

MỤC LỤC

Phần I: Mở đầu	Trang 2
1.Lí do chọn đề tài	Trang 2
2.Mục đích nghiên cứu	Trang 2
3.Đối tượng nghiên cứu	Trang 2
4.Phương pháp nghiên cứu	Trang 3
Phần II: Nội dung đề tài	Trang 3
1.Cơ sở lí luận của vấn đề nghiên cứu	Trang 3
2.Thực trạng	Trang 3
3.Nội dung cụ thể của đề tài	Trang 4
1. <i>Xây dựng bài toán bằng cách thay đổi đường thẳng d bởi đường cong khác</i>	Trang 4
2. <i>Khai thác từ diện tích tứ giác MAIB</i>	Trang 7
3. <i>Phát triển một số bài toán khác</i>	Trang 11
4. Các biện pháp tổ chức	Trang 17
5. Kết quả của việc thực hiện đề tài	Trang 17
III: Kết luận và kiến nghị	Trang 18
Tài liệu tham khảo	Trang 19

PHẦN I: MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Xuất phát từ thực tế kì thi THPT Quốc gia 2015, với các học sinh sử dụng kết quả môn Toán để xét tuyển đại học, thì sự cạnh tranh chủ yếu diễn ra ở bộ ba câu phân loại. Bộ ba câu này thường rơi vào các chủ đề *Phương trình - Bất phương trình - Hệ phương trình, Hình học tọa độ phẳng, Bất đẳng thức - Tìm GTLN, GTNN*.

Mặt khác, trong chương trình hình học lớp 10 có một phần rất quan trọng của hình học phổ thông đó là phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Đây là những dạng toán khó đối với học sinh và thường xuất hiện trong đề thi học sinh giỏi, thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia. Vậy thì một câu hỏi đặt ra là làm thế nào để học sinh khá, giỏi khi đi thi đạt điểm cao, đạt điểm tối đa và khi dạy cho học sinh phần này, tạo cho các em có hứng thú trong khi học và biết cách khai thác sâu hơn về nhiều khía cạnh của một bài toán?

Tuy nhiên, trong thực tế nhiều học sinh khi học thường dựa vào những bài toán và cách giải đã có sẵn mà không chịu khó suy nghĩ tìm xem bài toán bắt nguồn từ đâu, để rồi từ đó tìm ra được cách giải và có thể xây dựng được những bài toán mới.

Đứng trước thực trạng đó, là một giáo viên dạy toán, cũng như nhiều giáo viên khác tôi luôn suy nghĩ cần làm gì để học sinh hứng thú học toán hơn rồi dần dần yêu thích môn toán nữa. Bên cạnh đó, tôi cũng có những cơ hội tiếp cận học sinh khá, giỏi và đã từng tham gia bồi dưỡng học sinh ôn thi Đại học, tôi đã tìm cách định hướng cho các em biết cách khai thác sâu hơn về nhiều hướng của một bài toán, thay đổi các dự kiến bài toán hay xuất phát từ một bài toán cơ bản ta có thể xây dựng được bài toán mới hoặc phát triển bài toán theo nhiều định hướng khác nhau có hệ thống từ dễ đến khó. Với mục đích như vậy tôi chọn đề tài:

" Từ một bài toán hình học tọa độ phẳng giúp học sinh nhận biết, khai thác và phát triển các bài toán mới "

2. Mục đích nghiên cứu

Có nhiều vấn đề từ SGK hay là từ đề thi THPT Quốc Gia của những năm gần đây mà tôi phải thường xuyên chịu khó "tìm tòi" để rồi từ đó định hướng cho học sinh và yêu cầu các em tự mình "khai thác" để tìm ra những "cái mới" của riêng các em. Nếu chúng ta làm tốt hoạt động này thì sẽ phát huy được năng lực của học sinh; các em sẽ chủ động hơn trong việc tiếp thu kiến thức và có thể các em sẽ tìm ra một phương pháp học hiệu quả nhất cho riêng mình.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Học sinh lớp 10,12 (Chú trọng học sinh khá giỏi)
- Học sinh ôn thi tốt nghiệp THPT để xét tuyển đại học.

- Giáo viên giảng dạy môn Toán bậc THPT.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp suy luận ,tổng hợp: kết hợp với các đề thi tuyển sinh đại học, đề thi học sinh giỏi rút ra những kinh nghiệm, hệ thống lại kiến thức , khai thác và phát triển các bài toán mới.

- Phân tích lý luận: phân tích giúp học sinh nắm thật rõ bản chất vấn đề, lựa chọn được phương pháp giải phù hợp.

- Phương pháp trò chuyện- phỏng vấn: Trao đổi với nhiều học sinh khá, giỏi để nắm tình hình về cách xây dựng bài toán mới từ bài toán cơ bản.

PHẦN II: NỘI DUNG ĐỀ TÀI

1. Cơ sở lý luận :

Mỗi giáo viên dạy toán ở trường THPT luôn trăn trở, suy nghĩ tìm mọi biện pháp tối ưu để truyền đạt cho học sinh những kiến thức cơ bản cốt lõi nhất để giúp các em đáp ứng chuẩn kiến thức kỹ năng và làm bài thi một cách trôi chảy, giúp học sinh luyện thi vào các trường Đại học có kết quả tốt nhất.

Bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng xuất hiện thường xuyên trong các đề thi ĐH, đề thi học sinh giỏi với mức độ tương đối khó. Vì vậy để giải được dạng toán này chúng ta cần tìm hiểu bản chất cũng như xây dựng phương pháp tư duy giải toán đặc trưng cho loại toán. Với tình hình ấy để giúp học sinh định hướng tốt hơn trong quá trình giải toán hình học tọa độ trong mặt phẳng, người giáo viên cần tạo cho học sinh thói quen xem xét bài toán dưới nhiều góc độ, khai thác các yếu tố đặc trưng hình học của bài toán để tìm lời giải. Trong đó việc hình thành cho học sinh khả năng tư duy theo các phương pháp giải là một điều cần thiết. Việc trải nghiệm qua quá trình giải toán sẽ giúp học sinh hoàn thiện kỹ năng định hướng và giải toán. Cần nhấn mạnh một điều rằng, đa số các học sinh sau khi tìm được một lời giải cho bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng thường không suy nghĩ, đào sâu thêm. Học sinh không chú ý đến bản chất hình học phẳng của bài toán nên mặc dù làm rất nhiều bài toán hình học tọa độ nhưng vẫn không phân loại được dạng toán cơ bản cũng như bản chất của bài toán. Hoặc học sinh khi học thường dựa vào những bài toán và cách giải đã có sẵn mà không chịu khó suy nghĩ tìm xem bài toán bắt nguồn từ đâu, để rồi từ đó tìm ra được cách giải và có thể xây dựng được những bài toán mới.

2. Thực trạng của đề tài

Có thể nói có không ít giáo viên đã “lãng quên” đi hoạt động giúp học sinh “**nhận biết, khai thác và phát triển**” các bài toán. Nếu chúng ta chỉ truyền thụ kiến thức cơ bản cho học sinh mà bỏ qua hoạt động này thì không những bản thân chúng ta sẽ bị mai một kiến thức mà các em học sinh sẽ bị động trước một vấn đề

“tưởng chừng như mới mẻ” của toán học, khả năng suy luận, tư duy sáng tạo của học sinh sẽ bị hạn chế.

3. Nội dung cụ thể của đề tài

Có thể nói phần hình học tọa độ phẳng là phần mà việc giúp học sinh phát triển các bài toán mới một cách dễ dàng. Trong quá trình ôn thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia tôi đã xem và giải rất kỹ các bài toán về hình học phẳng và khi đưa ra dạy cho học sinh thì tôi đã tìm thấy một cách khai thác sâu hơn về bài toán trong đề thi thuộc phần hình học tọa độ phẳng. Từ các bài toán gốc đó tôi hướng dẫn học sinh biết vận dụng, khai thác, phát triển và xây dựng thêm nhiều bài toán mới.

Thông qua bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng trong đề thi tuyển sinh Đại học sau ta có thể xây dựng và phát triển được một số bài toán mới như sau.

Bài toán gốc: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10

Lời giải

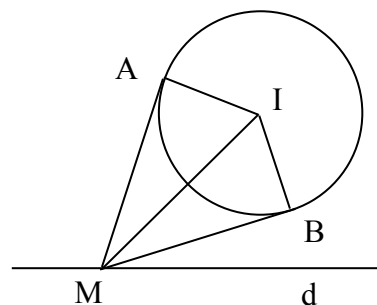
Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $IA = \sqrt{5}$

Tứ giác $MAIB$ có $\widehat{MAI} = \widehat{MBI} = 90^\circ$ và $MA = MB$

$$S_{MAIB} = MA \cdot IA \Rightarrow MA = 2\sqrt{5} \Rightarrow IM = \sqrt{IA^2 + MA^2} = 5$$

$M \in d$, có tọa độ dạng $M(t; -t-2)$

$$IM = 5 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t+3)^2 = 25 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$



Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

Qua bài toán trên ta thấy rằng để tìm được tọa độ điểm M thì ta phải tìm độ dài MI khi đó nếu giữ nguyên các dữ kiện bài toán mà thay đường thẳng (d) bởi đường tròn (C) thì ta được các bài toán mới như sau:

1) Xây dựng bài toán bằng cách thay đổi đường thẳng d bởi một đường cong khác.

Bài toán 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2$ và đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ Gọi I là tâm của (C') , M là điểm thuộc (C) . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C') (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10

Lời giải

Đường tròn (C') có tâm I(2;1) bán kính $IA = \sqrt{5}$

Tứ giác MAIB có $\angle MAI = \angle MBI = 90^\circ$ và $MA = MB$

$$\Rightarrow S_{MAIB} = IA \cdot MA$$

$$\Rightarrow MA = 2\sqrt{5} \Rightarrow IM = \sqrt{IA^2 + MA^2} = 5$$

Gọi $M(x; y)$ và $M \in (C)$

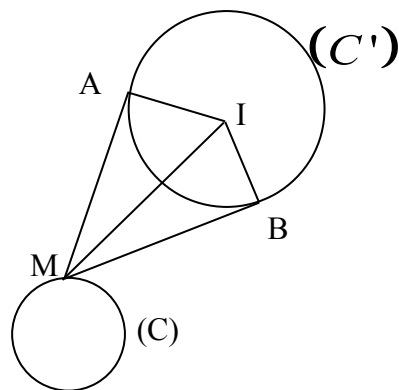
nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0 \\ x + 4y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17y^2 + 126y + 232 = 0 \\ x = -4y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = -\frac{58}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{6}{17} \\ y = -\frac{58}{17} \end{cases}$$

Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M\left(-\frac{6}{17}; -\frac{58}{17}\right)$



Hay là ta có thể thay đổi đường thẳng d bởi Elip, Hypebol, Prabol ta có các bài toán sau:

Bài toán 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Elip (E): $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ và đường tròn

(C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc (E). Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết diện tích tứ giác MAIB bằng 10

Bài toán 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Hypebol (H): $\frac{2x^2}{9} - y^2 = 1$ và đường

tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc (H). Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết diện tích tứ giác MAIB bằng 10

Bài toán 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Prabol (P): $y^2 = 8x$ và đường tròn

(C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc (P). Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết diện tích tứ giác MAIB bằng 10

Hay ta có thể thay đổi bài toán bằng cách không cho dự kiện diện tích MAIB mà tìm vị trí điểm M thuộc đường thẳng d để diện tích MAIB nhỏ nhất. Lúc ta có bài toán mới sau:

Bài toán 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M để diện tích tứ giác MAIB nhỏ nhất.

