b) Xét hai tam giác AEM và AOC có góc A chung, , do đó (g.g), suy ra . Suy ra .

c) Gọi I là giao điểm của MC và EF . Xét tử giác CEMF có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), (giả thiết), do đó CEMF là hình chữ nhật nên và .

Lại có (tính chất góc nội tiếp) nên vuông cân tại E . Suy ra . Do đó . Có (tính chất góc nội tiếp). Xét hai tam giác OAE và OCF có (chứng minh trên). Do đó (c.g.c), suy ra .

Như vậy cân tại O mà I là trung điểm của EF nên (tính chất tam giác cân). Suy ra OI//MH.

Xét có I là trung điểm của MC (chứng minh trên), O là trung điểm của CD , do đó IO là đường trung bình của tam giác CMD nên .

Do đó MH và MD cùng song song với OI nên thẳng hàng.

Bài 4. Cho đường tròn ( ), đường kính . Gọi là trung điểm của . Vễ dây tại H . Điểm K thuộc đoạn HC , nối AK cắt đường tròn tại M , nối BM cắt CD tại N . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKN. Chứng minh:

a) BMKH là tứ giác nội tiếp.

b) .

c) Khi K di chuyển trên HC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Giải. (h.9)

a) Có là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên . Do đó vuông tại M nên M thuộc đường tròn đường kính BK . Có nên vuông tại H do đó H thuộc đường tròn đường kính . Vậy tứ giác BMKH nội tiếp đường tròn đường kính BK .

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 9

b) Xét hai tam giác BMA và BHN có chung, , do đó (g.g), suy ra hay . Mà nên . Vậy .

c) Gọi E là giao điểm của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác AKN . Suy ra AKNE là tứ giác nội tiếp nên . Do đó .

Theo chứng minh trên, ta có BMKH là tứ giác nội iê̂́p nên , do đó . Suy ra nên NEB cân tại N .

Mà (giả thiết) nên . Do H và B cố định nên E cố định. Có A và cố định, nên thuộc đường trung trực của . Vậy thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 5. Cho đường tròn , đường kính , điểm thuộc đoạn . Vẽ dây tại H . Điểm I thuộc đoạn HC , nối AI cắt đường tròn tại M . Kẻ tại E , nối HM cắt CE tại K . Chứng minh:

a) BMIH là tứ giác nội tiếp.

b) .

c) .

Giải. (h.10)

a) Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BI . Theo giả thiết tại H nên vuông tại H , do đó H thuộc đường tròn đường kính BI. Vậy tứ giác BMIH nội tiếp đường tròn đường kính BI .

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 10

b) Vì nên cân tại O . Mà nên OH là phân giác của góc COD , suy ra . Theo tính chất góc nội tiếp , do đó .

Vì tứ giác BMIH nội tiếp nên . Tứ giác ACMB nội tiếp đường tròn nên . Suy ra .

Từ (1) và (2) suy ra (g.g).

c) Gọi F là giao điểm của CE và AB . Tam giác ACF có nên I là trực tâm của , suy ra . Mà (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên . Do đó suy ra . Có nên suy ra .

Ta có nên (hai góc so le trong), nên (hai góc so le trong). Do đó .

Từ (3) và (4) suy ra (c.g.c). Do đó .

Suy ra

Vậy , mà hai góc này ở vị trí so le trong nên .

Bài 6. Cho đường tròn có hai đường kính và vuông góc với nhau, điểm thuộc cung nhỏ . Tiếp tuyến của đường tròn tại cắt tại . Nối AM cắt CD tại E .

a) Chứng minh bốn điểm thuộc cùng một đường tròn.

b) Chứng minh .

c) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác MAD có giá trị lớn nhất.

Giải. (h.11)

a) Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), ( DN là tiếp tuyến). Do đó vuông tại vuông tại D . Suy ra bốn điểm thuộc đường tròn đường kính EN .

b) Kẻ , khi đó OBQD là hình chữ nhật nên . Tứ giác nội tiếp nên (cùng bù với góc MED).

