

Bài 2. TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

| Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Tập hợp

Ví dụ 1. Cho tập hợp B gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3.

a) Viết tập hợp B theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

b) Minh họa tập hợp B bằng biểu đồ Ven.

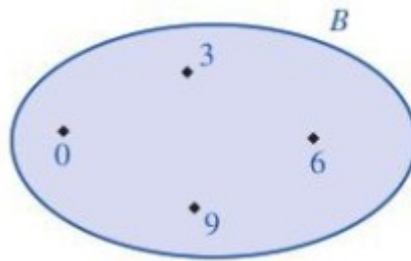
Giải

a) Tập hợp B được viết theo cách liệt kê các phần tử là: $B = \{0; 3; 6; 9\}$

Tập hợp B được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử là:

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9 \text{ và } x : 3\}.$$

b) Tập hợp B được minh họa bằng biểu đồ Ven



Nhận xét

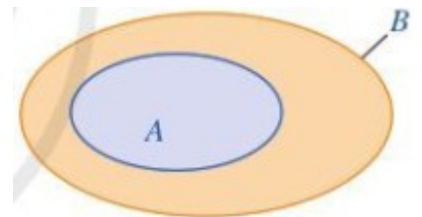
- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\emptyset$.
- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

Chú ý: Khi tập hợp C là tập hợp rỗng, ta viết $C = \emptyset$ và không được viết là $C = \{\emptyset\}$.

II. Tập con và tập hợp bằng nhau

1. Tập con

Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một tập con của tập hợp B và viết là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B .



Quy ước: Tập hợp rỗng $\emptyset$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

Chú ý: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A).

Nếu A không phải là tập con của B , ta viết $A \not\subset B$.

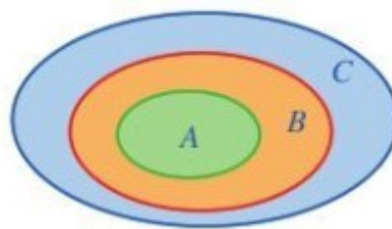
Ví dụ 2. Cho hai tập hợp: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. Chứng tỏ rằng $E \subset F$.

Giải

Với mọi số thực x , ta có: $x \leq 1$ thì $x < 2$ nên $x \in E$ thì $x \in F$. Do đó $E \subset F$.

Ta có các tính chất sau:

- $A \subset A$ với mọi tập hợp A ;
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$



2. Tập hợp bằng nhau

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A và B *bằng nhau*, viết là $A = B$

Ví dụ 3. Cho tập hợp C gồm các tam giác có ba cạnh bằng nhau và tập hợp D gồm các tam giác có ba góc bằng nhau. Hai tập hợp C và D có bằng nhau hay không?

Giải

Do một tam giác có ba cạnh bằng nhau khi và chỉ khi tam giác đó có ba góc bằng nhau nên hai tập hợp C và D là bằng nhau.

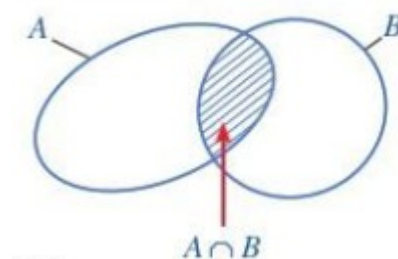
III. Giao của hai tập hợp

Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B được gọi là *giao* của A và B , kí hiệu $A \cap B$.

$x \in A \cap B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \in B$.

Vậy $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$

Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình bên



Ví dụ 4. Tìm giao của hai tập hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là ước của } 16\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là ước của } 20\}$.

b) $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 4\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 5\}$.

Giải

a) $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$. Vậy $A \cap B = \{1; 2; 4\}$.

Chú ý: A là tập hợp các ước tự nhiên của 16 , B là tập hợp các ước tự nhiên của 20 nên $A \cap B$ là tập hợp các ước chung tự nhiên của 16 và 20.

b) $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 4 \text{ và } x \text{ là bội của } 5\} = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội chung của } 4 \text{ và } 5\}$.

IV. Hợp của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là *hợp* của A và B , kí hiệu $A \cup B$

$x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.

Vậy $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

Tập hợp $A \cup B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình bên



Ví dụ 5. Cho tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập hợp I các số vô tỉ. Tìm $\mathbb{Q} \cap I, \mathbb{Q} \cup I$.

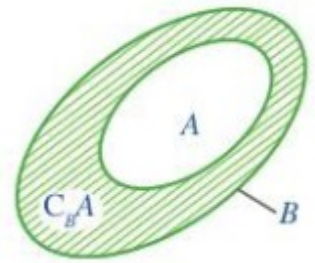
Giải

Ta có $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset, \mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$

V. Phần bù. Hiệu của hai tập hợp

Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B . Tập hợp những phần tử của B mà không phải là phần tử của A được gọi là *phần bù* của A trong B , kí hiệu $C_B A$.

Tập hợp $C_B A$ được mô tả bằng phần gạch chéo



Ví dụ 6. Các học sinh của lớp 10^A đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu - Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh đều đăng kí đúng một địa điểm. Gọi A là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, B là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu - Quốc Tử Giám, T là tập hợp các học sinh lớp 10^A . Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp T .

Giải. Phần bù của tập hợp A trong tập hợp T bao gồm những học sinh trong lớp không đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long nên $C_T A = B$.

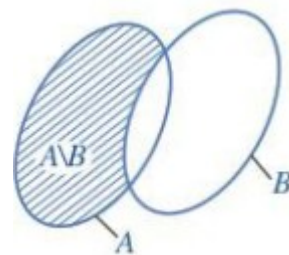
Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là hiệu của A và B , kí hiệu $A \setminus B$.

