b) Xét hai tam giác AEM và AOC có góc A chung, $\hat{AEM}=\hat{AOC}=90^{∘}$, do đó $△AEM∝△AOC$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AO}=\frac{AM}{AC}$. Suy ra $AE⋅AC=AM⋅AO$.

c) Gọi I là giao điểm của MC và EF . Xét tử giác CEMF có $\hat{ACB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\hat{MEC}=\hat{MFC}=90^{∘}$ (giả thiết), do đó CEMF là hình chữ nhật nên $ME=CF$ và $IE=IF=IM=IC$.

Lại có $\hat{CAB}=\frac{1}{2}\hat{COB}=45^{∘}$ (tính chất góc nội tiếp) nên $△EMA$ vuông cân tại E . Suy ra $AE=\overset{2}{EM}$. Do đó $AE=CF$. Có $\hat{BCD}=\frac{1}{2}\hat{BOD}=45^{∘}$ (tính chất góc nội tiếp). Xét hai tam giác OAE và OCF có $OA=OC=R,AE=CF,\hat{OAC}=\hat{OCF}=45^{∘}$ (chứng minh trên). Do đó $△OAE=△OCF$ (c.g.c), suy ra $OE=OF$.

Như vậy $△OEF$ cân tại O mà I là trung điểm của EF nên $OI⊥EF$ (tính chất tam giác cân). Suy ra OI//MH.

Xét $△CMD$ có I là trung điểm của MC (chứng minh trên), O là trung điểm của CD , do đó IO là đường trung bình của tam giác CMD nên $OI//MD$.

Do đó MH và MD cùng song song với OI nên $H,M,D$ thẳng hàng.

Bài 4. Cho đường tròn ( $O;R$ ), đường kính $AB$. Gọi $H$ là trung điểm của $OA$. Vễ dây $CD⊥AB$ tại H . Điểm K thuộc đoạn HC , nối AK cắt đường tròn $(O)$ tại M $(M\ne A)$, nối BM cắt CD tại N . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKN. Chứng minh:

a) BMKH là tứ giác nội tiếp.

b) $BM⋅BN=3R^{2}$.

c) Khi K di chuyển trên HC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Giải. (h.9)

a) Có $\hat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\hat{AMB}=90^{∘}$. Do đó $△KMB$ vuông tại M nên M thuộc đường tròn đường kính BK . Có $CH⊥AB$ nên $△HBK$ vuông tại H do đó H thuộc đường tròn đường kính $BK$. Vậy tứ giác BMKH nội tiếp đường tròn đường kính BK .

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 9

b) Xét hai tam giác BMA và BHN có $\hat{ABM}$ chung, $\hat{BMA}=\hat{BHN}=90^{∘}$, do đó $△BMA∝△BHN$ (g.g), suy ra $\frac{BM}{BH}=\frac{BA}{BN}$ hay $BM⋅BN=BA⋅BH$. Mà $BH=\frac{3R}{2},BA=2R$ nên $BH⋅BA=3R^{2}$. Vậy $BM⋅BN=3R^{2}$.

c) Gọi E là giao điểm của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác AKN . Suy ra AKNE là tứ giác nội tiếp nên $\hat{NEA}+\hat{NKA}=180^{∘}$. Do đó $\hat{NEA}=\hat{AKH}$.

Theo chứng minh trên, ta có BMKH là tứ giác nội iê̂́p nên $\hat{MBH}+\hat{MKH}=180^{∘}$, do đó $\hat{MBH}=\hat{AKH}$. Suy ra $\hat{NEA}=\hat{NBH}$ nên $△$ NEB cân tại N .

Mà $NH⊥EB$ (giả thiết) nên $HE=HB$. Do H và B cố định nên E cố định. Có A và $E$ cố định, $IA=IE$ nên $I$ thuộc đường trung trực của $AE$. Vậy $I$ thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính $AB$, điểm $H$ thuộc đoạn $OA$. Vẽ dây $CD⊥AB$ tại H . Điểm I thuộc đoạn HC , nối AI cắt đường tròn tại M . Kẻ $CE⊥AM$ tại E , nối HM cắt CE tại K . Chứng minh:

a) BMIH là tứ giác nội tiếp.

b) $△ACM∝△DIM$.

c) $IK//CM$.

