y - 1)^2 = -3x\sqrt{x} \end{cases}$  (vô nghiệm vì  $y^2 + (y - 1)^2 > 0$  và  $-3x\sqrt{x} < 0$ ).

Ta có (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2(2x)^2 - 2(2x) + 1 = 3x(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ y = 2 + \sqrt{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{cases}$  □

### Dạng 7. Phương pháp thế biểu thức

Từ một trong hai phương trình, rút biểu thức  $u(x, y)$  theo  $v(x, y)$  thế vào phương trình còn lại.

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1). \end{cases}$$

**Lời giải.**

Từ phương trình sau  $\Leftrightarrow x^2 = 3(y^2 + 2)$  (1), thay vào phương trình đầu ta được

$$\begin{cases} x^2 = 3(y^2 + 2) \\ x^3 - 8x = y^3 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3(y^2 + 2) \\ x^3 - 8x = \frac{x^2 y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3(y^2 + 2) \\ x(3x^2 - 3xy + 24) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3(y^2 + 2) \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3x^2 - 24}{x} \end{cases} \end{cases}$$

— Với  $x = 0$  thay vào (3) ta có  $y^2 + 2 = 0$  vô nghiệm.

— Với  $y = \frac{3x^2 - 24}{x}$  thay vào (3) ta được

$$x^2 = 3 \left( \frac{3x^2 - 24}{x} \right)^2 + 6 \Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = \frac{96}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{\frac{96}{13}} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{78}}{13}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là  $(3; 1)$ ,  $(-3; -1)$ ,  $\left(\sqrt{\frac{96}{13}}; \frac{\sqrt{78}}{13}\right)$  và  $\left(-\sqrt{\frac{96}{13}}; -\frac{\sqrt{78}}{13}\right)$  □

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} 7x+y \geq 0 \\ 2x+y \geq 0. \end{cases}$

Từ (2) suy ra  $\sqrt{2x+y} = 2 - x + y \geq 0$  thế vào (1) ta được  $\sqrt{7x+y} = x - y + 3 \geq 0$ . Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -3 \leq x - y \leq 2 \\ \sqrt{7x+y} = x - y + 3 \\ \sqrt{2x+y} = -x + y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x - y \leq 2 \\ 7x+y = (x-y+3)^2 \\ 2x+y = (-x+y+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x - y \leq 2 \\ x^2 + y^2 - 2xy = x + 7y - 9 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 6x - 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x - y \leq 2 \\ x = 2y - 1 \\ y^2 - 11y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = 1 \text{ (Nhận)} \\ y = 10 \text{ (Loại)}. \end{cases}$$

Vậy  $x = y = 1$  là nghiệm của hệ phương trình. □

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2y+1} - 2xy = 0 \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ y \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$

(2)  $\Leftrightarrow x^2 + (3y+3)x + 2y^2 + 2y - 4 = 0$ , ta xét phương trình ẩn  $x$ , có

$$\Delta_y = (3y+3)^2 - 4(2y^2 + 2y - 4) = y^2 + 10y + 25 = (y+5)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ x = -2y - 4 \end{cases}$$

Với  $x = -2y - 4 \Leftrightarrow x + 2y + 4 = 0$ . Trường hợp này loại do điều kiện  $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{2}$ .

Lại có

$$(1) \Leftrightarrow 2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}) = (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 8(x+y) + 8\sqrt{2(x+y) + 4xy + 1} + 8 = [(x+y)^2 - 4xy]^2 \quad (3)$$

Với  $x = 1 - y \Leftrightarrow x + y = 1$ , thế vào (3) ta được

$$8\sqrt{4xy+3} = (1-4xy)^2 - 16 \Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3} = (4xy+3)(4xy-5) \Leftrightarrow \sqrt{4xy+3} [(4xy-5)\sqrt{4xy+3} - 8] = 0$$

Vì  $x + y = 1 \Rightarrow 1 = (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow 4xy - 5 \leq -4 < 0 \Rightarrow (4xy-5)\sqrt{4xy+3} - 8 < 0$

Nên  $\sqrt{4xy+3} [(4xy-5)\sqrt{4xy+3} - 8] = 0 \Leftrightarrow 4xy+3 = 0 \Leftrightarrow xy = -\frac{3}{4}$

Từ đó ta có hệ  $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$  thỏa mãn (\*).

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  và  $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ . □

### 1 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Ta thấy  $x = 0$  không thỏa mãn phương trình phương trình sau.

Với  $x \neq 0$  có  $y + 1 = \frac{x^2 - 1}{x}$ , thay vào phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x} \left(x + \frac{x^2 - 1}{x}\right) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ \Rightarrow (x^2 - 1)(2x^2 - 1) &= (x - 1)(3x - 1) \\ \Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - x - 1) &= (x - 1)(3x - 1) \\ \Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) &= 0 \Leftrightarrow 2x(x - 1)^2(x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = 1$  thì  $y = -1$ , với  $x = -2$  thì  $y = -\frac{5}{2}$ .

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm  $(x; y)$  là  $(1; -1), \left(-2; -\frac{5}{2}\right)$  □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{2}{x + y} = \frac{1}{xy} \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{x + y} = 1 - x^2 + 2x. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x + y \neq 0 \\ xy \neq 0. \end{cases}$

Với điều kiện đề bài cho, phương trình đầu tương đương tương đương

$$\begin{aligned} \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} + \frac{2}{x + y} - \frac{1}{xy} &= 0 \Leftrightarrow \frac{(x + y)^2 - 1}{xy} + \frac{2}{x + y} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x + y - 1)(x + y + 1)}{xy} + \frac{2(1 - x - y)}{x + y} &= 0 \Leftrightarrow \frac{(x + y - 1)(x^2 + y^2 + x + y)}{xy(x + y)} = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + x + y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $x + y = 1$  thay vào phương trình sau ta được

$$x^2 + (1 - x)^2 - 1 = 1 - x^2 + 2x \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}. \end{cases}$$

— Với  $-(x + y) = x^2 + y^2$  thay vào phương trình sau ta được

$$1 - x^2 + 2x = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm  $(x; y)$  là  $\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}; \frac{1 - \sqrt{7}}{3}\right), \left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}; \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)$ . □

### Dạng 8. Phương pháp thế số

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y^3 + y^2x + 3(x - 2y) = 0 \\ x^2 + xy = 3. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Từ phương trình sau thế  $3 = x^2 + xy$  vào phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned} y^3 + y^2x + (x^2 + xy)(x - 2y) &= 0 \Leftrightarrow y^3 - y^2x + x^3 - x^2y = 0 \\ \Leftrightarrow y^2(y - x) + x^2(x - y) &= 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - y^2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = y$  thay vào phương trình sau ta được  $2x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

Với  $x = -y$  thay vào phương trình sau ta được  $0 = 3$ . Phương trình sau vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là  $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$  và  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ . □

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 - 5y + 3 + 6\sqrt{y^2 - 7x + 4} = 0 \\ y(y - x + 2) = 3x + 3. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện  $y^2 - 7x + 4 \geq 0$ .

Phương trình sau  $\Leftrightarrow y^2 + (2 - x)y - 3x - 3 = 0$  xem là phương trình bậc hai theo ẩn  $y$  có  $\Delta = (x + 4)^2$ .

Phương trình có hai nghiệm 
$$\begin{cases} y = \frac{x - 2 - x - 4}{2} = -3 \\ y = \frac{x - 2 + x + 4}{2} = x + 1. \end{cases}$$

— Với  $y = -3$  thay vào phương trình đầu ta được  $x^2 + 18 + 6\sqrt{13 - 7x} = 0$  (vô nghiệm).

— Với  $y = x + 1$  thay vào phương trình đầu ta được  $x^2 - 5x - 2 + 6\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 0$ .

Đặt  $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = t$ , điều kiện  $t \geq 0$ . Khi đó phương trình trở thành  $t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -7 \text{ (Loại)} \end{cases}$ .

Với  $t = 1$  ta có  $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$ . (thỏa)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(1; 2)$  và  $(4; 5)$ . □

**1 BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**Bài 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - 2x - 9 = 0 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - 2x - 9 = 0 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 \\ xy = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\right)^2 = 2x + 9 \\ xy = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 16x = 0 \\ xy = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x(x + 4)^3 = 0 \\ xy = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \cdot y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{17}{4}. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ -4y = -17 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  $\left(-4; \frac{17}{4}\right)$ . □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{1-y} = 4. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $2x + y \geq 0, y \leq 1$ .

Ta có phương trình thứ nhất

$$\Leftrightarrow (2x + y) + 2\sqrt{2x + y} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x + y} - 1)(\sqrt{2x + y} + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x + y} - 1 = 0 \\ \sqrt{2x + y} + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 - 2x.$$

Thay vào phương trình thứ hai ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{2x} = 4 &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+6} - 2) + (\sqrt{2x} - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + \frac{x-2}{2 + \sqrt{2x}} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + \frac{1}{2 + \sqrt{2x}} = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(2; -3)$ . □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Từ phương trình đầu ta có  $x(y + 1) = 7y - 1$ .

Xét  $y = -1$  không thỏa mãn hệ phương trình, với  $y \neq -1 \Rightarrow x = \frac{7y - 1}{y + 1}$  (\*)

Thế (\*) vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned} \left(\frac{7y-1}{y+1}\right)^2 \cdot y^2 + \frac{7y-1}{y+1} \cdot y + 1 &= 13y^2 \\ \Leftrightarrow (7y-1)^2y^2 + y(7y-1)(y+1) + (y+1)^2 &= 13y^2 \cdot (y+1)^2 \\ \Leftrightarrow 36y^4 - 33y^3 - 5y^2 + y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-1)(3y-1)(12y^2 + 5y + 1) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $y = 1$  thế vào (\*) ta được  $x = 3$ , với  $y = \frac{1}{3}$  thế vào (\*) ta được  $x = 1$ .

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm  $(3; 1)$  và  $(1; \frac{1}{3})$ . □

## D CHUYÊN ĐỀ 2: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp đặt ẩn phụ được dùng nhiều và tỏ ra rất hiệu quả trong giải hệ phương trình. Việc phát hiện ẩn phụ, đặt ẩn phụ, xác định đúng điều kiện cho ẩn phụ đôi khi quyết định việc giải được hay không giải được, giải tốt hay giải không tốt một hệ phương trình

### Dạng 9. Đặt ẩn phụ dạng đại số

- 1) Phương pháp chung cho kỹ thuật đặt ẩn phụ dạng đại số đó là tìm nhân tử chung giữa hai phương trình của hệ.
- 2) Các dấu hiệu thường gặp để đặt ẩn phụ:
  - Hệ đối xứng loại I, II.
  - Hệ có các nhân tử lặp lại trong hai phương trình của hệ.
  - Hệ chứa tổng, hiệu  $x + y$ ;  $x - y$ .
  - Một số hệ sau khi đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I; II.
  - Đôi khi ta phải nhân hoặc chia hai vế của phương trình trong hệ với biểu thức nào đó của biến ta được hệ mới dễ dàng nhìn ra ẩn phụ.

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x + 2y)^2 + \frac{1}{(2x - y)^2} = 10 \\ \frac{x + 2y}{2x - y} = 3. \end{cases}$$

#### Lời giải.

Điều kiện:  $2x - y \neq 0$ .

Đặt  $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = \frac{1}{2x - y} \end{cases}$ . Khi đó hệ đã cho trở thành: 
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv = 3. \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ ta được 
$$\begin{cases} u = 1; v = 3 \\ u = 3; v = 1 \\ u = -1; v = -3 \\ u = -3; v = -1. \end{cases}$$

TH1. Với  $u = 1; v = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$ .

TH2. Với  $u = 3; v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$ .

TH3. Với  $u = -1; v = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{3}$ .

TH4. Với  $u = -3; v = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$ .

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm phân biệt là:  $(1; 1); (-1; -1); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ . □

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0. \end{cases}$$

#### Lời giải.

Hệ đã cho tương đương với  $\begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ (x^2 + 2)(y + 1) = 24. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} u = x^2 - 2 \\ v = y - 3 \end{cases}$ . Khi đó hệ đã cho trở thành:  $\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ (u + 4)(v + 4) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ uv + 4(u + v) = 8. \end{cases}$

Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ ta được  $\begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \\ u = 0 \\ v = 2. \end{cases}$

TH1. Với  $\begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases}$  ta được  $\begin{cases} x^2 - 2 = 2 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 3. \end{cases}$

TH2. Với  $\begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$  ta được  $\begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ y - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 5. \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm phân biệt là:  $(\pm 2; 3); (\pm\sqrt{2}; 5)$ . □

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} & (1) \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} & (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Nhận xét: (2) có dạng  $(x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4}$  nên ta biến đổi (1) có chứa  $(x^2 + y)^2$ ;  $xy$  rồi dùng ẩn phụ.

Hệ phương trình đã cho tương đương với  $\begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y + 1) = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4}. \end{cases} \tag{I}$

Đặt:  $\begin{cases} xy = v \\ x^2 + y = u \end{cases}$ . Hệ (I) trở thành  $\begin{cases} u + v(u + 1) = -\frac{5}{4} \\ u^2 + v = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{5}{4} - u^2 \\ u^3 + u^2 + \frac{u}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{5}{4} \\ u = -\frac{1}{2} \\ v = -\frac{3}{2}. \end{cases}$

TH1.  $\begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{5}{4} \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} xy = -\frac{5}{4} \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}. \end{cases}$

TH2.  $\begin{cases} u = -\frac{1}{2} \\ v = -\frac{3}{2} \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} xy = -\frac{3}{2} \\ x^2 + y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x - 3 = 0 \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases}$

Nghiệm của hệ phương trình  $(x; y) = \left\{ \left(1; -\frac{3}{2}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right) \right\}$  □

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \frac{8}{y^3} - \frac{8}{y} & (1) \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $y \neq 0$ .

Chia hai vế của (2) cho  $y^2$  và biến đổi (1) ta được hệ 
$$\begin{cases} (x+1)^3 - 16(x+1) = \left(\frac{2}{y}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{y}\right) \\ 1 + \left(\frac{2}{y}\right)^3 = 5[(x+1)^2 + 1] \end{cases} \quad (II) \quad (3)$$

Đặt:  $\begin{cases} \frac{2}{y} = b \\ x+1 = a \end{cases}$ . Hệ (II) trở thành  $\begin{cases} a^3 - 16a = b^3 - 4b \\ b^2 + 1 = 5(a^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 4 \cdot (4a - b) \\ b^2 - 5a^2 = 4. \end{cases}$

Thế vào ta được  $a^3 - b^3 = (b^2 - 5a^2) \cdot (4a - b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 7a = 4b \\ b = -3a. \end{cases}$

TH1.  $a = 0$  suy ra  $x + 1 = 0$  thế vào (3) ta được  $cy = \pm 1$ .

TH2.  $7a = 4b$  suy ra  $x + 1 = \frac{7}{8y}$  thế vào (3)  $\frac{124}{49y^2} + 4 = 0$  vô nghiệm.

TH3.  $b = -3a$  suy ra  $x + 1 = \frac{-2}{3y}$  thế vào (3) ta được  $cy = \pm \frac{2}{3}$ .

Nghiệm của hệ phương trình có 3 nghiệm  $(-1; \pm 1), \left(-2; \frac{2}{3}\right), \left(0; -\frac{2}{3}\right)$ . □

### 1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x-2y)^2 + (y^2 + 2xy)^2 + (x-2y)(y^2 + 2xy) = 13 \\ (x-2y)(y^2 + 2xy)(x-2y + y^2 + 2xy) = -12. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = y^2 + 2xy. \end{cases}$

Hệ đã cho trở thành 
$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 13 \\ uv(u+v) = -12. \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại I, giải ra ta được các nghiệm là:

$$\left(\frac{-9 + 2\sqrt{29}}{5}; \frac{3 + \sqrt{29}}{5}\right); \left(\frac{-9 - 2\sqrt{29}}{5}; \frac{3 - \sqrt{29}}{5}\right); \left(\frac{-3 + 2\sqrt{21}}{5}; \frac{1 + \sqrt{21}}{5}\right); \left(\frac{-3 - 2\sqrt{21}}{5}; \frac{1 - \sqrt{21}}{5}\right)$$

$$\left(\frac{12 - 2\sqrt{11}}{5}; \frac{-4 - \sqrt{11}}{5}\right); \left(\frac{12 + 2\sqrt{11}}{5}; \frac{-4 + \sqrt{11}}{5}\right) (2; -1); (-1; 1); \left(\frac{14}{5}; -\frac{3}{5}\right); \left(-\frac{13}{5}; \frac{1}{5}\right).$$

□

**Bài 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x+y)^3 + y = 5 \\ 3(x+y)^3 - 22xy + 21 = 11x^2 + 12y^2. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Đặt  $(x+y) = t$ . Hệ đã cho theo ẩn  $t, y$ . Kết quả  $(x; y) = (1; 1)$  □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 81x^3y^2 - 81x^2y^2 + 33xy^2 - 29y^2 = 4 \\ 25y^3 + 9x^2y^3 - 6xy^3 - 4y^2 = 24. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Chia hai vế phương trình (1) cho  $y^2$ , phương trình (2) cho  $y^3$ .