$x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$

Vậy $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

Chú ý: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_A B$.

Tập hợp $A \setminus B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo.



Ví dụ 7. Cho hai tập hợp: $A = \{3; 6; 9; 12\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$.

Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Giải

- Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc A mà không thuộc B . Vậy $A \setminus B = \{3; 9\}$.

- Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc B mà không thuộc A . Vậy $B \setminus A = \{2; 4; 8; 10\}$.

Ví dụ 8. Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} | 3x - 11 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | 3x^2 - 14x + 11 = 0\}$.

Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Giải

Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{1\}$.

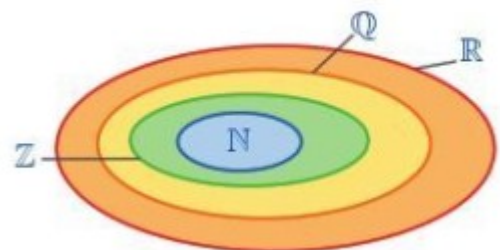
Vậy $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{0; 1; 2; 3\}$, $A \setminus B = \{0; 2; 3\}$, $B \setminus A = \emptyset$.

VI. Các tập hợp số

1. Các tập hợp số đã học

Ta đã biết $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.

Ta có quan hệ sau: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tên gọi, ký hiệu	Tập hợp	Hình biểu diễn
Tập số thực ($-\infty; +\infty$)	$\mathbb{R}$	

Đoạn $[a; b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \mid x < a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \mid a < x\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; a và b được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ta cũng có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc tập đó, chẳng hạn đoạn $[a; b]$ có thể biểu diễn như sau:



Ví dụ 9. Hãy đọc tên, kí hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp sau trên trục số:

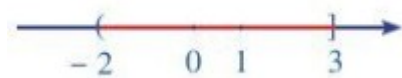
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$;

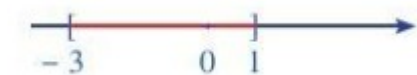
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\}$.

Giải

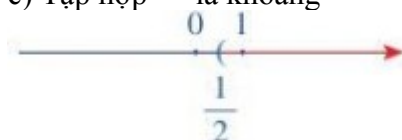
a) Tập hợp A là nửa khoảng $(-2; 3]$ và được biểu diễn là:



b) Tập hợp B là đoạn $[-3; 1]$ và được biểu diễn là:



c) Tập hợp C là khoảng $(\frac{1}{2}; +\infty)$ và được biểu diễn là:



PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Xác định tập hợp

Câu 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 75x - 77 = 0\}$

Lời giải

$$(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

a)

Vậy $A = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 2\right\}$

b) $n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30$ nên ta có: $n = 2; 3; 4; 5$

Vậy $B = \{2; 3; 4; 5\}$

c) $2x^2 - 75x - 77 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{77}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$

c)

Vậy $C = \{-1\}$

Câu 2. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x^2 - 5x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 10x + 21)(x^3 - x) = 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} x + 3 < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases}\right\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 2| \leq 1\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 3 = 0\}$

Lời giải

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x^2 - 5x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0\}$

$$(2x^2 - 5x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$A = \left\{ 1; \frac{3}{2}; 3 \right\}$$

$$\text{b) } B = \{ x \in R \mid (x^2 - 10x + 21)(x^3 - x) = 0 \}$$

$$(x^2 - 10x + 21)(x^3 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 21 = 0 \\ x^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \\ x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$B = \{ -1; 0; 1; 3; 7 \}$$

$$\text{c) } C = \{ x \in R \mid (6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \}$$

$$(6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 7x + 1 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{6} \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{6}; 1; 2; 3 \right\}$$

$$\text{d) } D = \{ x \in Z \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0 \}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$x \in Z \Rightarrow x = 1$$

$$D = \{ 1 \}$$

$$\text{e) } E = \left\{ x \in N \mid \begin{cases} x + 3 < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases} \right\}$$

$$\begin{cases} x + 3 < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \end{cases}$$

$$x \in N \Rightarrow x = 1$$

$$E = \{ 1 \}$$

$$\text{f) } F = \{ x \in Z \mid |x + 2| \leq 1 \}$$

$$|x + 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$

$$x \in Z \Rightarrow x = -1; -2; -3$$

$$F = \{ -1; -2; -3 \}$$

$$\text{g) } G = \{ 0; 1; 2; 3; 4 \}$$

$$\text{h) } H = \{ x \in R \mid x^2 + x + 3 = 0 \}$$

$$x^2 + x + 3 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$$H = \emptyset$$

Câu 3. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 3\}$

c) $C = \{x = 3k; x, k \in \mathbb{Z}; -4 < x < 12\}$

Lời giải

$$2x^3 - 3x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \text{ (loại)} \\ x = -1 \end{cases}$$

a)

Vậy $A = \{0; -1\}$

b) $x < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0; \pm 1; \pm 2$

Vậy $B = \{-1; \pm 2; 0\}$

c) $C = \{-3; 0; 3; 6; 9\}$

Câu 4. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

b) $B = \{0; 4; 8; 12; 16\}$

c) $C = \{-3; 9; -27; 81\}$

d) $D = \{9; 36; 81; 144\}$

e) $E = \{2; 3; 5; 7; 11\}$

f) $F = \{3; 6; 9; 12; 15\}$

g) $G =$ Tập hợp các điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

h) $H =$ Tập hợp các điểm thuộc đường tròn tâm I cho trước và có bán kính bằng 5.

