

CHUYÊN ĐỀ
RÚT GỌN BIỂU THỨC

MỤC LỤC

VẤN ĐỀ 1. CĂN BẬC HAI.....	3
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	3
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.....	3
Dạng 1. Tìm căn bậc hai và căn bậc hai số học của một số.....	3
Dạng 2. So sánh các căn bậc hai số học.....	4
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.....	5
VẤN ĐỀ 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = A $	7
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	7
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.....	7
Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai.....	7
Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai.....	8
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.....	8
VẤN ĐỀ 3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = A $	10
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	10
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.....	10
Dạng 3: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa.....	10
Dạng 4. Giải phương trình chứa căn bậc hai.....	10
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.....	11
VẤN ĐỀ 4. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG (PHẦN 1).....	12
A. Tóm tắt lý thuyết.....	12
B. Bài tập và các dạng toán.....	12
Dạng 1. Thực hiện phép tính.....	12
Dạng 2. Rút gọn biểu thức.....	13
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.....	14
VẤN ĐỀ 5. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG (PHẦN II).....	15
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	15
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.....	15
Dạng 4. Rút gọn biểu thức.....	15
Dạng 5. Giải phương trình.....	16
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.....	16
VẤN ĐỀ 6. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI.....	18
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	18
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.....	18
Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc vào trong dấu căn.....	18
Dạng 2. So sánh các căn bậc hai.....	19
Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai.....	19
Dạng 4. Trục căn thức ở mẫu.....	20

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	21
VẤN ĐỀ 7: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN.....	23
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	23
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.....	23
Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai	23
Dạng 2: Chứng minh đẳng thức chứa căn thức bậc hai.....	24
Dạng 3. Rút gọn biểu thức và các bài toán liên quan	24
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	25
VẤN ĐỀ 8. CĂN BẬC BA.....	27
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	27
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.....	27
Dạng 1. Thực hiện phép tính có chứa căn bậc ba.....	27
Dạng 2. So sánh các căn bậc ba.....	28
Dạng 3. Giải phương trình chứa căn bậc ba	28
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	29
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN I).....	30
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	30
1. Căn bậc hai số học	30
2. Căn thức bậc hai	30
3. Liên hệ giữa phép nhân, phép chia với phép khai phương	30
4. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai.....	30
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	30
Dạng 1. Tìm điều kiện cho các biểu thức có nghĩa	30
Dạng 2: Tính và rút gọn biểu thức	31
Dạng 3. Giải phương trình và bất phương trình.....	32
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II)	34
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	34
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	34
Dạng 4. Tìm các giá trị nguyên của biến để các biểu thức cho trước có giá trị nguyên.....	34
Dạng 5. Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của biểu thức.....	34
Dạng 6. Rút gọn biểu thức và các bài toán liên quan	34
Một số bài tập nâng cao.....	36
HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ.....	37
VẤN ĐỀ 1.....	37
VẤN ĐỀ 2.....	38
VẤN ĐỀ 3.....	39
VẤN ĐỀ 4.....	39
VẤN ĐỀ 5.....	40
VẤN ĐỀ 6.....	41
VẤN ĐỀ 7.....	42
VẤN ĐỀ 8.....	42
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN I).....	43
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II).....	43

Chủ đề 1. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

VẤN ĐỀ 1. CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Căn bậc hai của số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.

* Chú ý:

+) Số dương a có đúng hai căn bậc hai, là hai số đối nhau:

- Số dương kí hiệu là \sqrt{a}

- Số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

+) Căn bậc hai của số 0 là 0.

+) Số âm không có căn bậc hai.

- Với số a không âm, số \sqrt{a} được gọi là căn bậc hai số học của a .

- Ta có $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

- So sánh hai căn bậc hai số học: $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a < b$.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm căn bậc hai và căn bậc hai số học của một số

Phương pháp giải: Ta sử dụng kiến thức sau:

1. Nếu a là số thực dương, các căn bậc hai của a là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$; căn bậc hai số học của a là \sqrt{a} .

2. Nếu a là số 0 thì căn bậc hai của a và căn bậc hai số học của a cũng bằng 0.

3. Nếu a là số thực âm thì a không có căn bậc hai và do đó không có căn bậc hai số học.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tìm các căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau:

- a) 0; b) 64; c) $\frac{9}{16}$; d) 0,04.

Bài 2. Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

- a) 12; b) -0,36; c) $2\sqrt{\frac{2}{7}}$; d) $\frac{0,2}{\sqrt{3}}$.

Bài 3. Tính:

- a) $\sqrt{9}$; b) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; c) $-\sqrt{3^2}$;
d) $-\sqrt{(-6)^2}$; e) $-\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$; f) $(-\sqrt{7})^2$.

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{1}{2}\sqrt{16}$; b) $0,5\sqrt{0,04} + 5\sqrt{0,36}$;

$$c) \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{16}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}};$$

$$d) -4\sqrt{\frac{-25}{-16}} + 5\sqrt{\frac{-9}{25}}.$$

Bài 5. Tìm giá trị x , biết:

$$a) x^2 - 16 = 0;$$

$$b) x^2 = 13;$$

$$c) x^2 + 9 = 0;$$

$$d) \sqrt{x} = 5;$$

$$e) -\frac{\sqrt{x}}{3} + 2 = 0;$$

$$f) \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 4.$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp

Bài 6. Tìm các căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau:

$$a) 81;$$

$$b) 0, 25;$$

$$c) 1, 44;$$

$$d) 1\frac{40}{81}.$$

Bài 7. Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

$$a) 13;$$

$$b) -\frac{3}{4};$$

$$c) \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$d) \frac{0,12}{\sqrt{0,3}}.$$

Bài 8. Tính

$$a) \sqrt{121};$$

$$b) \sqrt{\frac{16}{25}};$$

$$c) -\sqrt{(-8)^2};$$

$$d) (-\sqrt{2})^2;$$

$$e) -\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2;$$

$$f) \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}.$$

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \frac{2}{5}\sqrt{25} - \frac{1}{2}\sqrt{4};$$

$$b) 0,5\sqrt{0,09} + 5\sqrt{0,81};$$

$$c) \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{36}} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{4}{25}};$$

$$d) -2\sqrt{\frac{-36}{-16}} + 5\sqrt{\frac{-81}{25}}.$$

Bài 10. Tìm giá trị của x biết:

$$a) x^2 = \frac{1}{3};$$

$$b) x^2 + 36 = 0;$$

$$c) \sqrt{x} - 5 = \frac{1}{3};$$

$$d) -\sqrt{x} - 8 = 11;$$

$$e) \sqrt{x-1} - 1 = 3;$$

$$f) \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1 = 3.$$

Dạng 2. So sánh các căn bậc hai số học

Phương pháp giải: Ta có $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a < b$.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 11. So sánh

$$a) -2 \text{ và } \sqrt{3};$$

$$b) 3 \text{ và } 2\sqrt{2};$$

$$c) 11 \text{ và } \sqrt{99};$$

$$d) 5 \text{ và } \sqrt{17} + 1;$$

$$e) 3 \text{ và } \sqrt{15} - 1;$$

$$f) 1 - \sqrt{3} \text{ và } \sqrt{0,2}.$$

Bài 12. Tìm giá trị của x biết:

$$a) \sqrt{x} \geq 6;$$

$$b) \sqrt{x} < 1;$$

$$c) \sqrt{-x+1} \geq 6;$$

$$d) \sqrt{2x+1} \leq 2.$$

Bài 13. Tìm giá trị của x biết:

$$a) \sqrt{2x} \geq \sqrt{x};$$

$$b) * \sqrt{2x} \leq \sqrt{x^2}.$$

* Học sinh tự luyện các bài sau tại lớp:

Bài 14. So sánh

$$a) 2 \text{ và } 1 + \sqrt{2};$$

$$b) 3\sqrt{11} \text{ và } 12;$$

$$c) 1 \text{ và } \sqrt{3} - 1;$$

$$d) \sqrt{3} \text{ và } 2 - \sqrt{5};$$

$$e) -10 \text{ và } -2\sqrt{23};$$

$$f) -3\sqrt{29} \text{ và } -15.$$

Bài 15. Tìm các giá trị của x biết:

a) $\sqrt{x+1} \geq 5$; b) $\sqrt{x+1} < 2$; c) $\sqrt{-2x+2} > 8$; d) $\sqrt{2x+1} \leq 3$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 16. Tìm các căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau:

a) 225; b) 324; c) $\frac{169}{100}$;
d) $\frac{49}{289}$; e) 2, 25; f) 0, 16.

Bài 17. Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

a) 7; b) $-\left(-\frac{3}{4}\right)$; c) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; d) $\frac{0,25}{\sqrt{0,5}}$;

Bài 18. Tính

a) $\sqrt{\frac{225}{9}}$; b) $\sqrt{\frac{49}{25}}$; c) $-\sqrt{(-111)^2}$;
d) $\sqrt{13^2}$; e) $(-\sqrt{7})^2$; f) $-\left(\sqrt{\frac{1}{400}}\right)^2$.

Bài 19. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{2}{5}\sqrt{25} - \frac{9}{2}\sqrt{\frac{16}{81}} + \sqrt{144}$; b) $0,5\sqrt{0,09} - 2\sqrt{0,25} + \sqrt{\frac{1}{4}}$;
c) $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{64}{9}}$; d) $-\sqrt{\frac{-289}{-16}} + 10\sqrt{\frac{-0,09}{9}}$.

Bài 20. Tìm giá trị của x biết:

a) $x^2 - 196 = 0$; b) $x^2 = \frac{1}{15}$; c) $-x^2 + 324 = 0$;
d) $x^2 + 100 = 0$; e) $\sqrt{x} = \sqrt{7}$; f) $\sqrt{x} - 3 = \frac{1}{3}$.

Bài 21. Tìm giá trị của x biết:

a) $\sqrt{3x-1} - 4 = 13$; b) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 18$; c) $\sqrt{x} + 2 = \frac{1}{2}$;
d) $-2\sqrt{x} + 3 = 0$; e) $\frac{\sqrt{2x+4}}{2} = 3$; f) $\frac{2}{\sqrt{x-3}} = 4$.

Bài 22. Tìm giá trị của x biết:

a) $\sqrt{x+9} \leq 31$; b) $\sqrt{2x-1} > 6$;
c) $\sqrt{x+3} \geq 5$; d) $\sqrt{2x-1} + 5 < 2$.