Đặt ẩn phụ  $\begin{cases} \frac{2}{y} = b \\ 3x - 1 = a. \end{cases}$

Kết luận  $(x; y) = (1; 1)$  là nghiệm của hệ. □

**Bài 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y) + (xy - 1) = 3. \end{cases}$$

**Lời giải.**



$$\text{Có } \begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 + (xy - 1)^2 = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x + y = u; xy - 1 = v, \text{ hệ trở thành } \begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 = 16 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = -4 \\ uv = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{TH1. } \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 3. \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x + y = 3 \\ xy - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 4 \end{cases} \text{ (VN).}$$

$$\text{TH2. } \begin{cases} u + v = -4 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = -3 \\ uv = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = -1 \\ uv = -3. \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} u = -3 \\ uv = -1 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x + y = -3 \\ xy - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -3. \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} u + v = -1 \\ uv = -3 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x + y = -1 \\ xy - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm là  $(2; 1), (1; 2), (-3; 0), (0; 3), (-2; 1), (1; -2)$ . □

### Dạng 10. Đặt ẩn phụ dạng tổng - hiệu

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2} \end{cases}, \text{ thay vào hệ đã cho để chuyển hệ đã cho về hệ ẩn là } (u; v).$$

**Dấu hiệu nhận biết:** Phương trình trong hệ có chứa các đại lượng đối xứng đi cùng nửa đối xứng dưới đây:

$$1) x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = u \cdot v.$$

$$2) x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - \frac{u^2 - v^2}{2}.$$

$$3) x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y) \left[ \frac{3 \cdot (x - y)^2 + (x + y)^2}{4} \right] = \frac{1}{4}u(3v^2 + u^2).$$

$$4) x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y) \left[ \frac{3 \cdot (x + y)^2 + (x - y)^2}{4} \right] = \frac{1}{4}v(3u^2 + v^2).$$

$$5) x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y) \left[ \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} \right] = \frac{1}{2}uv(u^2 + v^2).$$

$$6) x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \frac{(u^2 + v^2)^2}{4} - \frac{1}{8}(u^2 - v^2)^2 = \frac{u^4 + 6u^2v^2 + v^4}{8}.$$

Tổng quát ta đặt:  $\begin{cases} u = mx + ny \\ v = px + qy \end{cases}$  với  $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy = x + y \\ (x - y)(x + y) = 3. \end{cases}$

Đặt:  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2} \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{u^2 - v^2}{4}.$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 - 3 \cdot \frac{u^2 - v^2}{4} = u \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 3v^2 - 4u = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases} \quad (\text{vì } u = 0 \text{ không thỏa mãn hệ phương trình})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + \frac{27}{u^2} - 4u = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 - 3u^3 + 27 = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u - 3)^2(u^2 + 2u + 3) = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - 3 = 0 \\ u^2 + 2u + 3 = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (2; 1)$  □

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ (x + y)^3 = x. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có hệ phương trình tương đương  $\begin{cases} (x + y)^2 + (x - y)^2 - (x + y)(x - y) = 1 \\ 2(x + y)^3 = (x + y) + (x - y). \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ . Phương trình trở thành  $\begin{cases} u^2 + v^2 - u \cdot v = 1 \\ 2u^3 = u + v. \end{cases}$  (\*) □

Ta giải phương trình

$$2u^3 = u + v \Leftrightarrow 2u^3 = (u + v) \cdot 1 \Leftrightarrow 2u^3 = (u + v)(u^2 + v^2 - uv) \Leftrightarrow 2u^3 = u^3 + v^3 \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow u = v.$$

Khi đó hệ (\*) tương đương:  $\begin{cases} u^2 + v^2 - u \cdot v = 1 \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 1 \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 1 \\ u = v = -1. \end{cases}$

Do đó  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm  $(1; 0)$  và  $(-1; 0)$ . □

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} = y + 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $y \geq -1$ . Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 6 = y^2 + 2y + 1 \\ \frac{1}{4}[(x - y)^2 + 3(x + y)^2] = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) + 2(x - y) + 5 = 0 \\ (x - y)^2 + 3(x + y)^2 = 28. \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ . Khi đó hệ trở thành:  $\begin{cases} uv + 2v + 5 = 0 \\ 3u^2 + v^2 = 28. \end{cases}$  (1)

TH1. Với  $v = 0$  không thỏa mãn hệ phương trình (1).

TH2. Với  $v \neq 0$  hệ (1) tương đương với:  $\begin{cases} u = -2 - \frac{5}{v} \\ 3\left(2 + \frac{5}{v}\right)^2 + v^2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 - \frac{5}{v} \\ v^4 - 16v^2 + 60v + 75 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -1 \\ u = 3 \\ v = -5 \\ u = -1. \end{cases}$

+) Với  $\begin{cases} v = -1 \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  (thỏa mãn điều kiện).

+) Với  $\begin{cases} v = -5 \\ u = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$  (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm:  $(x; y) = (1; 2), (x; y) = (-3; 2)$ . □

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 2xy = 16 \\ 2x - x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

**Lời giải.**

Hệ phương trình trên tương đương

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + 2xy = 16 \\ 2x - (x - y)(x + y) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2(x - y) = 14 \\ 2x - (x + y)(x - y) = 1. \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ . Hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} u^2 - 2v = 14 \\ u + v - u \cdot v = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{u^2 - 14}{2} \\ u + \frac{u^2 - 14}{2} - u \cdot \frac{u^2 - 14}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{u^2 - 14}{2} \\ u^3 - u^2 - 16u + 16 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{u^2 - 14}{2} \\ u^2(u - 1) - 16(u - 1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{u^2 - 14}{2} \\ (u - 1)(u^2 - 16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{u^2 - 14}{2} \\ \begin{cases} u = 1 \\ u = 4 \\ u = -4 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{-13}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 4 \\ v = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -4 \\ v = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

TH1.  $\begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{-13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-11}{4} \\ y = \frac{15}{4}. \end{cases}$

TH2.  $\begin{cases} u = 4 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

TH3. 
$$\begin{cases} u = -4 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ y = \frac{-5}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm  $\left(\frac{-11}{4}; \frac{15}{4}\right); \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{-3}{2}; \frac{-5}{2}\right)$ . □

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} 4(x^4 + 2x^3y + x^2y^2) = 2x + 2y + 9 \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 6(x + y + 1). \end{cases}$$

**Lời giải.**

$$\begin{cases} 4(x^4 + 2x^3y + x^2y^2) = 2x + 2y + 9 \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 6(x + y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y + x - y)^2(x + y)^2 = 2(x + y) + 9 \\ (x + y)^2 + 2(x - y)(x + y) = 6(x + y) + 6. \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ . Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (u + v)^2 u^2 = 2u + 9 \\ u^2 + 2uv = 6u + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u^2 + uv)^2 = 2u + 9 \\ uv = \frac{6u + 6 - u^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u^2 + \frac{6u + 6 - u^2}{2}\right)^2 = 2u + 9 \\ uv = \frac{6u + 6 - u^2}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 12u^3 + 48u^2 + 64u = 0 \\ uv = \frac{6u + 6 - u^2}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u(u + 4)^3 = 0 \\ uv = \frac{6u + 6 - u^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 \\ v = -\frac{17}{4} \end{cases} \text{ (vì } u = 0 \text{ không thỏa mãn hệ)}. \end{aligned}$$

Vậy ta được  $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = -\frac{33}{8} \end{cases}$ , do đó hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\frac{1}{8}; -\frac{33}{8}\right)$ . □

**1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Giải hệ phương trình sau 
$$\begin{cases} \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y} = \frac{3}{8} \end{cases} \quad \text{DS: } S = \{(5; 3)\}.$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x \neq \pm y$ , đặt  $\frac{1}{x + y} = u; \frac{1}{x - y} = v$ .

Khi đó, có hệ mới 
$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{8} \\ -u + v = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 1 \\ u + v = \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} \\ u = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Thay trở lại, ta được 
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $S = \{(5; 3)\}$ . □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình sau 
$$\begin{cases} (x + y + 3)\sqrt{x - y} + 2y + 4 = 0 \\ (x - y)(x^2 + 4) = y^2 + 1. \end{cases} \quad \text{DS: } S = \{(-1; -2)\}.$$

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = x + y \\ v = \sqrt{x - y}, v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v^2}{2} \\ y = \frac{u - v^2}{2} \end{cases}.$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} (u + 3)v + u - v^2 + 4 = 0 \\ v^2 \left( \left(\frac{u + v^2}{2}\right)^2 + 4 \right) = \left(\frac{u - v^2}{2}\right)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v + 1)(u - v + 4) = 0 \\ v^2 \left( \left(\frac{u + v^2}{2}\right)^2 + 4 \right) = \left(\frac{u - v^2}{2}\right)^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v + 4 = 0, (v + 1 > 0) \\ v^2 \left( \left( \frac{u + v^2}{2} \right)^2 + 4 \right) = \left( \frac{u - v^2}{2} \right)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v - 4 \\ v^2((v^2 + v - 4)^2 + 16) = (-v^2 + v - 4)^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v - 4 \\ v^6 + 2v^5 - 8v^4 - 6v^3 + 23v^2 + 8v - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v - 4 \\ (v - 1)(v^5 + 3v^4 - 5v^3 - 11v^2 + 12v + 20) = 0. \end{cases} (*)$$

Vì  $v^5 + 3v^4 - 5v^3 - 11v^2 + 12v + 20 > 0, \forall v \geq 0$  nên hệ (\*) tương đương với

$$\begin{cases} u = -3 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ \sqrt{x - y} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (-1; -2)$ . □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình sau  $\begin{cases} (2x - y)^4 + (2y - x)^4 = 1 & (1) \\ (x - y)(x^2 - xy + y^2) = \frac{1}{9} & (2). \end{cases}$  ĐS:  $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow [(2x - y)^2 + (2y - x)^2]^2 - 2(2x - y)^2(2y - x)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow [5(x^2 + y^2) - 8xy]^2 - 2(5xy - 2x^2 - 2y^2)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \left[ 5 \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} - 8xy \right]^2 - 2(5xy - [(x + y)^2 + (x - y)^2])^2 = 1. \end{aligned}$$

Đặt  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y. \end{cases}$  Khi đó hệ trở thành

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \left( 5 \cdot \frac{u^2 + v^2}{2} - 8 \cdot \frac{u^2 - v^2}{4} \right)^2 - 2 \cdot \left( 5 \cdot \frac{u^2 - v^2}{4} - u^2 - v^2 \right)^2 = 1 \\ v \cdot \frac{3v^2 + u^2}{4} = \frac{1}{9} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(u^2 + 9v^2)^2 - \frac{1}{8}(u^2 - 9v^2)^2 = 1 \\ 3v^3 + u^2v = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 54u^2v^2 + 81v^4 = 8 \\ 3v^3 + u^2v = \frac{4}{9} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = -1 \\ v = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm  $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ . □

**Bài 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{3}{2y} - \frac{1}{x} \\ (x + y)^3 = 5. \end{cases}$  ĐS:  $(x; y) = \left(\frac{\sqrt[3]{5} - 1}{2}; \frac{\sqrt[3]{5} + 1}{2}\right)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $xy \neq 0$

Ta có  $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{3}{2y} - \frac{1}{x} \\ (x + y)^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy(x^2 - y^2) = 3x - 2y \\ (x + y)^3 = 5. \end{cases}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \frac{u^2 - v^2}{4} \\ x^2 - y^2 = uv \\ 3x - 2y = \frac{3(u+v)}{2} - 2\frac{u-v}{2} = \frac{u+5v}{2}. \end{cases}$$

Khi đó, hệ phương trình chuyển thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2uv \cdot \frac{u^2 - v^2}{4} = \frac{u+5v}{2} \\ u^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u^2 - v^2) = u + 5v \\ u^3 = 5 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u(v^3 + 1) = 0 \\ u^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt[3]{5} \\ v = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{5} \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt[3]{5} + 1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\frac{\sqrt[3]{5} - 1}{2}; \frac{\sqrt[3]{5} + 1}{2}\right)$ . □

**Bài 5.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 3x - y = 3\sqrt{x+y} \\ 3x + y = 3\sqrt{x-y} \end{cases}$

DS:  $S = \{(5; 3); (1; 0)\}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} \sqrt{x+y} = a \\ \sqrt{x-y} = b \end{cases}, a \geq 0, b \geq 0$ . Khi đó  $2a^2 + b^2 = 3x + y, a^2 + 2b^2 = 3x - y$ .

Hệ phương trình trở thành  $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3a & (1) \\ 2a^2 + b^2 = 3b & (2). \end{cases}$

Trừ vế với vế của hai phương trình (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= 3(a - b) \Leftrightarrow (a - b)(3 + a + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b - 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $a = b$  thay vào phương trình (1) suy ra  $3a^2 = 3a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a = 1 \Rightarrow b = 1. \end{cases}$

Với  $a = -b - 3$  thay vào phương trình (1) suy ra  $(-b - 3)^2 + b^2 = 3b \Leftrightarrow 2b^2 - 3b + 9 = 0$  (vô nghiệm)

Trường hợp 1:  $a = b = 0$ , ta có  $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

Trường hợp 2:  $a = b = 1$  ta có  $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 1 \\ \sqrt{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $S = \{(5; 3); (1; 0)\}$ . □

**Dạng 11. Đặt ẩn phụ trong hệ có căn**

*Dấu hiệu và định hướng phương pháp giải.*

— Đối với dạng hệ phương trình này, các phương trình trong hệ thường xuất hiện một hay nhiều căn thức xen lẫn với các biểu thức khác, do đó nếu biến đổi biểu thức theo cách thông thường sẽ xuất hiện các đa thức bậc cao hay có khi không khử được căn khiến cho bài toán khó xử lý.

— Hướng xử lý thông thường là ta sẽ đặt ẩn phụ một số căn thức nhất định để khử căn thức và tìm mối liên hệ giữa các biểu thức đã cho trong hệ. Từ mối liên hệ đó ta sẽ biến đổi các ẩn ban đầu theo ẩn phụ (ẩn trung gian) để đưa về một hệ mới không có hoặc có ít căn và dùng các biến đổi đại số để giải quyết bài toán.

— Ta có thể chỉ đặt ẩn phụ cho một phương trình nào đó của hệ chứa căn hoặc đặt ẩn phụ cho

toàn hệ và biến đổi hệ phương trình ban đầu về hệ phương trình mới với các ẩn số phụ.

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x - y + 1} + 3y - 1 = 6x \\ \sqrt{2x^2 - 5y + 1} - 3x + y = 1. \end{cases}$$
  
 DS:  $S = \{(0; 0); (12; 24)\}$ .

**Lời giải.**

**Phân tích** Phương trình thứ nhất có thể đưa về dạng  $\sqrt[3]{2x - y + 1} - 3(2x - y + 1) + 2 = 0$ .  
 Khi đó, nếu đặt  $t = \sqrt[3]{2x - y + 1}$ , thì phương trình trở thành  $-3t^3 + t + 2 = 0$ . Từ đó ta tìm được  $t$ .  
 Điều kiện  $2x^2 - 5y + 1 \geq 0$ .

Ta có 
$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x - y + 1} + 3y - 1 = 6x \\ \sqrt{2x^2 - 5y + 1} - 3x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x - y + 1} - 3(2x - y + 1) + 2 = 0 & (1) \\ \sqrt{2x^2 - 5y + 1} - 3x + y = 1. & (2) \end{cases}$$

Đặt  $t = \sqrt[3]{2x - y + 1}$  thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow -3t^3 + t + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x - y + 1} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x - y + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow y = 2x. \end{aligned}$$

Thay  $y = 2x$  vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} &\sqrt{2x^2 - 10x + 1} - x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 10x + 1} = x + 1 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 10x + 1 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 12x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = 12 &\Rightarrow y = 24. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $S = \{(0; 0); (12; 24)\}$ . □

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x + 2y - 2\sqrt{(2x + 1)(x + 2y)} = -1 \\ 2\sqrt{x + 2y - 1} + 6x - 10y = 11. \end{cases}$$
  
 DS:  $S = \left\{ \left( 8; \frac{9}{2} \right) \right\}$ .

**Lời giải.**

**Phân tích** Với điều kiện  $2x + y \geq 1; 2x + 1 \geq 0$ , ta có thể biến đổi phương trình đầu trong hệ thành

$$(2x + 1) + (x + 2y) - 2\sqrt{(2x + 1)(x + 2y)} = 0.$$

Khi đó, nếu đặt  $u = \sqrt{2x + 1}; v = \sqrt{x + 2y}$  thì phương trình trở thành  $u^2 - 2uv + v^2 = 0 \Leftrightarrow u = v$ .

Điều kiện 
$$\begin{cases} (2x + 1)(x + 2y) \geq 0 \\ x + 2y - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x + 2y \geq 1. \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đầu trong hệ trở thành

$$(2x + 1) + (x + 2y) - 2\sqrt{(2x + 1)(x + 2y)} = 0 \quad (*).$$

Đặt  $u = \sqrt{2x + 1}; v = \sqrt{x + 2y} (u, v \geq 0)$  thì

$$(*) \Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 = 0 \Leftrightarrow (u - v)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u &= v \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+2y} \\ \Leftrightarrow 2x+1 &= x+2y \Leftrightarrow 2y = x+1. \end{aligned}$$

Thay  $2y = x + 1$  vào phương trình  $2\sqrt{x+2y-1} + 6x - 10y = 11$ , ta được

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x} + 6x - 5(x+1) - 11 &= 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x} = -x + 16 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 16 \\ x^2 - 40x + 256 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 16 \\ \begin{cases} x = 32 \\ x = 8 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= 8 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Với  $x = 8$  thì  $y = \frac{9}{2}$  (thỏa mãn điều kiện  $x + 2y \geq 1$ ).

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $S = \left\{ \left( 8; \frac{9}{2} \right) \right\}$ . □

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{2x+3y} + 2\sqrt{x+y} = 1 \\ x - y + \sqrt{x+y} = -2. \end{cases}$  ĐS:  $S = \{(-1; 1)\}$ .

**Lời giải.**

**Phân tích** Hai phương trình của hệ xuất hiện  $\sqrt{2x+3y}; \sqrt{x+y}$ , điều này gợi ta liên tưởng đến cách đặt ẩn phụ  $u = \sqrt{2x+3y}; v = \sqrt{x+y}$ . Sau đó, chuyển hệ phương trình từ ẩn  $x, y$  thành ẩn  $u, v$  và không còn chứa căn thức.