Lời giải

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 4, x < 20\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (-3)^n, n \in \mathbb{N}, 0 < n < 5\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (3n)^2, n \in \mathbb{N}, 0 < n < 5\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 12\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3, 0 < x < 18\}$

g) $G = \{M \mid MA = MB; \text{ A và B là các điểm cho trước} \}$

h) $H = \{M \mid IM = 5; I \text{ là điểm cho trước} \}$

Câu 5. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) Tập hợp các số chính phương.

b) Tập hợp các ước chung của 36 và 120.

c) Tập hợp các bội chung của 8 và 15.

Lời giải

a) $\{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; \dots\}$

b) $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

c) $\{0; \pm 120; \pm 240; \pm 360; \dots\}$

Câu 6. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A = \{1; 4; 7; 10\}$

b) $B = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{3}{8}; \frac{4}{15}; \frac{5}{24}; \frac{6}{35} \right\}$

Lời giải

a) $A = \{x \mid x = 3n + 1; n \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \left\{ \frac{n}{n^2 - 1} \mid n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 6 \right\}$

Câu 7. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A = \{0; 3; 8; 15; 24; 35\}$

b) $B = \{-4; 1; 6; 11; 16\}$

c) $C = \{1; -2; 7\}$

Lời giải

a) Nhận xét rằng với mỗi số thuộc tập A cộng thêm 1 đều là số chính phương. Ta có thể viết thêm

$$A = \{n^2 - 1 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}$$

b) $B = \{5n - 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$

c) Ta có thể xem 1; -2; 7 là nghiệm của phương trình $(x-1)(x+2)(x-7)=0$ nên

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+2)(x-7) = 0\}$$

Câu 8. Trong các tập hợp sau tập nào là tập rỗng

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 7x + 12 = 0\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$

Lời giải

a) Ta thấy $x = 0$ là một phần tử của tập A vì $0 \in \mathbb{Z}$ và $|0| < 1$ nên rõ ràng nó không phải là tập rỗng)

b) $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm nên B là tập rỗng)

c)
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

2 nghiệm đều là số vô tỉ nên C là tập rỗng)

d) $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

2 nghiệm đều là số vô tỉ nên D là tập rỗng)

e) Do $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 + 7x + 12 \geq 12 > 0$ nên phương trình vô nghiệm
E rỗng)

f)
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy F không phải là tập rỗng)

Câu 9. Viết lại các tập sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng)

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$

c) $C = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}; k \in \mathbb{N}; x \leq \frac{1}{16}\right\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 6x^2 + 8 = 0\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ là số chính phương nhỏ hơn } 100\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước chung của } 64 \text{ và } 120\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 12 \text{ và } 20\}$.

Lời giải.

a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. b) $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

c) $C = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}; k \geq 4\right\}$.

d) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 \in \{2; 4\} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2; 2\}$
 $\Rightarrow C = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2; 2\}$

e) $E = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 64; 81\}$ f) $F = \{1; 2; 3; 4; 8\}$.

g) Bội chung nhỏ nhất của 12 và 20 là 60 nên $G = \{60k; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 10. Liệt kê các phần của tập hợp dưới đây:

a) $A = \left\{\frac{3k-1}{k} \in \mathbb{Z} : -5 \leq k \leq 3\right\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$.

$$c) \quad C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid 3 < |x| < \frac{19}{2} \right\}.$$

Lời giải

$$a) \quad A = \left\{ \frac{3k-1}{k} \in \mathbb{Z} : -5 \leq k \leq 3 \right\} = A = \left\{ 3 - \frac{1}{k} \in \mathbb{Z} : -5 \leq k \leq 3 \right\} \Rightarrow k \in \{-1; 1\} \Rightarrow A = \{4; 2\}.$$

$$b) \quad B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10 \} \Rightarrow B = \{-9; -8; \dots; 8; 9\}.$$

$$c) \quad C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid 3 < |x| < \frac{19}{2} \right\} \Rightarrow C = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4\}.$$

Dạng 2. Tập hợp con, tập bằng nhau

Câu 11. Tìm tất cả các tập con, các tập con gồm hai phần tử của các tập hợp sau:

$$a) \quad A = \{1; 2\}$$

$$b) \quad B = \{1; 2; 3\}$$

$$c) \quad C = \{a; b; c\}$$

$$d) \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$$

Lời giải

$$a) \quad \text{Tập A có các tập con gồm 2 phần tử là } \{1; 2\}$$

$$b) \quad \text{Tập B có các tập con gồm 2 phần tử là } \{1, 2\}; \{2, 3\}; \{1, 3\}$$

$$c) \quad \text{Tập C có các tập con gồm 2 phần tử là } \{a; b\}; \{a; c\}; \{a; d\}; \{b; c\}; \{b; d\}; \{c; d\}$$

$$d) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D = \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

Suy ra

Tập con của nó chính là nó vì D chỉ có đúng 2 phần tử.

Câu 12. Tìm tất cả các tập hợp con của tập:

$$a) \quad A = \{a; b\} \quad b) \quad B = \{1; 2; 3\} \quad c) \quad C = \emptyset \quad d) \quad D = \{a; b; c; d\}.$$

Lời giải

$$a) \quad \text{Có bốn tập con: } \emptyset, \{a\}, \{b\} \text{ và } \{a; b\}.$$

$$b) \quad \text{Có tám tập con: } \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{2; 3\}, \{1; 3\}, \{1; 2; 3\}.$$

$$c) \quad \text{Có hai tập con: } \emptyset \text{ và } \{\emptyset\}.$$

$$d) \quad \text{Có 16 tập con: } \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{a; d\}, \{b; c\}, \{b; d\}, \{c; d\}, \\ \{a; b; c\}, \{a; b; d\}, \{b; c; d\}, \{a; b; c; d\}.$$

Câu 13. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Viết tất cả các tập con của A có ít nhất ba phần tử.