Giải. (h.10)

a) Ta có $\hat{AMB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $△MBI$ vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BI . Theo giả thiết $CH⊥AB$ tại H nên $△HBI$ vuông tại H , do đó H thuộc đường tròn đường kính BI. Vậy tứ giác BMIH nội tiếp đường tròn đường kính BI .

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 10

b) Vì $OC=OD=R$ nên $△OCD$ cân tại O . Mà $OH⊥CD$ nên OH là phân giác của góc COD , suy ra $\hat{AOC}=\hat{AOD}$. Theo tính chất góc nội tiếp $\hat{AMC}=\frac{1}{2}\hat{AOC},\hat{AMD}=\frac{1}{2}\hat{AOD}$, do đó $\hat{AMC}=\hat{AMD}$.

Vì tứ giác BMIH nội tiếp nên $\hat{HIM}+\hat{HBM}=180^{∘}$. Tứ giác ACMB nội tiếp đường tròn $(O)$ nên $\hat{ACM}+\hat{ABM}=180^{∘}$. Suy ra $\hat{DIM}=\hat{ACM}$.

Từ (1) và (2) suy ra $△ACM⊂△DIM$ (g.g).

c) Gọi F là giao điểm của CE và AB . Tam giác ACF có $AE⊥CF,CH⊥AF$ nên I là trực tâm của $△ACF$, suy ra $FI⊥AC$. Mà $\hat{ACB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $FI//BC$. Do đó $△HFI∝ΔHBC$ suy ra $\frac{FI}{BC}=\frac{HF}{HB}$. Có $CF//MB$ nên $\frac{HF}{HB}=\frac{FK}{MB}$ suy ra $\frac{FI}{BC}=\frac{FK}{MB}$.

Ta có $CF//MB$ nên $\hat{FCB}=\hat{CBM}$ (hai góc so le trong), $FI//BC$ nên $\hat{IFK}=\hat{FCB}$ (hai góc so le trong). Do đó $\hat{IFK}=\hat{CBM}$.

Từ (3) và (4) suy ra $△IFK∝△CBM$ (c.g.c). Do đó $\hat{IKF}=\hat{CMB}$.

Suy ra $\hat{CKI}=180^{∘}-\hat{IKF}=180^{∘}-\hat{CMB}=180^{∘}-\left(\hat{CMA}+90^{∘}\right)$

$$=180^{∘}-\hat{CMA}-90^{∘}=90^{∘}-\hat{CMA}=\hat{ECM}( do △EMC vuông tại E).$$

Vậy $\hat{CKI}=\hat{ECM}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $IK//CM$.

Bài 6. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính $AB$ và $CD$ vuông góc với nhau, điểm $M$ thuộc cung nhỏ $BC$. Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại $D$ cắt $MB$ tại $N$. Nối AM cắt CD tại E .

a) Chứng minh bốn điểm $M,E,D,N$ thuộc cùng một đường tròn.

b) Chứng minh $AM⋅BN=2R^{2}$.

c) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác MAD có giá trị lớn nhất.

Giải. (h.11)

a) Ta có $\hat{AMB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $OD⊥DN$ ( DN là tiếp tuyến). Do đó $△MEN$ vuông tại $M,△DEN$ vuông tại D . Suy ra bốn điểm $M,E,D,N$ thuộc đường tròn đường kính EN .

b) Kẻ $BQ⊥DN$, khi đó OBQD là hình chữ nhật nên $BQ=OD$. Tứ giác $MEDN$ nội tiếp nên $\hat{BNQ}=\hat{AEO}$ (cùng bù với góc MED).

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 11

Lai có $\hat{BQN}=\hat{AOE}=90^{∘}$ nên $△OAE∝△QBN(g.g)$, suy ra $\frac{AE}{BN}=\frac{AO}{BQ}=\frac{R}{R}=1$.

Do đó $AE=BN$. Xét $△AOE$ và $△AMB$ có $\hat{AOE}=\hat{AMB}=90^{∘},\hat{OAE}$ chung.

Do đó $△AOE⊂△AMB( g.g)$, suy ra $\frac{AO}{AM}=\frac{AE}{AB}$.