Bài 23. So sánh các số sau:

a) 4 và $1 + \sqrt{7}$; b) $2\sqrt{5}$ và 8; c) -6 và $-2\sqrt{7}$;
d) 4 và $\sqrt{23} - 1$; e) $\sqrt{0,5}$ và $\sqrt{3} - 2$;
f) $\sqrt{2015} + \sqrt{2018}$ và $\sqrt{2016} + \sqrt{2017}$.

Bài 24*. Chứng minh $\sqrt{3}$ và $\sqrt{7}$ là các số vô tỉ.

Bài 25*. Cho biểu thức $A = x - 2\sqrt{x+2}$.

- a) Đặt $y = \sqrt{x+2}$. Hãy biểu thị A theo y ;
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Bài 26*. So sánh

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ và 10;

b) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}$ và 3.

Bài 26*. So sánh:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ và 10;

b) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}$ và 3;

VẤN ĐỀ 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

(PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải:

Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tính:

a) $-\frac{4}{3}\sqrt{(-0,4)^2}$;

b) $4\sqrt{(-3)^6} + 5\sqrt{(-2)^4}$;

c) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$;

d) $72 : \sqrt{3^2 + 4^2} - 3\sqrt{5^2 - 3^2}$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{(\sqrt{5} - 5)^2}$;

b) $\sqrt{(4 - \sqrt{11})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;

c) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 7)^2} + 2\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$.

Bài 3. Chứng minh:

a) $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$;

b) $8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$;

c) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 6$;

d) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = -2$.

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt{41 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt{49 - 12\sqrt{5}} + \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$;

d) $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$.

*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 5. Tính:

a) $5\sqrt{\left(\frac{-1}{5}\right)^2}$;

b) $3\sqrt{(-1,5)^2} - 4\sqrt{(-0,5)^2}$;

c) $(\sqrt{0,25} - \sqrt{225} + \sqrt{2,25}) : \sqrt{169}$;

d) $(\sqrt{0,04} + \sqrt{121} - \sqrt{1,44})\sqrt{81}$.

Bài 6. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{5}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{7} - 5)^2} + \sqrt{7}$;

c) $\sqrt{(\sqrt{11} - 4)^2} + \sqrt{(\sqrt{11} + 4)^2}$;

d) $\sqrt{(2 - 3\sqrt{3})^2} + \sqrt{(8 - 3\sqrt{3})^2}$.

Bài 7. Chứng minh:

a) $28 - 10\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 5)^2$;

b) $193 - 132\sqrt{2} = (11 - 6\sqrt{2})^2$;

c) $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} = 10$;

d) $\sqrt{193 - 132\sqrt{2}} + \sqrt{193 + 132\sqrt{2}} = 22$.

Bài 8. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{10 + 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt{39 - 12\sqrt{3}} + \sqrt{39 + 12\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{31 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{31 + 12\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} + \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải: Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{ khi } A \geq 0 \\ -A & \text{ khi } A < 0 \end{cases}$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5\sqrt{25a^2} - 25a$ với $a \leq 0$;

b) $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{16a^4} + 6a^2$;

d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ với $a \leq 0$.

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $x \geq 2$;

b) $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2}$ với $x \leq -3$;

c) $4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $0 \leq x \neq 9$;

d) $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2}$ với $x \neq -2$.

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4\sqrt{16a^2} - 16a$ với $a \leq 0$;

b) $\sqrt{64a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{25a^4} + 6a^2$;

d) $3\sqrt{81a^6} - 6a^3$ với $a \leq 0$.

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ với $x \geq 1$;

b) $3x + \sqrt{9 - 6x + x^2}$ với $x \geq 3$;

c) $5\sqrt{x} - \frac{(x + 10\sqrt{x} + 25)(\sqrt{x} - 5)}{x - 25}$ với $0 \leq x \neq 25$;

d) $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$ với $x \neq 2$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 13. Tính:

a) $-\frac{7}{9} \cdot \sqrt{(-0.81)^2}$;

b) $\frac{6}{5} \sqrt{\left(\frac{-1}{36}\right)^2}$;

c) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$;

d) $72 : \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 36} - \sqrt{225}$.

Bài 14. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})^2} + \sqrt{(11 + 6\sqrt{2})^2}$;

b) $\sqrt{(10 - 4\sqrt{6})^2} - \sqrt{(10 + 4\sqrt{6})^2}$;

$$c) \sqrt{(4-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{5})^2};$$

$$d) \sqrt{(7+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}.$$

Bài 15. Chứng minh:

$$a) 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2;$$

$$b) 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2;$$

$$c) (5 - \sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2};$$

$$d) \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 4.$$

Bài 16. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}};$$

$$b) \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}};$$

$$c) \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}};$$

$$d) \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}.$$

Bài 17. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{64a^2} + 2a;$$

$$b) 3\sqrt{9a^6} - 6a^3.$$

Bài 18. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} \text{ với } -3 \leq a \leq 3;$$

$$b) \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} \text{ với } 1 \leq a \leq 2.$$

Bài 19. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{a\sqrt{a} - 8 + 2a - 4\sqrt{a}}{a - 4};$$

$$b) \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}}.$$

VẤN ĐỀ 3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

(PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 3: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa

Phương pháp giải: Chú ý rằng biểu thức \sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{2x-4}$; b) $\sqrt{7-6x}$; c) $\sqrt{\frac{-2}{3x-1}}$; d) $\sqrt{\frac{3x-2}{x^2-2x+4}}$.

* Chú ý rằng với a là số dương ta luôn có:

$$x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{(3-5x)(x-6)}$; b) $\sqrt{\frac{2x-4}{5-x}}$; c) $\sqrt{x^2-8x-9}$; d) $\sqrt{16-x^2}$.

**Học sinh luyện bài tập sau đây tại lớp*

Bài 3. Với giá trị nào sau đây của x thì căn thức có nghĩa:

a) $\sqrt{2x-3}$; b) $\sqrt{-7x}$; c) $\sqrt{1-4x}$; d) $\sqrt{3x^2+1}$.

Bài 4. Với giá trị nào sau đây của x thì căn thức có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2}{x-1}}$; b) $\sqrt{\frac{-7-x}{3}}$; c) $\sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$; d) $\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{2x-3}}$.

Bài 5. Với giá trị nào sau đây của x thì căn thức có nghĩa:

a) $\sqrt{(x-2)(x-6)}$; b) $\sqrt{x^2-4x-5}$; c) $\sqrt{x^2-9}$; d) $\sqrt{1-x^2}$.

Dạng 4. Giải phương trình chứa căn bậc hai.

Phương pháp giải: Ta chú ý một số phép biến đổi tương đương liên quan đến căn thức bậc hai sau đây:

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}; \quad \sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 (\vee B \geq 0) \\ A = B \end{cases}; \quad \sqrt{A^2} = \sqrt{B^2} \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

Giáo viên hướng dẫn HS giải bài tập sau:

Bài 6. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-6} = 13$;

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 1$;

c) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 9x - 1$;

d) $\sqrt{x^2 - x - 4} = \sqrt{x-1}$;

e) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$;

f) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2$.

Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

Bài 7. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x+9} = 3$;

b) $\sqrt{2x^2 + 2} = 3x - 1$;

c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 19x - 1$;

d) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x-3}$;

e) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{x^2 + 12x + 36}$;

f) $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = 2$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 8. Với giá trị nào sau đây của x thì căn thức có nghĩa:

a) $\sqrt{-5x-10}$;

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$;

c) $\sqrt{2x^2 + 4x + 5}$;

d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 4}$.

Bài 9. Với giá trị nào sau đây của x thì căn thức có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{-5}{-x-7}}$;

b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$;

c) $\sqrt{\frac{x+3}{5-x}}$;

d) $\sqrt{\frac{1}{x^2 - 5x + 6}}$.

Bài 10. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x+9} = 3$;

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 1$;

c) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4 - x$;

d) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$.

Bài 11. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + 4} = x - 2$;

b) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 3 - 19x$;

c) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$;

d) $\sqrt{2x-2} + 2\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+13+8\sqrt{2x-3}} = 5$.

Bài 12. a) Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$.

b) Cho x, y, z là số thực dương. Chứng minh: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Bài 13*. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$;

b) $\sqrt{49x^2 - 22x + 9} + \sqrt{49x^2 + 22x + 9}$.

Bài 14 .* Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức:

$$x + y + z + 8 = 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-2} + 6\sqrt{z-3} .$$

VẤN ĐỀ 4. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG (PHẦN 1)

A. Tóm tắt lý thuyết

*Khai phương một tích:

Với $A \geq 0, B \geq 0$, ta có $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

*Khai phương một thương:

Với $A \geq 0, B > 0$, ta có $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

B. Bài tập và các dạng toán.

Dạng 1. Thực hiện phép tính.

Phương pháp giải: Áp dụng công thức khai phương một tích và khai phương một thương ở trên.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh làm các bài tập sau:*

Bài 1. Tính:

a) $\sqrt{45 \cdot 80}$; b) $\sqrt{2,5 \cdot 14,4}$; c) $\sqrt{10 \cdot \sqrt{40}}$; d) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$.

Bài 2. Tính:

a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$; b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; c) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$; d) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$.

Bài 3. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cdot \sqrt{2}$; b) $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}$;
c) $\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{50}{3}}\right) \cdot \sqrt{6}$; d) $\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{8}\right) \cdot 3\sqrt{6}$.

Bài 4. Thực hiện phép tính:

a) $(\sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; b) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$;
c) $(\sqrt{325} - \sqrt{117} + 2\sqrt{208}) : \sqrt{13}$; d) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{6}}\right) : \left(\frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$;

**Học sinh tự luyện các bài sau tại lớp:*

Bài 5. Tính:

$$\text{a) } \sqrt{32 \cdot 200}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}; \quad \text{c) } \sqrt{11} \cdot \sqrt{1100}; \quad \text{d) } \sqrt{13} \cdot \sqrt{52}.$$

Bài 6. Tính:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{25}{64}}; \quad \text{b) } \sqrt{1\frac{9}{16}}; \quad \text{c) } \sqrt{\frac{-999}{111}}; \quad \text{d) } \frac{\sqrt{643} \cdot \sqrt{34,3}}{\sqrt{567}}.$$

Bài 7. Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\sqrt{\frac{16}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \cdot \sqrt{3}; & \text{b) } & (\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}; \\ \text{c) } & \left(\sqrt{\frac{8}{2}} - \sqrt{6} + \sqrt{\frac{50}{3}} \right) \sqrt{6}; & \text{d) } & (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Bài 8. Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\sqrt{\frac{1}{11}} - \sqrt{\frac{16}{11}} + \sqrt{11} \right) : \sqrt{11}; & \text{b) } & (20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15}; \\ \text{c) } & \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3} \right) : \sqrt{3}; & \text{d) } & \sqrt{3 - \sqrt{5}} : \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dạng 2. Rút gọn biểu thức.

