**CHƯƠNG**

**III**

**PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

**BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

**LÝ THUYẾT.**

**I ===I**

**I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

**1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng**

|  |
| --- |
| Vectơ  là 1 *vectơ chỉ phương* của đường thẳng nếu giá của  vectơ  song song hoặc trùng với đường thẳng . |

**2. Phương trình tham số - Phương trình chính tắc của đường thẳng**

|  |
| --- |
| Đường thẳng đi qua  và có 1 vectơ chỉ phương  + *Phương trình tham số* của đường thẳng là:  (1)  + *Phương trình chính tắc* của đường thẳng là:  (2) |

**II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

Cho hai đường thẳng  và 

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

**1. Xét vị trí tương đối của và theo chương trình cơ bản:**



|  |
| --- |
| **Bước 1**: Kiểm tra tính cùng phương của  và .  **Bước 2:** Nhận xét:  + Nếu  và  *cùng phương* thì:  + Nếu  và  *không cùng phương* thì **hoặc**  cắt **hoặc**  và  chéo nhau.   * **TH1**:  **cắt**   *Điều kiện 1*: và không cùng phương .  *Điều kiện 2*: Giải hệ phương trình:  (\*) có nghiệm duy nhất .  **Kết luận:**  cắt  tại điểm .  *Lưu ý:* Giải hệ (\*) bằng cách: Từ (1) và (2) giải ra  và thay vào (3) (Nếu (3) thoả thì , ngược lại thì không).   * **TH2:**  và  **chéo nhau**   *Điều kiện 1*:  và  không cùng phương .  *Điều kiện 2*: Giải hệ phương trình: (\*) vô nghiệm.     * **TH3:**  **song song** với   *Điều kiện 1*:  và  cùng phương .  *Điều kiện 2*: Chọn điểm . Cần chỉ rõ .   * **TH4**:  và  **trùng nhau**     *Điều kiện 1:*  và  trùng nhau.  *Điều kiện 2:* Chọn điểm . *Cần* chỉ rõ .  **Đặc biệt:** |

**2.Xét vị trí tương đối của và theo chương trình nâng cao bằng sơ đồ sau:**



* Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương 
* Đường thẳng d’ có 1 vectơ chỉ phương 

Tính



Cắt nhau

Trùng nhau

Chéo nhau

Song song

**III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

|  |
| --- |
| Cho đường thẳng: và mp  Xé hệ phương trình:   * (\*) có nghiệm duy nhất ⇔ cắt  * (\*) có vô nghiệm ⇔ //  * (\*) vô số nghiệm ⇔ ⊂ |

**IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

|  |
| --- |
| * Khoảng cách từ điểm *M* đến một đường thẳng *d* qua điểm *Mo*có vectơ chỉ phương :  * Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia. * Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:   *d*  đi qua điểm *M* và có vectơ chỉ phương và *d’*  đi qua điểm *M’* và có vectơ chỉ phương là:   * Khoảng cách từ giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng hoặc khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng đến đường thẳng. |

**V. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

|  |
| --- |
| * Góc giữa hai đường thẳng (*d*) và (*d’*) có vectơ chỉ phương và là :     Đặc biệt:   * Góc giữa đường thẳng *d* có vectơ chỉ phương và mpcó vectơ pháp tuyến là: |

**HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**II ===I**

**I. XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| * Vectơ  là 1 *vectơ chỉ phương* của đường thẳng  nếu giá của vectơ  song song hoặc trùng với đường thẳng . * Nếu là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng thì  cũng là 1 vectơ chỉ phương của . * Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng . Nếu có 2 vectơ  không cùng phương và  thì chọn 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng là  hoặc |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm ; các đường thẳng , ; các mặt phẳng , . Tìm một vectơ chỉ phương của các đường thẳng sau:  1) Đường thẳng .  2) Đường thẳng  đi qua  và song song với .  3) Đường thẳng .  4) Đường thẳng qua B và song song với.  5) Đường thẳng qua  và vuông góc với .  6) Đường thẳng qua, vuông góc với  và .  7) Đường thẳng qua  và vuông góc với .  8) Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng .  9) Đường thẳng  qua  vuông góc với và song song với mặt phẳng .  10)Đường thẳng  qua, cắt và vuông góc với trục . |

***Lời giải:***

1) Đường thẳng có 1 vectơ chỉ phương là .