Điều kiện  $\begin{cases} 2x+3y \geq 0 \\ x+y \geq 0. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} u = \sqrt{2x+3y} \\ v = \sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 2x+3y \\ v^2 = x+y \end{cases}$  (với  $u, v \geq 0$ ).

Ta cần tìm hai số  $m, n$  sao cho

$$\begin{aligned} x - y &= mu^2 + nv^2 \Leftrightarrow x - y = m(2x+3y) + n(x+y) \\ \Leftrightarrow x - y &= (2m+n)x + (3m+n)y, \forall x, y \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+n = 1 \\ 3m+n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó, hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} u+v = 1 \\ -2u^2 + 5v^2 + v = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1-v \\ -2(1-v)^2 + 5v^2 + v + 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1-v \\ 3v^2 + 5v = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1-v \\ \begin{cases} v = 0 \\ v = -\frac{5}{3} \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \text{ (vì } u, v \geq 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = 1 \\ x+y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases} \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $S = \{(-1; 1)\}$ . □

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{7x+y} - \sqrt{2x+y} = 4 \\ 2\sqrt{2x+y} - \sqrt{5x+8} = 2 \end{cases}$ ,  $(x, y \in \mathbb{R})$



$$\text{ĐS: } S = \left\{ \left( \frac{56}{5}; \frac{13}{5} \right) \right\}.$$

**Lời giải.**

Phân tích Ta thấy căn thức  $\sqrt{2x+y}$  xuất hiện tới 2 lần nên ta nghĩ tới việc đặt ẩn  $t = \sqrt{2x+y}$  để đồng thời giảm số căn thức và đơn giản biểu thức, sau đó ta chọn tùy ý đặt ẩn 1 trong 2 căn thức còn lại (vì có thể biểu diễn căn thức cuối cùng theo 2 căn thức đã đặt ẩn phụ).

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x+y \geq 0 \\ 7x+y \geq 0 \\ x \geq \frac{-8}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} t = \sqrt{2x+y} \\ u = \sqrt{5x+8} \end{cases} \quad (I) \text{ thì } t, u \geq 0 \text{ và } \sqrt{7x+y} = \sqrt{u^2+t^2-8}.$$

Hệ phương trình ban đầu viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{u^2+t^2-8} - t = 4 \\ 2t - u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u^2+t^2-8} = 4+t \\ 2t - u = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u^2 = 8t + 24 \\ 2t - u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 4(u+2) + 24 \\ 2t = u + 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u = 8 \\ t = 5. \end{cases} \quad (II) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (I), (II) ta suy ra } \begin{cases} 2x+y = 25 \\ 5x+8 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{56}{5} \\ y = \frac{13}{5}. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện thì ta thấy nghiệm thỏa mãn.

$$\text{Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là } S = \left\{ \left( \frac{56}{5}; \frac{13}{5} \right) \right\}. \quad \square$$

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình sau  $\begin{cases} \left( \frac{2x}{y^2} - 1 \right) \left( \frac{y}{x^2} - 9 \right) = 18 \\ \sqrt{9x + \frac{y}{x}} + 2\sqrt{y + \frac{2x}{y}} = 4 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$

$$\text{ĐS: } (x; y) = \left( \frac{1}{9}; \frac{1}{3} \right).$$

**Lời giải.**

**Phân tích** Ta để ý rằng phương trình thứ 2 của hệ chỉ gồm toàn căn thức, do đó ta nghĩ đến việc đặt ẩn 2 căn thức để khử căn và tìm cách biểu diễn phương trình thứ nhất theo các ẩn phụ vừa đặt.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ 9x + \frac{y}{x} \geq 0 \\ y + \frac{2x}{y} \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{9x + \frac{y}{x}} \\ v = \sqrt{y + \frac{2x}{y}} \end{cases} \quad (I) \text{ thì } u, v \geq 0.$$

Ta khai triển phương trình thứ nhất:

$$\begin{aligned} \left( \frac{2x}{y^2} - 1 \right) \left( \frac{y}{x^2} - 9 \right) = 18 & \Leftrightarrow \frac{2}{xy} - \frac{18x}{y^2} - \frac{y}{x^2} - 9 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2 - \frac{18x^2}{y} - \frac{y^2}{x} - 9xy = 0. \end{aligned}$$

Lại chú ý rằng

$$u^2 \cdot v^2 = \frac{18x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + 9xy + 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{18x^2}{y} - \frac{y^2}{x} - 9xy = 4 - u^2 \cdot v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow uv = 2 \text{ (do } u, v \geq 0)$$

Suy ra ta có hệ phương trình mới theo  $u, v$  là  $\begin{cases} u + 2v = 4 \\ uv = 2. \end{cases}$

Giải hệ này ta được  $u = 2v = 2$  hay  $(u, v) = (2, 1)$ .

Thay lại vào hệ (I) ta được hệ sau  $\begin{cases} 9x^2 + y = 4x \\ y^2 + 2x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 9x^2 \\ (4x - 9x^2)^2 + 2x = 4x - 9x^2 \end{cases} \quad (1).$

Khai triển phương trình (1), ta được

$$81x^4 - 72x^3 + 25x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(9x - 1)(9x^2 - 7x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} & \text{(nhận)} \\ x = 0 & \text{(loại)} \\ 9x^2 - 7x + 2 & \text{(vô nghiệm.)} \end{cases}$$

Thay  $x = \frac{1}{9}$  vào phương trình  $y = 4x - 9x^2$  ta giải được  $y = \frac{1}{3}$ .

Thử lại ta kết luận  $(x; y) = \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$  thỏa mãn hệ phương trình. □

### 1 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 2x + y^2 - 5y = -5. \end{cases}$

**Lời giải.**

— Điều kiện  $5 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{2}$ .

— Cần tìm hai số  $m, n$  sao cho

$$y - 3 = m(5 - 2y) + n, \forall y \Leftrightarrow y - 3 = -2my + 5m + n, \forall y \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = 1 \\ 5m + n = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đầu của hệ trở thành

$$(4x^2 + 1)x - \frac{1}{2}[(5 - 2y) + 1]\sqrt{5 - 2y} = 0 \Leftrightarrow [(2x)^2 + 1](2x) - [(5 - 2y) + 1]\sqrt{5 - 2y} = 0.$$

Đặt  $\begin{cases} u = 2x \\ v = \sqrt{5 - 2y} \geq 0 \end{cases}$  ta được

$$(u^2 + 1)u - (v^2 + 1)v = 0 \Leftrightarrow u^3 - v^3 + u - v = 0 \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} + 1 = 0(!) \end{cases} \Leftrightarrow u = v.$$

Với  $u = v \Leftrightarrow \sqrt{5 - 2y} = 2x \text{ (} x \geq 0 \text{)}$ . Thay  $2x = \sqrt{5 - 2y}$  (\*) vào phương trình  $2x + y^2 - 5y = -5$  ta được

$$\sqrt{5 - 2y} + y^2 - 5y + 5 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{5 - 2y} - 1) + y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(y - 2)}{\sqrt{5 - 2y} + 1} + (y - 2)(y - 3) = 0 \Leftrightarrow (y - 2) \left[ \frac{-2}{\sqrt{5 - 2y} + 1} + (y - 3) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \frac{-2}{\sqrt{5-2y+1}} + (y-3) = 0. \end{cases}$$

Vì  $y \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow y-3 \leq -\frac{1}{2}$  nên  $\frac{-2}{\sqrt{5-2y+1}} + y-3 < 0$ . Do đó  $y = 2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} x = \frac{1}{2}$  (nhận).

Vậy tập nghiệm của hệ là  $S = \left\{ \left( \frac{1}{2}; 2 \right) \right\}$ .

□

**Bài 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} + (3y-20)\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0. \end{cases}$

**Lời giải.**

— Điều kiện  $\begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 6 \\ 2x+y+2 \geq 0 \\ -3x+2y+8 \geq 0. \end{cases}$

— Cần tìm hai số  $m$  và  $n$  sao cho  $23-3x = m(7-x) + n, \forall x$ . Suy ra  $(23-3x)\sqrt{7-x} = [3(7-x)+2]\sqrt{7-x}$ . Tương tự, ta có  $(3y-20)\sqrt{6-y} = -[3(6-y)+2]\sqrt{6-y}$ .

Khi đó, hệ phương trình được viết lại thành

$$\begin{cases} [3(7-x)+2]\sqrt{7-x} - [3(6-y)+2]\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0. \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} u = \sqrt{7-x} \\ v = \sqrt{6-y} \end{cases}$  với  $u, v \geq 0$  thì phương trình đầu của hệ trở thành

$$\begin{aligned} (3u^2+2)u - (3v^2+2)v &= 0 \Leftrightarrow 3(u^3-v^3) + 2(u-v) = 0 \\ \Leftrightarrow (u-v)(3u^2+3v^2+3uv+2) &= 0 \Leftrightarrow u = v \text{ (vì } 3u^2+3v^2+3uv+2 > 0 \text{ với } u, v \geq 0) \\ \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = \sqrt{6-y} &\Leftrightarrow y = x-1. \end{aligned}$$

Thay  $y = x-1$  vào phương trình số 2 của hệ ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} - \sqrt{-x+6} + 3x^2 - 14x - 8 &= 0, \forall x \in \left[ \frac{1}{3}; 6 \right] \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4) + (1-\sqrt{-x+6}) + 3x^2 - 14x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{-x+6}} + (x-5)(3x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{-x+6}} + 3x+1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì  $x \in \left[ \frac{1}{3}; 6 \right]$  nên  $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{-x+6}} + 3x+1 > 0$ . Do đó  $x = 5 \Rightarrow y = 4$  (nhận).

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $S = \{(5; 4)\}$ .

□

**Bài 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{11x-y} - \sqrt{y-x} = 1 \\ 7\sqrt{y-x} + 6y - 26x = 3. \end{cases}$

**Lời giải.**

— Điều kiện  $\begin{cases} 11x-y \geq 0 \\ y-x \geq 0. \end{cases}$

— Đặt  $\begin{cases} u = \sqrt{11x - y} \\ v = \sqrt{y - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 11x - y \\ v^2 = y - x. \end{cases}$

Cần tìm hai số  $m, n$  sao cho

$$\begin{aligned} -26x + 6y &= mu^2 + nv^2 \Leftrightarrow -26x + 6y = m(11x - y) + n(y - x) \\ \Leftrightarrow -26x + 6y &= (11m - n)x + (-m + n)y, \forall x, y \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 11m - n = -26 \\ -m + n = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

— Khi đó, hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} u - v = 1 \\ 7v - 2u^2 + 4v^2 = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v \\ 7v - 2(1 + v)^2 + 4v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v \\ 2v^2 + 3v - 5 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + v \\ \begin{cases} v = 1 \\ v = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (do } u, v \geq 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{11x - y} = 2 \\ \sqrt{y - x} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - y = 4 \\ y - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (nhận).} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là  $S = \left\{ \left( \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right) \right\}$ .

□

**Bài 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{4x + y} + \sqrt{x + 3y} = 7 \\ \sqrt{x + 3y} + x + y = 10. \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x + 3y \geq 0 \\ 4x + y \geq 0. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} t = \sqrt{x + 3y} \\ u = \sqrt{4x + y} \end{cases}$  thì  $t, u \geq 0$ . Từ cách đặt trên ta suy ra được  $\begin{cases} x = \frac{3u^2 - t^2}{11} \\ y = \frac{4t^2 - u^2}{11}. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho thành  $\begin{cases} u + t = 7 \\ t + \frac{3u^2 - t^2}{11} + \frac{4t^2 - u^2}{11} = 10 \end{cases} \quad (I).$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u + t = 7 \\ t + \frac{2u^2 + 3t^2}{11} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7 - t \\ t + \frac{2(7 - t)^2 + 3t^2}{11} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7 - t \\ 5t^2 - 17t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7 - 4 = 3 \\ t = 4 \text{ (do } t \geq 0). \end{cases}$$

Vậy ta có  $\begin{cases} \sqrt{x + 3y} = 4 \\ \sqrt{4x + y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 16 \\ 4x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5. \end{cases}$

Thử lại điều kiện kết hợp với thế ngược lại vào hệ ban đầu ta thấy thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (1; 5)$ .

□

**Bài 5.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (2x - y + 2)(2x + y) + 6x - 3y + 6 = 0 \\ \sqrt{2x + 1} + \sqrt{y - 1} = 4. \end{cases}$

**Lời giải.**

— Điều kiện  $\begin{cases} x \geq \frac{-1}{2} \\ y \geq 1. \end{cases}$

— Đặt  $\begin{cases} u = \sqrt{2x+1} \\ v = \sqrt{y-1} \end{cases}$  thì  $u, v \geq 0$  và  $\begin{cases} x = \frac{u^2-1}{2} \\ y = v^2+1. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho viết lại thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (u^2-1-v^2-1+2)(u^2-1+v^2+1) + 6 \cdot \frac{u^2-1}{2} - 3(v^2-1) + 6 = 0 \\ u+v=4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (u^2-v^2)(u^2+v^2) + 3(u^2-v^2) = 0 \\ u+v=4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (u^2-v^2)(u^2+v^2+3) = 0 \\ u+v=4. \end{cases} \end{aligned}$$

Do  $u^2+v^2+3 > 0$  nên ta suy ra  $u-v=0$  (do  $u+v=4 \neq 0$ ). Vậy ta giải được  $u=v=2$ .

Do đó  $\begin{cases} 2 = \sqrt{2x+1} \\ 2 = \sqrt{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 5 \end{cases}$  (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là  $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; 5\right)$ . □

**Bài 6.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} + \sqrt{x^2-y^2} = 3. \end{cases}$

**Lời giải.**

— Điều kiện  $x \geq |y|$ .

— Đặt  $\begin{cases} u = \sqrt{x+y} \\ v = \sqrt{x-y} \end{cases}$  thì  $u, v \geq 0$  và  $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+1} = \sqrt{\frac{(u^4+v^4)}{2}} + 1 \\ \sqrt{x^2-y^2} = u \cdot v. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho thành:  $\begin{cases} u-v=2 \\ \sqrt{\frac{(u^4+v^4)}{2}} + 1 + uv = 3. \end{cases}$  Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned} 2(u^4+v^4) &= 4(uv)^2 + 2(u^2-v^2)^2 = 4(uv)^2 + 8(u+v)^2 \\ &= 4(uv)^2 + 8[(u-v)^2 + 4uv] = 4(uv)^2 + 32uv + 32. \end{aligned}$$

Do đó hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u-v=2 \\ \sqrt{\frac{(u^4+v^4)}{2}} + 1 + uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ \sqrt{(uv)^2 + 8uv + 8} + 1 + uv = 3 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} u-v=2 \\ 3-uv \geq 0 \\ (uv)^2 + 8uv + 9 = (uv)^2 - 6uv + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ uv=0 \text{ (thỏa mãn } 3-uv \geq 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Do  $u, v \geq 0$  nên ta giải được  $(u; v) = (2; 0)$ . Suy ra  $\begin{cases} x+y=4 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow x=y=2$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $x=y=2$ . □

**Dạng 12. Sử dụng hình giải tích**

Một số lưu ý, các bất đẳng thức hay gặp

- $MA + MB \geq AB$ , nếu dấu “=” xảy ra thì ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng.
- $MA - MB \leq AB$ , nếu dấu “=” xảy ra thì ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ , nếu dấu “=” xảy ra thì hai véc-tơ  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ , nếu dấu “=” xảy ra thì hai véc-tơ  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương.

**Ví dụ 1.** Tìm  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ x + y = m & (2) \end{cases}$  có 2 nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Nhận thấy phương trình (1) có dạng là phương trình đường tròn có tâm  $O(0;0)$ ; bán kính  $R = 2$ ; Phương trình (2) có dạng là phương trình đường thẳng  $x + y - m = 0$  ( $\Delta$ ). Hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi đường thẳng và đường tròn có 2 điểm chung. Khi đó

$$d(O; \Delta) < 2 \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow |m| < 2\sqrt{2}.$$

□

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 3xy - 10y = 3 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5. \end{cases}$

**Lời giải.**

Xét các điểm  $A(2;4); B(5;8); M(x;y)$  thì  $MA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}; MB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2}$ . Rõ ràng với 3 điểm  $A; B; M$  tùy ý Ta có  $MA + MB \geq AB = 5$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $\frac{x-2}{x-5} = \frac{y-4}{y-8} \Rightarrow 4x - 3y + 4 = 0$ .

Vậy ta có hệ phương trình  $\begin{cases} 4x - 3y + 4 = 0 & (1) \\ 3xy - 10y = 3 & (2). \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có  $x = \frac{3y-4}{4}$  thế vào phương trình (2) ta được

$$3 \cdot \frac{3y-4}{4} \cdot y - 10y = 3 \Leftrightarrow 9y^2 - 52y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = \frac{-2}{9}. \end{cases}$$

Suy ra, có hai bộ  $(x;y)$  là  $(\frac{7}{2}; 6); (\frac{-7}{6}; \frac{-2}{9})$ .

Thử lại ta có nghiệm là  $(\frac{7}{2}; 6)$ .

□

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{2} \\ 2y - x = 2. \end{cases}$

**Lời giải.**

Xét các điểm  $M(x;y), A(1;3), B(3;1)$  trong mặt phẳng.

Từ phương trình thứ nhất ta được  $MA + MB = AB$ , suy ra  $M$  nằm trên đường thẳng  $AB$  hay  $\vec{MA} = (x-1; y-3)$  và  $\vec{AB} = (2; -2)$  cùng phương, suy ra  $(x-1) \cdot (-2) = (y-3) \cdot 2$ .

Kết hợp với phương trình thứ hai ta được hệ

$$\begin{cases} 2x + 2y - 8 = 0 \\ 2y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

(thử lại - nhận). Vậy hệ phương trình có nghiệm là (2; 2). □

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 3 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Xét các điểm  $M(x; y), A(-1; 2), B(2; 2)$  trong mặt phẳng.