Lời giải:

Các tập con có ít nhất ba phần tử của A là:

$\{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 2; 5\}, \{1; 3; 4\}, \{1; 3; 5\}, \{1; 4; 5\}, \{2; 3; 4\}, \{2; 3; 5\}, \{2; 4; 5\}, \{3; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4\},$
 $\{1; 2; 3; 5\}, \{1; 2; 4; 5\}, \{1; 3; 4; 5\}, \{2; 3; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\}$ gồm 16 tập.

Câu 14. Cho $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Hãy viết tất cả các tập con gồm:

a) Một phần tử b) Hai phần tử c) Ba phần tử.

Lời giải:

a) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$.

b) $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{3; 4\}$.

c) $\{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}$.

Câu 15. Trong các tập sau, tập nào là tập con của tập nào?

$$A = \{1; 2; 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$$

$$C = (0; +\infty) \quad D = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$$

Lời giải:

$$A = \{1; 2; 3\}, \quad B = \{0; 1; 2; 3\}, \quad C = (0; +\infty), \quad D = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$$

Do đó: $A \subset B, A \subset C, D \subset C$.

Câu 16. Xác định quan hệ giữa các tập hợp sau.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x - \sqrt{3 - 2x} = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2x - 3 = 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 2x + 1 \geq 10\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 2\}$

Lời giải

a) Ta có
$$x = \sqrt{3 - 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in [-3; 1] \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow A = \{1\}.$$

Mặt khác, $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in [-3; 1] \Rightarrow B = [-3; 1]$. Vậy $A \subset B$.

b) Ta có
$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ (x - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{10} + 1 > 2 \Rightarrow B \subset A.$$

Câu 17. Tìm các tập X thỏa mãn $\{1; 2; 3\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Lời giải.

Ta có $X = \{1; 2; 3; 4; 5\} \vee X = \{1; 2; 3; 4\}$.

Câu 18. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho: $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lời giải

$$X = \{1, 2, 3\} \text{ hoặc } X = \{1, 2, 4\} \text{ hoặc } X = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Câu 19. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho: $X \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Lời giải

X có thể là các tập hợp: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

Câu 20. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho: $\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Lời giải:

Tập hợp X phải chứa các phần tử $1; 2$; ngoài ra có thể chứa thêm một số phần tử còn lại là $3; 4; 5$; tức là là tập hợp giao của 2 tập $A = \{1; 2\}$ và tập B , với B là tập con của tập $\{3; 4; 5\}$.

Vậy các tập X cần tìm là: $\{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 2; 5\}, \{1; 2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 5\}, \{1; 2; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 21. Cho $A = \{2, 5\}; B = \{5, x\}; C = \{x, y, 5\}$. Tìm các cặp số $(x; y)$ để $A = B = C$.

Lời giải

Vì $A = B = C$ nên cả 3 tập hợp A, B, C chỉ chứa 2 phần tử là 2 và 5.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Do đó ta có

Dạng 3. (Nâng cao) Sơ đồ ven

Câu 22. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em, B là tập hợp học sinh đang học tiếng Anh ở trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập:

a) $A \cap B$ b) $A \setminus B$

c) $A \cup B$ d) $B \setminus A$.

Lời giải

a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 học môn Tiếng Anh của trường em.

b) $A \setminus B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 nhưng không học môn tiếng Anh của trường em.

c) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh học lớp 10 hoặc học môn tiếng Anh của trường em.

d) $B \setminus A$ là tập hợp các học sinh học môn tiếng Anh nhưng không học lớp 10 của trường em.

Câu 23. Kí hiệu H là tập hợp học sinh lớp 10A1, T là tập hợp các học sinh nam và G là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A1. Hãy xác định các tập hợp sau:

a) $T \cup G$. b) $T \cap G$.

c) $H \setminus T$. d) $G \setminus T$. e) $C_T H$.

Lời giải

Ta có: $T \cup G = H; T \cap G = \emptyset; H \setminus T = G; G \setminus T = G; C_T H = G$.

Câu 24. Trong một trường THPT, khối 10 có 160 em học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin, 100 em học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 10 có bao nhiêu học sinh?

Lời giải

Gọi A là tập hợp các bạn tham gia câu lạc bộ Toán.

B là tập hợp các bạn tham gia câu lạc bộ Tin như vậy số học sinh của khối 10 là số phần tử của tập hợp $A \cup B = A \setminus B \cup B$ vậy có: $160 + 140 - 100 = 200$ học sinh khối 10.

Câu 25. Một lớp có 45 hs, đăng kí chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng kí môn bóng đá, 25 em đăng kí môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng kí cả hai môn thể thao?

Lời giải

+) Gọi A là tập hợp các bạn đăng ký môn bóng đá, B là tập hợp các bạn đăng kí cầu lông, gọi x là số bạn đăng ký cả hai môn.

+) Tập hợp số học sinh của lớp là: $A \cup B = A \setminus B \cup B$: Ta có: $25 + 30 - x = 45 \Rightarrow x = 10$.

Vậy có 10 bạn đăng ký cả hai môn.

Câu 26. Trong 100 học sinh lớp 10 có 70 học sinh nói được tiếng Anh, 45 học sinh nói được tiếng Pháp và 23 học sinh nói được cả hai tiếng Anh và Pháp. Hỏi có bao nhiêu học sinh không nói được hai thứ tiếng?