2) Đường thẳng có 1 vectơ chỉ phương là . Ta có:  nên  cũng là 1 vectơ chỉ phương của .

3) Đường thẳng có 1 vectơ chỉ phương là .

4) Đường thẳng  nên có 1 vectơ chỉ phương là .

5) Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến là . Đường thẳng  nên có 1 vectơ chỉ phương là .

6) Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng .

Ta có: ,  chọn .

7) Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến là . Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng . Ta có: ,  chọn .

8) Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng . Ta có: ,

 chọn .

9) Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng . Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến là .Ta có: ,  chọn .

10) Gọi . Ta có  là hình chiếu của  lên . Vậy  có 1 vectơ chỉ phương là .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Tìm  để giao tuyến của  1) vuông góc với mặt phẳng .  2) song song với mặt phẳng . |

***Lời giải:***

Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* là giao tuyến của .

Mặt phẳng của  có 1 vectơ pháp là 

Mặt phẳng của  có 1 vectơ pháp là 

Ta có: chọn .

1) Mặt phẳng (*P*) có 1 vectơ pháp tuyến . Đường thẳng *d* vuông góc với mặt phẳng cùng phương  (vô nghiệm).

Vậy không tồn tại giá trị  thỏa yêu cầu bài toán.

2) Mặt phẳng (*Q*) có 1 vectơ pháp tuyến .

Đường thẳng *d* vuông góc với mặt phẳng :



 .

**II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| ***Bước 1:*** Xác định  ***Bước 2:*** Xác định 1 vectơ chỉ phương  của đường thẳng .  ***Bước 3:*** Áp dụng công thức, ta có:   * Phương trình tham số của * Phương trình chính tắc của |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các đường thẳng  và . Viết phương trình:  1) tham số của đường thẳng . 2) chính tắc của đường thẳng . |

***Lời giải:***

1) Đường thẳng  qua  và có 1 vectơ chỉ phương , có phương trình tham số là: .

2) Đường thẳng  qua  và có 1 vectơ chỉ phương , có phương trình chính tắc là: .

**Chú ý:** *Nếu đề bài chỉ yêu cầu viết phương trình đường thẳng thì ta viết phương trình tham số hay phương trình chính tắc của đường thẳng đều được.*

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm , , , ; đường thẳng thẳng ; mặt phẳng . Viết phương trình của đường thẳng  trong mỗi trường hợp sau:  1) Qua  và có 1 vectơ chỉ phương . 2) Qua 2 điểm .  3) Qua và song song với trục tung. 4) Qua  và song song với .  5) Qua  và vuông góc với . 6) Qua  và vuông góc với . |

***Lời giải:***

1) Đường thẳng d qua  và có 1 vectơ chỉ phương , có phương trình tham số là: 

2) Đường thẳng d qua  và có 1 vectơ chỉ phương , có phương trình tham số là: 

3) Đường thẳng  qua  và song song với trục *Ox* nên nhận  làm 1 vectơ chỉ phương, có phương trình tham số: .

4) Đường thẳng  đi qua điểm . Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là . Ta có:  có 1 vectơ chỉ phương là . Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng  là: .

5) Đường thẳng  đi qua điểm . Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến là .

Đường thẳng  vuông góc với  nên nhận  làm 1 vectơ chỉ phương. Vậy phương trình tham số của đường thẳng  là: .