Do đó $AM⋅AE=AO⋅AB=R⋅2R=2R^{2}$. Mà $AE=BN$ nên $AM⋅BN=2R^{2}$.

c) Kẻ $MH⊥AD$ tại H . Gọi I là trung điểm của AD . Do $△OAD$ cân tại O nên $OI⊥AD$. Ta có $MH\leq MI,MI\leq MO+OI$, suy ra $MH\leq MO+OI$ (không đổi). Dấu "=" xảy ra khi $I,O,M$ thẳng hàng.

Ta có $S\_{MAD}=\frac{1}{2}AD⋅MH\leq \frac{1}{2}AD⋅(MO+OI)$ với AD không đổi.

Vậy $S\_{MAD}$ lớn nhất khi ba điểm $I,O,M$ thẳng hàng.

Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính $AB$ và $CD$ vuông góc với nhau. Điểm E thuộc đoạn OC , nối AE cắt đường tròn $(O)$ tại M . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME .

a) Chứng minh $OBME$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AE⋅AM=AC^{2}$.

c) Tìm vị trí của E để $MA=2MB$.

d) Cho E di chuyển trên OC , chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

Giải. (h.12)

a) Ta có $\hat{AMB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $△MBE$ vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BE . Vi $AB⊥CD$ nên $△EOB$ vuông tại O , do đó O thuộc đường tròn đường kính BE . Vậy bốn điểm $O,B,M,E$ cùng thuộc đường tròn đường kính BE . Suy ra OBME là tứ giác nội tiếp.

b) Theo tính chất góc nội tiếp $\hat{ACD}=\frac{1}{2}\hat{AOD}=45^{∘}$,

$\hat{AMC}=\frac{1}{2}\hat{AOC}=45^{∘}$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 12

Xét $△ACE$ và $△AMC$ có $\hat{MAC}$ chung, $\hat{ACE}=\hat{AMC}=45^{∘}$ nên $△ACE∝△AMC$ (g.g). Suy ra $\frac{AC}{AM}=\frac{AE}{AC}$ do đó $AM⋅AE=AC^{2}$.

c) Xét $△AOE$ và $△AMB$ có $\hat{AOE}=\hat{AMB}=90^{∘},\hat{MAB}$ chung nên $△AOE$ cs $△AMB$ (g.g), suy ra $\frac{OE}{OA}=\frac{MB}{MA}=\frac{1}{2}$. Do đó $OE=\frac{1}{2}OA$ mà $OA=OC=R$ nên $OC=2OE$. Vậy $MA=2MB$ khi E là trung điểm OC .

d) Trong đường tròn $(O;R)$ có $\hat{CMA}=\frac{1}{2}\hat{COA}=45^{∘}$. Trong đường tròn (I) có $\hat{CME}=\frac{1}{2}\hat{CIE}=45^{∘}$. Do đó $\hat{CIE}=90^{∘}$. Xét $△ICE$ có $IC=IE=R^{'}$ và $\hat{CIE}=90^{∘}$ nên $△ICE$ vuông cân tại I . Do đó $\hat{ECI}=45^{∘}$ hay $\hat{OCI}=45^{∘}$. Xét $△OBC$ có $\hat{COB}=90^{∘},OB=OC=R$ nên $△OBC$ vuông cân tại O , do đó $\hat{OCB}=45^{∘}$.

Như vậy $\hat{OCB}=\hat{OCI}=45^{∘}$ nên $C,I,B$ thẳng hàng. Do đó I thuộc đường thẳng BC cố định.

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$, dây CD không qua O . Lấy M thuộc tia đối của tia CD . Kẻ hai tiếp tuyến $MA,MB$ với đường tròn ( A thuộc cung nhỏ CD ). Gọi I là trung điểm của CD , nối OM cắt AB tại H . Qua A kẻ đường thẳng song song với IB cắt OI và MD lẩn lượt tại E và F . Chứng minh:

a) Năm điểm $M,A,B,I,O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) IM là phân giác của góc AIB.

c) A là trung điểm của EF .