Lời giải

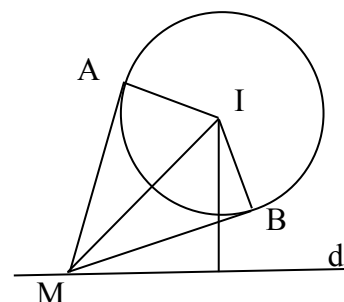
Ta có diện tích tứ giác MAIB là:

$$S_{MAIB} = MA \cdot AI = \sqrt{5} \cdot \sqrt{MI^2 - 5}$$

$$S_{MAIB} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MI \text{ nhỏ nhất}$$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d

$$\text{Vậy, tọa độ điểm } M \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right)$$



Nếu ta thay đường thẳng d bởi đường tròn (C) thì ta có thể tìm được vị trí điểm M trên đường tròn (C) để diện tích tứ giác MAIB nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài toán 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(C): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$ và đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C') , M là điểm thuộc (C) . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C') (A và B là các tiếp điểm).

a) Tìm tọa độ điểm M để diện tích tứ giác MAIB nhỏ nhất.

b) Tìm tọa độ điểm M để diện tích tứ giác MAIB lớn nhất.

Ở đây ta thấy tứ giác MAIB là tứ giác nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB cũng là đường tròn ngoại tiếp tứ giác MAIB hay ta có thể chuyển về bài toán viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB

Bài toán 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB, biết diện tích tứ giác MAIB bằng 10

Lời giải

Hoàn toàn tương tự như trên ta tìm được tọa độ điểm M $(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

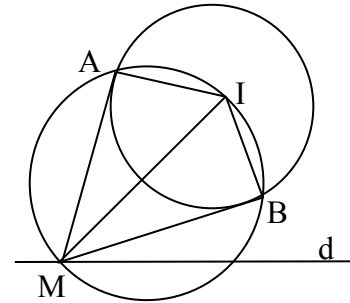
Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB có tâm là trung điểm MI và bán kính $R = \frac{MI}{2}$

TH1: $M(2; -4)$

Ta có tọa độ tâm $O\left(2; -\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{5}{2}$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB là:

$$(C_1): (x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$



TH2: $M(-3; 1)$

Tương tự ta có: $(C_2): \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$

Vậy, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB là:

$$(C_1): (x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}; \quad (C_2): \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$$

Tương tự bài toán 7 thì ta có thể thay đường thẳng d bởi đường tròn, đường elip, đường hypebol, đường parabol thì ta được bài toán mới.

Với hướng của bài toán trên nếu ta thay đổi việc cho biết diện tích của tứ giác MAIB bởi diện tích tam giác MAB liệu bài toán có giải quyết được hay không?

2) Khai thác từ diện tích tứ giác MAIB

Bài toán 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x + y + 2 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc d. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết diện tích tam giác MAB bằng 8

Lời giải

Thật vậy:

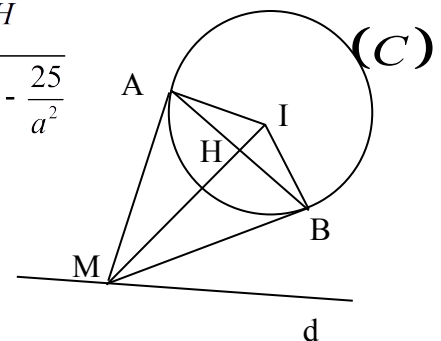
$$S_{MAB} = S_{MAIB} - S_{AIB}$$

Gọi bán kính đường tròn (C) là R và $MI = a > 0$

$$\text{Khi đó } S_{MAB} = S_{MAIB} - S_{AIB} = 2S_{MAI} - 2S_{AHI} = MA \cdot AI - AH \cdot IH$$

$$\text{Ta có } MA = \sqrt{a^2 - 5}, \quad MI \cdot HI = AI^2 \Leftrightarrow HI = \frac{5}{a}, \quad AH = \sqrt{5 - \frac{25}{a^2}}$$

$$\text{Khi đó } S_{MAB} = \frac{\sqrt{5(a^2 - 5)}(a^2 - 5)}{a^2}$$



Đặt $t = \sqrt{5(a^2 - 5)}$ với $t \geq 0$

Mặt khác theo giả thiết ta có : $S_{MAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{t^3}{t^2 + 25} = 8 \Leftrightarrow t^3 - 8t^2 - 200 = 0$

$$(t - 10)(t^2 + 2t + 20) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \Leftrightarrow \sqrt{5(a^2 - 5)} = 10 \Leftrightarrow a = 5$$

Theo kết quả trên ta có $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

Tương tự như trên ta có thể thay đường thẳng d bởi đường tròn, lúc đó ta có bài toán sau:

Bài toán 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$ và đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C') , M là điểm thuộc (C) . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C') (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết diện tích tứ giác MAB bằng 8