Lời giải

+) Gọi A là tập hợp số học sinh nói được tiếng Anh, B là tập hợp số học sinh nói được tiếng Pháp. Tập hợp số học sinh nói được cả 2 tiếng là: $A \cap B$ và có 23 học sinh.

Vậy có $100 - 23 = 77$ học sinh không nói được cả hai thứ tiếng.

+) Tập hợp số học sinh nói được ít nhất 1 thứ tiếng là: $A \setminus B \cup B$ và có: $40 + 45 - 23 = 62$ học sinh.

Vậy số học sinh không nói được tiếng gì là: $100 - 62 = 38$ học sinh không nói được một trong hai thứ tiếng.

Dạng 4. Biểu diễn tập hợp số

Câu 27. Xác định các tập hợp $A \cup B; A \cap B$ và biểu diễn trên trục số với

a. $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$.

b. $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$.

c. $A = [1; 3]$ và $B = (2; +\infty)$.

Lời giải

a. $A \cup B = \mathbb{R}; A \cap B = [1; 3]$.

b. $A \cup B = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty); A \cap B = \emptyset$.

c. $A \cup B = [1; +\infty); A \cap B = (2; 3]$.

Dạng 5. Các phép toán trên tập hợp

Câu 28. Cho các tập hợp: $A = \{a; b; c; d\}$ $B = \{b; d; e\}$ $C = \{a; b; e\}$

Chứng minh:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Lời giải:

$$a) A \cap (B \setminus C) = \{a; b; c; d\} \cap \{d\} = \{d\}$$

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = \{b; d\} \cap \{a; b\} = \{d\}$$

$$\text{Vậy } A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

$$b) A \setminus (B \cap C) = \{a; b; c; d\} \setminus \{b; e\} = \{a; c; d\}$$

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{a; c\} \cup \{c; d\} = \{a; c; d\}$$

$$\text{Vậy } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Câu 29. Chứng minh rằng:

a) Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

b) Với ba tập A, B, C thì $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

Lời giải:

a) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. Do đó $A \cap B \subset A$.

$$x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \text{ (do } A \subset B) \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap B$$

. Do đó $A \subset A \cap B$.

Vậy $A \cap B = A$.

$$x \in A \cap (B \setminus C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \setminus C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$$

b) Giả sử:

$$\text{Do đó } A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus C \quad (1)$$

$$x \in (A \cap B) \setminus C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \setminus C \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap (B \setminus C)$$

Ngược lại, giả sử:

$$\text{Do đó: } (A \cap B) \setminus C \subset A \cap (B \setminus C) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

Câu 30. Cho $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 12\}$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} A \cap B = \{6; 8; 11\} & (1) \\ A \cup \{5; 6; 7\} = \{3; 5; 6; 7; 8; 10; 11\} & (2) \\ \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} = B \cup \{6; 10\} & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Xác định $A \subset X; B \subset X$ sao cho:

Lời giải:

Từ (1) và (2) suy ra: $\{3; 6; 8; 10; 11\} \subset A$

Từ (1) và (3) suy ra: $\{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \subset B$

Vậy $A = \{3; 6; 8; 10; 11\}$, $B = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

Câu 31. Cho $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Tìm các tập $A \setminus B, B \setminus A, A \cup B, A \cap B$.

b) Tìm các tập $(A \setminus B) \cup (B \setminus A), (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

Lời giải

a) $A \setminus B = \{0; 1\}$; $B \setminus A = \{5; 6\}$; $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $A \cap B = \{2; 3; 4\}$

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0; 1; 5; 6\}$; $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

Câu 32. Cho hai tập hợp A và B dưới đây. Viết tập $A \cap B, A \cup B$ bằng hai cách:

a) $A = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 12\}$ $B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 18\}$

b) $A = \{x | x \text{ là bội nguyên dương của } 6\}$ $B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 15\}$.

Lời giải

a) $A \cap B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 6\} = \{1; 2; 3; 6\}$

$A \cup B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 12 \text{ hoặc } 18\} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\}$

b) $A \cap B = \{x | x \text{ là bội nguyên dương của } 30\} = \{30; 60; 90; \dots; 30n; \dots\}$

$A \cup B = \{x | x \text{ là bội nguyên dương của } 6 \text{ hoặc } 18\} = \{6; 12; 15; 18; 24; 30; \dots\}$

Câu 33. Cho các tập hợp: $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $C = \{3; 4; 5; 6\}$

Tìm: $A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, (A \cup B) \cap C, A \cup (B \cup C)$.

Lời giải

Ta có: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $B \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 8\}$

$A \cap B = \{2; 4\}$ $A \cap C = \{3; 4\}$ $B \cap C = \{4; 6\}$

$(A \cup B) \cap C = \{3; 4; 6\}$ $A \cup (B \cup C) = \{1; 2; 3; 4; 6\}$

Câu 34. Cho tập hợp A các ước số tự nhiên của 18 và tập hợp B các ước số tự nhiên của 30 . Xác định $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

Ta có:

$A = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ và $B = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$ nên:

$A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30\}$; $A \setminus B = \{9; 18\}$; $B \setminus A = \{5; 10; 15; 30\}$.

Câu 35. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10. $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 6\}$
 $C = \{n \in \mathbb{N} | 4 \leq n \leq 10\}$

Tìm: a) $A \cap (B \cup C)$ b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Lời giải

Ta có: $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$$a/ B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \text{ nên } A \cap (B \cup C) = \{2; 4; 6; 8; 10\} = A$$

$$b/ A \setminus B = \{8; 10\}, A \setminus C = \{2\}, B \setminus C = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\text{nhên } (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{0; 1; 2; 3; 8; 10\}$$

Câu 36. Cho A là tập hợp các số nguyên lẻ, B là tập hợp các bội của 3 , C là tập hợp các bội của 6 . Xác định $A \cap B, B \cap C, C \setminus B$.