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 11

Lai có nên , suy ra .

Do đó . Xét và có chung.

Do đó , suy ra .

Do đó . Mà nên .

c) Kẻ tại H . Gọi I là trung điểm của AD . Do cân tại O nên . Ta có , suy ra (không đổi). Dấu "=" xảy ra khi thẳng hàng.

Ta có với AD không đổi.

Vậy lớn nhất khi ba điểm thẳng hàng.

Bài 7. Cho đường tròn có hai đường kính và vuông góc với nhau. Điểm E thuộc đoạn OC , nối AE cắt đường tròn tại M . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME .

a) Chứng minh là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh .

c) Tìm vị trí của E để .

d) Cho E di chuyển trên OC , chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

Giải. (h.12)

a) Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BE . Vi nên vuông tại O , do đó O thuộc đường tròn đường kính BE . Vậy bốn điểm cùng thuộc đường tròn đường kính BE . Suy ra OBME là tứ giác nội tiếp.

b) Theo tính chất góc nội tiếp ,

.

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 12

Xét và có chung, nên (g.g). Suy ra do đó .

c) Xét và có chung nên cs (g.g), suy ra . Do đó mà nên . Vậy khi E là trung điểm OC .

d) Trong đường tròn có . Trong đường tròn (I) có . Do đó . Xét có và nên vuông cân tại I . Do đó hay . Xét có nên vuông cân tại O , do đó .

Như vậy nên thẳng hàng. Do đó I thuộc đường thẳng BC cố định.

Bài 8. Cho đường tròn , dây CD không qua O . Lấy M thuộc tia đối của tia CD . Kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn ( A thuộc cung nhỏ CD ). Gọi I là trung điểm của CD , nối OM cắt AB tại H . Qua A kẻ đường thẳng song song với IB cắt OI và MD lẩn lượt tại E và F . Chứng minh:

a) Năm điểm cùng thuộc một đường tròn.

b) IM là phân giác của góc AIB.

c) A là trung điểm của EF .

Giải. (h.13)

a) Ta có nên cân tại O , mà I là trung điểm của CD , suy ra . Do đó vuông tại I nên I thuộc đường tròn đường kính OM .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có , nên vuông tại A , vuông tại , suy ra và cùng thuộc đường tròn đường kính OM . Vậy năm điểm cùng thuộc đường

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 13 tròn đường kính OM .

b) Theo tính chất tiếp tuyến ta có , mà năm điểm cùng thuộc một đường tròn nên . Có là góc nộit tiếp chắn cung MA, là góc nội tiếp chắn cung MB nên , suy ra IM là phân giác của góc AIB.

c) Vi nên (hai góc so le trong). Do đó nên cân tại A suy ra . Mà vuông tại I nên và . Do đó nên cân tại A , suy ra .

Vậy hay A là trung điểm của EF .

**3. Bài tập tự luyện**

Bài 1. Từ điểm A cố định ở ngoài đường tròn kẻ đường thẳng cắt đường tròn tại và hai tiếp tuyến thuộc cung lớn MN. Gọi I là trung điểm của MN , nối CI cắt đường tròn tại E , nối AO cắt đường tròn tại K . Chứng minh:

a) Bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.

b) K là tâm đường tròn nội tiếp .

c) . Cho A cố định, tìm vị trí của N để diện tích đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa cung AB . Điểm M thuộc cung nhỏ BC . Kẻ tại H , nối BC cắt OH tại I . Nối MI cắt nửa đường tròn tại D . Chứng minh:

a) Bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.

b) .

c) . Tìm vị trí của M để ba điểm thẳng hàng.

Bài 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Vẽ dây . Nối cắt tại , nối cắt tại . Gọi là trung điểm của MH. Nối OI cắt EF tại N . Kẻ tại cắt EF tại P . Chứng minh:

a) MEHF là tứ giác nội tiếp.

b) .

c) và .

