1. Cho khai triển: .

a. Tính tổng .

b. Chứng minh đẳng thức sau:

.

**Hướng dẫn giải**

a./ Từ khai triển trên lần lượt cho  ta được



Cộng từng vế hai đẳng thức trên và chia cả hai vế cho 2 ta được

.

b./ Xét  từ khai triển trên ta có: .

Hệ số của  trong vế trái bằng .

Hệ số của  trong vế phải bằng



Từ đó ta có đẳng thức

.

1. Gọi *A* là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập *A*. Tính xác suất để chọn được một số thuộc *A* và số đó chia hết cho *3*.

**Hướng dẫn giải**

+) Trước hết ta tính *n(A)*. Với số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có *9* cách chọn và có  cho *8* vị trí còn lại. Vậy .

+) Giả sử  ta thấy tổng các phần tử của *B* bằng  nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho *3* sẽ được tạo thành từ *9* chữ số của các tập  nên số các số loại này là

. Vậy xác suất cần tìm là .

1. Tính giá trị của biểu thức: C = .

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng công thức nhị thức **Niutơn** ta có:

,

.

⇒ .

⇒ .

Từ đẳng thức trên cho x = 2009 ta được

.

Vậy C = .

1. Khai triển  thành .

Tìm 

**Hướng dẫn giải.**

Ta có 

Xét tỉ số 

Khi thì A>1 do đó 

Khi  thì A<1 do đó 

Mặt khác . Vậy max= 

1. Trong một buổi liên hoan có 9 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp là vợ chồng, cần chọn 3 người đứng ra tổ chức liên hoan. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào?

**Hướng dẫn giải.**

Có C318 cách chọn 3 người trong 9 cặp nam nữ

Có 4.C116 cách chọn 3 người trong đó có 1 cặp vợ chồng

Vậy có C318 - 4.C116 = 752 cách chọn 3 người thỏa mãn bài toán.

1. Chứng minh rằng đa thức  không thể biểu diễn thành tích của 3 đa thức hệ số nguyên và có bậc không nhỏ hơn 1.

**Hướng dẫn giải.**

Giả sử phản chứng rằng  với  và không phải các đa thức hằng.

Từ , bậc của  là chẵn. Từ đó suy ra rằng hai trong ba đa thức này là đa thức bậc hai. Giả sử rằng .

Từ  suy ra rằng  là ước của 23. Có nghĩa là . Nhưng bởi vì  nên . Tương tự, .

Mặt khác,  là ước của 23 do đó ít nhất một trong số  hoặc  là .

Không mất tính tổng quát giả sử  thì . Từ đó suy ra . Nhưng điều này kéo theo  có ít nhất một nghiệm thực trong khi , mâu thuẫn. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

1. Hội khỏe Phù Đổng năm 2014 có tổ chức thi đấu 4 môn thể thao ***chạy 100m***, ***nhẩy xa***, ***nhẩy cao***, ***bắn cung*** và quy định điều kiện cho mỗi đội tham gia như sau:

▪ Mỗi vận động viên của một đội chỉ thi đấu duy nhất một môn thể thao.

▪ Mỗi đội có thể lựa chọn số vận động viên cho mỗi môn tùy ý (nhưng tổng số vận động viên đúng bằng 20).

Tại lễ khai mạc, mỗi đội xếp thành một hàng dọc, các vận động viên chạy 100m cầm cờ đỏ đứng đầu, tiếp theo đến vận động viên nhảy xa cầm cờ vàng rồi đến vận động viên nhảy cao cầm cờ xanh và cuối cùng là vận động viên bắn cung cầm cờ tím. Giả sử số đội tham dự là đủ lớn, hỏi có thể có tối đa bao nhiêu loại hàng dọc (phân biệt theo độ dài mỗi màu của hàng).

**Hướng dẫn giải**

*Bài này có thể giải theo phương pháp song ánh để tính số phần tử của tập hợp kết hợp với kỹ thuật dùng dãy nhị phân.*

Ta thấy mỗi hàng sẽ tương ứng với một bộ 4 số (a, b, c, d) với  để chỉ số lượng vận động viên thi đấu mỗi môn chạy 100m, nhẩy xa, nhẩy cao, bắn cung tương ứng. Với mỗi bộ 4 số như thế ta đặt tương ứng với dãy nhị phân . Dễ thấy tương ứng đó là một song ánh và có  dãy nhị phân khác nhau do đó có tối đa  loại hàng dọc khác nhau.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương , thì phần nguyên của số  là số lẻ.