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ lẻ và } x \text{ là bội của } 3\} = \{3(2k-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$B \cap C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3 \text{ hoặc } x \text{ là bội của } 6\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3\} = B.$$

$$C \setminus B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 6 \text{ và } x \text{ không là bội của } 3\} = \emptyset.$$

Câu 37. Cho $A = \{2, 4, 7, 8, 9, 12\}$, $B = \{2, 8, 9, 12\}$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = \{2, 8, 9, 12\}; A \cup B = \{2, 4, 7, 8, 9, 12\}; A \setminus B = \{4, 7\}; B \setminus A = \emptyset.$$

Câu 38. Cho $A = \{2, 4, 6, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = \{2, 4\}; A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}; A \setminus B = \{6, 9\}; B \setminus A = \{1, 3\}.$$

Câu 39. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| = 1\}$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \left\{1, \frac{1}{2}\right\} \text{ và } |2x - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \{0, 1\}$$

$$\text{Vậy } A \cap B = \left\{1\right\}; A \cup B = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}; A \setminus B = \left\{\frac{1}{2}\right\}; B \setminus A = \{0\}.$$

Câu 40. Cho A = tập các ước số của 12; B = Tập các ước số của 18. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}, B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$

$$\text{Suy ra } A \cap B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}, A \cup B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18\}$$

$$A \setminus B = \{\pm 4, \pm 12\}, B \cap A = \{\pm 9, \pm 18\}.$$

Câu 41. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-2)(x^2 - 8x + 15) = 0\}$, $B =$ Tập các số nguyên tố có một chữ số. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x+1)(x-2)(x^2 - 8x + 15) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = \{-1, 2, 3, 5\}$$

$$\text{Suy ra } A = \{-1, 2, 3, 5\} \text{ và } B = \{2, 3, 5, 7\}.$$

$$\text{Vậy } A \cap B = \{2, 3, 5\}, A \cup B = \{-1, 2, 3, 5, 7\}, A \setminus B = \{-1\}, B \setminus A = \{7\}.$$

Câu 42. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | (5x - 3x^2)(x^2 - 2x - 3) = 0\}$.

Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Lời giải

Ta có: $x \in \mathbb{Z}, x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\} \Rightarrow A = \{\pm 1\}$.

$(5x - 3x^2)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x(5 - 3x)(x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-1, 0, \frac{5}{3}, 3\right\} \Rightarrow B = \left\{-1, 0, \frac{5}{3}, 3\right\}$

Vậy $A \cap B = \{-1\}$, $A \cup B = \left\{-1, 0, 1, \frac{5}{3}, 3\right\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \left\{0, \frac{5}{3}, 3\right\}$.

Câu 43. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} | (x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 5\}$. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Lời giải

Ta có: $(x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3)(x + 1)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1, 3, 6\}$.

Suy ra $A = \{-3, -1, 3, 6\}$ và $B = \{2, 3\}$.

Vậy $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 6\}$, $A \setminus B = \{6\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

Câu 44. Tìm các tập hợp A, B sao cho: $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \setminus B = \{-3, -2\}$, $B \setminus A = \{6, 9, 10\}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset A \\ A \setminus B = \{-3, -2\} \Rightarrow \{-3, -2\} \subset A \end{cases} \Rightarrow A = \{-3, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Tương tự $\begin{cases} A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset B \\ B \setminus A = \{6, 9, 10\} \Rightarrow \{6, 9, 10\} \subset B \end{cases} \Rightarrow B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10\}$

Câu 45. Tìm các tập hợp A, B sao cho: $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{6, 9\}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} A \cap B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \{1, 2, 3\} \subset A \\ A \setminus B = \{4, 5\} \Rightarrow \{4, 5\} \subset A \end{cases} \Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Tương tự $\begin{cases} A \cap B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \{1, 2, 3\} \subset B \\ B \setminus A = \{6, 9\} \Rightarrow \{6, 9\} \subset B \end{cases} \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$

Câu 46. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$, $C = \{a, b, c\}$. Chứng minh các hệ thức:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Lời giải

a) Ta có $B \setminus C = \{d, e\} \Rightarrow A \cap (B \setminus C) = \{d\}$

$A \cap B = \{b, d\}$, $A \cap C = \{a, b, c\} \Rightarrow (A \cap B) \setminus (A \cap C) = \{d\}$

Vậy $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

b) $B \cap C = \{b\} \Rightarrow A \setminus (B \cap C) = \{a, c, d\}$

$$A \setminus C = \{d\}, A \setminus B = \{a; c\} \Rightarrow (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a; c; d\}$$

$$\text{Vậy } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Câu 47. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Hãy tìm tập hợp C thỏa mãn:

a) $C = A \cup B$ b) $C = A \cap B$

c) $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ d) $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Lời giải

a) Ta có $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$

b) Ta có $C = A \cap B = \{1; 3; 5\}$

c) Ta có $A \setminus B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$, $A \cap B = \{1; 3; 5\}$ $\Rightarrow C = (A \setminus B) \setminus (A \cap B) = \{2; 4; 7; 9; 11\}$

d) Ta có $A \setminus B = \{2; 4\}$; $B \setminus A = \{7; 9; 11\}$ $\Rightarrow C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2; 4; 7; 9; 11\}$

Câu 48. Chứng minh rằng:

a) Nếu $A \subseteq B$ thì $A \cap B = A$.

b) Nếu $A \subseteq C$ và $B \subseteq C$ thì $A \cup B \subseteq C$.

c) Nếu $A \setminus B = A \cap B$ thì $A = B$. d) Nếu $A \subseteq B$ và $A \subseteq C$ thì $A \subseteq B \cap C$.