Lời giải

Tương tự bài toán trên ta có: $MI = 5$

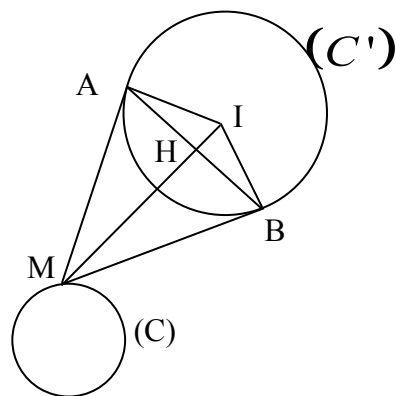
Gọi $M(x; y)$ và $M \in (C)$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0 \\ x = -4y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y^2 + 126y + 232 = 0 \\ x = -4y - 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = -\frac{58}{17} \\ x = -\frac{6}{17} \end{cases}$$

Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M\left(-\frac{6}{17}; -\frac{58}{17}\right)$



Hay là ta có thể thay đổi đường thẳng d bởi Elip, Hypebol, Prabol ta có các bài toán mới.

Với hướng của bài toán trên ta có thể thay đổi việc cho biết diện tích của tứ giác $MAIB$ bởi diện tích tam giác IAB liệu bài toán có giải quyết được hay không?

Bài toán 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d . Qua M

kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết diện tích tam giác IAB bằng 2

Lời giải

Thật vậy:

Gọi bán kính đường tròn (C) là R và $MI = a > 0$

$$IA^2 = IM \cdot IH \Leftrightarrow IH = \frac{5}{a}$$

Mặt khác : $AH = \sqrt{5 - \frac{25}{a^2}}$

$$\text{Khi đó : } S_{IAB} = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{a} \sqrt{5 - \frac{25}{a^2}} = 2 \Leftrightarrow 4a^4 - 125a^2 + 625 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ a^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \end{cases}$$

TH1: $a = 5$ khi đó $MI = 5$

Theo kết quả trên ta có tọa độ điểm M như sau $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

TH2: $a = \frac{5}{2}$ khi đó $MI = \frac{5}{2}$ với $M \in d$, có tọa độ dạng $M(t; -t-2)$

$$IM = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t+3)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 2t^2 + 2t + \frac{27}{4} = 0 \text{ (Vô nghiệm)}$$

Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

Hay là ta có thể thay đổi đường thẳng d bởi đường tròn, Elip, Hypebol, Prabol ta cũng có các bài toán mới.

Hay là ta cho giả thiết độ dài AB thay cho giả thiết diện tích của tứ giác MAIB lúc đó ta có bài toán sau:

Bài toán 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc d. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết độ dài $AB = 4$

Lời giải

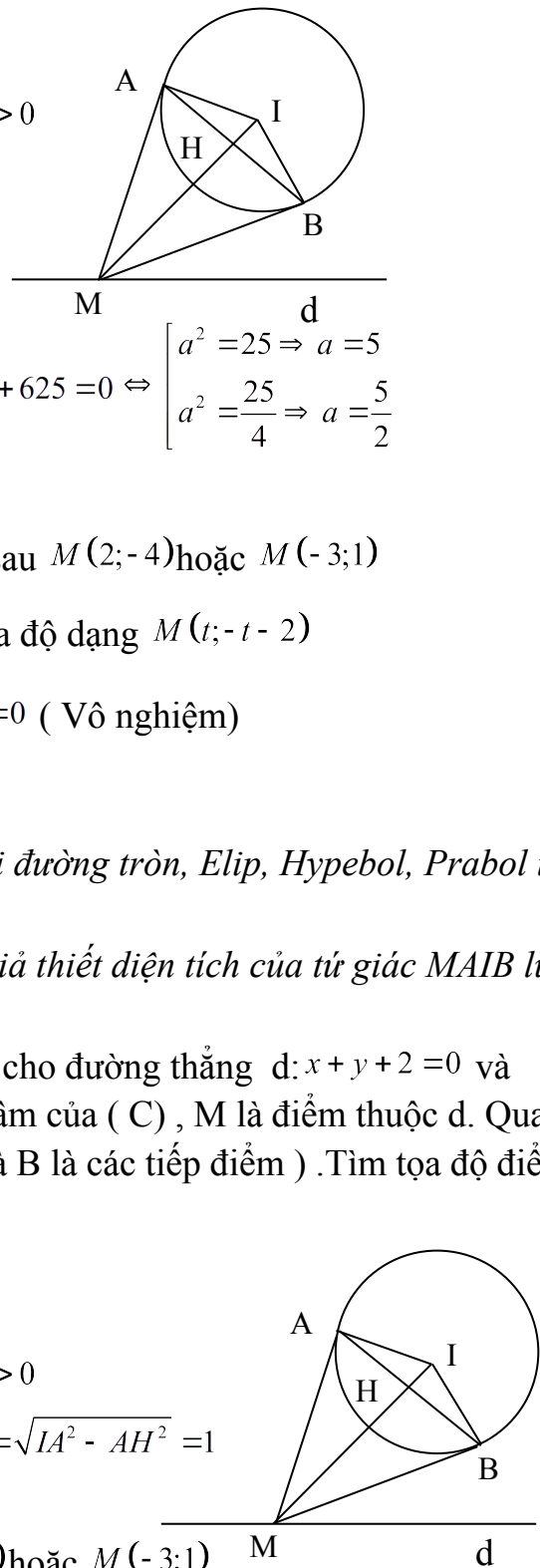
Thật vậy:

Gọi bán kính đường tròn (C) là R và $MI = a > 0$

Theo giả thiết $AB = 4$ suy ra $AH = 2 \Rightarrow HI = \sqrt{IA^2 - AH^2} = 1$

$$IA^2 = IM \cdot IH \Leftrightarrow IM = 5$$

Theo kết quả trên ta có tọa độ điểm $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$



Hay là tương tự như trên ta có thể thay đổi đường thẳng d bởi Đường tròn, Elip, Hypebol, Prabol ta cũng được bài toán mới:

Hay là ta thay giả thiết diện tích tứ diện MAIB bởi cách cho góc AMB

Bài toán 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + m = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) . Tìm m để trên d có duy nhất điểm M sao cho qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm) và tam giác MAB vuông.