**Hướng dẫn giải**

Theo công thức nhị thức Newton, ta có:





Do đó:  (1)

*Chú ý rằng:* Khi  chẵn  thì 

 Khi  lẻ  thì 

Vậy từ (1) suy ra với mọi  thì  là số chẵn. (2)

Mặt khác: 

Ta có: 

Vì  là số nguyên và , nên theo định nghĩa phần nguyên ta có:



Từ (2) suy ra với mọi  thì  là số lẻ, suy ra điều phải chứng minh .

1. Có 1000 học sinh gồm 499 học sinh nam và 501 học sinh nữ được xếp thành 10 hàng dọc, mỗi hàng 100 học sinh. Người ta muốn chọn từ 1000 học sinh này ra một nhóm 4 học sinh, trong đó số học sinh nữ được chọn là lẻ và thoả mãn điều kiện sau đây: 4 học sinh này được chọn từ 2 hàng khác nhau và có 2 cặp học sinh có cùng thứ tự đứng trong hàng (tính từ người đứng đầu tiên của hàng đó). Chứng minh rằng số cách chọn các nhóm như vậy là một số lẻ.

**Hướng dẫn giải**

Gọi mỗi nhóm 4 học sinh lấy từ hai hàng thỏa mãn yêu cầu bài toán là một *đội.* ĐặtS = {σ |σ là một đội}, O = {σ∈S| σ có số lẻ học sinh nữ}, E = {σ∈S| σ có số chẵn học sinh nữ}. Ta cần chứng minh rằng  là lẻ.

Với mỗi tập con A của S, ta định nghĩa , trong đó  là số học sinh nữ của σ.

Vì O∩E = ∅ và O∪E = S nên .

Hơn nữa  là chẵn, suy ra .

Mặt khác, xét một học sinh nữ bất kì. Để tạo thành một đội, học sinh này có thể bắt cặp với một học sinh khác trong hàng bởi 99 cách, sau đó tìm 2 học sinh khác ở hàng khác bởi 9 cách. Suy ra, học sinh nữ này là thành viên của 99.9 = 891 đội. Có nghĩa là học sinh nữ này được tính 891 lần trong . Vì ta có 501 học sinh nữ nên

.

Vì mỗi σ∈O chứa một số số lẻ các học sinh nữ nên . Suy ra

.

Như vậy số cách chọn những đội là một số lẻ.

1. Cho khai triển:.

Chứng minh đẳng thức sau:

.

**Hướng dẫn giải**

Xét  từ khai triển trên nhân hai vế với  ta có:

 (2)

  Hệ số của  trong vế trái bằng 



Hệ số của  trong vế phải bằng



Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh

1. Tính tổng:.

**Hướng dẫn giải**

Ta có  (3)

Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: 

Cho *k* chạy từ 1 đến *n* rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

 





Vậy .

1. Có bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người xếp hàng dọc sao cho không có 2 người liên tiếp được chọn.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử k người được chọn là: 

Gọi  là số người đứng trước 

Gọi  là số người đứng giữa  và 

.....

Gọi  là số người đứng giữa  và 

Và  là số người đứng bên phải 

Mỗi cách chọn bộ  bằng số cách chọn bộ  thỏa mãn

+) 

+) 

+) 

Hàm sinh cho cách chọn  và  giống nhau là: 

Hàm sinh cho số cách chon mỗi  giống nhau là: 

Hàm sinh cho số cách chọn bộ  là: 

Số cách chọn bộ số:  bằng số cách chọn bộ số  là: .

1. Cho các chữ số 

Có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số trên.

Tính tổng các số viết được từ phần a.

1. Cho 5 người gồm 3 nam, 2 nữ ngồi ngẫu nhiên vào 5 chiếc ghế được xếp thành vòng tròn ( Mỗi người một ghế). Tính xác suất để 2 người nữ không ngồi cạnh nhau.
2. Tính tổng: 
3. Trong mặt phẳng cho đa giác đều 2n đỉnh A1A2…A2n ( với n là số nguyên lớn hơn 1). Hỏi có tất cả bao nhiêu hình chữ nhật với các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho.
4. Tìm hệ số của  trong khai triển : .
5. Tính tổng.
6. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên đó về 3 tỉnh công tác sao cho mỗi tỉnh có 5 người và có ít nhất một nữ.
7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* ≥ 1 ta luôn có: .
8. Tìm n biết: 256(2C1­2n + 23C32n + ... + 22n-1C2n-12n) - 254( C0­2n + 22C22n + ... + 22nC2n2n) = 474.