Từ phương trình thứ nhất ta được  $MA - MB = AB$ , suy ra  $M$  nằm trên đường thẳng  $AB$  hay  $\vec{MA} = (x+1; y-2)$  và  $\vec{AB} = (3; 0)$  cùng phương, suy ra  $3(y-2) = 0 \Rightarrow y = 2$ .

Thay vào phương trình thứ hai ta được  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Thử lại, ta nhận nghiệm (3; 2) và loại nghiệm (1; 2).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (3; 2). □

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{y^2+1} \\ 2x^2 - y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $-1 \leq x \leq 3$ .

Đặt  $\vec{u} = (y; 1), \vec{v} = (\sqrt{x+1}; \sqrt{3-x})$ . Từ phương trình thứ nhất ta có  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$  suy ra  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

— **Trường hợp 1.**  $y = 0$ . Khi đó  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương  $\Rightarrow x = -1$ .

Thay vào hệ ta thấy  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$  không thỏa mãn hệ phương trình.

— **Trường hợp 2.**  $y \neq 0$

Khi đó  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương  $\Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{y} = \frac{\sqrt{3-x}}{1} \Rightarrow y\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1}$  (\*) dẫn đến

$y^2(3-x) = x+1$ . Thay  $y^2$  bởi  $2x^2 - 1$  (có được từ phương trình thứ hai) ta được

$$(2x^2 - 1)(3 - x) = x + 1.$$

Phương trình này tương đương với  $-2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$ , có nghiệm là  $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3}. \end{cases}$

– Với  $x = 1$ , từ (\*) ta có  $y = 1$ , thử lại - nhận.

– Với  $x = 1 + \sqrt{3}$ , từ (\*) ta có  $y = 2 + \sqrt{3}$ , thử lại - nhận.

– Với  $x = 1 - \sqrt{3}$ , từ (\*) ta có  $y = 2 - \sqrt{3}$ , thử lại - nhận.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(-1; 0), (1; 1), (1 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ . □

**Ví dụ 6.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + y - 4 + \sqrt{2x + 2y^2 - 16y + 30} = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = \sqrt{13}. \end{cases}$$

**Lời giải.**

— Đặt  $\vec{u} = (1; 1), \vec{v} = (\sqrt{x-1}; y-4)$ . Từ phương trình thứ nhất ta có  $\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 0$  hay  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ , suy ra  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương, do đó  $\sqrt{x-1} = y-4$ . (1)

— Xét các điểm  $M(x; y), A(-2; -1), B(0; 2)$  trong mặt phẳng. Từ phương trình thứ hai ta được  $MA + MB = AB$ , suy ra  $M$  nằm trên đường thẳng  $AB$  hay  $\vec{MA} = (x+2; y+1)$  và  $\vec{AB} = (2; 3)$  cùng phương, suy ra  $3(x+2) = 2(y+1)$ , hay  $y = \frac{3(x+2)}{2} - 1 = \frac{3x+4}{2}$ . (\*\*)

— Thay vào (\*) ta được

$$\sqrt{x-1} = \frac{3x+4}{2} - 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 3x-4 \Rightarrow 4(x-1) = 9x^2 - 24x + 16 \Rightarrow 9x^2 - 28x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{10}{9} \end{cases}$$

Với  $x = 2$ , từ (\*\*) ta được  $y = 5$ , thử lại - loại.

Với  $x = \frac{10}{9}$ , từ (\*\*) ta được  $y = \frac{11}{3}$ , thử lại - loại.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm. □

**Ví dụ 7.** Tìm  $m$  để hệ phương trình sau có nghiệm  $\begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y \\ 3x + 2y - 6 - 6m = 0. \end{cases} \quad (I)$

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -6. \end{cases}$

Ta có (I)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{y}{2} + 2\right) - 2\sqrt{\frac{x}{2}} - 2\sqrt{\frac{y}{2}} + 2 = 3 \\ \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{y}{2} + 2\right) = m + 4. \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{x}{2} + 1} \\ b = \sqrt{\frac{y}{2} + 2} \end{cases}$ , điều kiện  $a, b \geq 0$ . Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 2b = 3 \\ a^2 + b^2 = m + 4. \end{cases} \quad (II)$

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm  $(a, b)$  với  $a, b \geq 0$ .

Nếu  $m \leq -4$  thì hệ (II) vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

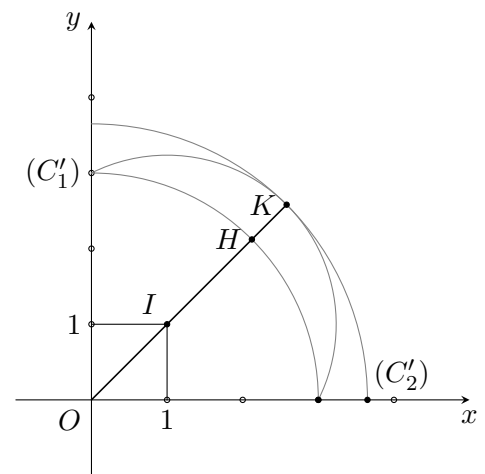
Nếu  $m > 4$ . Chọn hệ tọa độ  $Oab$ , từ hệ (II) ta có

Phương trình (1) cho ta cung tròn  $(C'_1)$  là một phần của đường tròn  $(C_1)$  tâm  $I(1; 1)$  và bán kính  $R_1 = \sqrt{5}$  thuộc góc phần tư thứ nhất vì  $a, b \geq 0$ .

Phương trình (2) cho ta cung tròn  $(C'_2)$  là  $\frac{1}{4}$  đường tròn  $(C_2)$  tâm  $O(0; 0)$  và bán kính  $R_2 = \sqrt{m+4}$  thuộc góc phần tư thứ nhất vì  $a, b \geq 0$ . Để hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi  $(C'_1)$  và  $(C'_2)$  giao nhau khác rỗng; dựa vào hình vẽ ta có

$$OH \leq R_2 \leq OK \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{m+4} \leq \sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}.$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi  $5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}$ . □





### E CHUYÊN ĐỀ 3: CÁCH NHẬN DẠNG HỆ GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP

Hệ phương trình hai ẩn trong đó có ít nhất một phương trình chứa căn.

#### 1 CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT CỦA DẠNG TOÁN

Bằng phương pháp nhân liên hợp đưa phương trình chứa căn về phương trình dạng tích. Từ đó ghép với phương trình còn lại để giải hệ phương trình.

Kiến thức sử dụng

$$\textcircled{1} (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B; \quad \textcircled{2} (\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2;$$

$$\textcircled{3} (\sqrt[3]{A} \pm B)(\sqrt[3]{A^2} \mp B\sqrt[3]{A} + B^2) = A \pm B^3.$$

#### 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

##### Dạng 13. Nhân liên hợp trực tiếp hai căn có sẵn trong phương trình

**Bài 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{y-1} = \sqrt{y-3} - \sqrt{x+2} & (1) \\ x^2 + y^2 - xy = 2y - x + 12 & (2) \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định 
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 3. \end{cases}$$

+) Xét  $\sqrt{y-3} + \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$  Thay vào phương trình (2) ta được:  $19 = 20$  (vô lí)

+) Xét  $\sqrt{y-3} + \sqrt{x+2} \neq 0$ . Khi đó 
$$\sqrt{x+4} - \sqrt{y-1} = \sqrt{y-3} - \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y+5}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y-1}} = \frac{y-x-5}{\sqrt{y-3} + \sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+5 = 0 & (3) \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{y-1} = -(\sqrt{y-3} + \sqrt{x+2}) & (4) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra  $x = y - 5$  thay vào phương trình (2) ta được:  $y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$  (loại).

Với  $y = 4 \Rightarrow x = -1$ , phương trình (4)  $\Leftrightarrow \sqrt{x+4} + \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{x+2} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} = 0 \\ \sqrt{x+2} = 0 \\ \sqrt{y-3} = 0 \\ \sqrt{y-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \\ y = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Suy ra phương trình (4) vô nghiệm. Vậy hệ có nghiệm  $(x; y) = (-1; 2)$ . □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \sqrt{y+1} - \sqrt{y-7} & (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-7} = 4 & (2). \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định 
$$\begin{cases} x \geq 7 \\ y \geq 7. \end{cases}$$

+) Xét  $\sqrt{y-7} + \sqrt{x-7} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 7. \end{cases}$

Thay vào phương trình (2) ta được  $2\sqrt{2} = 4$  (Vô lí)

+) Xét  $\sqrt{y-7} + \sqrt{x-7} \neq 0$ . Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{y+1} = \sqrt{x-7} - \sqrt{y-7} \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} = \frac{x-y}{\sqrt{x-7} + \sqrt{y-7}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} = \frac{1}{\sqrt{x-7} + \sqrt{y-7}}. \end{cases}$$

Với  $x = y$  thay vào (2) ta có  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 4$ .

$$\Leftrightarrow 2x - 6 + 2\sqrt{x^2 - 6x - 7} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 6x - 7} = 11 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 7 \leq x \leq 8 \\ x^2 - 6x - 7 = 121 - 22x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8 \Rightarrow y = 8.$$

Với  $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} = \frac{1}{\sqrt{x-7} + \sqrt{y-7}}$  (3)

**Cách 1.** (3)  $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{x-7} + \sqrt{y-7}$

Từ hệ phương trình ta có  $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{x-7} + \sqrt{y-7} = 8 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{y+1} = 4 - \sqrt{x+1}$  thay vào (2) ta có  $4 - \sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-7} = \sqrt{x+1}$  (vô lý)

**Cách 2.** Nhận thấy  $\begin{cases} \sqrt{x+1} > \sqrt{x-7} & \forall x \geq 7 \\ \sqrt{y+1} > \sqrt{y-7} & \forall y \geq 7 \end{cases}$  nên  $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} > \sqrt{x-7} + \sqrt{y-7}$  với  $\forall x \geq 7; y \geq 7$ .

Do đó phương trình (3) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (8; 8)$ . □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x - 4y + 3\sqrt{y} = \sqrt{2x + y} & (1) \\ \sqrt{y-1} + \sqrt{x+1} + y^2 + y = 10 & (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} y \geq 1; x \geq -1. \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$ .

(1)  $\Leftrightarrow (x - 4y) + \frac{8y - 2x}{3\sqrt{y} + \sqrt{2x + y}} = 0 \Leftrightarrow (x - 4y) \left( 1 - \frac{2}{3\sqrt{y} + \sqrt{2x + y}} \right) = 0(*)$

Do  $y \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{3\sqrt{y} + \sqrt{2x + y}} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{3\sqrt{y} + \sqrt{2x + y}} > 0$ .

(\*)  $\Leftrightarrow x = 4y$ . Thay vào phương trình (2) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{y-1} + \sqrt{4y+1} + y^2 + y = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{y-1} - 1 + \sqrt{4y+1} - 3 + y^2 + y - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-2) \left( \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{4}{\sqrt{4y+1} + 3} + y + 3 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 8. \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm  $(x; y) = (8; 2)$ . □

**Bài 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x+y} - \sqrt{2y} = y - x & (1) \\ \sqrt{2x-3} - \sqrt{y} = 2y - 6 & (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x \geq \frac{3}{2}, y \geq 0$ .

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2y}} = y-x \\ &\Leftrightarrow (x-y) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2y}} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Thế vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6 &\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2x - 6 \\ &\Leftrightarrow (x-3) \left( \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} - 2 \right) = 0 \quad (3). \end{aligned}$$

Do  $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} < 1$ .

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (3; 3)$ . □

**Bài 5.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y} + \sqrt{y-1} & (1) \\ y^2 + x^2 - 4y + 3 = 0 & (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x \geq 0, y \geq 1$ .

Khi đó phương trình (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 0$  (\*)

Xét trường hợp  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$  thỏa mãn phương trình (1) và (2) nên hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (0; 1)$ .

Với  $x \neq 0$  hoặc  $y \neq 1$  ta có (\*)  $\Leftrightarrow \frac{x+1-y}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y}} + \frac{x-y+1}{\sqrt{x} + \sqrt{y-1}} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1-y) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{y})(\sqrt{y-1} + \sqrt{x})} = 0 \Leftrightarrow x = y - 1$ .

Thế vào phương trình (2) ta được  $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (0; 1)$  và  $(x; y) = (1; 2)$ . □

**Bài 6.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} & (1) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} & (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq y \\ x \geq 2y \\ 4x \geq 5y + 3 \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y} - (1-y) = (x-y-1)\sqrt{y} - (x-y-1) \\ &\Leftrightarrow (1-y)(\sqrt{x-y} - 1) = (x-y-1)(\sqrt{y} - 1) \\ &\Leftrightarrow (x-y-1)(1-y) \left( \frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{\sqrt{y}+1} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

+) Với  $y = 1 \Rightarrow$  hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (3; 1)$ .

+) Với  $x = y + 1$ , thay vào phương trình (2) ta có  $2y^2 + 3y - 2 = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2y^2 + y = 2(1-y) + \sqrt{1-y}$  (\*).

Xét hàm số  $f(t) = 2t^2 + t, t \geq 0, \begin{cases} \forall t_1; t_2 \in [0; +\infty) \\ t_1 \neq t_2. \end{cases}$

Ta có  $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2(t_2 - t_1)(t_2 + t_1 + \frac{1}{2})}{t_2 - t_1} = 2(t_2 + t_1 + \frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow$  hàm số  $f(t)$  đồng biến  $[0; +\infty)$ .

(\*)  $\Leftrightarrow y = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ có nghiệm  $(3; 1), \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ . □

**Dạng 14. Thêm bớt hằng số để nhân liên hợp**

**Bài 1.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x-y} + x - 2 = y + \sqrt{2} & (1) \\ x^2 + y - 3xy^2 = 1 & (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq y$ .

Từ phương trình (1) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-y} + x - 2 = y + \sqrt{2} &\Leftrightarrow (\sqrt{x-y} - \sqrt{2}) + (x - y - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x - y - 2}{\sqrt{x-y} + \sqrt{2}} + (x - y - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y - 2) \left( \frac{1}{\sqrt{x-y} + \sqrt{2}} + 1 \right) = 0 \left( \text{do } \frac{1}{\sqrt{x-y} + \sqrt{2}} + 1 > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y + 2(3). \end{aligned}$$

Thay (3) vào (2) ta được  $(y + 2)^2 + y - 3(y + 2)y^2 = 1 \Leftrightarrow 3y^3 + 5y^2 - 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{-4 + \sqrt{7}}{3} \\ y = \frac{-4 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$ .

+) Với  $y = 1 \Rightarrow x = 3$  (thỏa mãn).

+) Với  $y = \frac{-4 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$  (thỏa mãn).

+) Với  $y = \frac{-4 - \sqrt{7}}{3} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$  (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(3; 1), \left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}; \frac{-4 + \sqrt{7}}{3}\right); \left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}; \frac{-4 - \sqrt{7}}{3}\right)$ . □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x + 3y - 1} + \sqrt{2x + 6y + 5} = 8 & (1) \\ x^2 + 2y + 4 = 3xy & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x + 3y - 1 \geq 0$ .

Từ phương trình (1) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 3y - 1} + \sqrt{2x + 6y + 5} = 8 &\Leftrightarrow (\sqrt{x + 3y - 1} - 3) + (\sqrt{2x + 6y + 5} - 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x + 3y - 10}{\sqrt{x + 3y - 1} + 3} + \frac{2(x + 3y - 10)}{\sqrt{2x + 6y + 5} + 5} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3y - 10) \left( \frac{1}{\sqrt{x + 3y - 1} + 3} + \frac{2}{\sqrt{2x + 6y + 5} + 5} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10 - 3y(3). \end{aligned}$$

Thay (3) vào (2), ta được  $(10 - 3y)^2 + 2y + 4 = 3(10 - 3y)y \Leftrightarrow 9y^2 - 44y + 52 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{26}{9} \end{cases}$ .

+) Với  $y = 2 \Rightarrow x = 4$  (thỏa mãn).

+) Với  $y = \frac{26}{9} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$  (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(4; 2), \left(\frac{4}{3}; \frac{26}{9}\right)$ . □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x - 2y} + \sqrt{x - 2y + 3} = 3 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (\sqrt{x - 2y} - 1) + (\sqrt{x - 2y + 3} - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x - 2y - 1}{\sqrt{x - 2y} + 1} + \frac{x - 2y - 1}{\sqrt{x - 2y + 3} + 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2y - 1) \left( \frac{1}{\sqrt{x - 2y} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 2y + 3} + 2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 & (3) \\ \frac{1}{\sqrt{x - 2y} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 2y + 3} + 2} = 0 & (4). \end{cases} \end{aligned}$$

Nhận thấy phương trình (4) vô nghiệm

Từ (3) suy ra  $x = 2y + 1$  thay vào phương trình (2) ta được phương trình

$$\begin{aligned} (2y + 1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} &= 2(2y + 1) - 2y \Leftrightarrow (y + 1)\sqrt{2y} = 2(y + 1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2y} = 2 \text{ (vì } y \geq 0) \\ &\Leftrightarrow y = 1. \end{aligned}$$

Với  $y = 1 \Rightarrow x = 3$ . Vậy hệ đã cho có nghiệm  $(x; y) = (3; 1)$ . □

**Bài 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{2x + y + 4} + 2(x^2 - 1) + xy + 6x + 3y = 0 & (1) \\ \sqrt{9x + y + 1} + \sqrt{7x + 2} = 5 & (2). \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định: 
$$\begin{cases} 2x + y + 4 \geq 0 \\ 9x + y + 1 \geq 0 \\ x \geq -\frac{2}{7}. \end{cases}$$

Ta biến đổi phương trình (1)

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x + y + 4} + 2(x^2 - 1) + xy + 6x + 3y = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x + y + 4} + 2x^2 - 2 + xy + 6x + 3y = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{2x + y + 4} - 2) + 2x(x + 3) + y(x + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{2x + y + 4} - 2) + (2x + y)(x + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2x + y}{\sqrt{2x + y + 4} + 2} + (2x + y)(x + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x + y) \left( \frac{1}{\sqrt{2x + y + 4} + 2} + x + 3 \right) = 0 & (3). \end{aligned}$$

Do  $x \geq -\frac{2}{7} > -3 \Rightarrow x + 3 > 0$  nên  $\frac{1}{\sqrt{2x + y + 4} + 2} + x + 3 > 0$ .