Phương pháp giải: Áp dụng công thức khai phương của một phương hoặc khai phương của một tích.

*Giáo viên hướng dẫn học sinh làm bài tập sau:

Bài 9. Rút gọn:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}; & \text{b) } & \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}; \\ \text{c) } & \frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}; & \text{d) } & \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - (2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Bài 10. Rút gọn:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 1}; & \text{b) } & \frac{x - \sqrt{xy}}{x - y} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y. \\ \text{c) } & \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y}; & \text{d) } & \frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} \end{aligned}$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.

Bài 11. Tính:

$$a) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}};$$

$$b) \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}};$$

$$c) \left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} - 2\right) \cdot \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} - 2\right);$$

$$d) \left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{1,2} + \sqrt{2} - 4\sqrt{\frac{1}{5}}\right).$$

Bài 12. Rút gọn biểu thức sau:

$$a) \frac{x + \sqrt{xy}}{x - y} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y;$$

$$b) \frac{\sqrt{a+a}}{\sqrt{a+1}};$$

$$c) \frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4 - a}{\sqrt{a} - 2};$$

$$d) \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - \sqrt{xy} + y}.$$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 13. Tính :

$$a) \sqrt{2} \cdot \sqrt{18}; \quad b) \sqrt{5} \cdot \sqrt{125}; \quad c) \sqrt{\frac{9}{196}}; \quad d) \sqrt{2\frac{7}{81}}.$$

Bài 14. Tính :

$$a) \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}; \quad b) (\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}) : \sqrt{7};$$

$$c) \sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}; \quad d) \sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25} \cdot 2\frac{34}{81}}.$$

Bài 15. Thực hiện phép tính:

$$a) (\sqrt{12} + 2\sqrt{27}) \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{150}; \quad b) (\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{21};$$

$$c) (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}); \quad d) \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Bài 16. Rút gọn biểu thức sau:

$$a) \frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}; \quad b) \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}; \quad c) \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2}; \quad d) \frac{x + \sqrt{5}}{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5}.$$

VẤN ĐỀ 5. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại các công thức khai phương ở vấn đề 4:

Khai phương một tích:

$$\text{Với } A \geq 0, B \geq 0 \text{ ta có } \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}.$$

Khai phương một thương:

$$\text{Với } A \geq 0, B > 0 \text{ ta có } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tính:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}};$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{2}};$$

$$\text{c) } \frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}};$$

$$\text{d) } \sqrt{(1 - \sqrt{2006})^2} \cdot \sqrt{2017 + 2\sqrt{2016}}.$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 2. Tính:

$$\text{a) } \sqrt{12,1 \cdot 360};$$

$$\text{b) } \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4};$$

$$\text{c) } -0,4 \sqrt{(-0,4)^2};$$

$$\text{d) } \sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}.$$

Bài 3. Tính:

$$\text{a) } (\sqrt{15} + 2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{5};$$

$$\text{b) } 2\sqrt{5}(2 - 3\sqrt{5}) + (1 - 2\sqrt{5})^2 + 6\sqrt{5};$$

Dạng 4. Rút gọn biểu thức

Phương pháp giải: Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, & A \geq 0 \\ -A, & A < 0 \end{cases}$

Và phép khai phương của một tích hoặc một thương.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

$$\text{a) } \sqrt{27 \cdot 48(1-a)^2} \text{ với } a < 1.$$

$$\text{b) } \frac{1}{a-b} \sqrt{a^4(a-b)^2} \text{ với } a < b.$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}} \text{ với } a \geq 0$$

$$\text{c) } \sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a \text{ với } a \geq 0.$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{a-b} \text{ với } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b;$$

$$\text{b) } \frac{2a + \sqrt{ab} - 3b}{2a - 5\sqrt{ab} + 3b} \text{ với } a \geq 0, b \geq 0, 4a \neq 9b.$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) (3-a)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180a^4};$$

$$b) \sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}} \text{ với } a < 3;$$

$$c) \frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}} \text{ với } y > 0;$$

$$d) \frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^2}} \text{ với } a < 0, b \neq 0.$$

Bài 7. Rút gọn biểu thức sau :

$$a) \frac{\sqrt{a-2a}}{2\sqrt{a-1}};$$

$$b) \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}};$$

$$c) \frac{\sqrt{x-3}}{x-9};$$

$$d) \frac{x+\sqrt{x}\sqrt{y}}{x-y}.$$

Dạng 5. Giải phương trình

Phương pháp giải : chú ý rằng:

$$*\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$*\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hay } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}.$$

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

Bài 8. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2;$$

$$b) \sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x+3};$$

$$c) \sqrt{2-x} - \sqrt{x^2-4} = 0$$

$$d) \sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4.$$

Bài 9. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x^2-8x+16} = 5;$$

$$b) \frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5};$$

$$c) \sqrt{x-3} - 2\sqrt{x^2-9} = 0;$$

$$d) 2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20.$$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{\frac{x-3}{2x+1}} = 2;$$

$$b) \frac{10x-7}{\sqrt{3x+5}} = \sqrt{3x+5};$$

$$c) \sqrt{x-2} - 2\sqrt{x^2-4} = 0;$$

$$d) \sqrt{x-2} - \sqrt{4x-8} - \frac{1}{2}\sqrt{9x-18} = 2.$$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 11. tính:

$$a) \sqrt{2.80};$$

$$b) \sqrt{\frac{25}{144}};$$

$$c) \sqrt{5} \cdot \sqrt{45};$$

$$d) \sqrt{2 \frac{14}{25}}.$$

Bài 12. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}};$$

$$b) \frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}};$$

$$c) (2+\sqrt{5}+\sqrt{3})(2+\sqrt{5}-\sqrt{3});$$

$$d) \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}.$$

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } \sqrt{\frac{x-2\sqrt{x+1}}{x+2\sqrt{x+1}}} \text{ với } x \geq 0;$$

$$\text{c) } \frac{x+\sqrt{7}}{x^2+2x\sqrt{7}+7};$$

$$\text{b) } \frac{2}{x^2-y^2} \sqrt{\frac{3x^2+6xy+3y^2}{4}} \text{ với } x+y > 0;$$

$$\text{d) } \frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+2\sqrt{xy}+y}.$$

Bài 14. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } \sqrt{x^2-10x+25} = 7;$$

$$\text{c) } \sqrt{25x^2-9} = 2\sqrt{5x-3};$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x+1}} = 2;$$

$$\text{d) } \sqrt{x-5} + \sqrt{4x-20} - \frac{1}{5}\sqrt{9x-45} = 3.$$

Bài 15. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2;$$

$$\text{c) } \frac{10x-3}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1};$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{x-3}{2x+1}} = 2;$$

$$\text{d) } \sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x-3}.$$

Bài 16. Cho x là số thực bất kì. Chứng minh ta luôn có : $\frac{x^4+5}{\sqrt{x^4+4}} > 2$.

VẤN ĐỀ 6. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn : $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ với $B \geq 0$.

- Đưa thừa số vào trong dấu căn : $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.

- Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai :

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A.B}{B^2}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{A.B} \text{ với } B \neq 0, A.B \geq 0.$$

- Trục căn thức ở mẫu :

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}.$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc vào trong dấu căn

Phương pháp giải :

1. Cách đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn : $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ với $B \geq 0$.

2. Cách đưa thừa số vào trong dấu căn : $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

a) $\sqrt{7x^2}$ với $x \geq 0$;

b) $\sqrt{7y^2}$ với $y \leq 0$;

c) $\sqrt{25x^2}$ với $x \geq 0$;

d) $\sqrt{48y^4}$.

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

a) $x\sqrt{13}$ với $x \geq 0$;

b) $x\sqrt{2}$ với $x \leq 0$;

c) $x\sqrt{\frac{15}{x}}$ với $x \geq 0$;

d) $x\sqrt{\frac{-15}{x}}$ với $x < 0$.

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp :

Bài 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{13x^2}$ với $x \geq 0$;

b) $\sqrt{12y^2}$ với $y \leq 0$;

c) $\sqrt{81x^3}$ với $x \geq 0$;

d) $\sqrt{48y^8}$.

Bài 4. Đưa các thừa số vào trong dấu căn

a) $x\sqrt{13}$ với $x \geq 0$;

b) $x\sqrt{3}$ với $x \leq 0$;

c) $2y\sqrt{\frac{7}{y}}$ với $y > 0$;

d) $2y\sqrt{\frac{-7}{y}}$ với $y < 0$.

Dạng 2. So sánh các căn bậc hai

Phương pháp giải : Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn rồi so sánh.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :

Bài 5. So sánh các số

a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$;

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$;

c) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$;

d) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bài 6. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

a) $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}; 4\sqrt{2}$;

b) $6\sqrt{2}; \sqrt{38}; 3\sqrt{7}; 2\sqrt{14}$.

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp :

Bài 7. So sánh các số :

a) $3\sqrt{5}$ và $2\sqrt{7}$;

b) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{14}}$;

c) $3\sqrt{21}$ và $2\sqrt{47}$;

d) $\frac{5}{9}\sqrt{3}$ và $\frac{2}{7}\sqrt{14}$.

Bài 8. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần :

a) $7\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}; 5\sqrt{2}$;

b) $2\sqrt{5}; 2\sqrt{40}; 3\sqrt{8}; 5\sqrt{30}$.

Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải : Đưa các thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn rồi rút gọn.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $5\sqrt{48} - 4\sqrt{27} - 2\sqrt{57} + \sqrt{108}$;

b)

$a \geq 0$.

$5\sqrt{16a} - 4\sqrt{25a} - 2\sqrt{100a} + \sqrt{169a}$ với

Bài 10. Rút gọn biểu thức sau :

a) $3\sqrt{a^2} - 5a$ với $a \leq 0$;

b) $3\sqrt{4a^6} - 5a^3$ với $a \leq 0$;

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

d) $x - 2 - \sqrt{4 - 4x + x^2}$ với $x \geq 2$.

- Học sinh tự luyện các bài sau tại lớp :

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $2\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 3\sqrt{6} - \sqrt{150}$;

b) $5\sqrt{4a} - 4\sqrt{a^2} - \sqrt{100a}$ với $a > 0$.

Bài 12. Rút gọn biểu thức sau :

a) $\sqrt{4a^2} + 5a$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{25x^2} + 3x$ với $x \leq 0$;

c) $x - 2 - \sqrt{4 - 4x + x^2}$ với $x \leq 2$;

d) $3 - x + \sqrt{9 + 9x + x^2}$ với $x \leq -3$.