Lời giải

Thật vậy:

Ta có đường tròn (C) tâm $I(2;1)$ và bán kính là: $R = \sqrt{5}$

Vì MA, MB là tiếp tuyến nên $MA = MB$

$\Rightarrow \triangle MAB$ vuông tại M

Vậy tứ giác MAIB là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{5}$

$\Rightarrow MI = \sqrt{10}$. Để trên d có duy nhất điểm M khi

MI vuông góc với đường thẳng d hay là :

$$d(I; d) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left| \frac{3+m}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{5}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = -3 \pm 2\sqrt{5}$

Bài toán 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - \frac{5}{4} = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d.

Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (với A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết góc giữa hai đường thẳng MA và MB bằng 60°

Lời giải

Thật vậy:

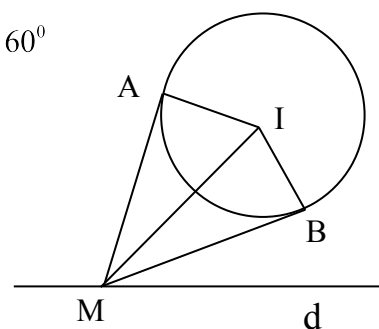
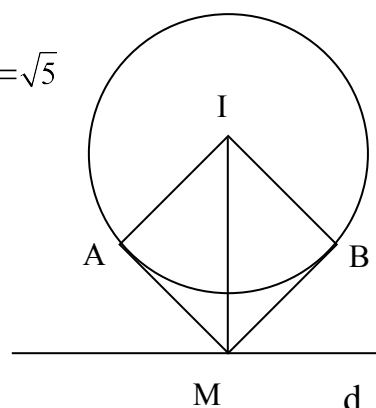
Ta có đường tròn (C) tâm $I(2;1)$ và bán kính là: $R = \frac{5}{2}$

Từ giả thiết góc giữa hai đường thẳng MA, MB bằng 60°

MI luôn là đường phân giác của góc $\angle AMB$

TH1: $\angle AMB = 60^\circ \Leftrightarrow \angle AMI = 30^\circ$

Khi đó ta xét tam giác MAI vuông tại A



$$\sin 30^\circ = \frac{R}{MI} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{MI} \Leftrightarrow MI = 5$$

Theo kết quả bài toán ta có $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

TH2: $\angle AMB = 120^\circ \Leftrightarrow \angle AMI = 60^\circ$

Khi đó ta xét tam giác MAI vuông tại A:

$$\sin 60^\circ = \frac{R}{MI} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{MI} \Leftrightarrow MI = \frac{5}{\sqrt{3}}, \text{ với } M \in d, \text{ có tọa độ dạng } M(t; -t-2)$$

$$IM = \frac{5}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t+3)^2 = \frac{25}{3} \Leftrightarrow 2t^2 + 2t + \frac{14}{3} = 0 \text{ (Vô nghiệm)}$$

Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

Hoàn toàn tương tự như trên ta có thể thay đường thẳng d bởi đường tròn, đường elip, đường hypebol, đường parabol ta sẽ có những bài toán mới

3) Phát triển một số bài toán khác:

Nếu từ bài toán gốc ta thay một tiếp tuyến bởi một cát tuyến và ta xây dựng các bài toán sau:

Bài toán 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d . Qua M kẻ tiếp tuyến MA (với A là tiếp điểm) và một cát tuyến cắt (C) tại điểm B, C (điểm B nằm giữa MC). Tìm tọa độ điểm M, biết tam giác ABC vuông tại B có diện tích bằng 5

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$ bán kính $IA = \sqrt{5}$

Vì tam giác ABC nội tiếp đường tròn và vuông tại B

Suy ra trung điểm của AC là tâm đường tròn (C)

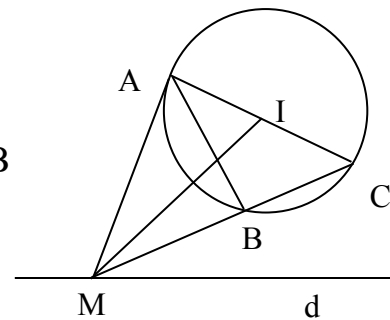
Đặt $AB = a > 0 \Rightarrow BC = \sqrt{20 - a^2}$

Mặt khác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \sqrt{20 - a^2} = 5 \Leftrightarrow a^4 - 20a^2 + 100 = 0$

$a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$ vì $a > 0$

Xét tam giác MAC vuông tại A và AB là đường cao nên ta có

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow AM = \sqrt{20}$$



Tam giác MAI vuông tại A nên ta có: $IM = \sqrt{IA^2 + MA^2} = 5$

$M \in d$, có tọa độ dạng $M(t; -t-2)$

$$IM = 5 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t+3)^2 = 25 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

