

b) Ý nghĩa khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nửa giữa mẫu số liệu.
- Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường đó.

3. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM**a) Định nghĩa**

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 2.

Bảng 2

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	c_1	n_1
$[a_2; a_3)$	c_2	n_2
...	...	...
$[a_k; a_{k+1})$	c_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

- Gọi $\bar{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó. Ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k)$$

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2 , được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n} \left[n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2 \right]$$

trong đó: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.

- Căn bậc hai số học của phương sai, kí hiệu là s , được gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó, nghĩa là $s = \sqrt{S^2}$.

Lời bình: Chúng ta có thể tính phương sai thông qua số trung bình bình phương.

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_k c_k^2)$$

$$S^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

b) Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

- Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

4. MỘT CỦA SỐ LIỆU GHEP NHÓM

Nhóm chứa một của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa một là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó một của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là

$$M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

M_o , được xác định bởi công thức

*Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa một thì $n_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa một thì $n_{m+1} = 0$.

* Ý nghĩa của một của mẫu số liệu ghép nhóm

- Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_o xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_o thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.
- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Kết quả thăm dò ngẫu nhiên thời gian chờ xe buýt mỗi ngày của một số sinh viên được biểu thị ở bảng sau:

Thời gian (phút)	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$
Số người	4	5	6	3	2

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho. Kết quả cho biết điều gì?

Bài 2. Trong một phòng thí nghiệm, nghiên cứu thời gian sạc pin của hai loại điện thoại X và Y . Bảng dưới đây biểu thị thời gian sạc pin (phút) của hai loại điện thoại:

Thời gian sạc (phút)	[30;60)	[60;90)	[90;120)	[120;150)	[150;180)
Số điện thoại loại X	0	8	25	32	35
Số điện thoại loại Y	20	12	15	23	30

Tính khoảng biến thiên và sánh thời gian sạc pin của hai loại điện thoại trên?

Bài 3. Mẫu số liệu sau cho biết số lượng sách bán được tại một hiệu sách trong 10 ngày:

15	22	20	30	28	25	40	37	35	32
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu trên.

Bài 4. Một nghiên cứu theo dõi thời gian làm bài tập về nhà của học sinh lớp 12C4 tại trường Trung học Phổ thông X. Kết quả được mô tả ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Số học sinh	5	10	8	3

a) Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm.

b) Nếu biết học sinh làm bài tập ít nhất là 32 phút và nhiều nhất là 68 phút, thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

Bài 5. Cân nặng của học sinh lớp 10 A và 10 B ở một trường trung học phổ thông được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)
Số học sinh lớp 10A	3	5	10	7	4	1
Số học sinh lớp 10B	2	8	7	6	3	2

So sánh theo khoảng biến thiên, cân nặng của học sinh lớp nào có độ phân tán lớn hơn?

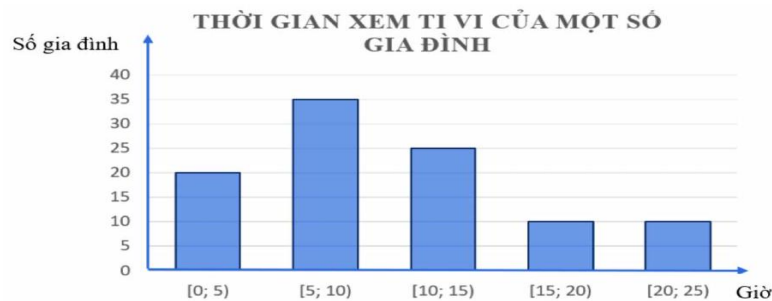
Bài 6. Nhà đầu tư theo dõi doanh thu bán một loại sản phẩm của hai cửa hàng bán lẻ trong 5 năm. Số liệu được thống kê ở bảng sau:

Số tiền doanh thu (triệu đồng)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Số tháng của cửa hàng A	5	15	25	10	5

Số tháng của cửa hàng B	10	10	20	10	10
-------------------------	----	----	----	----	----