Dạng 4. Trục căn thức ở mẫu

Phương pháp giải :

1. Cách khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai :

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{A \cdot B} \text{ với } B \neq 0, A \cdot B \geq 0.$$

2. Cách trục căn thức ở mẫu :

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}.$$

- Giáo viên hướng dẫn học sinh làm các bài tập sau :

Bài 13. Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn và rút gọn (nếu được) :

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$;

b) $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{\frac{5a^3}{49b}}$ với $a \geq 0, b > 0$;

d) $-7xy\sqrt{\frac{3}{xy}}$ với $x < 0, y > 0$.

Bài 14. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn:

a) $\frac{10 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$; b) $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$.

Bài 15. Trục căn thức và thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 11)$;

b) $\frac{1}{3 - \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5} - 1}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{5}$;

d) $\frac{1}{5 + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{5 - 3\sqrt{2}}$.

*Học sinh tự luyện tập các bài tập sau tại lớp:

Bài 16. Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn và rút gọn (nếu được):

a) $\sqrt{\frac{2}{7}}$;

b) $\sqrt{\frac{x^2}{31}}$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{\frac{5b^3}{49a}}$ với $a > 0, b \geq 0$;

d) $-7xy\sqrt{\frac{16}{xy}}$ với $x < 0, y < 0$.

Bài 17. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn:

a) $\frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

b) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{10}}{4\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$;

c) $\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$.

Bài 18. Trục căn thức và thực hiện phép tính:

a) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (2+\sqrt{3})$;

b) $\left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1\right)$;

c) $\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - 2\right) \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - 2\right)$;

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{2}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 19. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$;

b) $10\sqrt{28} - 2\sqrt{75} - 3\sqrt{343} - \frac{3}{2}\sqrt{396}$;

c) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$;

d) $\frac{1}{2\sqrt{11}-3\sqrt{7}}$.

Bài 20. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{9a^4} + 2a^2$;

b) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

d) $3-x+\sqrt{x^2+6x+9}$ với $x > -3$.

Bài 21. Tính:

a) $(2\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125}) \cdot \sqrt{5}$;

b) $2\sqrt{\frac{16}{5}} - 3\sqrt{\frac{1}{45}} - 6\sqrt{\frac{4}{20}}$;

c) $3 + \sqrt{7-2\sqrt{6}} - 3\sqrt{6}$;

d) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Bài 22. Tính:

$$b) \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}};$$

$$b) 2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}};$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{8+\sqrt{7}}} + \sqrt{175} - \frac{6\sqrt{2}-4}{3-\sqrt{2}};$$

$$d) \sqrt{10-\sqrt{84}} - \sqrt{34+2\sqrt{189}}.$$

Bài 23. Tính:

$$a) \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3+5}};$$

$$b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1};$$

$$c) \sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}};$$

$$d) \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$$

Bài 24. Giải phương trình:

$$a) \sqrt{x-5} + 2\sqrt{25x-125} = 22; \quad b) \sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4;$$

$$c) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-6}; \quad d) \sqrt{4x-8} - \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + \sqrt{9x-18} = 9.$$

Bài 25. Giải phương trình:

$$a) \sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x+3};$$

$$b) \sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4;$$

$$c) \frac{2}{3}\sqrt{9x-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x-16} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4;$$

$$d) 5\sqrt{\frac{9x-27}{25}} - 7\sqrt{\frac{4x-12}{9}} - 7\sqrt{x^2-9} + 18\sqrt{\frac{9x^2-81}{81}} = 0.$$

Bài 26. Tìm x, y, z biết rằng:

$$a) \sqrt{x} + 2\sqrt{y+1} + \sqrt{y} = \sqrt{4y+4};$$

$$b) \sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Bài 27. Rút gọn:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Bài 28. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}.$$

Bài 29. Chứng minh với mọi số tự nhiên n khác 0, ta luôn có:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

Bài 30. Chứng minh:

$$\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}.$$

VẤN ĐỀ 7: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng linh hoạt thích hợp các phép biến đổi đơn giản như: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, khử căn ở mẫu và trục căn thức ở mẫu để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn ...

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải:

Bước 1. Vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết làm xuất hiện căn thức cùng loại.

Bước 2. Cộng, trừ các căn thức bậc hai cùng loại.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{32} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt{18};$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5};$

c) $\sqrt{(1-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{4-2\sqrt{3}};$

d) $\sqrt{96} - 6\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}}.$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0;$

b) $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - \sqrt{9a}$ với $a \geq 0, b \geq 0.$

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2\sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{\frac{48}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{75}{16}};$

b) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22};$

c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{8} - 2\sqrt{15};$

d) $(\sqrt{48} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - 2\sqrt{45} : \sqrt{3}.$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2};$$

$$b) 2\sqrt{a} - \sqrt{9a^3} + a^2 \sqrt{\frac{4}{a}} + \frac{2}{a^2} \sqrt{25a^5} \text{ với } a > 0.$$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức chứa căn thức bậc hai

Phương pháp giải: Thực hiện các phép biến đổi căn thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chứng minh.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = 1 \text{ với } a \geq 0, a \neq 1.$$

$$b) \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a| \text{ với } a+b > 0 \text{ và } b \neq 0.$$

**Học sinh tự luyện tập bài tập sau tại lớp:*

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{2};$$

$$b) \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \text{ với } a \neq b \text{ và } a \geq 0, b \geq 0.$$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức và các bài toán liên quan

**Phương pháp giải:*

1. Để rút gọn biểu thức, ta thực hiện các phép biến đổi căn thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ.

2. Các bài toán liên quan thường gặp là:

- Tính giá trị của biểu thức với giá trị của biến cho trước.
- Giải phương trình hoặc bất phương trình chứa căn bậc hai.
- Tìm giá trị nguyên của biểu thức.
- So sánh biểu thức với một số.
- Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 7. Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn M ;

b) Tính giá trị của M khi $x = 11 - 6\sqrt{2}$;

c) Tìm các giá trị thực của x để $M = 2$;

d) Tìm các giá trị thực của x để $M < 1$;

e) Tìm các giá trị nguyên để M nguyên.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 8. Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

- Tính giá trị của A khi $x = 4$.
- Tìm các giá trị thực của x để $B = \frac{1}{3}$;
- So sánh B với 1;
- Đặt $P = A : B$. Tìm x thỏa mãn $P\sqrt{x} + (2\sqrt{5} - 1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$.

Bài 9. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right)$ với

$x \geq 0, x \neq 1$;

- Rút gọn P ;
- Tìm x để $P < \frac{1}{2}$;
- Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$;
- Tìm x nguyên để P nguyên;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau:

- $5\sqrt{27} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$;
- $\left(3 + \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}} + 2 \right)$;
- $\sqrt{96} - 6\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}}$;
- $\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{11}{2}-2\sqrt{6}}$.

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau

- $\sqrt{\frac{4}{7}} - 10\sqrt{\frac{7}{25}} - 6\sqrt{\frac{1}{28}}$;
- $(\sqrt{10} + \sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}}$;
- $\frac{\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{7-\sqrt{33}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$;
- $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{2}{4+\sqrt{15}} - \frac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Bài 12. Cho biểu thức $Q = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$.

- Rút gọn Q ;
- Tính giá trị của Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$;
- Tìm các giá trị của x để $Q = 3$;
- Tìm các giá trị của x để $Q > \frac{1}{2}$;
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $Q \in \mathbb{Z}$.

Bài 13. Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$.

- Rút gọn P ;
- Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$;

c) Tìm x thỏa mãn $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Bài 14. Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} \right)$.

- Rút gọn P ;
- Tính giá trị của x thỏa mãn $P < 0$;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 15. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

- Rút gọn P ;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P ;
- Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 16. Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$; $B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$, với $x \geq 0, x \neq 9$ và $x \neq 25$.

- Rút gọn các biểu thức A và B ;
- Đặt $P = A : B$. So sánh P với 1;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

VẤN ĐỀ 8. CĂN BẬC BA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho: $x^3 = a$, kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.
- Mọi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của số dương là số dương; của một số âm là số âm; của 0 là 0.
- Các công thức liên quan đến căn bậc ba:

$$A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}.$$

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A = B.$$

$$\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}} \text{ với } B \neq 0.$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính có chứa căn bậc ba

Phương pháp giải: Áp dụng công thức:

$$\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

và các hằng đẳng thức:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tính:

a) $\sqrt[3]{27}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$; c) $\sqrt[3]{64a^3}$; d) $\sqrt[3]{-8a^3b^6}$;

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $2\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{192}$; b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$.

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau

a) $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; b) $B = \sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 4. Tính

a) $\sqrt[3]{729}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$; c) $\sqrt[3]{343a^3}$; d) $\sqrt[3]{-512a^3b^6}$.

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau

a) $2\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{125}$; b) $\sqrt[3]{\frac{-27}{512}} + \sqrt[3]{64} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{1000}$;

$$c) \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-1} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3};$$

$$d) \sqrt[3]{125x^3 + 75x^2 + 15x + 1}.$$

Bài 6. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \sqrt[3]{(\sqrt{5}+1)(6+2\sqrt{5})};$$

$$b) \sqrt[3]{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)};$$

$$c) \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{216};$$

$$d) (\sqrt[3]{9}+1)^3 - (\sqrt[3]{9}-1)^3.$$

Bài 7. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}};$$

$$b) B = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}};$$

$$c) C = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot (\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}});$$

$$d) D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}.$$

Dạng 2. So sánh các căn bậc ba

Phương pháp giải: Ta có $\sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B$.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 8. So sánh:

$$a) A = 2\sqrt[3]{3} \text{ và } B = \sqrt[3]{23};$$

$$b) A = 33 \text{ và } B = 3\sqrt[3]{133}.$$

Bài 9. So sánh:

$$A = \sqrt[3]{20+40\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \text{ và } B = 2\sqrt{5}.$$

Bài 10. Tìm x biết:

$$a) \sqrt[3]{2x+1} > -5;$$

$$b) \sqrt[3]{x^3+3x^2+6x+4} > x+1.$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 11. So sánh:

$$a) A = 3\sqrt[3]{2} \text{ và } B = \sqrt[3]{42};$$

$$b) A = 22 \text{ và } B = 3\sqrt[3]{122};$$

$$c) A = 2\sqrt[3]{6} \text{ và } B = \sqrt[3]{54};$$

$$d) A = 5\sqrt[3]{6} \text{ và } B = 6\sqrt[3]{5}.$$

Bài 12. So sánh: $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ và $B = 2$.