Khi đó (3)  $\Leftrightarrow y = -2x$  thay vào phương trình (2) ta được phương trình

$$\sqrt{7x + 1} + \sqrt{7x + 2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{7} \\ 14x + 3 + 2\sqrt{(7x + 1)(7x + 2)} = 25 & (4) \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{(7x + 1)(7x + 2)} = 11 - 7x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{7} \\ (7x + 1)(7x + 2) = (11 - 7x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{7} \\ 175x = 119 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17}{25} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Với  $x = \frac{17}{25} \Rightarrow y = -\frac{34}{25}$ .

Vậy hệ đã cho có nghiệm  $(x; y) = \left(\frac{17}{25}; -\frac{34}{25}\right)$ . □

**Bài 5.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 4x^2 + 3x + 3 = 4(y + 1)\sqrt{x + 3} + 2\sqrt{x + y} & (1) \\ \sqrt{x - y} + x(x - 2y) = 2 - y^2 & (2). \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định: 
$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ x \geq -3. \end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{x - y} + x(x - 2y) = 2 - y^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x - y} + x^2 - 2xy + y^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x - y} - 1) + (x - y)^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x - y} - 1) + (x - y - 1)(x - y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x - y - 1}{\sqrt{x - y} + 1} + (x - y - 1)(x - y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - y - 1) \left( \frac{1}{\sqrt{x - y} + 1} + x - y + 1 \right) = 0 & (3). \end{aligned}$$

Do  $x - y \geq 0 \Rightarrow x - y + 1 > 0$  nên  $\frac{1}{\sqrt{x - y} + 1} + x - y + 1 > 0$ .

Khi đó (3)  $\Leftrightarrow y = x - 1$  thay vào phương trình (1) ta được phương trình

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow & (4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3) + (2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x = \sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Với  $x = 1 \Rightarrow y = 0$  (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy hệ đã cho có nghiệm  $(x; y) = (1; 0)$ . □

**Bài 6.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y} = \frac{y}{\sqrt[3]{x - y}} & (1) \\ 2(x^2 + y^2) - 3\sqrt{2x - 1} = 11 & (2). \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện: 
$$\begin{cases} x - y \neq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - x - y \geq 0. \end{cases}$$

Nếu  $x^2 - x - y = 0$  từ (1) suy ra  $y = 0$  và  $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$  thay vào (2) thấy không thỏa mãn.

Nếu  $x^2 - x - y > 0$ , khi đó viết lại (1) dưới dạng

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x - y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - x - y}} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{x - y} - 1 = \frac{y}{\sqrt{x^2 - x - y}} - 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x - y - 1}{(\sqrt[3]{x - y})^2 + \sqrt[3]{x - y} + 1} = -\frac{(x + y)(x - y - 1)}{\sqrt{x^2 - x - y}} \\ \Leftrightarrow & (x - y - 1) \left( \frac{1}{(\sqrt[3]{x - y})^2 + \sqrt[3]{x - y} + 1} + \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - x - y}} \right) = 0 \quad (3). \end{aligned}$$

Từ phương trình (1) ta thấy, nếu  $y < 0$  thì vế phải âm do đó vô nghiệm.

Do đó  $y \geq 0$ . Khi đó  $\frac{1}{(\sqrt[3]{x - y})^2 + \sqrt[3]{x - y} + 1} + \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - x - y}} > 0$ . Vì vậy (3)  $\Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$ .

Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & (2x - 1)^2 - 3\sqrt{2x - 1} - 10 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{2x - 1} - 2)[(2x - 1)\sqrt{2x - 1} + 3(2x - 1) + 4\sqrt{2x - 1} + 5] = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x - 1} - 2 = 0, \left( (2x - 1)\sqrt{2x - 1} + 3(2x - 1) + 4\sqrt{2x - 1} + 5 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x - 1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . □

**Dạng 15. Thêm bớt một biểu thức để nhân liên hợp**

**Bài 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{3x + y - 3} + \sqrt{y} = 3\sqrt{x - 1} & (1) \\ x^2 - 2xy + (y + 2)^2 = 17 & (2). \end{cases}$$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 3 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$

(1)  $\Leftrightarrow \sqrt{3x + y - 3} - 2\sqrt{x - 1} = \sqrt{x - 1} - \sqrt{y}$  (3).

Xét  $\begin{cases} \sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1} = 0 \\ \sqrt{x - 1} + \sqrt{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$

Thay vào hệ phương trình ta được  $\begin{cases} 0 + 0 = 3 \cdot 0 \\ 1 - 0 + 4 = 17 \end{cases}$  (vô lý).

Xét  $\begin{cases} \sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1} \neq 0 \\ \sqrt{x - 1} + \sqrt{y} \neq 0 \end{cases}$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \frac{3x + y - 3 - 4(x - 1)}{\sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1}} = \frac{x - 1 - y}{3\sqrt{x - 1} + \sqrt{y}} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x + y - 3 - 4x + 4}{\sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1}} = \frac{x - y - 1}{3\sqrt{x - 1} + \sqrt{y}} \\ &\Leftrightarrow \frac{-x + y + 1}{\sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1}} = \frac{x - y - 1}{3\sqrt{x - 1} + \sqrt{y}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1}} = \frac{1}{3\sqrt{x - 1} + \sqrt{y}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1}} = \frac{1}{3\sqrt{x - 1} + \sqrt{y}} \end{cases} \quad (4). \end{aligned}$$

Xét phương trình (4).

Do  $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{3x + y - 3} + 2\sqrt{x - 1}} < 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{x - 1} + \sqrt{y}} > 0 \end{cases} \Rightarrow$  Phương trình (4) vô nghiệm.

Với  $x = y + 1$  thay vào (2) ta có  $(y + 1)^2 - 2y(y + 1) + (y + 2)^2 = 17$   
 $\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 - 2y^2 - 2y + y^2 + 4y + 4 = 17 \Leftrightarrow 4y + 5 = 17 \Leftrightarrow y = 2$   
 $\Rightarrow x = y + 1 = 3$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (3; 2)$ . □

**Bài 2.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 3x - 1} + x = \sqrt{3x^2 + 7x + 6} - 1 \quad (1) \\ \sqrt{x - 1} + 2xy + y^2 + 1 = 0 \quad (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x \geq 1$ .

Phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2x^2 + 3x - 1} + x = \sqrt{3x^2 + 7x + 6} - 1 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2x^2 + 3x - 1} - (x + 1) = \sqrt{3x^2 + 7x + 6} - 2(x + 1) \\
 \Leftrightarrow & \frac{2x^2 + 3x - 1 - (x + 1)^2}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + (x + 1)} = \frac{3x^2 + 7x + 6 - 4(x + 1)^2}{\sqrt{3x^2 + 7x + 6} + 2(x + 1)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2x^2 + 3x - 1 - x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + (x + 1)} = \frac{3x^2 + 7x + 6 - 4x^2 - 8x - 4}{\sqrt{3x^2 + 7x + 6} + 2(x + 1)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + (x + 1)} = \frac{-x^2 - x + 2}{\sqrt{3x^2 + 7x + 6} + 2(x + 1)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + (x + 1)} = \frac{-(x^2 + x - 2)}{\sqrt{3x^2 + 7x + 6} + 2(x + 1)} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \quad (3) \\ \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + (x + 1)} = \frac{-1}{\sqrt{3x^2 + 7x + 6} + 2(x + 1)} \quad (4) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \quad (\text{thỏa mãn}) \\ x = -2 \quad (\text{loại}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Do  $x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + (x + 1)} > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3x^2 + 7x + 6} + 2(x + 1)} < 0 \end{cases} \Rightarrow$  phương trình (\*) vô nghiệm.

Với  $x = 1$  thay vào (2) ta có  $2y + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ .  
 Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (1; -1)$ . □

**Bài 3.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - y} = \frac{y}{\sqrt[3]{x - y + 1}} \quad (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y - 2} = \sqrt{2} \quad (2). \end{cases}$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq 0; y \geq 2; y \neq x + 1, x^2 + x - y \geq 0$ .

Biến đổi phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - y} \cdot \sqrt[3]{x - y + 1} = y \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + x - y}(\sqrt[3]{x - y + 1} - 1) + \sqrt{x^2 + x - y} - y = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + x - y} \cdot \frac{(x - y)}{\sqrt[3]{(x - y + 1)^2 + \sqrt[3]{x - y + 1} + 1}} + \frac{x^2 + x - y - y^2}{\sqrt{x^2 + x - y} + y} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + x - y} \cdot \frac{(x - y)}{\sqrt[3]{(x - y + 1)^2 + \sqrt[3]{x - y + 1} + 1}} + \frac{(x - y)(x + y + 1)}{\sqrt{x^2 + x - y} + y} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x - y) \left( \frac{\sqrt{x^2 + x - y}}{\sqrt[3]{(x - y + 1)^2 + \sqrt[3]{x - y + 1} + 1}} + \frac{x + y + 1}{\sqrt{x^2 + x - y} + y} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y = 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + x - y}}{\sqrt[3]{(x - y + 1)^2 + \sqrt[3]{x - y + 1} + 1}} + \frac{x + y + 1}{\sqrt{x^2 + x - y} + y} = 0 \quad (*). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Phương trình (\*) vô nghiệm do điều kiện, thay  $x = y$  vào phương trình (2) ta được.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{\sqrt{x} + 2} + \sqrt{x - 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 2} \left( \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x} + 2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (2; 2)$ . □

**Bài 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (y - 1)\sqrt{x^2 + y} + xy + x = 0 \quad (1) \\ \sqrt{x} + y = 2. \end{cases}$



**Lời giải.**

Điều kiện  $x^2 + y \geq 0; x \geq 0$ .

Biến đổi phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} & (y - 1)\sqrt{x^2 + y} + xy + x = 0 \\ \Leftrightarrow & (y - 1)(\sqrt{x^2 + y} - x - y) + (x + y)(y - 1) + xy + x = 0 \\ \Leftrightarrow & (y - 1)(\sqrt{x^2 + y} - x - y) + y^2 + 2xy - y = 0 (*) \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng  $(\sqrt{x^2 + y} - x - y)(\sqrt{x^2 + y} + x + y) = -(y^2 + 2xy - y)$ .

Nên phương trình

$$\begin{aligned} (*) & \Leftrightarrow (y - 1)(\sqrt{x^2 + y} - x - y) - (\sqrt{x^2 + y} - x - y)(\sqrt{x^2 + y} + x + y) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x^2 + y} - x - y)(\sqrt{x^2 + y} + x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + y} - x - y = 0 (x + y \geq 0) \\ \Leftrightarrow & x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow & y(y + 2x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Trường hợp 1:  $y = 0 \Rightarrow x = 4$  (thỏa mãn).

Trường hợp 2:  $y = 1 - 2x \Rightarrow \sqrt{x} + 1 - 2x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 1 = 0$  (vô nghiệm).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (0, 4)$ . □

**Bài 5.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2} = 3(x + y) & (1) \\ \sqrt{2x + y + 1} + 2\sqrt[3]{7x + 12y + 8} = 2xy + y + 5 & (2) \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2} = \sqrt{4x^2 + y^2 + (x + y)^2} + \sqrt{(x + y)^2 + x^2 + 4y^2}$ .

Lại có  $\begin{cases} \sqrt{4x^2 + y^2 + (x + y)^2} \geq \sqrt{y^2 + \frac{1}{2}(3x + y)^2} \\ \sqrt{(x + y)^2 + x^2 + 4y^2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}(x + 3y)^2} \end{cases}$

Mặt khác

$$\sqrt{y^2 + \frac{1}{2}(3x + y)^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}(x + 3y)^2} \geq \sqrt{(x + y)^2 + \left(\frac{3x + y + x + 3y}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{9(x + y)^2} = 3|x + y| \geq 3(x + y).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = y \geq 0$ .

Thay  $x = y$  vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x + 1} + 2\sqrt[3]{19x + 8} = 2x^2 + x + 5 \\ \Leftrightarrow & x + 1 - \sqrt{3x + 1} + 2(x + 2 - \sqrt[3]{19x + 8}) + 2x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - x}{x + 1 + \sqrt{3x + 1}} + 2 \cdot \frac{x^3 + 6x^2 - 7x}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt[3]{19x + 8} + (\sqrt[3]{19x + 8})^2} + 2(x^2 - x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - x) \left[ \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3x + 1}} + 2 \cdot \frac{x + 7}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt[3]{19x + 8} + (\sqrt[3]{19x + 8})^2} + 2 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - x = 0, \left( \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3x + 1}} + 2 \cdot \frac{x + 7}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt[3]{19x + 8} + (\sqrt[3]{19x + 8})^2} + 2 > 0, \forall x \geq 0 \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy hệ có hai nghiệm  $(0; 0), (1; 1)$ . □

**F MỘT SỐ ĐỀ**

**ĐỀ 1**

**Câu 1.** Số nghiệm của phương trình  $x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 6$  là

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x > 1$ .

Phương trình đã cho tương đương với  $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \text{ (loại)}. \end{cases}$

Chọn đáp án **B** □

**Câu 2.** Phương trình  $x + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 3$  có bao nhiêu nghiệm

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Với  $x = 2$  ta có  $2 + \sqrt{2-2} = \sqrt{2-2} + 3$  vô lý.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 3.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{x-1}{x^2+1} - 6 = \frac{1}{x^2+1}$  là

- A.  $x \neq 1$ .                                  B.  $x \neq -1$ .                                  C.  $x \neq \pm 1$ .                                  D.  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 4.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-2} + \frac{x}{\sqrt{7-x}} + |x| = 0$  là

- A.  $x \geq 2$ .                                  B.  $x < 7$ .                                  C.  $2 \leq x \leq 7$ .                                  D.  $2 \leq x < 7$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 5.** Phương trình  $3x + 2y = x^3 - 2xy + 12 + yz$  có nghiệm là

- A. (0; 4; -1).                                  B. (1; 3; -1).                                  C. (0; -2; -5).                                  D. (1; 1; 1).

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Ta có  $3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 0^3 - 2 \cdot 0 \cdot 4 + 12 + 4 \cdot (-1) \Leftrightarrow 8 = 8$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 6.** Cho phương trình  $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0$ . Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

- A.  $x - 1 = 0$ .                                  B.  $x + 1 = 0$ .                                  C.  $x^2 + 1 = 0$ .                                  D.  $(x - 1)(x + 1) = 0$ .

**Lời giải.**

$(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \text{ (vô lý)} \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 7.** Cho phương trình  $x(x-2) = 3(x-2)$  (1) và  $\frac{x(x-2)}{x-2} = 3$  (2). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).
- B. Phương trình (1) và (2) là hai phương trình tương đương.
- C. Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1).
- D. Số nghiệm của phương trình (1) bằng số nghiệm của phương trình (2).

**Lời giải.**

Nếu mọi nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  đều là nghiệm của phương trình  $f_1(x) = g_1(x)$  thì phương trình  $f_1(x) = g_1(x)$  được gọi là phương trình hệ quả của phương trình  $f(x) = g(x)$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 8.** Cho phương trình  $2x^2 - x = 0$  (1). Trong các phương trình sau đây, phương trình nào **không phải** là hệ quả của phương trình (1) ?

- A.  $2x - \frac{x}{1-x} = 0$ .      B.  $4x^3 - x = 0$ .      C.  $(2x^2 - x)^2 = 0$ .      D.  $x^2 - 2x + 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Vì nghiệm của phương trình (1) không là nghiệm của phương  $x^2 - 2x + 1 = 0$  nên phương  $x^2 - 2x + 1 = 0$  không là phương trình hệ quả của phương trình (1).

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 9.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x} + \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \sqrt[3]{x - 2}$  là

- A.  $x \in [2; +\infty)$ .      B.  $x \in [0; +\infty) \setminus \{1\}$ .      C.  $x \in [0; +\infty)$ .      D.  $x \in [0; +\infty) \setminus \{1; 2\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; +\infty) \setminus \{1\}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 10.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x} = \frac{3}{\sqrt{5-x}}$  là

- A.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$ .      B.  $x \in (-2; 5) \setminus \{0\}$ .  
C.  $x \in [-2; 5] \setminus \{0; -2\}$ .      D.  $x \in (-\infty; 5) \setminus \{0; -2\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x^2 + 2x \neq 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 0 \\ x < 5 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -2 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 5) \setminus \{0\}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 11.** Tập xác định của phương trình  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$  là

- A.  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ .      B.  $[-1; +\infty)$ .      C.  $[0; +\infty)$ .      D.  $[1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = [1; +\infty)$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 12.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình  $x^2 - 3x = 0$  ?

- A.  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$ .      B.  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$ .  
C.  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ .      D.  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow$  Phương trình có tập nghiệm là  $T = \{0; 3\}$ .

Phương trình  $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$  không nhận  $x = 0$  là nghiệm vì điều kiện  $x \geq 3$ .

Phương trình  $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$  không nhận  $x = 3$  là nghiệm vì điều kiện  $x \neq 3$ .

Phương trình  $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$  không nhận  $x = 0$  là nghiệm vì điều kiện  $x \geq 2$ .

Phương trình  $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 13.** Khi giải phương trình  $\sqrt{3x^2 + 1} = 2x + 1$  (1), ta tiến hành theo các bước sau

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được  $3x^2 + 1 = (2x + 1)^2$  (2).

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được  $x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hay  $x = -4$ .

Bước 3: Khi  $x = 0$ , ta có  $3x^2 + 1 > 0$ . Khi  $x = -4$ , ta có  $3x^2 + 1 > 0$ .