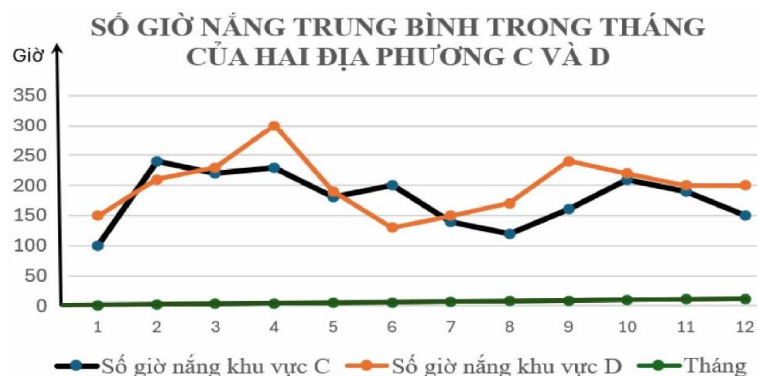
So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của doanh thu hàng tháng của hai cửa hàng A và B. Cửa hàng nào có doanh thu biến động lớn hơn? Đầu tư vào cửa hàng nào "rủi ro" hơn?

Bài 7. Kết quả điều tra về số giờ xem ti vi của một số hộ gia đình được biểu diễn ở biểu đồ dưới y:



Hãy lập bảng tần số ghép nhóm, tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và giá trị trung bình của mẫu số liệu.

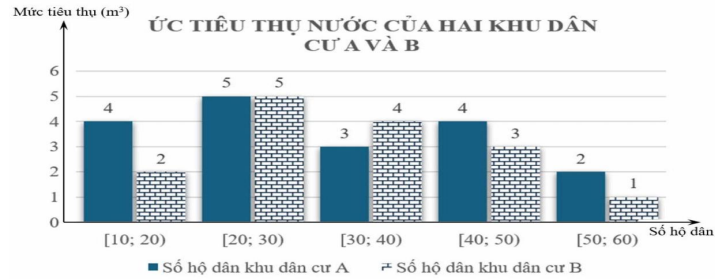
Bài 8. Hình sau là biểu đồ biểu diễn giờ nắng trung bình hàng tháng của hai địa phương C và D .



a) Lập bảng số liệu ghép nhóm với dài các nhóm là 40 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 300 .

b) Tìm khoảng tứ phân vị của số giờ nắng mỗi khu vực và cho biết số giờ nắng của khu vực nào ít biến động hơn.

Bài 9. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về mức tiêu thụ nước hàng tháng của hai khu dân cư A và B .



- a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.
- b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì khu dân cư nào có mức tiêu thụ nước đồng đều hơn?
- c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì khu dân cư nào có mức tiêu thụ nước đồng đều hơn?

Bài 10. Điểm thi môn Toán của 25 học sinh được chọn ngẫu nhiên trong kỳ thi Tốt nghiệp Trung học Phổ thông năm học 2024 - 2025 được thống kê lại như sau:

4,4	8,6	4,8	5,0	5,4	5,4	5,6
5,2	6,0	6,2	6,2	8,0	7,8	7,6
7,2	7,4	7,2	6,0	5,8	5,8	8,2
7,0	6,8	6,4	6,6			

- a) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[4;5)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 1
- c) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bài 11. Người ta thống kê chiều cao của 40 học sinh lớp 12A ta được bảng sau:

Chiều cao(cm)	$[150;154]$	$[155;159]$	$[160;164]$	$[165;169]$	$[170;174]$	$[175;179]$
Số học sinh	5	7	8	9	6	5

Tìm tứ phân vị thứ 2 .

Bài 12. Người ta thống kê tuổi của 20 cá thể hổ tại 1 vườn bách thú ta được bảng sau:

Chiều cao (cm)	$[10;11)$	$[11;12)$	$[12;13)$	$[13;14)$	$[14;15)$	$[15;16)$
Số học sinh	2	3	6	4	4	1

Tìm tứ phân vị thứ 1 và 3 .

Bài 13. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở bảng đây (đơn vị: kg)

Cân nặng (kg)	$[1,0;1,1)$	$[1,1;1,2)$	$[1,2;1,3)$	$[1,3;1,4)$
Số con giống A	8	28	32	17
Số con giống B	13	14	24	14

a) Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.

b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B?

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

Bài 14. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là bao nhiêu?

Bài 15. Mẫu số liệu dưới đây ghi số lượt xe ô tô khi đi qua trạm thu phí A trong 30 ngày (đơn vị: lượt).