Bài 13. Tìm x biết:

$$a) \sqrt[3]{3-2x} > 4;$$

$$b) \sqrt[3]{-x^3-3x^2+6x-3} > -x-1.$$

Dạng 3. Giải phương trình chứa căn bậc ba

Phương pháp giải: Áp dụng $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 14. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt[3]{2x+1} = 3;$$

$$b) \sqrt[3]{2-3x} = -2.$$

Bài 15. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+1} = 3;$$

$$b) \sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5.$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 16. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-1}+1=x;$

b) $\sqrt[3]{5+x}-x=5.$

Bài 17. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{2x+2}=3;$

b) $\sqrt[3]{12-2x}+\sqrt[3]{23+2x}=5.$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 18. Tính:

a) $\sqrt[3]{512};$ b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}};$ c) $\sqrt[3]{\frac{343a^3b^6}{-216}};$ d) $\sqrt[3]{-64a^6b^6}.$

Bài 19. Tính:

a) $\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{-8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{-125};$ b) $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}+\sqrt[3]{125}-\frac{1}{3}\sqrt{27};$
 c) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1};$ d) $\sqrt[3]{(8x^3+12x^2+6x+1)}.$

Bài 20. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}-\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{4};$ b) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2});$
 c) $\sqrt[3]{-64}-\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{216};$ d) $(\sqrt[3]{4}+1)^3-(\sqrt[3]{4}-1)^3.$

Bài 21. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10};$ b) $B=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}};$
 c) $C=\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}};$ d) $D=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}).$

Bài 22. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})};$ b) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)};$
 c) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$ d) $\sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}+\sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}.$

Bài 23. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x+1}=1;$ b) $\sqrt[3]{2-3x}=-3.$

Bài 24. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2}+2=x;$ b) $\sqrt[3]{x^3+2x^2}=x+2.$

Bài 25. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+8}=2;$ b) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2.$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai số học

- Căn bậc hai của một số không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai là \sqrt{a} (và gọi là căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0 và nó cũng là căn bậc hai số học của 0.
- Với hai số không âm a, b , ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Căn thức bậc hai

- Với A là một biểu thức đại số, ta gọi \sqrt{A} là căn thức bậc hai của A .
- \sqrt{A} xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm.
- $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

3. Liên hệ giữa phép nhân, phép chia với phép khai phương

- Khai phương một tích: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ ($A \geq 0, B \geq 0$)
- Nhân các căn bậc hai: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$ ($A \geq 0, B \geq 0$)
- Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ($A \geq 0, B > 0$)
- Chia căn bậc hai: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$ ($A \geq 0, B > 0$)

4. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai

- Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$
- Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$
- Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$
- Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$
- Với $A \cdot B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$
- Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$
- Với $A > 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm điều kiện cho các biểu thức có nghĩa

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-3x+2}$

b) $\sqrt{9x^2-6x+1}$

c) $\sqrt{x^2+2x+3}$

d) $\sqrt{x^2-x+1}$

e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$

g) $\frac{5}{\sqrt{1-\sqrt{x-1}}}$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì các biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}$

b) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}}$

c) $\sqrt{x^2-4}$

d) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

e) $\frac{\sqrt{-3x}}{x^2-1}$

g) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$

Dạng 2: Tính và rút gọn biểu thức

Bài 3. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{108}$;

b) $3\sqrt{2}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

c) $\sqrt{27}-2\sqrt{3}+2\sqrt{48}-3\sqrt{75}$

d) $10\sqrt{28}-2\sqrt{275}-3\sqrt{343}-\frac{3}{2}\sqrt{396}$.

Bài 4. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-6\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{200}$;

b) $\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}$;

c) $6\sqrt{\frac{8}{9}}-5\sqrt{\frac{32}{25}}+14\sqrt{\frac{18}{49}}$

d) $2\sqrt{\frac{16}{3}}-3\sqrt{\frac{1}{27}}-6\sqrt{\frac{4}{75}}$.

Bài 5. Thực hiện phép tính

a) $\left(2\sqrt{\frac{16}{3}}-3\sqrt{\frac{1}{27}}-6\sqrt{\frac{4}{75}}\right)\cdot\sqrt{3}$;

b) $\left(6\sqrt{\frac{8}{9}}-5\sqrt{\frac{32}{25}}+14\sqrt{\frac{18}{49}}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$;

c) $(\sqrt{5}+2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}-2\sqrt{2})$;

d) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$.

Bài 6. Thực hiện phép tính

a) $(20\sqrt{12}-15\sqrt{27}):5\sqrt{3}$;

b) $(\sqrt{75}+\sqrt{243}-\sqrt{48}):\sqrt{3}$;

c) $(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2$;

d) $(\sqrt{28}-2\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{7}+\sqrt{84}$.

Bài 7. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;

b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$;

d) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

e) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$;

g) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$.

Bài 8. Rút gọn biểu thức

a) $\frac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{8}{1-\sqrt{5}}$;

b) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$;

$$c) 2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}} ;$$

$$d) \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} ;$$

Bài 9. Rút gọn biểu thức:

$$a) \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} ;$$

$$b) \frac{4}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}-3} ;$$

$$c) \sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}} ;$$

$$d) \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} ;$$

Bài 10. Rút gọn biểu thức:

$$a) \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} ;$$

$$b) (\sqrt{2}+1)^3 - (\sqrt{2}-1)^3 ;$$

$$c) \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1\right)$$

$$d) \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} .$$

Dạng 3. Giải phương trình và bất phương trình

Bài 11. Giải phương trình

$$a) \sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0 ;$$

$$b) \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1} = 16 ;$$

$$c) \sqrt{4x+20} + \sqrt{x+5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x+45} = 4 ;$$

$$d) \frac{1}{3}\sqrt{2x} - \sqrt{8x} + \sqrt{18x} - 10 = 2 ;$$

Bài 12. Giải các phương trình

$$a) \sqrt{x^2-6x+9} = 3 ;$$

$$b) \sqrt{x^2-8x+16} = x+2 ;$$

$$c) \sqrt{x^2-6x+9} = 3x-6 ;$$

$$d) \sqrt{x^2-4x+4} - 2x+5 = 0 ;$$

Bài 13. Giải các phương trình

$$a) \sqrt{x-5} = 3-x ;$$

$$b) \sqrt{4-5x} = 2-5x ;$$

$$c) \sqrt{6-x} = 3x-4 ;$$

$$d) \sqrt{5-x} = 9-2x ;$$

Bài 14. Giải các phương trình

$$a) \sqrt{x-5} = \sqrt{3-x} ;$$

$$b) \sqrt{4-5x} = 2-5x ;$$

$$c) \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{4x^2-4x+1} ;$$

$$d) \sqrt{x^2-10x+25} = \sqrt{x^2-6x+9} ;$$

Bài 15. Giải các phương trình

$$a) \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = 3.$$

$$b) \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2}.$$

$$c) \frac{\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}-2} = -2.$$

$$d) \frac{3\sqrt{x}+5}{3\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}.$$

Bài 16. Giải các phương trình

$$a) x^2+4x+5 = 2\sqrt{2x+3}.$$

$$b) x^2+9x+20 = 2\sqrt{3x+10}.$$

$$c) x^2+7x+14 = 2\sqrt{x+4}$$

$$d) 4\sqrt{x+1} = x^2-5x+14$$

Bài 17. Giải các phương trình

$$a) \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x} = 1$$

$$c) \sqrt{x+3} + \sqrt{y-2} + \sqrt{z-3} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

$$b) \sqrt{2x-3} + \sqrt{3-2x} = 0$$

$$d) x+y+4 = 2\sqrt{x} + 4\sqrt{y-1}$$

Bài 18. Giải các phương trình

$$a) 4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$$

$$c) \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$$

$$b) 4\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = x+7$$

$$d) \sqrt{x+2} + \sqrt{6-x} = x^2 - 4x + 8$$

Bài 19. Giải các bất phương trình

$$a) \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} < 1$$

$$c) \frac{\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+2} \geq -2$$

$$b) \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > \frac{1}{2}$$

$$d) \frac{-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} > -\sqrt{x}$$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem lại Tóm tắt lý thuyết trong ôn tập chủ đề 1, Phần I

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 4. Tìm các giá trị nguyên của biến để các biểu thức cho trước có giá trị nguyên

Bài 1. Tìm các giá trị nguyên của x để các biểu thức sau có giá trị nguyên

a) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$

b) $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Bài 2. Tìm các giá trị nguyên của x để các biểu thức sau có giá trị nguyên

a) $\frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}+1}$

b) $\frac{x-2}{\sqrt{x}-3}$

Dạng 5. Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của biểu thức

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x-4} - 2$

b) $B = x - 4\sqrt{x} + 10$

c) $C = x - \sqrt{x}$

d) $D = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 1$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

b) $Q = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $M = \sqrt{3} - \sqrt{x-1}$

b) $N = 6\sqrt{x} - x - 1$

c) $P = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$

d) $Q = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3}$

Dạng 6. Rút gọn biểu thức và các bài toán liên quan

Bài 6. Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $0 \leq x \neq 9$

- Tính giá trị của B khi $x = 36$;
- Rút gọn biểu thức A ;
- Tìm số nguyên x để $P = A \cdot B$ là một số nguyên.

Bài 7. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- Rút gọn P ;
- Tìm giá trị của x để $P = -1$;
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$;
- So sánh P với 1 ;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 8. Cho biểu thức $E = \frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1} : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2-x}{x-\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

- Rút gọn E ;
- Tìm giá trị của x để $E > 1$;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của E với $x > 1$;
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $E \in \mathbb{Z}$;

e) Tìm x để $E = \frac{9}{2}$.

Bài 9. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn P ;

b) Tính giá trị của P khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị của x để biểu thức P có giá trị lớn nhất.

Bài 10. Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} \right) : \left(2 - \frac{2x-\sqrt{x}}{x+1} \right)$ với $x \geq 0$

a) Rút gọn B ;

b) Tính giá trị của B khi $x = 6 + 2\sqrt{5}$;

c) Tìm giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên.

Bài 11. Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn P ;

b) Tính giá trị của x khi $P = 4$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P ;

d) Tính P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 12. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{5}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 + \frac{3-x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tính P khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$;

c) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$;

e) Tìm x để $P < 1 - \sqrt{x}$;

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 13. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm x để $P = -1$;

c) Tính P tại $x = \frac{8}{\sqrt{5}-1} - \frac{8}{\sqrt{5}+1}$;

d) Tìm x để $P > \sqrt{x} + 2$;

e) So sánh P với 1;

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 14. Cho các biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

a) Tính giá trị B tại $x = 36$;

b) Rút gọn A ;

c) Cho biết $P = A : (1-B)$. Tìm x để $P \leq 1$.