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $\{0; -4\}$ .

Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A.** Đúng.                      **B.** Sai ở bước 1.                      **C.** Sai ở bước 2.                      **D.** Sai ở bước 3.

**Lời giải.**

Vì phương trình (2) là phương trình hệ quả nên ta cần thay nghiệm  $x = 0; x = -4$  vào phương trình (1) để thử lại.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 14.** Cho các cặp phương trình sau. Cặp phương trình nào không tương đương?

- A.**  $x + 1 = x^2 - 2x$  và  $x + 2 = (x - 1)^2$ .                      **B.**  $3x\sqrt{x + 1} = 8\sqrt{3 - x}$  và  $6x\sqrt{x + 1} = 16\sqrt{3 - x}$ .  
**C.**  $x\sqrt{3 - 2x} + x^2 = x^2 + x$  và  $x\sqrt{3 - 2x} = x$ .                      **D.**  $\sqrt{x + 2} = x$  và  $x^2 - x - 2 = 0$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\sqrt{x + 2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array} \right] \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ .

Nên tập nghiệm của phương trình là  $S_1 = \{2\}$ .

Xét phương trình  $x + 2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ .

Nên tập nghiệm của phương trình là  $S_2 = \{-1; 2\} \neq S_1$ .

Do đó cặp phương trình  $\sqrt{x + 2} = x$  và  $x^2 - x - 2 = 0$  không tương đương.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để phương trình  $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$  có nghiệm thuộc đoạn  $[-1; 3]$ .

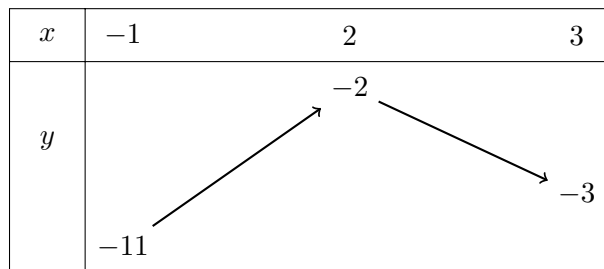
- A.**  $\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{11}{3}$ .                      **B.**  $-\frac{11}{3} \leq m \leq -\frac{2}{3}$ .                      **C.**  $-1 \leq m < -\frac{2}{3}$ .                      **D.**  $-\frac{11}{3} \leq m \leq -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0 \Leftrightarrow 3m = -x^2 + 4x - 6$ .

Số nghiệm của phương trình  $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$  là số giao điểm của đường thẳng  $y = 3m$  và parabol  $y = -x^2 + 4x - 6$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $y = -x^2 + 4x - 6$  trên đoạn  $[-1; 3]$



Phương trình có nghiệm thuộc đoạn  $[-1; 3] \Leftrightarrow -11 \leq 3m \leq -2 \Leftrightarrow -\frac{11}{3} \leq m \leq -\frac{2}{3}$ .

Chọn đáp án **B** □

- |       |       |       |       |       |      |      |      |      |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|-------|
| 1. B  | 2. A  | 3. D  | 4. D  | 5. A  | 6. D | 7. A | 8. D | 9. B | 10. B |
| 11. D | 12. C | 13. D | 14. D | 15. B |      |      |      |      |       |

## ĐỀ 2

**Câu 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình một ẩn ?

A.  $x + 2y - 3 = 0$ .

B.  $x(x + 1) = 4 - 2x$ .

C.  $2u + v = u^2 - uv$ .

D.  $x^2 - xy + 2z = y^2 - 2yz$ .

**Lời giải.**

$$x(x + 1) = 4 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \sqrt{-x}$  là

A.  $S = \emptyset$ .

B.  $S = \{0\}$ .

C.  $S = \{1\}$ .

D.  $S = \{-1\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 3.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{1}{x^2 + 1} - 2 = \frac{x}{x^2 + 1}$  là

A.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

B.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

C.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

D.  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 4.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 4$  là

A.  $\mathcal{D} = (1; +\infty)$ .

B.  $\mathcal{D} = [1; +\infty)$ .

C.  $\mathcal{D} = (2; +\infty)$ .

D.  $\mathcal{D} = [2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 5.** Cặp số  $(2; 1)$  là nghiệm của phương trình

A.  $x + 3y = 4$ .

B.  $2x + 3y = 7$ .

C.  $3x - 2y = 3$ .

D.  $3x + 2y = 7$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ , vậy  $(2; 1)$  là nghiệm của phương trình  $2x + 3y = 7$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 6.** Phương trình  $(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2) = 0$  tương đương với phương trình nào sau đây?

A.  $x^2 + 4 = 0$ .

B.  $x - 2 = 0$ .

C.  $x + 2 = 0$ .

D.  $(x - 2)(x + 2) = 0$ .

**Lời giải.**

$$(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = 0 \text{ (Vô lý)} \\ x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 7.** Phương trình  $(x - 4)^2 = x - 2$  là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây?

A.  $x - 4 = x - 2$ .

B.  $\sqrt{x - 4} = \sqrt{x - 2}$ .

C.  $\sqrt{x - 2} = x - 4$ .

D.  $\sqrt{x - 4} = x - 2$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $(x - 4)^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x - 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 3. \end{cases}$$

$x = 6$  là nghiệm của phương trình  $\sqrt{x - 2} = x - 4$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 8.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A.  $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x} \Rightarrow 3x - 12 = 0$ .

B.  $\sqrt{x - 2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 1$ .

C.  $|3x - 2| = x - 3 \Rightarrow 8x^2 - 6x - 5 = 0$ .

D.  $\frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ .

$$\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện).}$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 9.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = \frac{\sqrt{5 - 2x}}{x - 2}$  là

A.  $\mathcal{D} = (-\infty; \frac{5}{2}] \setminus \{1; 2\}$ .

B.  $\mathcal{D} = (1; \frac{5}{2}] \setminus \{2\}$ .

C.  $\mathcal{D} = (1; +\infty) \setminus \{2\}$ .

D.  $\mathcal{D} = [\frac{5}{2}; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \leq \frac{5}{2} \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 10.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{(x-1)^2(2-4x)} - 2x = \frac{\sqrt{x+3}}{x} - 6$  là

A.  $\mathcal{D} = (-3; \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ .

B.  $\mathcal{D} = [-3; \frac{1}{2}] \cup \{1\} \setminus \{0\}$ .

C.  $\mathcal{D} = [-3; \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ .

D.  $\mathcal{D} = (-\infty; -3] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} (x-1)^2(2-4x) \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4x \geq 0 \text{ hoặc } x=1 \\ x \geq -3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \text{ hoặc } x=1 \\ x \geq -3 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **B** □

**Câu 11.** Điều kiện của phương trình  $x^2 + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{3-x}}{x-2}$  là

A.  $1 \leq x \leq 3$ .

B.  $1 < x \leq 3$ .

C.  $1 < x \leq 3$  và  $x \neq 2$ .

D.  $1 \leq x \leq 3$  và  $x \neq 2$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình là } \begin{cases} x-1 > 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 12.** Phương trình  $\frac{1}{x} + x^2 = 2x + \frac{1}{x}$  tương đương với phương trình

A.  $x^2 + 2x = 0$ .

B.  $x^2 - 2x = 0$ .

C.  $x + 2 = 0$ .

D.  $2x - 4 = 0$ .

**Lời giải.**

Tập nghiệm của phương trình  $\frac{1}{x} + x^2 = 2x + \frac{1}{x}$  là  $S = \{2\}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 13.** Khẳng định sai là

A.  $\sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4$ .

B.  $|2x-1| = x+3 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0$ .

C.  $\sqrt{2x-3} = 2 \Rightarrow 2x = 7$ .

D.  $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow x = 4$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } |2x-1| = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (2x-1)^2 = (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 3x^2 - 10x - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Phương trình  $3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$ .

Do đó phương trình  $3x^2 - 10x + 8 = 0$  **không** là hệ quả của phương trình  $|2x - 1| = x + 3$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 14.** Cho hai phương trình  $\frac{\sqrt{8x - 31}}{x - 2} = 1$  (1) và  $\frac{x^2}{\sqrt{x - 3}} = \frac{x + 20}{\sqrt{x - 3}}$  (2). Khẳng định đúng là

- A. Phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).
- B. Phương trình (1) và (2) là hai phương trình tương đương.
- C. Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1).
- D. Cả ba đáp án trên đều sai.

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\frac{\sqrt{8x - 31}}{x - 2} = 1$ . Điều kiện xác định  $x \geq \frac{31}{8}$ .

Phương trình  $\Rightarrow \sqrt{8x - 31} = x - 2 \Leftrightarrow 8x - 31 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 7 \end{cases}$ .

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S_1 = \{5; 7\}$ .

Xét phương trình  $\frac{x^2}{\sqrt{x - 3}} = \frac{x + 20}{\sqrt{x - 3}}$ . Điều kiện xác định  $x > 3$ .

Phương trình  $\Rightarrow x^2 = x + 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 5 \end{cases}$ .

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là  $S_2 = \{5\}$ .

Ta thấy  $S_2 \subset S_1$  nên phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 15.** Cho hai phương trình  $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$  (1) và  $(m - 2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$  (2). Số giá trị thực của tham số  $m$  để hai phương trình trên tương đương là

- A. 0.
- B. 2.
- C. 1.
- D. 4.

**Lời giải.**

Ta có  $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(mx - m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0 \end{cases}$ .

Do hai phương trình tương đương nên ta có  $x = 1$  cũng là nghiệm của phương trình (2).

Suy ra  $(m - 2)1^2 - 3 \cdot 1 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5 \end{cases}$ .

Với  $m = 4$  ta có

(1) trở thành  $4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

(2) trở thành  $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Với  $m = -5$

(1) trở thành  $-5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{5} \end{cases}$ .

(2) trở thành  $-7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{10}{7} \end{cases}$ .

Vậy  $m = 4$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(C)** □

1. B	2. A	3. D	4. D	5. B	6. D	7. C	8. D	9. A	10. B
11. C	12. D	13. B	14. A	15. C					

**ĐỀ 2**

**Câu 1.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = x + 3$  là

- A.  $x = 3$ .                      B.  $x \neq 3$ .                      C.  $x > 3$ .                      D.  $x \geq 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 2.** Tập xác định của phương trình  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1$  là

- A.  $\mathcal{D} = [2; +\infty)$ .                      B.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .  
C.  $\mathcal{D} = [0; +\infty)$ .                      D.  $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1; 2\}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ . Suy ra tập xác định của phương trình là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 3.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$  ?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. Vô số.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ .

Ta thấy  $x = 0$  thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 4.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $x(x - 1) = 0$  là

- A.  $S = \{0; 1\}$ .                      B.  $S = \{0\}$ .                      C.  $S = \{1\}$ .                      D.  $S = \{-1; 0\}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

Vậy  $S = \{0; 1\}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 5.** Biết phương trình  $x^2 - mx + 15 = 0$  có một nghiệm là 5. Giá trị của  $m$  là

- A.  $m = -2\sqrt{15}$ .                      B.  $m = 8$ .                      C.  $m = 2\sqrt{15}$ .                      D.  $m = -8$ .

**Lời giải.**

Vì phương trình có một nghiệm là 5 nên ta có  $5^2 - 5m + 15 = 0$ .

Suy ra  $m = 8$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 6.** Hệ phương trình nào sau đây là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A.  $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ .                      B.  $\begin{cases} x^2 - 5z = 1 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ .                      D.  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Vì các phương trình trong hệ xuất hiện bậc hai, chỉ có một hệ gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn nên

ta chọn hệ  $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 7.** Phương trình  $x^2 + 7x - 260 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Biết  $x_1 = 13$ , giá trị  $x_2$  bằng

- A. -27.                      B. -20.                      C. 20.                      D. 8.

**Lời giải.**

Vì  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình nên theo Định lí Vi-ét, ta có

$$x_1 + x_2 = -7 \Rightarrow x_2 = -20.$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 8.** Hai phương trình được gọi là tương đương khi

- A. có cùng dạng phương trình.                      B. có cùng tập xác định.  
C. có cùng tập hợp nghiệm.                      D. có cùng số lượng nghiệm.



**Lời giải.**

Hai phương trình được gọi là tương đương khi có cùng tập hợp nghiệm.

Chọn đáp án **C** □

**Câu 9.** Tập nghiệm của phương trình  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = 2$  là

- A.  $S = \left\{2; \frac{1}{4}\right\}$ .      B.  $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ .      C.  $S = \{2\}$ .      D.  $S = \emptyset$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq 1$  và  $x \neq 2$ . Khi đó

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow (x-2) - (x-1) = 2(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Vì  $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -4 < 0$  nên phương trình trên vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 10.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình  $x^2 - 9 = 0$ ?

- A.  $\sqrt{x^2 - 5} = 2$ .      B.  $(x-3)(x^2 + 4x + 3) = 0$ .  
C.  $x^2 - 6x + 9 = 0$ .      D.  $(x+3)(x^2 - 4x + 3) = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ . Do đó phương trình có tập nghiệm là  $S = \{3; -3\}$ .

Xét phương trình  $\sqrt{x^2 - 5} = 2$ , ta có

$$\sqrt{x^2 - 5} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Vậy chọn đáp án A.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 11.** Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 4x + 3} - \frac{7x}{\sqrt{7-2x}} = 5x$  là

- A.  $x \in \left[2; \frac{7}{2}\right] \setminus \{3\}$ .      B.  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; 3; \frac{7}{2}\right\}$ .      C.  $x \in \left[2; \frac{7}{2}\right)$ .      D.  $x \in \left[2; \frac{7}{2}\right) \setminus \{3\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \neq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1 \\ x \geq 2 \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{7}{2}\right) \setminus \{3\}.$$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 12.** Giá trị  $m$  để  $x = 2$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 - 2mx + 2 + m = 0$  là

- A.  $m = 1$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = -2$ .

**Lời giải.**

Thay  $x = 2$  vào phương trình  $x^2 - 2mx + 2 + m = 0$  ta được:

$$2^2 - 2m \cdot 2 + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 13.** Cặp số  $(x; y)$  nào dưới đây là nghiệm của phương trình  $x - 3y = 5$ ?

- A.  $(1; 2)$ .      B.  $(-1; 2)$ .      C.  $(1; -2)$ .      D.  $(-1; -2)$ .

**Lời giải.**

Cặp số  $(x; y)$  là nghiệm của phương trình  $x - 3y = 5$  nếu thay lần lượt các giá trị  $x$  và  $y$  vào phương trình thì  $x - 3y = 5$ .

Thay cặp số  $(-1; -2)$  vào phương trình, ta được  $(-1) - 3 \cdot (-2) = 5$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 14.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\sqrt{1-x} = 2$  là

- A.  $S = \{5\}$ .      B.  $S = \{0\}$ .      C.  $S = -3$ .      D.  $S = \{-3\}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow 1-x = 4 \Leftrightarrow x = -3$ .

Vậy  $S = \{-3\}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 15.** Giá trị  $m$  để phương trình  $2mx + 1 = 0$  vô nghiệm là

- A.  $m = 0$ .                      B.  $m \neq 0$ .                      C.  $m \in \mathbb{R}$ .                      D.  $m = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Phương trình vô nghiệm khi

$$\begin{cases} 2m = 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi  $m = 0$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 16.** Tập tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$  có hai nghiệm trái dấu là

- A.  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .                      B.  $(2; +\infty)$ .                      C.  $[-2; 1]$ .                      D.  $(-2; 1)$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi  $a \cdot c < 0$ .

Phương trình  $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$(m - 1)(m + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1.$$

Vậy  $m \in (-2; 1)$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 17.** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$  là

- A.  $\left(\frac{17}{23}; -\frac{7}{23}\right)$ .                      B.  $\left(-\frac{17}{23}; \frac{7}{23}\right)$ .                      C.  $\left(-\frac{17}{23}; -\frac{7}{23}\right)$ .                      D.  $\left(\frac{17}{23}; \frac{7}{23}\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 8y = 2 \\ 6x - 15y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23y = -7 \\ 6x + 8y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{23} \\ y = -\frac{7}{23} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 18.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A.  $3x + \sqrt{x - 2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x - 2}$ .                      B.  $\sqrt{x - 1} = 3x \Leftrightarrow x - 1 = 9x^2$ .  
C.  $3x + \sqrt{x - 2} = x^2 + \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow 3x = x^2$ .                      D.  $\sqrt{2x - 5} - 3x = x - 1 \Leftrightarrow 2x - 5 = (4x - 1)^2$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $\sqrt{x - 1} = 3x$ , ta có

$$\sqrt{x - 1} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 0 \\ x - 1 = 9x^2 \end{cases}.$$

Xét phương trình  $3x + \sqrt{x - 2} = x^2 + \sqrt{x - 2}$ , ta có

$$3x + \sqrt{x - 2} = x^2 + \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x = x^2 \end{cases}.$$

Xét phương trình  $\sqrt{2x - 5} - 3x = x - 1$ , ta có

$$\sqrt{2x - 5} - 3x = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 5} = 4x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 2x - 5 = (4x - 1)^2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 19.** Giá trị  $m$  để phương trình  $2mx = 2x + m + 4$  có nghiệm duy nhất là

- A.  $m \neq -2$ .                      B.  $m \neq 1$ .                      C.  $m \neq 2$ .                      D.  $m = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $2mx = 2x + m + 4 \Leftrightarrow (2m - 2)x = m + 4$ .

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì:  $2m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 20.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$  là

- A.  $(0; 0), (1; 1)$ .      B.  $(0; 0), (-3; -3)$ .      C.  $(-3; -3), (1; 1)$ .      D.  $(0; 0), (-1; -1)$ .