6) Đường thẳng  đi qua điểm . Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến là . Đường thẳng  vuông góc với  nên nhận  làm 1 vectơ chỉ phương. Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng  là: .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm , , , ; các đường thẳng thẳng , ; các mặt phẳng , . Viết phương trình của đường thẳng  trong mỗi trường hợp sau:  1) Qua  và vuông góc với các đường thẳng .  2) Qua *B* và vuông góc với đường thẳng và trục  3) Qua *O* và song song với 2 mặt phẳng .  4) Qua , song song với  và vuông góc với .  5)  là giao tuyến của hai mặt phẳng . |

***Lời giải:***

1) Đường thẳng  qua . Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương ; . Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của . Ta có:  chọn . Vậy phương trình chính tắc của  là 

2) Đường thẳng  qua ; . Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của . Ta có: chọn .

Vậy phương trình tham số của  là 

3) Đường thẳng  qua ;  là 1 vectơ pháp tuyến của   là 1 vectơ pháp tuyến của Ta có: .

Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của . Ta có:  chọn . Vậy phương trình tham số của  là 

4) Đường thẳng d qua ;  là 1 vectơ pháp tuyến của   là 1 vectơ chỉ phương của Ta có: .Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của . Ta có:  chọn . Vậy phương trình chính tắc của  là 

5) Chọn điểm trên giao tuyến :

Xét hệ phương trình: . Cho , giải được: .

Xác định vectơ chỉ phương của : Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của d***.*** Ta có:  chọn . Vậy phương trình tham số của : .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 4:*** Trong không gian với hệ tọa độ  viết phương trình đường thẳng  đi qua  cắt và vuông góc với đường thẳng . |

***Lời giải:***

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .

Gọi . Ta có: .

Suy ra: . Đường thẳng  đi qua  và có 1 vectơ chỉ phương là  nên có phương trình tham số là: .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 5:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và d: và mặt phẳng (*P*): .Viết phương trình đường thẳng ∆ đi qua điểm *A*, song song với (P) và cắt đường thẳng d. |

***Lời giải:***



***Cách 1:***

*Bước 1:* Xác định điểm .

Ta có: . Gọi 

Lúc đó: . Mặt phẳng (*P*) có 1 vectơ pháp 



*Bước 2:* Đường thẳng .

Vì vậy .

Đường thẳng  đi qua A và có 1 vectơ chỉ phương là  nên có phương trình tham số: .



***Cách 2:***

*Bước 1:* Lập phương trình mp(Q) qua  và song song với mp(*P*):

*Bước 2:* Xác định giao điểm *B* của *d* và mp(Q), .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 6:*** Trong không gian với hệ tọa độ viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mp(*P*), đồng thời cắt cả hai đường thẳng ,  với |

***Lời giải:***

***Cách 1:***

Bước 1: Viết phương trình mp chứa và vuông góc với .



Bước 2: Viết phương trình mp chứa và vuông góc với .



Bước 3: Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của mp và mp .



Kiểm tra sự cắt nhau. (mối quan hệ giữa vectơ chỉ phương)

***Cách 2:***

Bước 1: Viết phương trình mp chứa và vuông góc với .



Bước 2: Xác định giao điểm A của và mp .



Bước 3: Đường thẳng cần tìm đi qua A và vuông góc với mp. Kiểm tra sự cắt nhau. (Mối quan hệ giữa vectơ chỉ phương).



***Cách 3:***



**Sử dụng kỹ năng khái niệm “thuộc” (Tìm ra 2 giao điểm *M, N*)**

Ta có: 

Mặt phẳng (*P*) có 1 vectơ pháp tuyến là .

Gọi . Ta có:.

.

Lúc đó ta có  và cùng phương 

.

Đường thẳng , qua  và có 1 vectơ chỉ phương là , có phương trình tham số: .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 7:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mp và mặt cầu  có phương trình như sau: .  1) Chứng minh:  cắt  theo một đường tròn có tâm .  2) Gọi  là tâm mặt cầu . Viết phương trình đường thẳng . |

***Lời giải:***

a) Mặt cầu  có tâm , bán kính . Ta có:  cắt  theo một đường tròn có tâm .

b) Đường thẳng  đi qua  và nhận VTPT của  là  làm vectơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc: .