Bài 15. Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$.

- Rút gọn P ;
- Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$;
- Tìm x thỏa mãn : $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Bài 16. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$.

- Rút gọn P ;
- Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Một số bài tập nâng cao

Bài 17. Giải phương trình:

- $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+2009} + \sqrt{z-2010} = \frac{1}{2}(x+y+z)$.
- $x(3-\sqrt{3x-1}) = \sqrt{3x^2+2x-1} - x\sqrt{x+1} + 1$.

Bài 18. Cho $a, b > 0; a^2 + b^2 \leq 16$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = a\sqrt{9b(a+8b)} + b\sqrt{9a(b+8a)}.$$

Bài 19. Cho $a, b, c > \frac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{2\sqrt{b}-5} + \frac{b}{2\sqrt{c}-5} + \frac{c}{2\sqrt{a}-5}.$$

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \leq 2(a+b+c).$$

Bài 21. Cho hai số thực a, b thay đổi, thỏa mãn điều kiện $a+b \geq 1$ và $a > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{8a^2+b}{4a} + b^2$.

Bài 22. Cho x, y thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x+2} - y^2 = \sqrt{y+2} - x^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 10.$$

Bài 23. Với mọi $a > 1$, chứng minh : $a + \frac{1}{a-3} \geq 3$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

VẤN ĐỀ 1.

Bài 1. Căn bậc hai của các số đã cho lần

lượt là: $0; \pm 8; \pm \frac{3}{4}; \pm 0, 2;$

Căn bậc hai số học của các số đã cho lần

lượt là: $0; 8; \frac{3}{4}; 0, 2.$

Bài 2. a) 144; b) Không tồn tại;

c) $\frac{8}{7};$ d) $\frac{1}{75}.$

Bài 3. a) 3; b) $\frac{2}{5};$ c) -3;

d) -6; e) $-\frac{3}{4};$ g) 7.

Bài 4. a) 4; b) 3,1; c) $\frac{1}{6};$ d) -2.

Bài 5. a) $x = \pm 4;$ b) $x = \pm \sqrt{13};$

c) Không có giá trị nào của $x;$

d) $x = 25;$ e) $x = 36;$

g) $x = -3$ hoặc $x = 5.$

Bài 6. Căn bậc hai của các số đã cho lần

lượt là: $\pm 9; \pm 0, 5; \pm 1, 2; \pm \frac{11}{9};$

Căn bậc hai số học của các số đã cho lần

lượt là: $9; 0; 5; 1, 2; \frac{11}{9}.$

Bài 7. a) 169; b) Không tồn tại;

c) $\frac{1}{10};$ d) $\frac{6}{125}.$

Bài 8. a) 11; b) $\frac{4}{5};$ c) -8; d) 2;

e) $-\frac{1}{4};$ g) $\frac{3}{5}.$

Bài 9. a) 1; b) 4,65; c) $-\frac{2}{3};$ d) 6.

Bài 10. a) $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}};$ b) $x \in \emptyset;$

c) $x = \frac{256}{9};$

d) Không có giá trị nào của x

e) $x = 17;$ g) $x = 6$ hoặc $x = -2.$

Bài 11. a) $-2 < \sqrt{3};$ b) $3 > 2\sqrt{2};$

c) $11 > \sqrt{99};$ d) $25 < 18 + 2\sqrt{17};$

e) $3 > \sqrt{15} - 1;$ g) $1 - \sqrt{3} < \sqrt{0, 2}.$

Bài 12. a) $x \geq 36;$ b) $0 \leq x < 1;$

c) $x \leq -35;$ d) $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$

Bài 13. a) $\Leftrightarrow 2x \geq x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0;$

b) $\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq x^2 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x \geq 2.$

Bài 14. a) $2 < 1 + \sqrt{2};$ b) $3\sqrt{11} < 12;$

c) $1 > \sqrt{3} - 1;$ d) $\sqrt{3} > 2 - \sqrt{5};$

e) $-10 < -2\sqrt{23};$ g) $-3\sqrt{29} < -15.$

Bài 15. a) $x \geq 24;$ b) $-1 \leq x < 3;$

c) $x < -31;$ d) $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$

Bài 16. Căn bậc hai của các số đã cho lần

lượt là: $\pm 15; \pm 18; \pm \frac{13}{10}; \pm \frac{7}{17}; \pm 1, 5; \pm 0, 4;$

Căn bậc hai số học của các số đã cho lần

lượt là: $15; 18; \frac{13}{10}; \frac{7}{17}; 1, 5; 0, 4.$

Bài 17. a) 49; b) $\frac{9}{16};$ c) $\frac{3}{2};$ d) $\frac{1}{8}.$

Bài 18. a) 5; b) $\frac{7}{5};$ c) -111; d) 13;

e) 7; g) $-\frac{1}{400}.$

Bài 19. a) 12; b) $-\frac{7}{20};$ c) $-\frac{11}{4};$ d) $-\frac{13}{4}.$

Bài 20. a) $x = \pm 14;$ b) $x = \pm \frac{1}{\sqrt{15}};$

c) $x = \pm 18;$ d) Không có giá trị nào của $x;$ e)

$x = 7;$ g) $x = \frac{100}{9}.$

Bài 21. a) $x = \frac{290}{3}$; b) $x = \frac{19}{3}$ hoặc $x = -\frac{17}{3}$; c) Không có giá trị nào của x ; d) $x = \frac{9}{4}$; e) $x = 16$; g) $x = \frac{13}{4}$.

Bài 22. a) $0 \leq x \leq 484$; b) $x > \frac{37}{2}$; c) $x \geq 22$; d) Không có giá trị nào của x .

Bài 23. a) $4 > 1 + \sqrt{7}$; b) $2\sqrt{5} < 8$; c) $-6 < -2\sqrt{7}$; d) $4 > \sqrt{23} - 1$; e) $\sqrt{0,5} > \sqrt{3} - 2$;

g) So sánh: $(\sqrt{2005} + \sqrt{2008})^2$ và $(\sqrt{2016} + \sqrt{2017})^2$.

Từ đó quy về so sánh:

$$\begin{aligned}\sqrt{2015 \cdot 2018} &= \sqrt{(2016-1) \cdot 2018} \\ &= \sqrt{2016 \cdot 2018 - 2018}\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\sqrt{2016 \cdot 2017} &= \sqrt{2016(2018-1)} \\ &= \sqrt{2016 \cdot 2018 - 2016} \\ \Rightarrow \sqrt{2015} + \sqrt{2018} &< \sqrt{2016} + \sqrt{2017}.\end{aligned}$$

Bài 24. * Giả sử $\exists m, n \in \mathbb{Z} : (m, n) = 1$

$$\text{và } \sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow m^2 = 3n^2$$

$$\Rightarrow m^2 : 3 \Rightarrow m : 3 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = 3k.$$

$$\Rightarrow 9k^2 = 3n^2 \Rightarrow n^2 = 3k^2 \Rightarrow n^2 : 3$$

$$\Rightarrow n : 3 \Rightarrow (m, n) \neq 1. \text{ Vô lý!}$$

* Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{7}$ là số vô tỷ.

Bài 25. a) Đặt $y = \sqrt{x+2}$

$$\Rightarrow y^2 = x+2 \Rightarrow x = y^2 - 2$$

$$\Rightarrow A = y^2 - 2y - 2;$$

b) Ta có: $A = (y-1)^2 - 3 \geq -3$

Từ đó tìm được: $A_{\min} = -3$ tại $y = 1$ hay $x = -1$.

Bài 26. a) Ta có: $1 > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \dots;$

$$\frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}} \Rightarrow \text{đpcm}$$

b) Ta có: $\sqrt{4} < 3$

$$\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4}} < \sqrt{4+3} < 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4}}} < \sqrt{4+3} < 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots+\sqrt{4}}}}$$

$$< \sqrt{4+3} < 3.$$

VẤN ĐỀ 2.

Bài 1. a) $\frac{-8}{15}$; b) 128; c) $\frac{21}{20}$; d) $\frac{12}{5}$.

Bài 2. a) 5; b) 4; c) 7; d) 1.

Bài 3. a) Ta có:

$$\begin{aligned}11+6\sqrt{2} &= 9+2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2 \\ &= (3+\sqrt{2})^2;\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}8-2\sqrt{7} &= 7-2 \cdot \sqrt{7} \cdot 1 + 1 \\ &= (\sqrt{7}-1)^2\end{aligned}$$

c) Áp dụng kết quả câu a);

d) Áp dụng kết quả câu b).

Bài 4. a) $2\sqrt{2}$; b) $-2\sqrt{5}$; c) $6\sqrt{5}$; d) $4\sqrt{5}$.

Bài 5. a) 1; b) 2,5; c) -1; d) 90.

Bài 6. a) 3; b) 5; c) 8; d) 6.

Bài 7. Tương tự Bài 3.

Bài 8. a) 4; b) 12; c) -4; d) $4\sqrt{3}$.

Bài 9. a) $-50a$; b) $10a$; c) $10a^2$; d) $-15a^3$.

Bài 10. a) $3x+2$; b) $4x+3$;

$$\text{c) } 3\sqrt{x}-3; \quad \text{d) } \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 2 \\ -1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Bài 11. a) $-32a$; b) $11a$; c) $11a^2$; d) $-33a^3$.

Bài 12. a) $3x+1$; b) $4x-3$;

$$\text{c) } 4\sqrt{x}-5; \quad \text{d) } \begin{cases} 1 & \text{khi } x > -2 \\ -1 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

Bài 13. a) -0,63; b) $\frac{1}{30}$; c) 86; d) -13.

Bài 14. a) 22; b) $-8\sqrt{6}$; c) 3; d) 8.

Bài 15. Tương tự Bài 3.

Bài 16. a) $2\sqrt{5}$; b) -2 ; c) $2\sqrt{2}$; d) 6 .

Bài 17. a) $\begin{cases} 10a & \text{khi } a \geq 0 \\ -6a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3a^3 & \text{khi } a \geq 0 \\ -12a^3 & \text{khi } a < 0 \end{cases}$.

Bài 18. a) 6 ; b) 2 .

Bài 19. a) $\sqrt{a}+2$; b) $6\sqrt{6}$.

VẤN ĐỀ 3

Bài 1. a) $x \geq 2$; b) $x \leq \frac{7}{6}$; c) $x < \frac{1}{3}$;

d) $x \geq \frac{2}{3}$.