Giải. (h.13)

a) Ta có $OC=OD=R$ nên $△OCD$ cân tại O , mà I là trung điểm của CD , suy ra $OI⊥CD$. Do đó $△IOM$ vuông tại I nên I thuộc đường tròn đường kính OM .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA⊥MA$, $OB⊥MB$ nên $△AOM$ vuông tại A , $ΔBOM$ vuông tại $B$, suy ra $A$ và $B$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM . Vậy năm điểm $M,A,B,O,I$ cùng thuộc đường

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 13 tròn đường kính OM .

b) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MA=MB$, mà năm điểm $M,A,I,O,B$ cùng thuộc một đường tròn nên $\hat{MA}=\hat{MB}$. Có $\hat{AIM}$ là góc nộit tiếp chắn cung MA, $\hat{ BIM }$ là góc nội tiếp chắn cung MB nên $\hat{AIM}=\hat{BIM}$, suy ra IM là phân giác của góc AIB.

c) Vi $EF//IB$ nên $\hat{AFI}=\hat{FIB}$ (hai góc so le trong). Do đó $\hat{AFI}=\hat{AIF}$ nên $△AIF$ cân tại A suy ra $AI=AF$. Mà $ΔIEF$ vuông tại I nên $\hat{AFI}+\hat{AEI}=90^{∘}$ và $\hat{AIF}+\hat{AIE}=90^{∘}$. Do đó $\hat{AIE}=\hat{AEI}$ nên $△AIE$ cân tại A , suy ra $AI=AE$.

Vậy $AE=AF$ hay A là trung điểm của EF .

**3. Bài tập tự luyện**

Bài 1. Từ điểm A cố định ở ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ đường thẳng cắt đường tròn tại $M,N(AM<AN)$ và hai tiếp tuyến $AB,AC(B$ thuộc cung lớn MN$)$. Gọi I là trung điểm của MN , nối CI cắt đường tròn $(O;R)$ tại E , nối AO cắt đường tròn tại K . Chứng minh:

a) Bốn điểm $A,O,I,C$ cùng thuộc một đường tròn.

b) K là tâm đường tròn nội tiếp $△ABC$.

c) $BE//MN$. Cho A cố định, tìm vị trí của N để diện tích $△AEN$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa cung AB . Điểm M thuộc cung nhỏ BC . Kẻ $CH⊥AM$ tại H , nối BC cắt OH tại I . Nối MI cắt nửa đường tròn tại D . Chứng minh:

a) Bốn điểm $A,O,H,C$ cùng thuộc một đường tròn.

b) $OH⊥CM$.

c) $CM//BD$. Tìm vị trí của M để ba điểm $B,H,D$ thẳng hàng.

Bài 3. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Vẽ dây $EF(E\in \overparen{AF},AE<BF)$. Nối $AE$ cắt $BF$ tại $M$, nối $AF$ cắt $BE$ tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của MH. Nối OI cắt EF tại N . Kẻ $IK⊥OH$ tại $K,IK$ cắt EF tại P . Chứng minh:

a) MEHF là tứ giác nội tiếp.

b) $AE⋅AM=AF⋅AH$.

c) $OI⊥EF$ và $PH//AB$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$. Các đường cao $BE$ và $CF$ cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn điểm $B,C,E,F$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $CE⋅CA+BF⋅BA=BC^{2}$.

c) Đường tròn ngoại tiếp $△AEF$ cắt đường tròn $(O)$ tại K . Chứng minh ba điểm $K,H,M$ thẳng hàng.

Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB$. Kẻ tiếp tuyến $Ax$ của đường tròn tại $A$. Lấy M thuộc Ax , kẻ tiếp tuyến MC với đường tròn, C là tiếp điểm. Gọi H là trực tâm của $△MAC$.

a) Chứng minh MCBO là hình thang

b) Cho $\hat{ABC}=60^{∘}$, tính theo R độ dài đoạn thẳng MA .

c) Khi M di chuyển trên Ax , chứng minh H thuộc một đường tròn cố định.

Bài 6. Cho nửa đường tròn $(O)$ đường kính AB . Vẽ dây $CD(C\in \overparen{AD})$. Nối AD cắt BC tại $H,AC$ cắt BD tại M .

a) Chứng minh MCHD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $MC⋅CA=HC⋅CB$.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCHD , chứng minh $KC⊥OC$.