**Lời giải.**

Trừ từng vế các phương trình của hệ ta được

$$3x^2 - 3y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Kết hợp với hệ phương trình ta có:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ 3x + 3y - 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + 3x = 0 \\ y = \frac{1 - 3x}{3} \\ 9x^2 - 3x + 5 = 0(VN) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -3 \\ y = -3. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  $(0; 0), (-3; -3)$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 21.** Phương trình  $x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

$$\text{Phương trình } x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ \sqrt{x - 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 1$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 22.** Tập hợp các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 + mx - m + 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu là

- A.  $(1; 10)$ .      B.  $[1; +\infty)$ .      C.  $(1; +\infty)$ .      D.  $(-2 + \sqrt{8}; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 + mx - m + 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow -m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Khi đó, ta có  $m \in (1; +\infty)$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình

$$(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$$

có nghiệm duy nhất.

- A. 3.      B. 19.      C. 20.      D. 18.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi  $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ .

Vì  $\begin{cases} m \in [-10; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$  nên có 19 giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 24.** Với giá trị nào của  $a$  thì hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2a - 1 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y)$  duy nhất thỏa mãn  $x < y$ ?

- A.  $a > \frac{1}{2}$ .      B.  $a > -\frac{1}{2}$ .      C.  $a < -\frac{1}{2}$ .      D.  $a < \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 1 - a. \end{cases}$

$\Rightarrow$  Hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi  $a$ .

Mà  $x < y \Rightarrow a < 1 - a \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$ .

Vậy với  $a < \frac{1}{2}$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y)$  duy nhất thỏa mãn  $x < y$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 25.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  $x^2 - 8\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2x - 18$ .

A.  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \\ x = 1 + \sqrt{23} \\ x = 1 - \sqrt{23} \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{23} \\ x = 1 - \sqrt{23} \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 + \sqrt{23} \end{cases}$

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Đặt  $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = t \quad (t \geq 0)$ .

Phương trình đã cho tương đương với  $t^2 - 8t + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 & (\text{nhận}) \\ t = 5 & (\text{nhận}). \end{cases}$

Vậy ta có  $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 3 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \\ x = 1 + \sqrt{23} \\ x = 1 - \sqrt{23}. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{1 - \sqrt{23}, 1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}, 1 + \sqrt{23}\}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 26.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2mx + 2m^2 - 9 = 0$  có nghiệm?

- A. 3.                                      B. 7.                                      C. 4.                                      D. 2.

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = m^2 - (2m^2 - 9) = -m^2 + 9$ .

Để phương trình  $x^2 - 2mx + 2m^2 - 9 = 0$  có nghiệm thì

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (3 - m) \cdot (3 + m) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3.$$

Vì  $m$  là giá trị nguyên dương nên  $m \in \{1; 2; 3\}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 27.** Phương trình  $|3x - 2| = x^2 + 2x + 3$  có

- A. 1 nghiệm.                              B. 2 nghiệm.                              C. 3 nghiệm.                              D. 4 nghiệm.

**Lời giải.**

**Cách 1:**

Ta có  $|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{khi } x \geq \frac{2}{3} \\ -3x + 2 & \text{khi } x < \frac{2}{3}. \end{cases}$

— Nếu  $x \geq \frac{2}{3}$ . Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow 3x - 2 = x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 5 = 0$ . Vậy pt vô nghiệm.

— Nếu  $x < \frac{2}{3}$ . Phương trình đã cho tương đương với

$$-3x + 2 = x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

(hai nghiệm này đều thỏa mãn  $x < \frac{2}{3}$ ).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ .

**Cách 2:**

$$\begin{aligned}
 &|3x - 2| = x^2 + 2x + 3 \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 3x - 2 = x^2 + 2x + 3 \\ 3x - 2 = -(x^2 + 2x + 3) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 3x - 2 = x^2 + 2x + 3 & (1) \\ 3x - 2 = -(x^2 + 2x + 3) & (2). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Giải (1)  $\Leftrightarrow 3x - 2 = x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 5 = 0$ . Vậy pt vô nghiệm.

Giải (2)  $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ .

Vậy nghiệm của pt đã cho là  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 28.** Có bao nhiêu giá trị  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$  có đúng 1 nghiệm?  
**A.** 1.                                      **B.** 3.                                      **C.** 2.                                      **D.** vô số.

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 + (x + m)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$  (\*)

Hệ phương trình có đúng 1 nghiệm khi phương trình (\*) có đúng 1 nghiệm

$\Rightarrow \Delta' = m^2 - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 29.** Tìm  $m$  để phương trình  $\frac{3x - m}{\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x - 2}}$  có nghiệm.  
**A.**  $m \leq 1$ .                                      **B.**  $m < 1$ .                                      **C.**  $m > 1$ .                                      **D.**  $m \geq 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ , khi đó

$$\frac{3x - m}{\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x - 2}} \Leftrightarrow 3x - m + x - 2 = 2x + 2m - 1 \Leftrightarrow 2x = 3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3m + 1}{2}.$$

Để phương trình có nghiệm thì  $\frac{3m + 1}{2} > 2 \Leftrightarrow 3m > 3 \Leftrightarrow m > 1$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 30.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x = y^2 - y + m \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$ . Hệ có nghiệm khi

**A.**  $m \leq 1$ .                                      **B.**  $m \geq 2$ .                                      **C.**  $m \leq 0$ .                                      **D.**  $m \geq 1$ .

**Lời giải.**

Trừ từng vế các phương trình của hệ ta được

$$x - y = y^2 - x^2 - y + x \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + m = 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x = -y \\ x^2 + m = 0 \end{cases} & (2). \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) hoặc phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} \geq 0 \\ \Delta'_{(2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 31.** Gọi là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để biểu thức  $P = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $m = \frac{1}{2}$ .      B.  $m = 1$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = -12$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$ .

Phương trình có hai nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$  (\*).

Theo định lý Viet, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 2. \end{cases}$

Khi đó  $P = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = m^2 + 2 - 2(2m + 2) - 6 = m^2 - 4m - 8 = (m - 2)^2 - 12 \geq -12$ .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m = 2$  thỏa (\*).

Vậy  $m = 2$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 32.** Tổng nghiệm bé nhất và lớn nhất của phương trình  $|x + 1| + |3x - 3| = |4 - 2x|$  là

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} &|x + 1| + |3x - 3| = |4 - 2x| \\ \Leftrightarrow &(|x + 1| + |3x - 3|)^2 = (4 - 2x)^2 \\ \Leftrightarrow &10x^2 - 16x + 10 + 2|3x^2 - 3| = 16 - 16x + 4x^2 \\ \Leftrightarrow &6|x^2 - 1| = 6 - 6x^2 \\ \Leftrightarrow &|x^2 - 1| = 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow &1 - x^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &-1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Vậy tổng nghiệm lớn nhất và bé nhất bằng 0.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 33.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $x^2 + \sqrt{x + 1} = 1$  là

- A. 1.      B.  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .      C.  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ .      D.  $1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt{x + 1}$  với  $t \geq 0$ . Ta có:  $t^2 = x + 1$

Phương trình trở thành

$$(t^2 - 1)^2 + t = 1 \Leftrightarrow t(t - 1)(t^2 + t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 \\ t^2 + t - 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (nhận)} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ t = 0 \text{ (nhận)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = -1. \end{cases}$$

Tổng các nghiệm của phương trình

$$S = -1 + 0 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 34.** Tích các nghiệm của phương trình  $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$  là

- A. -4. B. 2. C. -3. D. 1.

**Lời giải.**

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} - 12 = 0.$$

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ ,  $t \geq 0$ . Phương trình trở thành  $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$ .

Kết hợp điều kiện  $\Rightarrow t = 3$ .

$$t = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là -4.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 35.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2 + y^2 + xy = m^2 + 2 \end{cases}$ . Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm?

- A.  $m \geq 1$ . B.  $\begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$ . C.  $m \leq 5$ . D.  $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 5 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + y = S \\ xy = P. \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành  $\begin{cases} S = m + 1 \\ S^2 - P = m^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = m + 1 \\ P = 2m - 1. \end{cases}$

Suy ra  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - (m + 1)X + (2m - 1) = 0$ .

Nên để hệ phương trình đã cho có nghiệm thì  $S^2 - 4P \geq 0$  hay  $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 5. \end{cases}$

Chọn đáp án **D** □

**Câu 36.** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

- A. 39.000. B. 43.000. C. 40.000. D. 42.000.

**Lời giải.**

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là  $x$  (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng  $x$  (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm  $100x$  chiếc. Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là  $3000 - 100x$  chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là:  $12 + x$  (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Xét hàm số  $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Ta có } f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x - 9)^2 + 44100 \leq 44100.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = 9$ .

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Chọn đáp án **A** □

**Câu 37.** Phương trình  $\frac{x^4 - 6x^2 + 4}{x^2} = \left| \frac{x^2 - 2}{x} \right|$  có

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 0$ .

$$\text{Đặt } t = \left| \frac{x^2 - 2}{x} \right|, t \geq 0.$$

Phương trình trở thành  $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2. \end{cases}$

Với  $t = 2$  ta có  $\left| \frac{x^2 - 2}{x} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{3} \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = -1 \pm \sqrt{3}$  và  $x = 1 \pm \sqrt{3}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 38.** Cho biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2m + 1 = 0$$

có nghiệm là  $S = \left[-\frac{a}{b}; +\infty\right)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $T = a + b$ .

- A.  $T = 13$ .      B.  $T = 17$ .      C.  $T = 49$ .      D.  $T = 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $x \neq 0$ .

Đặt  $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow |t| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$ .

Phương trình đã cho trở thành  $2(t^2 - 2) - 3t - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 3 = 2m$  (1).

Xét hàm số  $y = f(t) = 2t^2 - 3t - 3$  có bảng biến thiên

$t$	$-\infty$	$-2$	$\frac{3}{4}$	$2$	$+\infty$
$y$	$+\infty$	$\swarrow$ 11 $\searrow$		$\swarrow$ -1 $\searrow$	
			$-\frac{33}{8}$		$+\infty$

(1) có nghiệm  $t$  thỏa  $\begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$  khi  $\begin{cases} 2m \geq -1 \\ 2m \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

Vậy  $T = 3$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 39.** Phương trình  $10x^2 + 3x + 1 = (6x + 1)\sqrt{x^2 + 3}$  (\*) có hai nghiệm  $x = a$  và  $x = \frac{\sqrt{b} + c}{d}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  và  $0 < d < 5$ . Tính  $S = a + b + c + d$ .

- A.  $S = 15$ .      B.  $S = 12$ .      C.  $S = 7$ .      D.  $S = 9$ .

**Lời giải.**

Đặt  $u = 6x + 1, v = \sqrt{x^2 + 3}$ .

Ta có  $10x^2 + 3x + 1 = \frac{1}{4}(6x + 1)^2 + (x^2 + 3) - \frac{9}{4} = \frac{u^2}{4} + v^2 - \frac{9}{4}$ .

Thay vào (\*) ta được:

$$\frac{1}{4}u^2 + v^2 - \frac{9}{4} = uv \Leftrightarrow (u - 2v)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} u - 2v = 3 \\ u - 2v = -3 \end{cases}$$

— Với  $u - 2v = 3$ , ta có

$$6x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3} = 3 \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ (3x - 1)^2 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

— Với  $u - 2v = -3$ , ta có:

$$6x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3} = -3 \Leftrightarrow 3x + 2 = \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ (3x + 2)^2 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7} - 3}{4}.$$



Vậy  $a = 1, b = 7, c = -3, d = 4 \Rightarrow S = 9$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 40.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1} = 6$ . Số phần tử của  $S$  là

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 4m > 0 \\ m > 0 \\ 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{25}{4} \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 &= x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 5 + 2\sqrt{m} \\ \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} &= \sqrt{5 + 2\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1} &= 6 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) &= 6 \\ \Leftrightarrow \sqrt{m} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{m}} &= 6 \\ \Leftrightarrow 5m + 2m\sqrt{m} - 36 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt  $t = \sqrt{m} \geq 0$ , khi đó phương trình (1) trở thành

$$2t^3 + 5t^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(2t^2 + 9t + 18) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Với  $t = 2$  suy ra  $\sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = 4$  (thỏa mãn  $(*)$ )

Vậy  $S$  có 1 phần tử.

Chọn đáp án **B** □

1. C	2. B	3. B	4. A	5. B	6. A	7. B	8. C	9. D	10. A
11. D	12. C	13. D	14. D	15. A	16. D	17. A	18. A	19. B	20. B
21. B	22. C	23. B	24. D	25. A	26. A	27. B	28. C	29. C	30. A
31. C	32. A	33. C	34. A	35. D	36. A	37. D	38. D	39. D	40. B

### ĐỀ 3

**Câu 1.** Tập xác định của phương trình  $\frac{x-2}{x^2+4} - 5 = \frac{3+x}{x^2+4}$  là  
 A.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .      B.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .      C.  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ .      D.  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi và chỉ khi  $x^2 + 4 \neq 0$  (luôn đúng).

Vậy TXĐ của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 2.** Điều kiện xác định của phương trình  $\sqrt{x-1} = x+2$  là  
 A.  $x > 1$ .      B.  $x \geq -2$ .      C.  $x > -2$ .      D.  $x \geq 1$ .

**Lời giải.**

Phương trình xác định khi và chỉ khi  $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ . □

**Câu 3.** Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình  $x^2 = 9$ ?

A.  $x^2 - 3x + 4 = 0$ .      B.  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .      C.  $|x| = 3$ .      D.  $x^2 + \sqrt{x} = 9 + \sqrt{x}$ .

**Lời giải.**

— Phương trình  $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ .

— Phương trình  $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$ .

Hai phương trình này có cùng tập nghiệm nên chúng tương đương.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 4.** Cho hai phương trình

$$\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -2 \tag{1}$$

và 
$$x^2 + 2x + 5 = 0. \tag{2}$$

Hãy chọn kết luận đúng nhất trong các kết luận sau.

A. (1) là phương trình hệ quả của (2).      B. (2) là phương trình hệ quả của (1).  
 C. (1)  $\Leftrightarrow$  (2).      D. Cả ba kết luận trên đều sai.

**Lời giải.**

Với điều kiện  $x > -1$  thì vế trái của phương trình (1) luôn dương, vì vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Mặt khác phương trình (2)  $\Leftrightarrow (x+1)^2 + 4 = 0$  vô nghiệm.

Vậy hai phương trình này tương đương với nhau.

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 5.** Hãy chỉ ra phương trình bậc nhất một ẩn trong các phương trình sau

A.  $x(x+1) = 0$ .      B.  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .      C.  $\sqrt{2}x - 3 = 0$ .      D.  $\frac{1}{2x+1} - 2 = 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình bậc nhất là  $\sqrt{2}x - 3 = 0$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 6.** Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có nghiệm kép khi

A.  $\Delta > 0$ .      B.  $\Delta = 0$ .      C.  $\Delta < 0$ .      D.  $\Delta \neq 0$ .

**Lời giải.**

Phương trình bậc hai có nghiệm kép khi  $\Delta = 0$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 7.** Trong các phương trình bậc hai một ẩn sau đây, phương trình nào có hai nghiệm trái dấu?

A.  $mx^2 + x + m = 0$ , với  $m$  là tham số khác 0.      B.  $x^2 - 6x + 9 = 0$ .  
 C.  $x^2 + 1 = 0$ .      D.  $x^2 - 2x - 1 - m^2 = 0$ , với  $m$  là tham số.

**Lời giải.**

Xét phương trình  $x^2 - 2x - 1 - m^2 = 0$ , ta có  $a \cdot c = 1 \cdot (-1 - m^2) = -(m^2 + 1) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ .

Vậy phương trình  $x^2 - 2x - 1 - m^2 = 0$  luôn có hai nghiệm trái dấu.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 8.** Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$ , với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a \neq 0$ . Biết phương trình đó có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.  $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$ .      B.  $x_1 - x_2 = -\frac{b}{a}$ .      C.  $x_1 - x_2 = \frac{b}{a}$ .      D.  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ .

**Lời giải.**

Áp dụng định lí Vi-ét đối với phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$ , ta có  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 9.** Cho hai số thực  $u, v$  có tổng  $u + v = 5$  và tích  $uv = 3$ . Hỏi  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A.  $x^2 + 5x + 3 = 0$ .      B.  $x^2 - 5x - 3 = 0$ .      C.  $x^2 + 5x - 3 = 0$ .      D.  $x^2 - 5x + 3 = 0$ .

**Lời giải.**

Nếu ta có hai số thực  $u, v$  sao cho  $u + v = S$  và  $uv = P$  thì  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - Sx + P = 0$ . Do đó  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + 3 = 0$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 10.** Gọi  $S$  và  $P$  là tổng và tích hai nghiệm (nếu có) của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Phương trình này có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

- A.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ .

Chọn đáp án **(C)** □

**Câu 11.** Tổng các nghiệm của phương trình  $|3x - 2| = |x + 1|$  bằng

- A.  $-\frac{5}{4}$ .      B.  $-\frac{1}{4}$ .      C.  $\frac{3}{2}$ .      D.  $\frac{7}{4}$ .

**Lời giải.**

Phương trình  $|3x - 2| = |x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = x + 1 \\ 3x - 2 = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ .

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 12.** Phương trình  $|2x - 4| - 3x + 6 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. Vô số.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} |2x - 4| - 3x + 6 = 0 &\Leftrightarrow |2(x - 2)| = 3(x - 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2(x - 2) = 3(x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 13.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2$  là?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0.$$

Từ định lí Vi-ét suy ra tổng các nghiệm của phương trình ban đầu là  $x_1 + x_2 = 1$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 14.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm:  $\sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x}$  ?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. Vô số.