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn . Các đường cao và cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh .

c) Đường tròn ngoại tiếp cắt đường tròn tại K . Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Bài 5. Cho đường tròn đường kính . Kẻ tiếp tuyến của đường tròn tại . Lấy M thuộc Ax , kẻ tiếp tuyến MC với đường tròn, C là tiếp điểm. Gọi H là trực tâm của .

a) Chứng minh MCBO là hình thang

b) Cho , tính theo R độ dài đoạn thẳng MA .

c) Khi M di chuyển trên Ax , chứng minh H thuộc một đường tròn cố định.

Bài 6. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Vẽ dây . Nối AD cắt BC tại cắt BD tại M .

a) Chứng minh MCHD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh .

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCHD , chứng minh .

Bài 7. Cho hai đường tròn và tiếp xúc ngoài tại . Gọi KB , lần lượt là đường kính của các đường tròn và . Gọi Kx là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại . Lấy điểm thuộc . Nối cắt đường tròn tại cắt đường tròn tại E . Nối DE cắt đường tròn tại M , cắt đường tròn tại N và cắt BC tại Q . Nối BM cắt CN tại H . Chứng minh:

a) ADKE là tứ giác nội tiếp..

b) .

c) Ba điểm thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn đường kính AK . Kẻ BE và CF cùng vuông góc với AK . Gọi AD là đường cao của tam giác ABC .

a) Chứng minh ABDE và ACFD là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh .

c) Cho BC cố định, A di chuyển trên cung lớn BC sao cho có ba góc nhọn, chứng minh tầm đường tròn ngoại tiếp là một điểm cố định.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn: nửa đường tròn tâm I đường kính AB và nửa đường tròn tâm K đường kính AC . Điểm M thuộc nửa đường tròn (I), MA cắt nửa đường tròn (K) tại N .

a) Tứ giác MNCB là hình gì?

b) Chứng minh .

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác BMNC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10. Cho đường tròn có hai bán kính và vuông góc với nhau. Điểm M thuộc cung lớn AB sao cho tam giác MAB có ba góc nhọn. Các đường cao và của tam giác cắt nhau tại , đồng thời cắt đường tròn lẩn lượt tại P và Q . Các đường thẳng PB và QA cắt nhau tại S , nối SH cắt PQ tại I. Chứng minh:

a) là ba điểm thẳng hàng.

b) .

c) I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 11. Từ điểm ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn, nối MO cắt AB tại H . Kẻ đường kính AC của đường tròn . Kẻ tại . Nối cắt đường tròn tại E , cắt BK tại I . Gọi Q là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) Bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.

b) .

c) Ba điểm thẳng hàng.

Bài 12. Cho tứ giác nội tiếp đường tròn , đường kính AD . Nối AC cắt BD tại cắt CD tại cắt AD tại E .

a) Chứng minh ABHE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh .

c) Qua E kẻ đường thẳng song song với BC và cắt lẩn lượt tại M và N . Chứng minh .

Bài 13. Cho đường tròn đường kính AC . Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại . Lấy thuộc , kẻ tiếp tuyến với đường tròn . Gọi là giao điểm của AB với OM . Kẻ tại K . Nối MC cắt BK tại I , cắt đường tròn tại N . Gọi E là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) là tứ giác nội tiếp.

b) .

c) Ba điểm thẳng hàng.

Bài 14. Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn . Ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H . Nối EF cắt CB tại M , cắt tại . Qua kẻ đường thẳng song song với và cắt tại , cắt tại K. Chứng minh:

a) BCEF là tứ giác nội tiếp.

b) .

c) F là trung điểm của KN .

**Hướng dẫn - Lời giải - Đáp số**

Bài 1. (h.14)

a) Vì nên cân tại O , mà nên (tính chất tam giác cân). Theo tính chất tiếp tuyến ta có , do đó vuồng tại I và vuông tại C . Suy ra bốn điểm , C , I thuộc đường tròn đường kính OA .