100 134 124 150 138 140 155 176 180 198
 156 173 185 163 165 185 190 143 179 123
 176 150 167 168 198 178 182 164 175 153

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng:

$[100,120), [120,140), [140,160), [160,180), [180,200)$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu

Bài 16. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/ m^2)	[10;14)	[14;18)	[18;22)	[22;26)	[26;30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Bài 17. Số cuộc gọi đi n thoại anh An thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3;5]	[6;8]	[9;11]	[12;14]	[15;17]
Số ngày	5	10	3	10	2

Hỏi anh An gọi một ngày bao nhiêu cuộc gọi là nhiều nhất?

Bài 18. Anh Võ ghi lại cự li 40 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

Cự li (m)	[69,2;70)	[70;70,8)	[70,8;71,6)	[71,6;72,4)	[72,4;73,2)
Số lần	5	6	10	10	9

Hỏi Anh Võ ném khoảng bao nhiêu mét là nhiều nhất?

Bài 19. Cô Thúy Kiều rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của Cô Thúy Kiều được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	5	4	2	1

Hỏi Cô Thúy Kiều nhảy thời gian bao nhiêu phút là nhiều nhất?

Bài 20. Khi thống kê chiều cao của học sinh khối lớp 12 trong một trường trung học, ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Chiều cao (cm)	[150;156)	[156;162)	[162;168)	[168;174)	[174;180)	[180;186)

Số học sinh	5	18	40	26	8	3
----------------	---	----	----	----	---	---

Hãy tính giá trị trung bình, mốt, trung vị; tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

Chủ đề 4. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

BÀI 7. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM

1) Định nghĩa

- Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .
- Định lí: Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K .

Khi đó

- a) Với mỗi hằng số C , hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K .
- b) Ngược lại với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K .

Kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$

2) Tính chất của nguyên hàm

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì:

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

3) Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

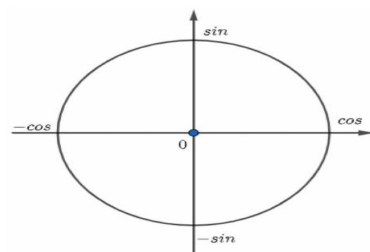
1. $\int 0 dx = C$	6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
2. $\int dx = x + C$	7. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	8. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + c, a \neq 0$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	9. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, a \neq 0$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	10. $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1, k \neq 0$

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Lấy đạo hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay cùng kim đồng hồ.

Lấy nguyên hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay ngược kim đồng hồ.



1. $\int \cos x dx = \sin x + C$	9. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
2. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	10. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
3. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	11. $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$
4. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	12. $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	13. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	14. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
7. $\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	15. $\int (1 + \tan^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$

8. $\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	16. $\int (1 + \cot^2(ax + b)) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
---	--

4) Phương pháp tính nguyên hàm

- Phương pháp đổi biến số

Định lí 1: Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)] u'(x) dx = F[u(x)] + C.$$

***Chú ý:**

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$; $f[u(x)]$ là $f(u)$ (coi du là vi phân của hàm số $u = u(x)$), nghĩa là $du = d(u(x)) = u'(x)dx$.

Khi đó công thức (1) được viết như sau:

$$\int f[u(x)] u'(x) dx = \int f[u(x)] du(x) = \int f(u) du \\ = F(u) + C = F[u(x)] + C$$

Ta nói đã thực hiện được phép đổi biến $u = u(x)$.

- Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dạng	Đặt t	Dạng	Đặt t
$\int f(ax+b) dx$	$t = ax + b$	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$
$\int f(x^{n+1}) \cdot x^n dx$	$t = x^{n+1}$	$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$
$\int f(\sqrt{x}) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$t = \sqrt{x}$	$\int f(e^x) \cdot e^x dx$	$t = e^x$
$\int f(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x$	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$
$\int f(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x$		

II. TÍCH PHÂN

1) Định nghĩa tích phân

- Định nghĩa: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

- Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Nhận xét:

- Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$.
Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.
- Nếu hàm số $f(x)$ không âm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

2) Tính chất của tích phân

- Định lí: Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K . Khi đó ta có
 1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
 2. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
 3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$;
 4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;
 5. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$.