Hay là ta có thể thay đổi dự kiện cho diện tích tam giác ABC bởi tìm vị trí điểm M thuộc đường thẳng d để diện tích tam giác ABC lớn nhất

Bài toán 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d. Qua M kẻ tiếp tuyến MA (với A là tiếp điểm) và một cát tuyến cắt (C) tại điểm B, C (điểm B nằm giữa MC). Tìm tọa độ điểm M sao cho tam giác ABC vuông tại B và có diện tích lớn nhất.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể thay đường thẳng d bởi đường tròn, đường elip, đường hypebol, đường parabol

Từ bài toán 14 nếu ta thay đổi dự kiện cho tam giác ABC bất kì và thêm một số dự kiện khác ta được bài toán như sau:

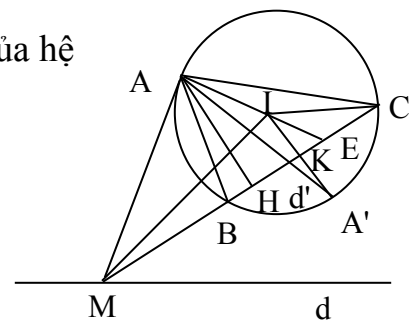
Bài toán 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d, điểm A thuộc đường tròn (C) , một cát tuyến đi qua điểm M cắt (C) tại hai điểm B, C (điểm B nằm giữa MC) và đường phân giác trong của góc A có phương trình $d': x - 3y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M, biết $S_{\Delta MAC} = 3S_{\Delta MIC}$ và điểm A có tung độ âm

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$ bán kính $IA = \sqrt{5}$

Tọa độ giao điểm của d' và đường tròn (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \\ y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$



Vì điểm A có tung độ âm nên $A(1; -1)$ và gọi A' là giao

điểm thứ hai của d' với đường tròn (C) suy ra $A'(4; 0)$

Mặt khác d' là phân giác trong của góc A nên $sđ \angle B A' = sđ \angle A' C$

nên IA' vuông góc BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và I

lên BC và E là giao điểm của AI và BC

$$\text{Khi đó } \frac{AE}{IE} = \frac{AH}{IK} = \frac{AH \cdot BC}{IK \cdot BC} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MIC}} = 3 \Leftrightarrow AE = 3IE \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{IE} \\ \overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{IE} \end{cases}$$

Gọi $E(x; y)$ ta có: $\overrightarrow{AE} = (x-1; y+1)$, $\overrightarrow{IE} = (x-2; y-1)$

TH1: $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{IE}$

$$\begin{cases} x-1=3(x-2) \\ y+1=3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=2 \end{cases} \text{ hay là } E\left(\frac{5}{2}; 2\right)$$

Đường thẳng BC đi qua E và vuông góc với A'I nên có phương trình là:
BC: $2x - y - 3 = 0$

Tọa độ giao điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+2=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{7}{3} \end{cases}$

Vậy, tọa độ điểm $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

TH2: $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{IE}$

$$\begin{cases} x-1=-3(x-2) \\ y+1=-3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hay là } E\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

Đường thẳng BC đi qua E và vuông góc với A'I nên có phương trình là:
BC: $2x - y - 3 = 0$

Tương tự như trên ta cũng có tọa độ điểm $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

Vậy, tọa độ điểm $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

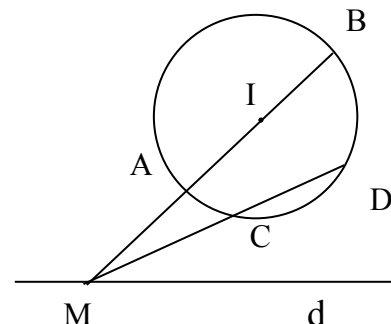
Nếu ta thay đổi dữ kiện tiếp tuyến bởi cát tuyến thì ta có bài toán mới như sau

Bài toán 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+y+2=0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d. Qua M kẻ một cát tuyến cắt (C) tại điểm C, D. Tìm tọa độ điểm M, biết $MC \cdot MD = 20$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $IA = \sqrt{5}$

Ta có $MC \cdot MD = MA \cdot MB$



Đặt $MI = a > 0$.

Mặt khác: $(a - R)(a + R) = 20 \Leftrightarrow a^2 - R^2 = 20 \Leftrightarrow a = 5$

hay là: $MI = 5$. Theo bài toán trên ta tìm được tọa độ điểm M

Vậy: $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

Vậy với bài toán trên ta sử dụng đẳng thức $MC \cdot MD = MI^2 - R^2$

Với bài toán trên ta có thể thay thành bài toán tìm vị trí điểm M để $MC \cdot MD$ nhỏ nhất hay là thay đường thẳng d bởi đường tròn hay đường elip, đường hypebol, parabol.

Cũng hoàn toàn tương tự như trên ta có xây dựng một số bài toán khác:

Bài toán 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x + y + 2 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc d. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD đến đường tròn (C) với C nằm giữa M và D; AB cắt CD tại N. Tìm tọa độ điểm M, biết $CD = 1$ và $ND = \frac{5}{9}$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm I(2;1) bán kính $IA = \sqrt{5}$

Vì $\angle MAC = \angle MDA$ (cùng chắn cung AC) nên $\triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g.g), suy ra:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{AC}{AD} \quad (1)$$

Tương tự, $\triangle MBC \sim \triangle MDB$ (g.g) suy ra: $\frac{MB}{MD} = \frac{BC}{DB} \quad (2)$

Kết hợp (1) và (2) đồng thời $MA = MB$ ta có

$$\frac{MC}{MD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{DB} \quad (3)$$