Lời giải

a) Nếu $A \subseteq B$ thì $A \cap B = A$

Thật vậy:

Xét với mọi $x \in A$ thì $x \in B$ (do $A \subseteq B$) nên $x \in A \cap B \Rightarrow A \subseteq A \cap B$ (1)

Hơn nữa với mọi $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ hay $A \cap B \subseteq A$ (2)

Từ (1); (2) ta suy ra $A \cap B = A$.

b) Xét với mọi $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$
 $\Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C$ (do $A \subseteq C$)
 $\vee x \in B \Rightarrow x \in C$ (do $B \subseteq C$)
 $\Rightarrow x \in C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$.

c) Vì $A \setminus B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A) \cap (A \cap B)$ mà $A \setminus B = A \cap B$ thì $A = B$ nên
 $A \setminus B = A \cap B \Rightarrow A \subseteq B$
 $B \setminus A = A \cap B \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A = B$

d) Do $A \subseteq B$ và $A \subseteq C$ nên với mọi $x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$

Câu 49. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 = 0\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} : 2n - 6 \leq 0\}$; $C = \{n \in \mathbb{N} : |n| \leq 4\}$. Tìm

$A \cap B$; $A \cap C$; $B \cup C$.

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} A = \{-2; 3\} \\ B = \{0; 1; 2; 3\} \\ C = \{0; 1; 2; 3; 4\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{3\}; A \cap C = \{3\}; B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Câu 50. Cho $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 4; 6\}$; $C = \{1; 3; 5\}$. Xác định các tập hợp sau:

- a) $A \cap B; A \cup B$.
- b) $A \cap C; A \cup C$.
- c) $B \cap C; B \cup C$.

Lời giải

- a) $A \cap B = \{2; 4\}; A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$.
- b) $A \cap C = \{1; 3\}; A \cup C = \{1; 2; 3; 5\}$.
- c) $B \cap C = \emptyset; B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 51. Cho $E = \{a, b, c, d\}; F = \{b, c, e, g\}; G = \{c, d, e, f\}$. Chứng minh rằng:
 $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} F \cup G = \{b, c, d, e, f, g\} \Rightarrow E \cap (F \cup G) = \{b, c, d\} \\ E \cap F = \{b, c\}; E \cap G = \{c, d\} \Rightarrow (E \cap F) \cup (E \cap G) = \{b, c, d\} \end{cases}$
 $\Rightarrow E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

Câu 52. Cho $A = \{a, e, i, o\}; E = \{a, b, c, d, i, e, o, f\}$. Tính $C_E A$.

Lời giải

Ta có: $C_E A = E \setminus A = \{b; c; d; f\}$.

Câu 53. Cho $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}; A = \{1, 3, 5, 7\}; B = \{1; 2; 3; 6\}$.

a) Tính $C_E A; C_E B; C_E A \cap C_E B$.

b) Chứng minh $C_E (A \cup B) \subset C_E (A \cap B)$.

Lời giải

a) Ta có: $C_E A = \{0; 2; 4; 6; 8\}; C_E B = \{0; 4; 5; 7; 8\} \Rightarrow C_E A \cap C_E B = \{4; 8\}$.

b) $\begin{cases} A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7\} \Rightarrow C_E (A \cup B) = E \setminus \{1; 2; 3; 5; 6; 7\} \\ A \cap B = \{1\} \Rightarrow C_E (A \cap B) = E \setminus \{1\} \end{cases} \Rightarrow C_E (A \cup B) \subset C_E (A \cap B)$.

Câu 54. Cho các tập hợp sau:

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5\}; A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}; B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x - 2)(x + 1)(2x^2 - x - 3) = 0\}.$$

a) Chứng minh $A \subset E; B \subset E$.

b) Tìm $C_E(A \cap B), C_E(A \cup B)$ rồi tìm mối quan hệ của hai tập này.

c) Chứng minh $C_E(A \cup B) \subset C_E A$.

Lời giải

$$\begin{cases} E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5\} \\ A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\} \\ B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-2)(x+1)(2x^2 - x - 3) = 0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = \{-5; -4; \dots; 4; 5\} \\ A = \{-4; 1\} \\ B = \{-1; 1\} \end{cases} \Rightarrow A \subset E; B \subset E.$$

a) Ta có:

$$\begin{cases} A \cap B = \{1\} \Rightarrow C_E(A \cap B) = E \setminus \{1\} \\ A \cup B = \{-4; -1; 1\} \Rightarrow C_E(A \cup B) = E \setminus \{-4; -1; 1\} \end{cases} \Rightarrow C_E(A \cup B) \subset C_E(A \cap B).$$

b) Ta có:

$$C_E A = E \setminus A \Rightarrow C_E(A \cup B) \subset C_E A.$$

c) Ta có

Câu 55. Xác định tập hợp:

$$A = (-3; 5] \cup [8; 10] \cup [2; 8);$$

$$B = [0; 2] \cup (-\infty; 5] \cup (1; +\infty);$$

$$C = [-4; 7] \cup (0; 10);$$

$$D = (-\infty; 3] \cup (-5; +\infty);$$

$$E = (3; +\infty) \setminus (-\infty; 1];$$

$$F = (1; 3] \setminus [0; 4).$$

Lời giải:

Dùng định nghĩa các phép toán ta có:

$$A = (-3; 10] \quad B = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R} \quad C = (0; 7]$$

$$D = (-5; 3] \quad E = (3; +\infty) \quad F = \emptyset.$$

Câu 56. Xác định các tập hợp sau:

$$\text{a) } (-3; 6) \cap \mathbb{Z}; \quad \text{b) } (1; 2) \cap \mathbb{Z}; \quad \text{c) } (1; 2] \cap \mathbb{Z}; \quad \text{d) } [-3; 5) \cap \mathbb{N}.$$

Lời giải:

Dùng định nghĩa giao các tập hợp, ta có:

$$\text{a) } \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\text{b) } \emptyset$$

$$\text{c) } \{2\}$$

$$\text{d) } \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Câu 57. Cho $A = [-4; 4], B = [1; 7]$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = [-1; 4], A \cup B = [-4; 7], A \setminus B = [-4; 1), B \setminus A = (4; 7].$$

Câu 58. Cho $A = [-4; -2], B = (3; 7]$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = [-4; 7] \setminus (-2; 3], A \setminus B = [-4; -2], B \setminus A = (3; 7].$$

Câu 59. Cho $A = [-4; -2], B = (3; 7)$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = [-4; 7] \setminus (-2; 3], A \setminus B = [-4; -2], B \setminus A = (3; 7].$$

Câu 60. Cho $A = (-\infty; -2], B = [3; +\infty)$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R} \setminus (-2; 3), A \setminus B = (-\infty; -2], B \setminus A = [3; +\infty).$$

Câu 61. Cho $A = [3; +\infty), B = (0; 4)$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = [3; 4), A \cup B = [0; +\infty), A \setminus B = [4; +\infty), B \setminus A = (0; 3).$$

Câu 62. Cho $A = (1; 4), B = (2; 6)$. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải

$$A \cap B = (2; 4), A \cup B = (1; 6), A \setminus B = (1; 2], B \setminus A = (2; 4].$$

Câu 63. Cho $A = [1; 4], B = (2; 6), C = (1; 2)$. Tìm $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$.

Lời giải

$$A \cup B \cup C = [1; 6), A \cap B \cap C = \emptyset$$

Câu 64. Cho $A = [0; 4], B = (1; 5), C = (-3; 1]$. Tìm $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$.

Lời giải

$$A \cup B \cup C = [0; 5), A \cap B \cap C = \{1\}$$

Câu 65. Cho $A = (-\infty; 2], B = [2; +\infty), C = (0; 3)$. Tìm $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$.

Lời giải

$$A \cup B \cup C = \mathbb{R}, A \cap B \cap C = \{2\}$$

Câu 66. Cho $A = (-5; 1], B = [3; +\infty), C = (-\infty; -2)$. Tìm $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$.

Lời giải

$$A \cup B \cup C = \mathbb{R} \setminus (1; 3), A \cap B \cap C = \emptyset$$

Câu 67. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq 5\}$.

a) Dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp trên.

b) Biểu diễn các tập hợp A, B, C và D trên trục số. Chỉ rõ nó thuộc phần nào trên trục số.

Lời giải

a) $A = [-3; 2]$, $B = (0; 7)$, $C = (-\infty; -1)$, $D = (5; +\infty)$.

b) Học sinh tự biểu diễn.

Câu 68. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 7\}$. Hãy tìm tập hợp C thỏa mãn:

a) $C = A \cup B$

b) $C = A \cap B$

c) $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

d) $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Lời giải

a) Ta có $C = A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 7\}$

b) Ta có $C = A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 5\}$

c) Ta có $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0\}$, $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 5\}$

$\Rightarrow C = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = C = A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0 \text{ hoặc } 0 \leq x \leq 5\}$

d) Ta có $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0\}$; $B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} / 5 < x < 7\}$

$\Rightarrow C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0 \text{ hoặc } 5 < x < 7\}$

Câu 69. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 4\}$. Hãy tìm tập hợp D thỏa mãn:

a) $D = (A \cup B) \cup C$

b) $D = (A \cup B) \cap C$

c) $D = (A \cap B) \cap C$

d) $D = (A \cap B) \cup C$

e) $D = (A \cap B) \setminus C$

f) $D = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

g) $D = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$

h) $D = (B \setminus A) \setminus C$

i) $D = (B \setminus A) \cap C$

j) $D = (B \cup C) \setminus A$

Lời giải

a) Ta có $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 3\}$; $D = (A \cup B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 4\}$

b) Ta có $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 3\}$; $D = (A \cup B) \cap C = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 3\}$

- c) Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}; D = (A \cap B) \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$
- d) Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}; D = (A \cap B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$
- e) Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}; D = (A \cap B) \setminus C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 0\}$
- f) Ta có $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2\}; A \setminus C = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$
- g) Ta có $B \setminus A = \{3\}; C \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$ nên
 $D = (B \setminus A) \cup (C \setminus A) = C \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$
- h) Ta có $B \setminus A = \{3\}$ nên $D = (B \setminus A) \setminus C = \emptyset$
- i) Theo h) thì $D = (B \setminus A) \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$
- j) Ta có $B \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$ nên $D = (B \cup C) \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$

Dạng 6. (Nâng cao) Các bài toán tìm điều kiện của tham số

Câu 70. Có thể kết luận gì về số a biết:

- a) $(-1; 3) \cap (a; +\infty) = \emptyset$
- b) $(5; a) \cap (2; 8) = (2; 8)$
- c) $[3; 12) \setminus (-\infty; a) = \emptyset$

Lời giải:

Theo đề bài thì ta có kết quả

- a) $a \geq 3$
- b) $5 < a \leq 8$
- c) $a \geq 12$