**III. XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

*Dùng 1 trong 2 cách như trong phần lý thuyết.*

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:  a) . b) |

***Lời giải:***

a) Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Ta có: ,,.

b) Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Ta có: ,,.

c) Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Ta có: ,, chéo nhau.

d) Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Ta có: ,, cắt nhau.

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ  xác định vị trí tương đối của cặp đường thẳng sau theo m với và |

***Lời giải:***

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

Ta có:  do () và .

Xét .

TH 1:  và  cắt nhau.

TH 2:  và  chéo nhau.

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho hai đường thẳng  và . Xác định để:  1)  vuông góc với . 2)  song song với . |

**Lời giải**

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .

1)  vuông góc với 

2)  song song với  cùng phương

*Kiểm tra lại:* Với  thì  và .

Chọn , thấy  (do hệ phương trình  vô nghiệm)

Vậy khi  thì  song song với .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 4:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho hai đường thẳng  và .  a) Chứng minh  và  cùng thuộc một mặt phẳng.  b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  và . |

***Lời giải:***

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

a) Ta có:  và .

Xét . Từ đó suy ra,  và  song song, tức là  và  cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Gọi  là vectơ pháp tuyến của mp(*P*) cần tìm.

Ta có: chọn 

Lúc đó, mặt phẳng (P) đi qua  và có 1 vectơ pháp tuyến là 

(P): .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 5:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho hai đường thẳng:  và .  a) Chứng minh  và  chéo nhau.  b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  và song song với . |

***Lời giải:***

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

a) Ta có:  và .

Xét . Từ đó suy ra,  và  chéo nhau.

b) Gọi  là vectơ pháp tuyến của mp(P) cần tìm.

Ta có: chọn 

Lúc đó, mặt phẳng (P) đi qua  và có 1 vectơ pháp tuyến là 

(P): .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 6:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 2 đường thẳng và .  a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng  chéo nhau.  b) Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua gốc tọa độ *O*, song song với và .  c) Viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng  và . |

***Lời giải:***

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

a) Ta có:  và .

Xét . Từ đó suy ra,  và  chéo nhau.

b) Gọi  là vectơ pháp tuyến của mp(*P*) cần tìm.

Ta có: chọn 

Lúc đó, mặt phẳng (*P*) đi qua  và có 1 vectơ pháp tuyến là có phương trình:

(*P*): .

c) Gọi  là đường vuông góc chung của và , .

Ta có: ,



.



.

Vậy đường thẳng  đi qua điểm và có 1 vectơ chỉ phương  nên có phương trình chính tắc là .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 7:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 4 đường thẳng:  .  a) CMR: Hai đường thẳng  cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Viết phương trình  mặt phẳng đó.  b) CMR: Tồn tại một đường thẳng  cắt cả 4 đường thẳng đã cho. Viết phương trình  chính tắc của đường thẳng . |

***Lời giải:***

a) Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

Đường thẳng  qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương là .

Ta có:  và . Xét . Từ đó suy ra,  và  song song, tức là  và  cùng thuộc một mặt phẳng.

Gọi  là vectơ pháp tuyến của mp(*P*) cần tìm. Ta có:  chọn 

Lúc đó, mặt phẳng (*P*) đi qua  và có 1 vectơ pháp tuyến là 

(*P*): .

b) Ta có .

* Tọa độ giao điểm *C* của  và mp(*P*) là nghiệm của hệ phương trình: 

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: .

* Tọa độ giao điểm *D* của  và mp(*P*) là nghiệm của hệ phương trình: 

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: .

Lúc đó, dễ thấy đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là đường thẳng .

Đường thẳng  qua  và có 1 vectơ chỉ phương là , có phương trình 

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 8:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và 2 đường thẳng ; . Chứng minh *A*,  và  cùng thuộc một mặt phẳng. |

***Lời giải:***

* Lập phương trình mp(*P*) chứa *A* và :

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .

Chọn . Ta có: .

Gọi  là vectơ pháp tuyến của mp(*P*) cần tìm.

