

CHỦ ĐỀ 4**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP**

Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

$$\bullet \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\bullet f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]'$$

$$\bullet \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$$

$$\bullet n.f'(x).f(x) = [f(x)^n]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$$

DẠNG 1

$$\begin{cases} f'(x) = g(x)h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

Phương pháp giải:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) &\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} dx = \int g(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) dx \\ \bullet f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) &\Leftrightarrow \int f'(x) h[f(x)] dx = \int g(x) dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f'(x)] = \int g(x) dx \end{aligned}$$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

Phương pháp giải:

$$\bullet f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } f(x) \text{ ta được } \frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = - \int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

$$\bullet f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } [f(x)]^n \text{ ta được } \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = - \int p(x) dx$$

Suy ra

$$\textbf{3. Điều kiện hàm ẩn có dạng: } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải:

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{f(x)} = - \int (2x+1)dx = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{-x^2 - x + C}$$

$$\text{Do } f(0) = -1 \Rightarrow C = -1$$

$$\text{Vậy } f(x) = - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx = - \int_0^1 (x^3 - 1) \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \int_0^1 (1 - x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}; x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$$\forall x \in [1;2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x)dx$$

- A. $I = \frac{7}{6}$. B. $I = \frac{5}{6}$. C. $I = \frac{37}{6}$. D. $I = \frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(- \frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + C$$

Mà $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 = 1 + C \Rightarrow C = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

Do đó: $I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx = \int_1^2 (2x+1)^2 \frac{x}{2x+1} dx = \int_1^2 (2x^2 + x) dx = \frac{37}{6}$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbf{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$. Biết

$f(1) = 0$, tính tích phân $I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2024}$.

C. 2024.

D. 0.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$3f'(x).e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)} = 2x$$

$$\Rightarrow (e^{f^3(x)})' = 2x$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = x^2 + C$$

Mặt khác $f(1) = 0 \Rightarrow e^{f^3(1)} = 1 + C \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = x^2 \Rightarrow f^3(x) = \ln x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2 \ln x}$$

Vậy $I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot \sqrt[3]{2 \ln x} dx = \int_0^{2024} dx = 2024$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$

với $\forall x \in [1; 4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$

A. $I = \frac{1186}{45}$

B. $I = \frac{1186}{9}$

C. $I = \frac{1186}{5}$

D. $I = \frac{1186}{41}$

Lời giải

Chọn A.

Do $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 4] \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$

Ta có $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2 \cdot f(x)) = [f'(x)]^2$, do $x \in [1; 4]$ và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$

$$\Rightarrow f(x) > -\frac{1}{2} \text{ và}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1 + 2f(x)})' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \int \sqrt{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

Vì $f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2f(x) = \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{4}{3} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18}$$

Khi đó
$$I = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18} \right) dx = \left(\frac{1}{18} x^4 + \frac{16}{45} x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{18} x \right) \Big|_1^4 = \frac{1186}{45}$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$

A. $I = e^2 + 1$

B. $I = e - 1$

C. $I = e^2 - e$

D. $I = e$

Lời giải

Chọn C.

$$(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x))^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{-\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \left[(f(x))^{-\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{-\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow (f(x))^{-\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x$$

$$I = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e$$

Do đó:

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính } I = \int_2^3 f(x) dx$$

A. $I = \frac{31}{2}$.

B. $I = -\frac{31}{2}$.

C. $I = \frac{61}{4}$.

D. $I = -\frac{61}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 [f'(x)]^3 = -27 [f(x) - 1]^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)-1]^4} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)-1]^3[f(x)-1]} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x)-1)\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3(f(x)-1)\sqrt[3]{f(x)-1}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

Do đó

Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{1}{x} + C$

Có $f(1)=0 \Rightarrow C=0$

Do đó $f(x)=1-x^3$

Khi đó $I = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (1-x^3) dx = -\frac{61}{4}$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$

A. $I = 2\sqrt{e}$

B. $I = e - \sqrt{e}$

C. $I = 2e - 2\sqrt{e}$

D. $I = 2e + 2\sqrt{e}$

Lời giải

Chọn C.

Có

$$(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow (f(x).f'(x))' = e^x$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = e^x + C$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$. Suy ra $C = 0$.

Vậy $f(x).f'(x) = e^x$

Tiếp đến có:

$$2f(x).f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))' = e^x$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f^2(x) = e^x + C$$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 0$.

Vậy $f^2(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^x}$ (do $f(x) > 0$)

$$I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{e^x} dx = \int_1^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big|_1^2 = 2e - 2\sqrt{e}$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 f^2(x) dx$$

A. $I = \frac{15}{2}$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = \frac{19}{2}$.

D. $I = 15$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x$.

Suy ra $f(x)f'(x) = x^2 + C$.

Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 2$ suy ra $C = 1$.

$$\Rightarrow f(x)f'(x) = x^2 + 1$$

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2(x^2 + 1)$.

Suy ra $f^2(x) = \int 2(x^2 + 1) dx$

$$\Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

cũng vì $f(0) = 2$ suy ra $C = 2$

$$\Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2$$

$$I = \int_1^2 f^2(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 2 \right) dx = \frac{15}{2}$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 8.

C. 10.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Theo giả thiết, $\forall x \in \mathbb{R}$: $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$$\Leftrightarrow f'(x).f'(x) + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$$

$$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = 15x^4 + 12x$$

$$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \quad (1)$$

Thay $x=0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x).f'(x) dx = \int_0^1 (3x^5 + 6x^2 + 1) dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} f^2(x) \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} x^6 + 2x^3 + x \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(0)] = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f^2(1) - 1 = 7 \Leftrightarrow f^2(1) = 8$$

Vậy $f^2(1) = 8$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f'(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$.

Tính giá trị của $T = f^2(2)$

A. $\frac{160}{15}$

B. $\frac{268}{15}$

C. $\frac{4}{15}$

D. $\frac{268}{30}$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $[f'(x)]^2 + f(x).f'(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (f'(x).f(x))' = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $\int (f'(x).f(x))' dx = \int (x^3 - 2x) dx \Leftrightarrow f'(x).f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$

Theo đề ra ta có: $f'(0).f(0) = C = 4$

Suy ra:
$$\int_0^2 f'(x).f(x).dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}$$

DẠNG 2

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

◆ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x)h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x) dx}{u(x)}$$

◆ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho: } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ Bước 1: Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x)dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

◆ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

◆ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.

A. $I = 2 \ln 2$. B. $I = \ln 2$. C. $I = 1 + \ln 2$. D. $I = 1 + 2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

$$f(x) + f'(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C = 2$.

$$\Rightarrow f(x)e^x = x + 2$$

$$I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \left(x + 2 \ln |x|\right) \Big|_1^2 = 1 + 2 \ln 2$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.

Tính $I = \int_1^2 (2x+2)f(x) dx$.

A. $I = e^2$.

B. $I = 1 + e$.

C. $I = 1 + e^2$.

D. $I = e^2 - e$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)]' + [(x+1)f(x)]' = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x [(x+1)f(x)]' = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow [e^x (x+1)f(x)]' = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int [e^x (x+1)f(x)]' dx = \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow e^x (x+1)f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Mà $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$$

Vậy

$$I = \int_1^2 (2x+2) \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1} dx = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e$$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in R \quad \text{và} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Tính} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

- A.** $I=1$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=-\pi$.

Lời giải

Chọn A.

Từ giả thiết $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf'(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = x^2 \sin x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x.$$

Mặt khác:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

- A.** $\frac{25}{6}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét phương trình $2xf'(x) + f(x) = 2x$ (1) trên $(0; +\infty)$: $(1) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{2x} \cdot f(x) = 1$ (2).

Đặt $g(x) = \frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x) dx = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x + C = \ln \sqrt{x} + C$. Ta chọn $G(x) = \ln \sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \sqrt{x} \quad (3)$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int_1^4 (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x)) \Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) \Big|_1^4 \Rightarrow 2f(4) - f(1) = \frac{14}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 1 \right) = \frac{17}{6} \quad (\text{vì } f(1)=1).$$

Vậy $f(4) = \frac{17}{6}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$,

$[2f(x)+1-x^2] f'(x) = 2x[1+f(x)] \quad \forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài: $[2f(x)+1-x^2] f'(x) = 2x[1+f(x)]$

$$\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 2x + (x^2 - 1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f^2(x)]' = [x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)]'$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x) + C \quad (1)$$

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f^2(1) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$ (vì $f(1)=1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 1 = x^2 - 1 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - 1] \cdot [f(x) + 1] = (x^2 - 1) \cdot [f(x) + 1]$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = x^2 - 1 \quad (\text{vì } f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) + 1 > 0 \quad \forall x \in [0;1])$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2$$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1)=2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. 2. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Có
$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4) dx = \frac{20}{3} \quad (1)$$

Ta có
$$\int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow -4 \int_0^1 xf'(x) dx = -8 + 4 \int_0^1 f(x) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được
$$\int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C$$

Có $f(1) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$

Do đó
$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$,

$\forall x \in [0; 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$

B. $\frac{1}{2019.2020}$

C. $\frac{1}{2020.2021}$

D. $\frac{1}{2019.2021}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow 3x^2 f(x) + x^3 \cdot f'(x) \geq x^{2020} \forall x \in [0; 1]$

$\Leftrightarrow (x^3 f(x))' \geq x^{2020}, \forall x \in [0; 1]$

$\Rightarrow x^3 f(x) \geq \int x^{2020} dx, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021} + C, \forall x \in [0; 1]$

Cho $x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021}, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021}, \forall x \in [0; 1]$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \left(\frac{x^{2019}}{2019.2021} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2019.2021}$

MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn
$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases},$$

với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$$f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $y=0 \Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1 \Rightarrow C=1$.