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $\left(O^{'};R\right)$ tiếp xúc ngoài tại $K(R<R)$. Gọi KB , $KC$ lần lượt là đường kính của các đường tròn $(O;R)$ và $\left(O^{'};R\right)$. Gọi Kx là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại $K$. Lấy điểm $A$ thuộc $Kx$. Nối $AB$ cắt đường tròn $(O;R)$ tại $D,AC$ cắt đường tròn $\left(O^{'};R\right)$ tại E . Nối DE cắt đường tròn $(O;R)$ tại M , cắt đường tròn $\left(O^{'};R\right)$ tại N và cắt BC tại Q . Nối BM cắt CN tại H . Chứng minh:

a) ADKE là tứ giác nội tiếp..

b) $QB⋅QC=QD⋅QE$.

c) Ba điểm $A,H,K$ thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$ đường kính AK . Kẻ BE và CF cùng vuông góc với AK . Gọi AD là đường cao của tam giác ABC .

a) Chứng minh ABDE và ACFD là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $DF//BK$.

c) Cho BC cố định, A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $△ABC$ có ba góc nhọn, chứng minh tầm đường tròn ngoại tiếp $△DEF$ là một điểm cố định.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn: nửa đường tròn tâm I đường kính AB và nửa đường tròn tâm K đường kính AC . Điểm M thuộc nửa đường tròn (I), MA cắt nửa đường tròn (K) tại N .

a) Tứ giác MNCB là hình gì?

b) Chứng minh $AM⋅AN=BM⋅CN$.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác BMNC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10. Cho đường tròn $(O)$ có hai bán kính $OA$ và $OB$ vuông góc với nhau. Điểm M thuộc cung lớn AB sao cho tam giác MAB có ba góc nhọn. Các đường cao $AE$ và $BF$ của tam giác $MAB$ cắt nhau tại $H$, đồng thời cắt đường tròn $(O)$ lẩn lượt tại P và Q . Các đường thẳng PB và QA cắt nhau tại S , nối SH cắt PQ tại I. Chứng minh:

a) $P,O,Q$ là ba điểm thẳng hàng.

b) $SH=PQ$.

c) I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 11. Từ điểm $M$ ở ngoài đường tròn $(O)$ kẻ hai tiếp tuyến $MA,MB$ với đường tròn, nối MO cắt AB tại H . Kẻ đường kính AC của đường tròn $(O)$. Kẻ $BK⊥AC$ tại $K$. Nối $MC$ cắt đường tròn $(O)$ tại E , cắt BK tại I . Gọi Q là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) Bốn điểm $B,H,O,K$ cùng thuộc một đường tròn.

b) $ME⋅MC=MH⋅MO$.

c) Ba điểm $H,I,Q$ thẳng hàng.

Bài 12. Cho tứ giác $ABCD(AB<CD)$ nội tiếp đường tròn $(O)$, đường kính AD . Nối AC cắt BD tại $H,AB$ cắt CD tại $K,KH$ cắt AD tại E .

a) Chứng minh ABHE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $EA⋅ED=EH⋅EK$.

c) Qua E kẻ đường thẳng song song với BC và cắt $AB,DH$ lẩn lượt tại M và N . Chứng minh $EM=EN$.

Bài 13. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC . Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại $A$. Lấy $M$ thuộc $Ax$, kẻ tiếp tuyến $MB$ với đường tròn $(B\ne A)$. Gọi $H$ là giao điểm của AB với OM . Kẻ $BK⊥AC$ tại K . Nối MC cắt BK tại I , cắt đường tròn $(O)$ tại N . Gọi E là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) $CN⋅CM=4R^{2}$.

c) Ba điểm $H,I,E$ thẳng hàng.

Bài 14. Cho tam giác $ABC(AB<AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao $AD,BE,CF$ của tam giác ABC cắt nhau tại H . Nối EF cắt CB tại M , cắt $AD$ tại $I$. Qua $F$ kẻ đường thẳng song song với $AC$ và cắt $AM$ tại $N$, cắt $AD$ tại K. Chứng minh:

a) BCEF là tứ giác nội tiếp.

b) $ME⋅MF=MB⋅MC$.

c) F là trung điểm của KN .

**Hướng dẫn - Lời giải - Đáp số**

Bài 1. (h.14)

a) Vì $OM=ON=R$ nên $△OMN$ cân tại O , mà $IM=IN$ nên $OI⊥MN$ (tính chất tam giác cân). Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OC⊥CA$, do đó $△IOA$ vuồng tại I và $ΔCOA$ vuông tại C . Suy ra bốn điểm $O,A$, C , I thuộc đường tròn đường kính OA .

![](data:application/octet-stream;base64...)

b) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OB⊥BA$ nên $\hat{ABK}+\hat{KBO}=90^{∘}$.