Ta có: chọn 

Lúc đó, mặt phẳng (*P*) đi qua  và có 1 vectơ pháp tuyến là 

(P): .

* Chỉ rõ  Ta có  và .

Từ đó suy ra 

Kết luận: Mặt phẳng (*P*):  là mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

**IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

***1. Phương pháp:***

|  |
| --- |
| Cho đường thẳng  và mặt phẳng .  Xét hệ phương trình (1)   * Nếu (1) vô nghiệm thì . * Nếu (1) có nghiệm duy nhất thì cắt  tại * Nếu (1) có vô số nghiệm thì .   *Chú ý: Nếu VTCP của cùng phương với VTPT của  thì .* |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ  và 3 đường thẳng ; ; và mặt phẳng .  Xét vị trí tương đối của:  a) và . b)  và . c)  và . |

***Lời giải:***

a) Xét hệ phương trình: , ta thấy hệ vô nghiệm. Suy ra .

b) Xét hệ phương trình: , Suy ra cắt  tại điểm .

c) Xét hệ phương trình: , ta thấy hệ có vô số nghiệm. Suy ra .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng :  và đường thẳng .  a) Xác định giao điểm *A* của đt  và mặt phẳng .  b) Viết phương trình đường thẳng  qua *A* nằm trong mp và vuông góc với . |

***Lời giải:***

a) Ta có: .

Tạo độ giao điểm *A* của  và  là nghiệm của hệ phương trình: 

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: 

b) Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến là .

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .

Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của d. Ta có: chọn .

Đường thẳng d qua  và có 1 vectơ chỉ phương là , có phương trình:

d: .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho mặt phẳng (*P*):  và 2 đường thẳng  a) Chứng minh:  và  chéo nhau.  b) Viết phương trình đường thẳng  nằm trên mp(*P*), đồng thời cắt  và . |

***Lời giải:***

***Bước 1:*** *Xác đinh giao điểm A của và mp .*



***Bước 2:*** *Xác định giao điểm B của và mp .*



*Kết luận: Đường thẳng cần tìm là đường thẳng AB.*



***Trình bày:***

Ta có: 

* Tọa độ giao điểm *C* của  và mp(*P*) là nghiệm của hệ phương trình: 

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: .

* Tọa độ giao điểm D của  và mp(*P*) là nghiệm của hệ phương trình: 

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: .

Lúc đó, dễ thấy đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là đường thẳng .

Đường thẳng  qua  và có 1 vectơ chỉ phương là , có phương trình 

**V. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| Cho điểm  và đường thẳng .  **Cách 1:**  Gọi là hình chiếu của  lên . Ta c ó .  Tính ;  **Cách 2:**  Gọi  là hình chiếu của  lên .   * Viết phương trình mặt phẳng  qua  và vuông góc với * Khi đó tìm tọa độ điểm  thỏa |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và đường thẳng .  a)Tìm tọa độ điểm  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên đường thẳng .  b)Tìm tọa độ điểm  đối xứng với  qua đường thẳng . |

***Lời giải:***

a) Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .



Gọi  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên đường thẳng .

Ta có: 

.

b) Ta có:

 đối xứng với  qua đường thẳng  là trung điểm của đoạn thẳng 

.

Vậy .

**VI. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT MẶT PHẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| Cho điểm  và mặt phẳng .  Gọi  là hình chiếu của  lên .   * Viết phương trình đường thẳng  qua  và vuông góc với . * Khi đó tìm tọa độ điểm  thỏa . |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và mặt phẳng .  a)Tìm tọa độ điểm  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên mặt phẳng .  b)Tìm tọa độ điểm  đối xứng với  qua mặt phẳng . |

***Lời giải:***

a) Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến là .

Gọi  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên mặt phẳng .

* Đường thẳng  qua  và vuông góc với  nhận  làm vectơ chỉ phương nên có phương trình .



* ;

. Vậy 

b) Ta có:  đối xứng với  qua  là trung điểm của đoạn thẳng .

Áp dụng công thức tọa độ trung điểm.