Mặt khác ta lại có $\angle ANC = \angle DNB$ (đối đỉnh) và $\angle ACN = \angle DBN \Rightarrow \triangle ANC \sim \triangle DNB$ (g.g), tương tự $\triangle AND \sim \triangle CNB$ (g.g) suy ra

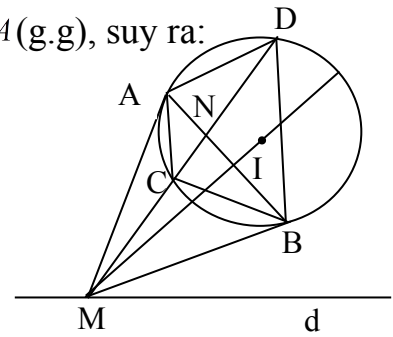
$$\frac{AN}{DN} = \frac{AC}{DB}, \frac{AN}{CN} = \frac{AD}{CB} \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{AC}{BD} \cdot \frac{CB}{AD} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{MC}{MD} = \frac{NC}{ND} \Rightarrow 1 - \frac{CD}{MD} = \frac{CD}{ND} - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{CD} = \frac{1}{MD} + \frac{1}{ND}$$

Theo giả thiết ta có $CD = 1$ và $ND = \frac{5}{9} \Rightarrow MD = 5; MC = 4$

Khi đó áp dụng $MC \cdot MD = MI^2 - R^2 \Rightarrow MI = 5$



Theo bài toán trên ta tìm được tọa độ điểm M như sau: $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$

Bài toán 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn (T): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$. Gọi I là tâm của (T), M là điểm thuộc d. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (T) (A và B là các tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại C, D (với C nằm giữa M và D). Gọi E là giao điểm của AB và IM. Tìm tọa độ điểm M, biết góc $\angle CED = 60^\circ$ và độ dài $MC = 4$

Lời giải

Đường tròn (T) có tâm $I(2; 1)$ bán kính $R = IA = 1$

Mặt khác ta có $MB^2 = MC \cdot MD$

Trong tam giác vuông IMB có BE là đường cao nên

$$MB^2 = ME \cdot MI \Rightarrow MC \cdot MD = ME \cdot MI \Leftrightarrow \frac{MC}{MI} = \frac{ME}{MD} \quad \text{Suy ra } \triangle MEC \sim \triangle MDI \Rightarrow \angle MEC = \angle MDI$$

hay $\Rightarrow \angle MDI + \angle CEI = 180^\circ$ tứ giác CDIE nội tiếp $\Rightarrow \angle DIC = \angle DEC = 60^\circ$

Vậy $\triangle DIC$ đều nên $IC = ID = CD = 1$, khi đó ta có $MD = 5 \Rightarrow MC \cdot MD = 20$

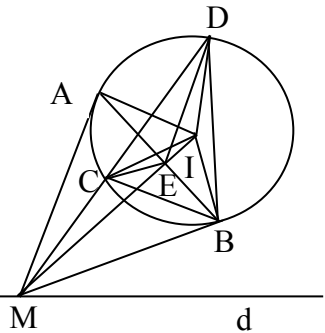
Tương tự bài toán trên ta có $MC \cdot MD = MI^2 - R^2$ đặt $MI = a > 0$

Mặt khác: $(a - R)(a + R) = 20 \Leftrightarrow a^2 - R^2 = 20 \Leftrightarrow a = \sqrt{21}$

$M \in d$, có tọa độ dạng $M(t; -t - 2)$

$$IM = \sqrt{21} \Leftrightarrow (t - 2)^2 + (t + 3)^2 = 21 \Leftrightarrow t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy, $M\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right)$



Bài toán 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn (O): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (O), M là điểm thuộc d. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (O) (A và B là các tiếp điểm) và C điểm đối xứng với B qua I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC, E là giao điểm của MC và AH. Tìm tọa độ điểm M biết $E\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Lời giải

Đường tròn (O) có tâm $I(2; 1)$ bán kính $R = IA = \sqrt{5}$

Ta có $\angle ABC = \angle AHC$ vì cùng phụ góc $\angle ACB$ và $\angle AHC = \angle ABC$ (cùng chắn cung AC)

Suy ra $\angle A_x = \angle A_H$, do đó AC là đường phân giác ngoài của tam giác AME

Nên ta có: $\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{AM}$ (1)

Mặt khác EH//MB (cùng vuông góc với BC) nên

$$\frac{CE}{CM} = \frac{EH}{MB} \quad (2)$$

Hơn nữa ta lại có: MA = MB (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra AE = EH

Gọi $A(x; y)$, theo trên ta có

E là trung điểm của AH nên $H\left(\frac{4}{5} - x; \frac{8}{5} - y\right)$,

mặt khác $\vec{AE} \perp \vec{IH}$ mà $\vec{AE} = \left(\frac{2}{5} - x; \frac{4}{5} - y\right)$; $\vec{IH} = \left(-\frac{6}{5} - x; \frac{3}{5} - y\right)$

$$\vec{AE} \cdot \vec{IH} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} - x\right)\left(-\frac{6}{5} - x\right) + \left(\frac{4}{5} - y\right)\left(\frac{3}{5} - y\right) = 0$$

Và điểm A thuộc đường tròn nên ta có hệ

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5} - x\right)\left(-\frac{6}{5} - x\right) + \left(\frac{4}{5} - y\right)\left(\frac{3}{5} - y\right) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{12}{65} \\ y = \frac{96}{65} \end{cases}$$