Có $AB=AC$ (tính chất tiếp tuyến), $OB=OC=R$ nên OA là trung trực của BC . Suy ra $OA⊥BC$ tại H , do đó: $\hat{KBC}+\hat{OKB}=90^{∘}$.

Mà $OB=OK=R$ nên $△OBK$ cân tại O , do đó $\hat{OBK}=\hat{OKB}$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $\hat{KBC}=\hat{KBA}$ hay BK là phân giác của $\hat{ABC}$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có AO là phân giác của $\hat{BAC}$. Vậy K là tâm đường tròn nội tiếp của $△ABC$.

c) Có $\hat{BEC}=\frac{1}{2}\hat{BOC}$ (tính chất góc nội tiếp). Mà OA là phân giác của $\hat{BOC}$ nên $\hat{AOC}=\frac{1}{2}\hat{BOC}$. Do đó $\hat{BEC}=\hat{AOC}$.

Tứ giác AOIC nội tiếp nên $\hat{AOC}=\hat{AIC}$ (cùng chắn $\overparen{AC}$ ).

Từ (4) và (5) suy ra $\hat{BEC}=\hat{AIC}$ mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $BE//MN$. Vì $BE//MN$ nên $S\_{AEN}=S\_{ABN}$. Do đó $S\_{AEN}$ lớn nhất khi $S\_{ABN}$ lớn nhất. Kẻ đường kính BQ , kẻ $NP⊥AB$ tại P , ta có $NP\leq NB,NB\leq BQ$ (quan hệ giữa dây cung và đường kính). Suy ra $NP\leq BQ$.

Ta có $S\_{ABN}=\frac{1}{2}AB⋅NP\leq \frac{1}{2}AB⋅BQ$, suy ra $S\_{ABN}\leq AB⋅R$ hay $S\_{AEN}\leq AB⋅R$.

Dấu "=" xảy ra khi $N≡Q$. Vậy $S\_{AEN}$ lớn nhất khi $N,O,B$ thẳng hàng.

Bài 2. (h.15)

a) Theo giả thiết $\overparen{CA}=\overparen{CB}$ nên $\hat{AOC}=\hat{BOC}=90^{∘}$. Có $CH⊥AM$ tại H nên $△AOC$ vuông tại O và $△AHC$ vuông tại $H$. Suy ra bốn điểm $A,O,H,C$ thuộc đường tròn đường kính AC .

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 15

b) Ta có $\hat{CMA}=\frac{1}{2}\hat{COA}=45^{∘}$ (tính chất góc nội tiếp), mà $CH⊥AM$ nên $ΔHMC$ vuông cân tại H , suy ra $HC=HM$. Lại có $OC=OM=R$ nên O và H thuộc đường trung trực của CM , suy ra $OH⊥CM$.

c) Vì OH là trung trực của CM và $I\in OH$ nên $IC=IM$, do đó $△ICM$ cân tại I , nên $\hat{ICM}=\hat{IMC}$. Mà $\hat{IMC}=\hat{CBD}$ (cùng chắn $\overparen{CD}$ ).

Suy ra $\hat{ICM}=\hat{CBD}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên $CM//BD$.

Ta có $\hat{AMB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $CH//MB$.

Để $B,H,D$ thẳng hàng thì $BH//CM$. Khi đó BMCH là hình bình hành nên BC cắt HM tại trung điểm của BC .

Vậy $B,H,D$ thẳng hàng khi AM đi qua trung điểm của BC .

Bài 3. (h.16)

a) Vî E và F thuộc đường tròn $(O)$ đường kính AB nên $\hat{AEB}=\hat{AFB}=90^{∘}$.

Do đó $\hat{MEH}=\hat{MFH}=90^{∘}$, suy ra $△EMH$ và $△FMH$ vuông tại $E$ và $F$. Do đó tứ giác MEHF nội tiếp đường tròn đường kính MH .

b) Xét hai tam giác AEH và AFM có $\hat{MAF}$ chung, $\hat{AEH}=\hat{AFM}=90^{∘}$, nên $△AEH∝△AFM$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AF}=\frac{AH}{AM}$. Do đó $AE⋅AM=AH⋅AF$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 16

c) Có $EI=FI=\frac{1}{2}MH,OE=OF$ nên OI là trung trực của EF . Do đó $OI⊥EF$ tại $N$. Lại có $H$ là trực tâm của tam giác $MAB$ nên $MH⊥AB$, do đó $\hat{HMB}+\hat{MBA}=90^{∘}$. Có $IM=IF$ nên $△IMF$ cân tại I , do dó $\hat{IMF}=\hat{IFM}$. Có $OF=OB$ nên $△OFB$ cân tại O , do đó $\hat{OFB}=\hat{OBF}$. Do đó $\hat{IFM}+\hat{OFB}=90^{∘}$, suy ra $\hat{IFO}=90^{∘}$.