Bài 2. a) $\frac{3}{5} \leq x \leq 6$; b) $2 \leq x < 5$;

c) $x \geq 9$; $x \leq -1$; d) $-4 \leq x \leq 4$.

Bài 3. a) $x \geq \frac{3}{2}$; b) $x \leq 0$;

c) $x \leq \frac{1}{4}$; d) $x \in \mathbb{R}$.

Bài 4. a) $x > 1$; b) $x \leq -7$;

c) $3 \leq x < 4$; d) $x > \frac{2}{3}$.

Bài 5. a) $x \leq 2$ hoặc $x \geq 6$

b) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 5$

c) $x \leq -3$ hoặc $x \geq 3$

d) $-1 \leq x \leq 1$

Bài 6. a) $x = 175$; b) $x \in \emptyset$; c) $x = \frac{1}{2}$;

d) $x = 3$; e) $x = 1$ hoặc $x = \frac{5}{3}$

g) $x = 2$.

Bài 7. a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = \frac{1}{10}$;

d) $x = 3$; e) $x = 5$ hoặc $x = -\frac{7}{3}$

g) $x = 4$.

Bài 8. a) $x \leq -2$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \in \mathbb{R}$

d) $x = 2$.

Bài 9. a) $x > -7$; b) $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$;

c) $-3 \leq x \leq 5$; d) $x < 2$; $x > 3$.

Bài 10. a) $x = 0$; b) $x \in \emptyset$; c) $x = \frac{7}{2}$;

d) $x = 0$ hoặc $x = 3$.

Bài 11. a) $x \in \emptyset$; b) $x = \frac{-1}{9}$; c) $x = -3$;

d) $x = \frac{3}{2}$.

Bài 12. Cách 1. Ta có:

$$(x+y)^2 = 1+2xy \leq 1+x^2+y^2 = 2$$

\Rightarrow đpcm.

Cách 2. Sử dụng BĐT Cauchy – Schwartz:

$$(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2).$$

b) Cách 1. Theo BĐT AM-CM, ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}}$$

Cách 2. Xét hiệu:

$$VT - VP = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 0.$$

Bài 13. a) $A \geq |2x-1+3-2x| = 2$;

$$A_{\min} = 2 \text{ khi } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

b) Áp dụng $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

$$\geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}, \text{ ta có:}$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{11}{7} - 7x \right)^2 + \frac{320}{49}}$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{11}{7} + 7x \right)^2 + \frac{320}{49}} \geq 6.$$

Từ đó $B_{\min} = 6$ tại $x = 0$.

Bài 14. Ta có: $(\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-2}-2)^2$

$$+ (\sqrt{z-3}-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2, y = 6, z = 12.$$

VẤN ĐỀ 4

Bài 1. a) 60 ; b) 6 ; c) 20 ; d) 26 .

VẤN ĐỀ 5

Bài 2. a) $\frac{3}{13}$; b) $\frac{5}{4}$; c) 10; d) 5.

Bài 3. a) 2; b) 12; c) 2;
d) $36 - 36\sqrt{2} + 27\sqrt{3}$.

Bài 4. a) $\frac{\sqrt{30}}{3}$; b) $\frac{4}{7}$; c) 10; d) $\frac{7-12\sqrt{3}}{3}$.

Bài 5. a) 80; $\frac{9}{10}$; c) 110; d) 26.

Bài 6. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{5}{3}$; c) 3; d) $\frac{56}{9}$.

Bài 7. a) 3; b) 20; c) $4+2\sqrt{6}$; d) $\sqrt{2}$.

Bài 8. a) $\frac{8}{11}$; b) 0; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bài 9. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
d) $\sqrt{2}-2$.

Bài 10. a) $-\sqrt{a}$; b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

c) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; d) $\frac{1-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$.

Bài 11. a) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; b) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; c) -1; d) 4.

Bài 12. a) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; b) \sqrt{a} ; c) 0;

d) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Bài 13. a) 6; b) 25; c) $\frac{3}{14}$; d) $\frac{13}{9}$.

Bài 14. a) 22; b) 0; c) 60; d) $\frac{196}{45}$.

Bài 15. a) $12-5\sqrt{6}$; b) 7; c) $2\sqrt{2}$;
d) $4\sqrt{3}-7\sqrt{2}$.

Bài 16. a) $x-\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$;

c) $\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{x}+5}$.

Bài 1. a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; b) 1; c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$;

d) 2015.

Bài 2. a) 66; b) 1,6; c) -0,16; d) 28.

Bài 3. a) $27+24\sqrt{5}$; b) $6\sqrt{5}-9$.

Bài 4. a) $36(1-a)$; b) $-a^2$; c) $\frac{a}{2}$; d) $12a$.

Bài 5. a) $\frac{\sqrt{ab}-2b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; b) $\frac{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$.

Bài 6. a) $9-6a-5a^2$; b) $\frac{3}{4}(3-a)$;

c) $3y$; d) $\frac{-b^2}{2\sqrt{2a}}$.

Bài 7. a) $-\sqrt{a}$; b) $x+\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$;

d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Bài 8. a) $x=\frac{1}{2}$; b) $x=\frac{-3}{2}$, $x=\frac{7}{2}$;

c) $x=2$ hoặc $x=-3$; d) $x=9$.

Bài 9. a) $x=-1$ hoặc $x=9$; b) $x=6$;
c) $x=3$; d) $x=28$.

Bài 10. a) $x=-1$; b) $x=\frac{12}{7}$; c) $x=2$;

d) $x=\frac{34}{9}$.

Bài 11. a) $4\sqrt{10}$; b) $\frac{5}{12}$; c) 15; d) $\frac{8}{5}$.

Bài 12. a) 3; b) $\frac{-\sqrt{6}}{2}$; c) $6+4\sqrt{5}$; d) 4.

Bài 13. a) $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{x-y}$;

c) $\frac{1}{x+\sqrt{7}}$; d) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Bài 14. a) $x=-2$, $x=12$; b) $x=-1$;

c) $x=\frac{3}{5}$; d) $x=\frac{105}{16}$.

Bài 15. a) Vô nghiệm; b) $x=-1$;

c) $x=\frac{1}{2}$; d) $x=\frac{3}{2}$.

Bài 16: Ta có:

$$x^4 + 5 = (x^4 + 4) + 1 \geq 2\sqrt{x^4 + 4}$$
$$\Rightarrow \frac{x^4 + 5}{\sqrt{x^4 + 4}} \geq 2. \text{ Dấu " = " không}$$

xảy ra nên ta có đpcm.

VẤN ĐỀ 6

- Bài 1. a) $x\sqrt{7}$; b) $-2y\sqrt{2}$; c) $5x\sqrt{x}$; d) $4y^2\sqrt{3}$.
- Bài 2. a) $\sqrt{13x^2}$; b) $-\sqrt{2x^2}$; c) $\sqrt{15x}$; d) $-\sqrt{-15x}$.
- Bài 3. a) $13x$; b) $-2y\sqrt{3}$; c) $9x\sqrt{x}$; d) $4y^4\sqrt{3}$.
- Bài 4. a) $\sqrt{13x^2}$; b) $-\sqrt{3x^2}$; c) $2\sqrt{7y}$; d) $-2\sqrt{-7y}$.
- Bài 5. a) $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$; b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} > 6\sqrt{\frac{1}{37}}$.
c) $2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}$; d) $\frac{5}{4}\sqrt{2} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- Bài 6. a) $2\sqrt{6}; \sqrt{29}; 4\sqrt{2}; 3\sqrt{5}$;
b) $\sqrt{38}; 2\sqrt{14}; 3\sqrt{7}; 6\sqrt{2}$.
- Bài 7. a) $3\sqrt{5} > 2\sqrt{7}$; b) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} < 6\sqrt{\frac{1}{14}}$;
c) $3\sqrt{21} > 2\sqrt{47}$; d) $\frac{5}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{7}\sqrt{14}$.
- Bài 8. a) $7\sqrt{2}; 5\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}$;
b) $5\sqrt{30}; 2\sqrt{40}; 3\sqrt{8}; 2\sqrt{5}$.
- Bài 9. a) $4\sqrt{3}$; b) $-7\sqrt{a}$.
- Bài 10. a) $-8a$; b) $-9a^3$; c) $2\sqrt{3}$; d) 0 .
- Bài 11. a) $-4\sqrt{6}$; b) $-4a$.
- Bài 12. a) $7a$; b) $-2x$; c) $2x$; d) $-2x$.
- Bài 13. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; b) $\frac{x\sqrt{5}}{5}$; c) $\frac{a\sqrt{5ab}}{7b}$;
d) $7\sqrt{-3xy}$.
- Bài 14. a) $2\sqrt{5}$; b) $\frac{-\sqrt{6}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$;
d) $2 - \sqrt{3}$.

Bài 15. a) -115 ; b) $\frac{1}{2}$; c) 1 ; d) $\frac{10}{7}$.

Bài 16. a) $\frac{\sqrt{14}}{7}$; b) $\frac{x\sqrt{31}}{31}$; c) $\frac{b\sqrt{5b}}{7a}$;
d) $-7\sqrt{13xy}$

Bài 17. a) $\sqrt{5}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{-3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{19}$;
d) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Bài 18. a) $\sqrt{2}$; b) 4 ; c) -1 ;

d) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$

Bài 19. a) $\sqrt{5}$; b) $-19\sqrt{11} - \sqrt{7}$;

c) 14 ; d) $\frac{-2\sqrt{11} + 3\sqrt{7}}{19}$

Bài 20. a) $5a^2$; b) $-x$; c) -1 ; d) 6 .

Bài 21. a) 25 ; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; c) $2 - 2\sqrt{6}$; d) -2 .

Bài 22.

a) $\sqrt{10}$; b) $\frac{23\sqrt{3}}{15}$; c) $4\sqrt{7}$; d) $\sqrt{8}$.

Bài 23. a) $\frac{1}{2}$; b) 2 ; c) 0 ; d) 2 .

Bài 24. a) $x = 9$; b) $x = 4$;
c) $x = 64$; d) $x = 6$.

Bài 25. a) $x = -\frac{3}{2}$; $x = \frac{7}{2}$ b) $x = 9$;
c) $x = 2$; d) $x = 3$.

Bài 26.

a) $x = y = 0$; b) $x = 0$; $y = 4$; $z = 2$

Bài 27. $\sqrt{n} - 1$.

Bài 28. $A \geq |1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1| = 2$

Dấu "=" xảy ra khi $1 \leq x \leq 2$.

Bài 29.