Do đó $f(x)=x^3+x+1$.

$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)^3+x-1+1=x^3-3x^2+4x-1$

Vậy $\int_0^1 f(x-1)dx = \int_0^1 (x^3-3x^2+4x-1)dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^3+x+1)dx = \frac{1}{4}$.

Câu 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi

$x \in [1;4]$. Tính tích phân $I = \int_1^4 [f(x)+g(x)] dx$.

A. $3 \ln 2$.

B. $4 \ln 2$.

C. $6 \ln 2$.

D. $8 \ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết ta có $f(x)+g(x)=-x.f'(x)-x.g'(x)$

$\Leftrightarrow [f(x)+x.f'(x)] + [g(x)+x.g'(x)] = 0 \Leftrightarrow [x.f(x)]' + [x.g(x)]' = 0$

$\Rightarrow x.f(x)+x.g(x)=C$

$\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{C}{x}$

Mà $f(1)+g(1)=4 \Rightarrow C=4$

$\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$

$\Rightarrow I = \int_1^4 [f(x)+g(x)] dx = \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 8 \ln 2$

Câu 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2017x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1;2].$

Tính tích phân $I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} g(x) - \frac{x+1}{x} f'(x) = -2017 \\ \frac{x}{x+1} g'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 2018 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$

Từ giả thiết ta có:

Suy ra:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(x+1)^2} g(x) + \frac{x}{x+1} g'(x) \right] - \left[\frac{x+1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) \right] = 1 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{x}{x+1} g(x) \right]' - \left[\frac{x+1}{x} f(x) \right]' = 1 \\ \Rightarrow & \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = x - 1$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx = \int_1^2 (x - 1) dx = \frac{1}{2}.$$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = xf'(x) - 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ đồng thời thỏa } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx$$

- A. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$. B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$. C. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$. **D. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.**

Lời giải

Chọn D.

$$x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x)$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xf'(x) + 1)$$

Do đó

$$\frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} dx = \int 1 dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + c$$

$$\Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x+c}$$

Mặt khác $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\frac{1}{1+c} \Rightarrow c=0 \Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

Vậy $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = -\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x, \forall x \in \mathbb{R}$ và

có $f(2)=1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$\begin{aligned} x.f(x).f'(x) &= f^2(x) - x \\ \Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) &= 2f^2(x) - 2x \\ \Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) + f^2(x) &= 3f^2(x) - 2x \\ \Leftrightarrow \int_0^2 (x.f^2(x))' dx &= 3 \int_0^2 f^2(x) dx - \int_0^2 2x dx \\ \Leftrightarrow (x.f^2(x)) \Big|_0^2 &= 3I - 4 \\ \Leftrightarrow 2 &= 3I - 4 \\ \Leftrightarrow I &= 2 \end{aligned}$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá

trị của $a-b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$

lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f^2(x)}{2} + 6x^3 = (3x^2 + x)f(x)$

$$\Rightarrow f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) + 12x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 6x^2 \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

TH1: $f(x) = 6x^2$ không thỏa mãn kết quả $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$

TH2: $f(x) = 2x \Rightarrow \int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = \int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$. Suy ra $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{4}$

Vậy $a - b = 1$

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]$;

$f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z})$, giá trị của $a + b^2$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn B.

Từ $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2$$

Hay $\int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int (x-1)^2 dx$

$$\Rightarrow - \left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C \quad (2).$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = \frac{1}{3}$.

Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3 \frac{1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_e^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$

, nên $a + b^2 = 0$.

Cách khác

Từ $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2 \Leftrightarrow - \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)' = (x-1)^2$$

Nên $-\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)' dx = \int (x-1)^2 dx \Rightarrow -\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 d\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right) = \int (x-1)^2 dx$

Suy ra $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3 = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C$ (2). Do $f(1) = -1$ nên $C = 0$.

Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3 \frac{1}{x} dx = -\ln|x|\Big|_e^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$, nên $a + b^2 = 0$.