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Thay  $x = 2$  vào phương trình ta được  $0 = 0$  hay  $x = 2$  là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 15.** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{x-1} = 3-x$  là

A.  $x = 2; x = 5.$

B.  $x = 2.$

C.  $x = 1; x = 3.$

D.  $x = -1; x = -3.$

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} = 3-x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 = (3-x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 16.** Phương trình  $2x - y = 3$  có một nghiệm  $(x; y)$  là

A.  $(2; 1).$

B.  $(-2; 1).$

C.  $(2; -1).$

D.  $(-2; -1).$

**Lời giải.**

Thay cặp số  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$  vào phương trình  $2x - y = 3$  ta được  $2 \times 2 - 1 = 3.$

Vậy phương trình  $2x - y = 3$  có một nghiệm  $(x; y) = (2; 1).$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 17.**

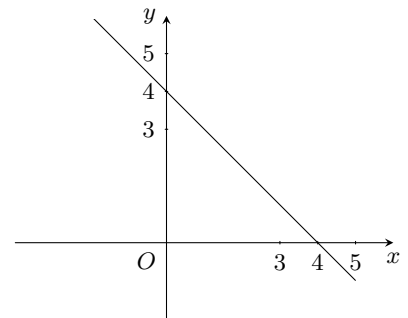
Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó  $d$  là biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình nào?

A.  $x - y = 4.$

B.  $x + y = 4.$

C.  $-x + y = 4.$

D.  $x + y = -4.$



**Lời giải.**

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng  $d$  đi qua các điểm  $(0; 4)$  và  $(4; 0)$  nên  $d$  là biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình  $x + y = 4.$

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 18.** Nghiệm  $(x; y)$  của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$  là

A.  $(1; -2).$

B.  $(2; -1).$

C.  $(1; 2).$

D.  $(2; 1).$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 11y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (2; 1).$

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 19.** Số nghiệm  $(x; y)$  của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$  là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

**Lời giải.**

Ta có  $4x + 6y = 10 \Leftrightarrow 2x + 3y = 5.$  Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 20.** Hệ phương trình  $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2y + z = 10 \\ 2z = 24 \end{cases}$  có nghiệm  $(x; y; z)$  là  
 A.  $(-8; 1; 12)$ .      B.  $(1; 1; 3)$ .      C.  $(0; -3; 0)$ .      D.  $(-2; 1; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2y + z = 10 \\ 2z = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 1 \\ z = 12. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 21.** Khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau là

- A. Phương trình  $-4x + 6 = 0$  có nghiệm là  $x = \frac{3}{2}$ .      B. Phương trình  $0x + 2019 = 0$  vô nghiệm.  
 C. Phương trình  $0x + 0 = 0$  có tập nghiệm  $\mathbb{R}$ .      D. Cả A, B, C đều đúng.

**Lời giải.**

Phương trình  $-4x + 6 = 0$  có nghiệm là  $x = \frac{3}{2}$ .

Phương trình  $0x + 2019 = 0$  vô nghiệm.

Phương trình  $0x + 0 = 0$  có tập nghiệm  $\mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 22.** Phương trình  $(x^2 + 5x + 4)\sqrt{x + 3} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Lời giải.**

$$(x^2 + 5x + 4)\sqrt{x + 3} = 0 \quad (1)$$

Điều kiện  $x \geq -3$ .

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0 \\ \sqrt{x + 3} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \\ x = -3. \end{cases}$$

So điều kiện ta được  $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

**Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 4x - m = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1x_2 \geq -4$ .

- A. 5.      B. 9.      C. 4.      D. 8.

**Lời giải.**

Phương trình  $x^2 - 4x - m = 0$  có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4$ .

Khi đó, ta có  $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -m$

Do  $x_1x_2 \geq -4 \Leftrightarrow -m \geq -4 \Leftrightarrow m \leq 4$ .

Kết hợp ta được  $-4 < m \leq 4$ .

Cũng vì  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m$  nhận các giá trị là  $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ .

Vậy có 8 giá trị nguyên của  $m$  thỏa điều kiện bài toán.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 24.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 + 2mx - 2m - 2 = 0$  có hai nghiệm cùng dương?

- A.  $m \leq 0$ .      B.  $m < 0$ .      C.  $m \leq -1$ .      D.  $m < -1$ .

**Lời giải.**

Để phương trình có hai nghiệm cùng dương khi  $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 2 > 0 \\ m \leq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$ .

Chọn đáp án **C** □

**Câu 25.** Số giá trị nguyên dương  $m$  để phương trình  $|x^2 + x + 1| = 2x^2 + (2m + 1)x + 2m^2 - 30$  có nhiều nghiệm nhất là

- A. 7.                                  B. 4.                                  C. 5.                                  D. 6.

**Lời giải.**

Nhận thấy  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Do đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= 2x^2 + (2m + 1)x + 2m^2 - 30 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m^2 - 30 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Từ yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt khi

$$m^2 - 2m^2 + 30 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 30 \Leftrightarrow -\sqrt{30} < m < \sqrt{30}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

**Câu 26.** Số nghiệm của phương trình  $x^2 - 6x - 3|x - 3| = -11$  là

- A. 2.                                  B. 4.                                  C. 3.                                  D. 1.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 3|x - 3| = -11 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 3|x - 3| + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 3|x - 3| + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x - 3| = 2 \\ |x - 3| = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \vee x = 1 \\ x = 4 \vee x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

**Câu 27.** Tổng các nghiệm của phương trình  $(x - 2)\sqrt{2x + 7} = x^2 - 4$  bằng

- A. 0.                                  B. 1.                                  C. 2.                                  D. 3.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình  $2x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$ . Ta có

$$\begin{aligned} (x - 2)\sqrt{2x + 7} = x^2 - 4 &\Leftrightarrow (x - 2)\sqrt{2x + 7} = (x - 2)(x + 2) \\ &\Leftrightarrow (x - 2) \left[ \sqrt{2x + 7} - (x + 2) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \sqrt{2x + 7} - (x + 2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{2x + 7} = x + 2 \quad (1) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải phương trình (1)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + 7} = x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x + 7 = (x + 2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array} \right. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 1, x = 2$  nên tổng hai nghiệm của phương trình là  $1 + 2 = 3$ .

Chọn đáp án **D**

□

**Câu 28.** Số nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$  là

- A. 3.                                      B. 1.                                      C. 4.                                      D. 2.

**Lời giải.**

Điều kiện  $(4-x)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$ .

Đặt  $t = \sqrt{(4-x)(x+2)}$ ,  $t \geq 0$

Khi đó  $t^2 = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = -t^2$ .

Khi đó, phương trình đã cho trở thành  $-t^2 = 4t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -4. \end{cases}$

Do  $t \geq 0$  nên nhận  $t = 0$ .

$$t = 0 \Leftrightarrow (4-x)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(D)** □

**Câu 29.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{3}{x+1} - \frac{4}{y-1} = 1 \\ \frac{5}{x+1} + \frac{6}{y-1} = 8 \end{cases}$ . Có nghiệm  $(x_0; y_0)$ , tổng  $x_0 + y_0$  là?

- A. 3.                                      B. 0.                                      C. 2.                                      D. 1.

**Lời giải.**

Điều kiện  $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 1. \end{cases}$

Đặt  $X = \frac{1}{x+1}$ ;  $Y = \frac{1}{y-1}$ . Khi đó, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3X - 4Y = 1 \\ 5X + 6Y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \frac{1}{y-1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình là  $(0; 3)$  suy ra  $x + y = 3$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 30.** Hai công nhân được giao việc sơn một bức tường. Sau khi người thứ nhất làm được 7 giờ và người thứ hai làm được 4 giờ thì họ sơn được  $\frac{5}{9}$  bức tường. Sau đó họ cùng làm việc với nhau trong 4 giờ nữa thì chỉ còn  $\frac{1}{18}$  bức tường chưa sơn. Thời gian để người thứ nhất một mình sơn xong bức tường là

- A. 18 giờ.                                      B. 24 giờ.                                      C. 42 giờ.                                      D. 6 giờ.

**Lời giải.**

Gọi  $u > 0$  (giờ) là thời gian người thứ nhất sơn xong bức tường.

$v > 0$  (giờ) là thời gian người thứ hai sơn xong bức tường.

Ta có trong một giờ người thứ nhất sơn được  $\frac{1}{u}$  và người thứ hai sơn được  $\frac{1}{v}$  bức tường.

Dựa vào giả thiết bài toán ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7 \cdot \frac{1}{u} + 4 \cdot \frac{1}{v} = \frac{5}{9} \\ 11 \cdot \frac{1}{u} + 8 \cdot \frac{1}{v} = \frac{17}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 18 \\ v = 24. \end{cases}$$

Vậy người thứ nhất sơn một mình hoàn thành công việc trong 18 giờ. □

**Câu 31.** Cho phương trình  $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ . Khi tổng các nghiệm và tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng nhau thì giá trị của tham số  $a$  là

- A.  $a = \frac{1}{2}$  và  $a = 1$ .                      B.  $a = \frac{1}{2}$  và  $a = -1$ .                      C.  $a = \frac{3}{2}$  và  $a = 1$ .                      D.  $a = \frac{3}{2}$  và  $a = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2a - 1. \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán  $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$  suy ra

$$2a = 4a^2 - 4a + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

**Câu 32.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để phương trình  $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$  có bốn nghiệm phân biệt  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 10$ .

- A. 9.                                  B. 10.                                  C. 4.                                  D. 3.

**Lời giải.**

Xét phương trình  $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$  (1).

Đặt  $t = x^2$ , với  $t \geq 0$ , thì phương trình (1) trở thành  $t^2 - mt + m - 1 = 0$  (2).

Vì phương trình (2) có tổng các hệ số bằng 0 nên (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = m - 1 \end{cases}$ .

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương  $t_1, t_2$  và phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt là  $-\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}$ .

Do đó  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 10 \Leftrightarrow 2(t_1 + t_2) \leq 10 \Leftrightarrow t_1 + t_2 \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 5$ .

Từ đó ta có  $\begin{cases} 1 < m \leq 5 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  thỏa điều kiện bài toán là 3; 4; 5.

Chọn đáp án **D** □

**Câu 33.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-10; 10)$  để phương trình  $|x + 3|(x - 2) + m - 1 = 0$  có đúng một nghiệm.

- A. 12.                                  B. 8.                                  C. 10.                                  D. 16.

**Lời giải.**

Ta có  $|x + 3|(x - 2) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 - |x + 3|(x - 2)$  (\*)

Phương trình (\*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = 1 - |x + 3|(x - 2)$  và đường thẳng  $y = m$ .

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Xét hàm số  $y = 1 - |x + 3|(x - 2)$

Ta có  $y = \begin{cases} -x^2 - x + 7 & \text{khi } x \geq -3 \\ x^2 + x - 5 & \text{khi } x < -3 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số  $y = 1 - |x + 3|(x - 2)$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$y$	$+\infty$	$1$	$\frac{29}{4}$	$-\infty$

Dựa vào bảng trên phương trình có đúng 1 khi  $\begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{29}{4} \end{cases}$ .

Vì  $m$  là số nguyên thuộc khoảng  $(-10; 10)$  nên  $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 8; 9\}$ .

Chọn đáp án **A** □

**Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} + x + \sqrt{x - 4} = m$  có nghiệm.



A.  $m \geq 6$ .

B.  $m \geq 5$ .

C.  $m \neq 5$ .

D.  $0 < m \leq 6$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \geq 4$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + x + \sqrt{x-4} = m &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-4} + 2^2} + x + \sqrt{x-4} = m \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4} + 2)^2} + x + \sqrt{x-4} = m \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-4} + 2 + x + \sqrt{x-4} = m \\ &\Leftrightarrow [(\sqrt{x-4})^2 + 2\sqrt{x-4} + 1] + 5 = m \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-4} + 1)^2 = m - 5 \quad (2) \end{aligned}$$

Để  $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + x + \sqrt{x-4} = m$  có nghiệm thì (2) có nghiệm, khi đó

$$m - 5 = (\sqrt{x-4} + 1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 6$$

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 35.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x + 2$  có 2 nghiệm phân biệt là  $m \in (a; b]$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $S = a + b$ .

A.  $S = -\frac{1}{8}$ .

B.  $S = \frac{81}{8}$ .

C.  $S = 5$ .

D.  $S = \frac{41}{8}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - x - 2m} = x + 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2 - x - 2m = (x + 2)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 5x - 2m - 4 = 0 \quad (1). \end{cases} \end{aligned}$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa mãn  $x_1, x_2 \geq -2$ . Khi đó ta có

$$\begin{cases} \Delta = 25 - 4(-2m - 4) > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{2} \geq -2 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41 + 8m > 0 \\ x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{41}{8} \\ -2m + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{41}{8} < m \leq 5.$$

Vậy giá trị tham số  $m$  cần tìm là  $-\frac{41}{8} < m \leq 5$ .

Suy ra  $a = -\frac{41}{8}, b = 5$ . Vậy  $a + b = -\frac{1}{8}$ .

Chọn đáp án **(A)** □

**Câu 36.** Cho ba đường thẳng  $d_1: 2x + 3y = -1; d_2: x - y = 2; d_3: mx + (2m + 1)y = 2$ . Ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  đồng quy khi

A.  $m = -2$ .

B.  $m = -3$ .

C.  $m = -4$ .

D.  $m = -5$ .

**Lời giải.**

Tọa độ giao điểm của  $d_1$  và  $d_2$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$

Suy ra  $d_1 \cap d_2 = H(1; -1)$

Ba đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi  $d_3$  đi qua  $H$ .

Khi đó  $m \cdot 1 + (2m + 1) \cdot (-1) = 2 \Leftrightarrow m = -3$ .

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 37.** Cho một hình chữ nhật. Khi ta tăng chiều dài và chiều rộng lên 2 cm thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 22 cm<sup>2</sup>. Nếu giảm chiều dài 3 cm và chiều rộng 2 cm thì diện tích hình chữ nhật giảm 16 cm<sup>2</sup>. Tính diện tích của hình chữ nhật ban đầu.

- A. 50 cm<sup>2</sup>.                      B. 20 cm<sup>2</sup>.                      C. 40 cm<sup>2</sup>.                      D. 60 cm<sup>2</sup>.

**Lời giải.**

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu lần lượt là  $x, y$  (cm) ( $x > 3, y > 2$ ).

Diện tích hình chữ nhật ban đầu là  $xy$  cm<sup>2</sup>.

$$\text{Theo đề bài ta có hệ phương trình } \begin{cases} (x+2)(y+2) = xy+22 \\ (x-3)(y-2) = xy-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 2x+3y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4. \end{cases}$$

Vậy diện tích hình chữ nhật ban đầu là 20 cm<sup>2</sup>.

Chọn đáp án **(B)** □

**Câu 38.** Tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^3 + (2m+5)x^2 + 2(m+3)x - 4m - 12 = 0$  có ba nghiệm phân biệt lớn hơn  $-1$  là  $(a; b) \setminus \{c\}$ . Tính  $T = 2a - 3b + 6c$ .

- A.  $T = -11$ .                      B.  $T = 13$ .                      C.  $T = 7$ .                      D.  $T = -17$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} & x^3 + (2m+5)x^2 + 2(m+3)x - 4m - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m + 12] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=1 \\ x^2 + 2(m+3)x + 4m + 12 = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt lớn hơn  $-1$  khi phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  lớn hơn  $-1$  và khác 1.

Hay

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 + 2(m+3) + 4m + 12 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > -1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (4m+12) > 0 \\ 6m + 19 \neq 0 \\ (x_1+1) + (x_2+1) > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 6m + 19 \neq 0 \\ (x_1+x_2) + 2 > 0 \\ x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ -2(m+3) + 2 > 0 \\ 4m + 12 - 2(m+3) + 1 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases} \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các giá trị cần tìm là  $m \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right) \setminus \left\{-\frac{19}{6}\right\}$ .

Suy ra  $a = -\frac{7}{2}, b = -3, c = -\frac{19}{6} \Rightarrow T = -17$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 39.** Cho biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số để phương trình  $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2m + 1 = 0$  có nghiệm là  $S = \left[-\frac{a}{b}; +\infty\right)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a + b$ .

- A.  $T = 13$ .                      B.  $T = 17$ .                      C.  $T = 49$ .                      D.  $T = 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x \neq 0$ .

Đặt  $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$ .

Ta được  $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$2(t^2 - 2) - 3t - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2m = 2t^2 - 3t - 3.$$

Đặt  $f(t) = 2t^2 - 3t - 3$

Ta có bảng biến thiên của  $f(t)$  như sau

$t$	$-\infty$	$-2$	$\frac{3}{4}$	$2$	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$+\infty$
		<b>11</b>	<b>-1</b>		

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm khi  $2m \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$ .

Suy ra  $S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$  nên  $a = 1, b = 2$ .

Vậy  $a + b = 3$ .

Chọn đáp án **D** □

**Câu 40.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - y = 2 - m \\ x + 2y = m + 1 \end{cases}$ . Giá trị của tham số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây để tổng

bình phương hai nghiệm của hệ phương trình đạt giá trị nhỏ nhất

- A.  $m \in [-1; 0]$ .                      B.  $m \in (1; 2)$ .                      C.  $m \in (0; 1)$ .                      D.  $m \in [-2; -1]$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} 2x - y = 2 - m \\ x + 2y = m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 4 - 2m \\ x + 2y = m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - m}{5} \\ y = \frac{3m}{5} \end{cases}$ .

Yêu cầu đề bài

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{5 - m}{5}\right)^2 + \frac{9m^2}{25} = \frac{10m^2 - 10m + 25}{25} = \frac{1}{5}(2m^2 - 2m + 5) = \frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{2}m - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{2}\right).$$

Suy ra  $x^2 + y^2 \geq \frac{9}{10}$ . Đẳng thức xảy ra khi  $m = \frac{1}{2} \in (0; 1)$ .

Chọn đáp án **C** □

1. D	3. C	4. C	5. C	6. B	7. D	8. D	9. D	10. C	11. D
12. B	13. B	14. B	15. B	16. A	17. B	18. D	19. D	20. A	21. D
22. C	23. D	24. C	25. C	26. B	27. D	28. D	29. A	31. A	32. D
33. A	34. A	35. A	36. B	37. B	38. D	39. D	40. C		