![](data:application/octet-stream;base64,)

b) Theo tính chất tiếp tuyến ta có nên .

Có (tính chất tiếp tuyến), nên OA là trung trực của BC . Suy ra tại H , do đó: .

Mà nên cân tại O , do đó .

Từ (1), (2), (3) suy ra hay BK là phân giác của . Theo tính chất tiếp tuyến ta có AO là phân giác của . Vậy K là tâm đường tròn nội tiếp của .

c) Có (tính chất góc nội tiếp). Mà OA là phân giác của nên . Do đó .

Tứ giác AOIC nội tiếp nên (cùng chắn ).

Từ (4) và (5) suy ra mà hai góc ở vị trí đồng vị nên . Vì nên . Do đó lớn nhất khi lớn nhất. Kẻ đường kính BQ , kẻ tại P , ta có (quan hệ giữa dây cung và đường kính). Suy ra .

Ta có , suy ra hay .

Dấu "=" xảy ra khi . Vậy lớn nhất khi thẳng hàng.

Bài 2. (h.15)

a) Theo giả thiết nên . Có tại H nên vuông tại O và vuông tại . Suy ra bốn điểm thuộc đường tròn đường kính AC .

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 15

b) Ta có (tính chất góc nội tiếp), mà nên vuông cân tại H , suy ra . Lại có nên O và H thuộc đường trung trực của CM , suy ra .

c) Vì OH là trung trực của CM và nên , do đó cân tại I , nên . Mà (cùng chắn ).

Suy ra mà hai góc ở vị trí so le trong nên .

Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên .

Để thẳng hàng thì . Khi đó BMCH là hình bình hành nên BC cắt HM tại trung điểm của BC .

Vậy thẳng hàng khi AM đi qua trung điểm của BC .

Bài 3. (h.16)

a) Vî E và F thuộc đường tròn đường kính AB nên .

Do đó , suy ra và vuông tại và . Do đó tứ giác MEHF nội tiếp đường tròn đường kính MH .

b) Xét hai tam giác AEH và AFM có chung, , nên (g.g), suy ra . Do đó .

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 16

c) Có nên OI là trung trực của EF . Do đó tại . Lại có là trực tâm của tam giác nên , do đó . Có nên cân tại I , do dó . Có nên cân tại O , do đó . Do đó , suy ra .

Xét và có chung, nên , suy ra hay . Mà nên .

Xét và có chung, nên , suy ra hay .

Từ (1) và (2) suy ra hay , do đó (c.g.c), suy ra . Từ đó ta có nên .

**Bài 4. (h.17)**

a) Theo giả thiết có nên vuông tại E và vuông tại F . Suy ra bốn điểm thuộc đường tròn đường kính BC .

b) Vi là trực tâm của nên tại D . Xét và có chung nên , suy ra hay .

![](data:application/octet-stream;base64,)

Hinh 17

Tương tự ta có nên hay .

Từ (1) và (2) suy ra .

c) Kẻ đường kính AQ của đường tròn ta có .

Lại có nên và nên BHCQ là hình bình hành, mà là trung điểm của nên là trung điểm của HQ (tính chất hình bình hành). Ta có nên cùng thuộc đường tròn đường kính AH hay AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp . Lại có K thuộc đường tròn này nên hay .

Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên . Do đó thẳng hàng, mà thẳng hàng nên ba điểm thẳng hàng.

Bài 5. (h.18)

a) Theo tính chất tiếp tuyến có , lại có nên MO là trung trực của AC , suy ra . Có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Do đó , suy ra MCBO là hình thang.

b) Vì nên (hai góc đồng vị).

![](data:application/octet-stream;base64,)

Theo tính chất tiếp tuyến ta có . Trong vuông tại A ta có nên .