TH1: $A(0;0)$

Ta có $\vec{AI} = (2;1)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng MA

nên ta có phương trình đường thẳng MA là: $2x + y = 0$

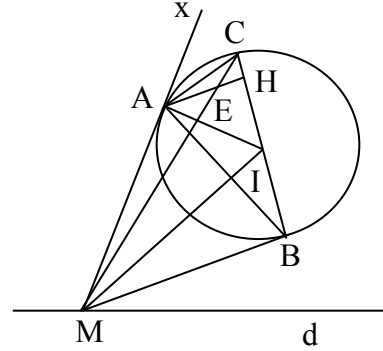
Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

Hay tọa độ điểm M (2; -4)

TH2: $A(-\frac{12}{65}; \frac{96}{65})$

Ta có $\vec{AI} = \left(\frac{142}{65}; -\frac{31}{65}\right)$ suy ra véc tơ pháp tuyến của đường thẳng MA là:

$n = (142; -31)$ phương trình đường thẳng MA là: $142x - 31y + 72 = 0$



Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 142x - 31y + 72 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{134}{173} \\ y = -\frac{212}{173} \end{cases}$$

Hay tọa độ điểm $M\left(-\frac{134}{173}; -\frac{212}{173}\right)$

Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M\left(-\frac{134}{173}; -\frac{212}{173}\right)$

Với hướng xây dựng bài toán như trên thì với một bài toán hình học tổng hợp ta có thể chuyển về bài toán tọa độ trong mặt phẳng.

4. Các biện pháp tổ chức

Thực hiện trong phạm vi một số buổi chữa bài tập hay là những buổi học thêm. Cô giáo đưa ra một số ví dụ về cách xây dựng bài toán mới từ bài toán cơ bản, sau đó hướng dẫn học sinh tự tìm tòi và phát hiện một số vấn đề xung quanh nó.

Thực hiện chủ yếu trong một số buổi bồi dưỡng học sinh khá, giỏi ở mức độ bài toán cao hơn.

Hình thức học sinh tự nghiên cứu các bài toán với sự hướng dẫn của cô giáo.

5. Kết quả của việc thực hiện đề tài

Tôi đã giới thiệu về cách “***nhận biết, khai thác và phát triển***” từ một bài toán như đã nêu trong đề tài giúp cho những học sinh khá giỏi toán lớp 10,12 tham khảo. Kết quả thu được có thể nói rất khả quan: sau một tháng đa số các em đã xây dựng được nhiều bài toán mới trong đó có một số bài toán khá hay và mới lạ, cụ thể như sau: các em học sinh khá đã xây dựng được khoảng 50% đến 60% bài toán tương tự như các bài toán có trong bài viết của tôi, các em học sinh giỏi toán đã tạo ra được khoảng 75% đến 95% bài toán tương tự với các bài toán có trong đề tài của chúng tôi và đa số các em hứng thú khi tham gia phát hiện và giải quyết vấn đề, học sinh dễ ghi nhớ công thức hơn và áp dụng một số bài toán tương đối hiệu quả, phát triển được nhiều bài toán mới.

Vậy đề tài “ Từ một bài toán hình học tọa độ phẳng giúp học sinh nhận biết, khai thác và phát triển các bài toán mới ” có tác dụng thực tiễn rất lớn trong giảng dạy của giáo viên và quá trình học tập của học sinh.

PHẦN III: KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

1.Kết luận:

Như vậy điều cốt lõi trong đề tài trên là thông qua bài toán cơ bản tôi đã phát triển thành hệ thống suy luận tương đối logic. Điều này tạo nên tính mới mẻ trong cái nhìn về những ý tiềm tàng trong các bài toán đó. Bài toán gốc ứng dụng khá rộng rãi với việc nhìn bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau bằng cách biến đổi các điều kiện của các biến số mở ra một lớp các bài toán khá hay và đẹp cũng được ứng dụng trong rất nhiều kỳ thi chọn học sinh giỏi và các kỳ bồi dưỡng học sinh khá giỏi, kỳ thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia để xét tuyển vào Đại học - Cao đẳng...

2.Kiến nghị

Trong quá trình dạy học thói quen tổng quát hóa, đặc biệt hóa để đào sâu nghiên cứu các góc cạnh trong toán học kiểu như trên là một điều rất cần thiết cho phát triển tư duy và kích thích tính tích cực khám phá của các em học sinh. Việc sử dụng hệ thống bài toán trên đã cho ta cách giải các bài tập liên quan một cách khá đơn giản nếu tiếp tục sáng tạo và khai thác sâu hơn chắc chắn ta sẽ tìm được nhiều vấn đề thú vị mà tôi chưa làm được trong đề tài phạm vi này. Tôi mong rằng qua báo cáo kinh nghiệm này rất mong được đón nhận những góp ý bổ ích của quý vị Giám khảo và bạn bè đồng nghiệp để đề tài càng phong phú và hữu ích hơn.

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG	<i>Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết , không sao chép nội dung của người khác. Người viết Tạ Thị Vân
--------------------------	--

TÀI LIỆU THAM KHẢO

STT

Tên sách tham khảo

1. *Rèn luyện kỹ năng tìm hướng giải toán tọa độ Oxy*
NXB: Đại học Quốc gia Hà Nội
2. *Tuyển chọn phân loại các bài thi tuyển sinh môn toán*
NXB: Trẻ
3. *Kiến thức ôn tập kinh nghiệm làm bài thi đạt điểm 10*
NXB: Đại học sư phạm
4. *Đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia năm 2015 và các đề thi thử THPT Quốc Gia năm 2015, 2016.*