Chú ý: $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

Bài

$$30. \left(\frac{2002}{\sqrt{2003}} - \sqrt{2003} \right) + \left(\frac{2003}{\sqrt{2002}} - \sqrt{2002} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2002}} - \frac{1}{\sqrt{2003}} > 0.$$

VẤN ĐỀ 7.

Bài 1. a) $8\sqrt{2}$; b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) 5.

Bài 2. a) $6\sqrt{a} + \sqrt{5}$; b) $2\sqrt{a}$.

Bài 3. a) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$; b) 22; c) 2; d) 10.

Bài 4. a) $\frac{1}{3}$; b) $12\sqrt{a} - a\sqrt{a}$.

Bài 5. a) Học sinh tự làm.

$$b) VT = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{|a+b|} = |a| = VP.$$

Bài 6.

$$a) VT = \left(\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} - \frac{6\sqrt{6}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = |a| = VP \\ = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{2} = VP$$

$$b) VT = \frac{4\sqrt{ab} + 4b}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ = \frac{2\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = VP$$

Bài 7.

a) $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ b) $M = 1 - 2\sqrt{2}$ c) $x = 49$

d) $0 \leq x < 9; x = 4$ e) $x \in \{1; 16; 25; 49\}$

Bài 8.

a) $A = \frac{7}{6}$ b) $x = 4$ c) $B < 1$ d) $x = 5$.

Bài 9. a) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ b) $0 \leq x < 9; x \neq 1$

c) $x = 4$ d) $x = 0$ c) $P_{\max} = -1; x = 0$.

Bài 10. a) $17\sqrt{3}$; b) 6; c) 5; d) $\sqrt{6}-3$

Bài 11. a) $-\frac{15\sqrt{7}}{7}$; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) 0.

Bài 12. a) $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; b) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$;

c) $x = 4$; d) $x > 1$ e) $\{0; 4; 9\}$

Bài 13. a) $P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$;

c) $x = 4$.

Bài 14. a) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$; b) $0 \leq x < 1$;

c) $P_{\min} = -\frac{1}{2}; x = 0$.

Bài

15. a) $P = x - \sqrt{x} + 1$;

b) $P_{\min} = \frac{3}{4}; x = 0$ c) $x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Bài 16. a) $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$; b) $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$;

c) $x = 64$; d) $x = 6$.

VẤN ĐỀ 8

Bài 1. a) 3 b) $\frac{1}{5}$; c) $4a$ d) $-2ab^2$

Bài 2. a) $11\sqrt[3]{3}$; b) 2.

Bài 3. a) $A = 1$; b) $B = 4$.

Bài 4. a) 9; b) $\frac{1}{6}$; c) $7a$; d) $-8ab^2$.

Bài 5. a) 20; b) $\frac{7}{24}$; c) $\frac{3 - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}}{2}$ c) $5x + 1$.

Bài

6. a) $\sqrt{5} + 1$; b) $\sqrt{3} + 1$; c) -1 ; d) $18\sqrt{3} + 2$.

Bài 7. a) $2\sqrt{2}$; b) 3; c) -2 ; d) 2.

Bài 8. a) $A > B$; b) $A > B$.

Bài 9. $A < B$.

Bài 10. a) $x > -63$; b) $x > -1$.

Bài 11. a) $A > B$ b) $A > B$ c) $A < B$ d) $A < B$

Bài 12. $A = B$.

Bài 13. a) $x < -\frac{61}{2}$ b) $x > \frac{2}{9}$.

Bài 14. a) $x = 13$ b) $x = \frac{10}{3}$.

Bài 15. a) $x = 3$ b) $x = -14; x = 5$.

Bài 16. a) $\{0; 1; 2\}$ b) $\{-6; -5; -4\}$.

Bài 17. a) $x = 1$ b) $x = -\frac{15}{2}; x = 2$.

Bài 18. a) 8 b) $-\frac{1}{5}$ c) $-\frac{7}{6}ab^2$ d) $-4a^2b^2$.

Bài 19. a) 6 b) $\frac{45}{8} - \sqrt{3}$ c) $x + 1$ d) $2x + 1$.

Bài 20. a) 18 b) 7 c) -3 d) $6\sqrt[3]{16} + 2$.

Bài 21. a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3} + 1$ d) -2 .

Bài 22. a) $\sqrt{2} + 1$ b) $\sqrt{3} - 1$ c) 5 d) 1.

Bài 23. a) $x = 0$ b) $x = \frac{29}{3}$.

Bài 24. a) $\{3; 1; 2\}$ b) $\{-2; -1\}$.

Bài 25. a) $x = 1$ b) $x = -1; x = 7$.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN I)

Bài 1. a) $x \leq \frac{2}{3}$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \in \mathbb{R}$;

d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x > -\frac{3}{2}$ g) $1 \leq x < 2$.

Bài 2. a) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$; b) $3 \leq x < 5$;

c) $x \leq -2; x \geq 2$ d) $x \geq 0$;

e) $x \leq 0; x \neq -1$ g) $x \geq 0; x \neq 4$

Bài 3. a) $5\sqrt{3}$; b) $-10\sqrt{2}$;

c) $-6\sqrt{3}$ d) $-19\sqrt{11} - \sqrt{7}$.

Bài 4. a) $-8\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; c) $6\sqrt{2}$ d) $\frac{23\sqrt{3}}{15}$.

Bài 5. a) $\frac{23}{5}$; b) 6; c) -3 ; d) 21.

Bài 6. a) -1 ; b) 10; c) 6; d) 21.

Bài 7. a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; b) $\sqrt{6}$; c) $7 + 4\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; d) $3 + 2\sqrt{2}$ g) $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}$.

Bài 8. a) -2 b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; c) $\frac{23\sqrt{3}}{15}$ d) 4.

Bài 9. a) 1; b) -7 ; c) $\sqrt{2} - 1$; d) $\sqrt{2}$.

Bài 10. a) $\sqrt{10}$; b) 14; c) 4; d) $1 + \sqrt{5}$.

Bài 11. a) $x = 2$; b) $x = 15$;

c) $x = -1$; d) $x = \frac{81}{2}$.

Bài

12.

a) $x = 0; x = 6$; b) $x = 1$; c) $x = \frac{9}{2}$ d) $x = 3$.

Bài 13. a) Vô nghiệm.

b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = \frac{19}{4}$.

Bài 14. b) Vô nghiệm. c) Vô nghiệm.

c) $x = 0; x = \frac{2}{3}$; d) $x = 4$.

Bài 15. a) $x = \frac{25}{4}$; b) Vô nghiệm.

c) Vô nghiệm.; d) $x = \frac{25}{9}$.

Bài 16. a) $x = -1$; b) $x = -3$;

c) $x = -3$; d) $x = 3$.

Bài 17. a) Vô nghiệm. b) $x = \frac{3}{2}$

c) $x = -2, y = 3, z = 4$; d) $x = 1; y = 5$.

Bài 18. a) $x = 1$; b) $x = 1$; c) $x = 5$; d) $x = 2$.

Bài 19. a) $0 \leq x < 4$ b) $x > 1$;

c) $x \geq 4$; d) $x \geq 0; x \neq 1$.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II)

Bài 1 a) $x \in \{1; 4; 16; 25\}$;

b) $x \in \{0; 4; 16; 36; 144\}$.

Bài 2. a) $x = 0$ b) $x \in \{4; 16; 100\}$.

Bài 3. a) $A_{\min} = -2; x = 4$;

b) $B_{\min} = -6; x = 4$.

c) $C_{\min} = -\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$;

d) $D_{\min} = \sqrt{3} + 1$ khi $x = 1$.

Bài 4. a) $E_{\min} = -\frac{1}{3}$ khi $x = 0$;

b) $F_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$ khi $x = 1$.

Bài 5. a) $M_{\max} = \sqrt{3}$ khi $x = 1$;

b) $N_{\max} = 8$ khi $x = 9$;

c) $P_{\max} = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{4}$;

d) $Q_{\max} = \frac{5}{3}$ khi $x = 0$;

Bài 6. a) $B = \frac{3}{7}$; b) $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$;

c) $x = 0$ hoặc $x = 4$.

Bài 7. a) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$; b) $x = 0$;

c) $x = 0$; d) $P < 1$; e) $P_{\max} = -1$ khi $x = 0$.

Bài 8. a) $E = \frac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$; b) $x > 1$;

c) $E_{\min} = 9$ khi $x = 4$;

d) $x \in \{4; 0; 9\}$; e) Vô nghiệm.

Bài 9. a) $P = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$;

b) $P = 3\sqrt{3}-5$; c) $P_{\max} = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

Bài 10. a) $B = \frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)}$;

b) $B = \frac{5-2\sqrt{5}}{2}$; c) $x = 1$.

Bài 11. a) $P = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$; b) $x = 4$;

c) $P_{\min} = 4$ khi $x = 4$;

d) $\frac{42-23\sqrt{2}}{2}$.

Bài 12. a) $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$; b) $\frac{10-5\sqrt{3}}{5}$;

c) $x = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$; d) $x = 0, x = 4$;

e) $0 \leq x \leq \sqrt{3}-1$; g) $P_{\min} = 1$ khi $x = 0$.

Bài 13. a) $P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$;

b) Vô nghiệm; c) $P = \frac{5}{2}$;

d) $0 < x < 1$; e) $P > 1$;

f) Không có GTNN.

Bài 14. a) $B = \frac{38}{43}$; b) $A = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$;

c) $0 \leq x < 1$ hoặc $x \geq 9$.

Bài 15. a) $P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$; b) $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$;

c) $x = 4$.

Bài 16. a) $P = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; b) $P_{\max} = 9$ khi $x = y = \frac{1}{9}$.

Bài 17. a) $x = 3; y = -2008; z = 2011$.

b) $(\sqrt{3x-1}-x)(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 18. Ta có $M_{\max} = 20736$ khi $a = b = 2\sqrt{2}$.

Bài 19.

Đặt $2\sqrt{a}-5 = x, 2\sqrt{b}-5 = y, 2\sqrt{c}-5 = z$.

Biến đổi P theo x, y, z , ta được:

$P_{\min} = \frac{33}{4}$ khi $a = b = c = 25$.

$\sqrt{1+a^2} = \sqrt{ab+bc+ca+a^2}$

Bài 20. Ta có $= \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{2a+b+c}{2}$.

Áp dụng tương tự với $\sqrt{1+b^2}$ và $\sqrt{1+c^2}$.

Bài 21. $A_{\min} = \frac{3}{2}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 22 $A_{\min} = 9$ khi $x = y = -1$.

Bài 23. Ta có $VT = (a-1) + \frac{1}{a-1} + 1$.