Xét $△INF$ và $△IFO$ có $ˆ$ chung, $\hat{INF}=\hat{IFO}=90^{∘}$ nên $ΔINF∝ΔIFO(g.g)$, suy ra $\frac{IF}{IO}=\frac{IN}{IF}$ hay $IF^{2}=IN⋅IO$. Mà $IF=IH$ nên $IH^{2}=IN⋅IO$.

Xét $ΔINP$ và $ΔIKO$ có $\hat{OIK}$ chung, $\hat{INP}=\hat{IKO}=90^{∘}$ nên $ΔINPcsΔIKO(g.g)$, suy ra $\frac{IN}{IK}=\frac{IP}{IO}$ hay $IN⋅IO=IK⋅IP$.

Từ (1) và (2) suy ra $IH^{2}=IK⋅IP$ hay $\frac{IH}{IK}=\frac{IP}{IH}$, do đó $△IKH∝ΔIHP$ (c.g.c), suy ra $\hat{IHP}=\hat{IKH}=90^{∘}$. Từ đó ta có $PH⊥MH$ nên $PH//AB$.

**Bài 4. (h.17)**

a) Theo giả thiết có $BE⊥AC,CF⊥AB$ nên $△BEC$ vuông tại E và $△BFC$ vuông tại F . Suy ra bốn điểm $B,C,E,F$ thuộc đường tròn đường kính BC .

b) Vi $H$ là trực tâm của $△ABC$ nên $AH⊥BC$ tại D . Xét $△CEB$ và $△CDA$ có $\hat{CEB}=\hat{CDA}=90^{∘},\hat{ACB}$ chung nên $△CEB⊂△CDA ( g.g)$, suy ra $\frac{CE}{CD}=\frac{CB}{CA}$ hay $CE⋅CA=CD⋅CB$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 17

Tương tự ta có $△BCF∝△BAD$ nên $\frac{BC}{BA}=\frac{BF}{BD}$ hay $BC⋅BD=BF⋅BA$.

Từ (1) và (2) suy ra $CE⋅CA+BF⋅BA=CD⋅CB+BD⋅BC=BC^{2}$.

c) Kẻ đường kính AQ của đường tròn $(O)$ ta có $\hat{ABQ}=\hat{ACQ}=90^{∘}$.

Lại có $BE⊥AC,CF⊥AB$ nên $BH//CQ$ và $BQ//CH$ nên BHCQ là hình bình hành, mà $M$ là trung điểm của $BC$ nên $M$ là trung điểm của HQ (tính chất hình bình hành). Ta có $\hat{AEH}=\hat{AFH}=90^{∘}$ nên $A,E,F,H$ cùng thuộc đường tròn đường kính AH hay AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $△AEF$. Lại có K thuộc đường tròn này nên $\hat{AKH}=90^{∘}$ hay $HK⊥AK$.

Ta có $\hat{AKQ}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $QK⊥AK$. Do đó $Q,H,K$ thẳng hàng, mà $Q,H,M$ thẳng hàng nên ba điểm $K,H,M$ thẳng hàng.

Bài 5. (h.18)

a) Theo tính chất tiếp tuyến có $MA=MC$, lại có $OA=OC=R$ nên MO là trung trực của AC , suy ra $OM⊥AC$. Có $\hat{ACB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Do đó $CB//MO$, suy ra MCBO là hình thang.

b) Vì $OM//BC$ nên $\hat{MOA}=\hat{CBA}=60^{∘}$ (hai góc đồng vị).

![](data:application/octet-stream;base64...)

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA⊥AM$. Trong $△AMO$ vuông tại A ta có $MA=OA⋅tan⁡\hat{AOM}$ nên $MA=R⋅tan⁡60^{∘}=R\sqrt{3}$.