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ  mặt phẳng  và mặt cầu  .  a) Chứng minh mặt phẳng  cắt mặt cầu  theo một đường tròn .  b) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn . |

***Lời giải:***



a) Mặt cầu  có tâm , bán kính .

 cắt  theo một đường tròn .

b) Gọi  lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn .

* Áp ụng định lý Pitago ta được .
* *Tìm tọa độ tâm*  *của đường tròn* *.*

*Phân tích: Ta thấy  là hình chiếu vuông góc điểm  lên mặt phẳng .*

Trình bày:

Đường thẳng  đi qua  và nhận VTPT của  là  làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là: .

; .

Vậy .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ  mặt phẳng  và mặt cầu  .  a) Chứng minh mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu  b) Tìm tọa độ tiếp điểm của mặt phẳng  và mặt cầu . |

***Lời giải:***



a) Mặt cầu  có tâm , bán kính .

Ta có:  cắt  theo một đường tròn .

b) Gọi  tiếp điểm của mặt phẳng  và mặt cầu .

*Phân tích: Ta thấy  là hình chiếu vuông góc điểm  lên mặt phẳng .*

*Trình bày:*

Đường thẳng  đi qua  và nhận VTPT của  là  làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là: .

; . Vậy .

|  |
| --- |
| ***Bài toán 4:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết các phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng  trên mỗi mặt phẳng sau: mp(*Oxy*), mp(*Oyz*), mp(*Oxz*) và . |

***Lời giải:***

Ta có: 

***\* Trên mặt phẳng (Oxy):***

* Ta chọn .
* Hình chiếu vuông góc của *A* trên mp(*Oxy*) là .

Hình chiếu vuông góc của *B* trên mp(*Oxy*) là .

Lúc đó, hình chiếu  của *d* trên mp(*Oxy*) là đường thẳng .

Đường thẳng  qua  và có 1 vectơ chỉ phương là , có phương trình:

.

*Hoàn toàn tương tự, độc giả tự giải quyết yêu cầu đối với mp(Oxz), mp(Oyz).*

**\* Trên mặt phẳng :**

- Ta chọn . (*Sử dụng thuật toán hình chiếu vuông góc điểm trên mặt phẳng*)

* Đường thẳng *d* đi qua , vuông góc với  nên *d* nhận  làm 1 vectơ chỉ phương, có phương trình .
* Tọa độ hình chiếu  của *A* là nghiệm của hệ phương trình: 

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: .

- Để ý rằng, *d* không song song với mp nên tọa độ *giao điểm * là nghiệm của hệ phương trình: 

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: .

Lúc đó, hình chiếu  của d trên mp là đường thẳng .

Đường thẳng  qua  và có 1 vectơ chỉ phương là , có phương trình .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Nhận xét:** *Trong cách giải trên, chúng tôi lấy thêm giao điểm (trong trường hợp cắt nhau) của d và  cho nhanh gọn, còn nếu thông thường (và dễ hiểu) thì chọn 2 điểm và nếu như vậy thì bài giải tương đối dài dòng! Thuật toán như sau:*   |  |  | | --- | --- | | * Xác định *A’* là hình chiếu của *A* trên . * Xác định *B’* là hình chiếu của *B* trên . * Đường thẳng |  | |

**VII. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG** **THẲNG CHÉO NHAU**

***1. Kiến thức vận dụng***

|  |
| --- |
| ***⦁ Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:***  Cho điểm  và đường thẳng   đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .  Ta có:  ***⦁ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:***  Cho 2 đường thẳng chéo nhau .   * đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .  * đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .   Ta có:  *Đặc biệt: Nếu  thì; .* |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm hai đường thẳng:  và  a) Chứng minh 2 đường thẳng  và  chéo nhau.  b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  và .  c) Tính khoảng cách từ điểm  đến đường thẳng . |

***Lời giải:***

a) Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

; ; .

Suy ra:  và  chéo nhau.

b) .

c) Ta có: ; 

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hai đường thẳng ,  và mặt cầu  có phương trình ;  và .  a) Chứng minh đường thẳng  tiếp xúc với mặt cầu  tại tiếp điểm . Tìm tọa độ điểm .  b) Chứng minh đường thẳng  cắt mặt cầu  tại 2 điểm phân biệt . Tính độ dài đoạn AB và tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng . |

***Lời giải:***

Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .

Mặt cầu  có tâm  và bán kính .



a)

+) 

Suy ra  tiếp xúc với mặt cầu  tại tiếp điểm .

+) 

Ta có: . Vậy .

b)



+) 

Suy ra  cắt mặt cầu  tại 2 điểm .



+) Gọi  là trung điểm của đoạn .

.

Ta có: . Vậy .

**VIII. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

***1. Kiến thức vận dụng***

|  |
| --- |
| ***⦁ Góc giữa hai đường thẳng:***  Cho 2 đường thẳng  có các vectơ chỉ phương lần lượt  là ,.  Ta có: ,  ***⦁ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng***  Cho đường thẳng có 1 vectơ chỉ phương .  Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến  Ta có: ,. |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hai đường thẳng ,  và mặt phẳng  có phương trình ; và  a) Tính góc giữa hai đường thẳng , .  b) Tính góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng . |

***Lời giải:***

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến .

a) .

b) .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hai đường thẳng ,  và mặt phẳng  có phương trình ; . Viết phương trình đường thẳng  đi qua điểm , vuông góc với đường thẳng  và tạo với đường thẳng  một góc . |

***Lời giải:***

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng .

Ta có 



+) Với . Chọn .

Khi đó phương trình tham số của  là .

+) Với . Chọn .

Khi đó phương trình tham số của  là .

**IX. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM TRÊN ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| * Điểm  nằm trên đường thẳng  thì . * Từ điều kiện ta tìm được |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, Cho điểm , đường thẳng , và mặt phẳng .  a) Tìm tọa độ điểm  thộc đường thẳng  sao cho .  b) Tìm tọa độ điểm  thộc đường thẳng  sao cho |

***Lời giải:***

a)

Vậy  hoặc .

b) .

Vậy  hoặc .

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho 3 điểm  .  a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm .  b) Tìm tọa độ điểm  thộc mặt phẳng  sao cho . |

***Lời giải:***

a)

Gọi  là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng . T có: chọn .

Vậy phương trình mặt phẳng : 

b) Ta có: .

Do đó:  vuông tại .

Vì  nên  nằm trên đường thẳng vuông góc với  tại tâm  đường tròn ngoại tiếp .

Ta có  là trung điểm của 



Đường thẳng  đi qua điểm  và nhận 

làm vec tơ chỉ phương nên có phương trình tham số:





***Nhận xét:*** *Câu b có thể làm như sau: M(x;y;z) thuộc (P) nên ; MA = MB = MC ta được thêm 2 phương trình theo x, y, z. Giải hệ 3 phương trình ta tìm được x, y, z. Cách này dễ hiểu hơn. Độc giả làm thử nhé.*

**HỆ THỐNG MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

**Bài toán 1:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua điểm *A* và .

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua A  + Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 2:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua điểm *A* và .

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Mặt phẳng  đi qua A  + Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .  \* Đặc biệt: Khi  + Mặt phẳng  đi qua A  + Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là . |  |

**Bài toán 3:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua điểm *A* và , , * không song, không trùng với *

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua A  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 4:** Lập phương trình đường thẳng  là giao tuyến của 2 mặt phẳng (*P*) và (*Q*).

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua *A* (*giải hệ 2 phương trình mp(P) và (Q) với* )  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 5:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua *A* và  * không song song, không trùng với *

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua ***A.***  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là . |  |

**Bài toán 6:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua *A* và .

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua ***A.***  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 7:** Lập phương trình đường thẳng  là hình chiếu vuông góc của  trên mp.

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Xác định *A’* là hình chiếu của *A* trên .  + Xác định *B’* là hình chiếu của *B* trên .  + Đường thẳng |  |