

Tiết:

Lớp:

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

I. Mục đích yêu cầu

- Giúp học sinh nắm được điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, biết cách chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và áp dụng vào giải một số bài toán.
- Vận dụng thành thạo mối quan hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng, định lý ba đường vuông góc.
- Nắm được khái niệm và biết cách tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

II. Phương tiện dạy học

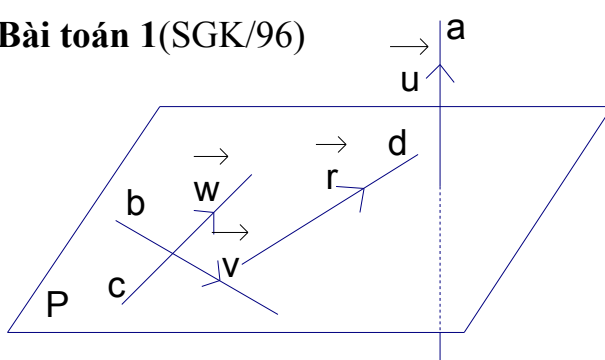
- Sách giáo khoa, thước kẻ, phấn màu,... (sử dụng máy chiếu nếu có)

III. Phương pháp dạy học

- Gọi mở nêu vấn đề kết hợp vấn đáp.

IV. Tiến trình dạy học

1. Ổn định lớp
2. Kiểm tra bài cũ: Hai đường thẳng vuông góc
3. Nội dung bài mới

Hoạt động của thầy và trò	Nội dung
Hoạt động 1: 1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	
GV đặt ra một số tình huống. GV: Hãy xét mối quan hệ của các góc tường thẳng đứng với mặt đất? HS nêu nhận xét. GV cho HS thực hiện bài toán 1. GV: Hãy nêu giả thiết và kết luận của bài toán. GV gọi một HS lên bảng vẽ hình. Sau đó GV sử dụng hình 97 để thực hiện hoạt động. Thực hiện hoạt động 1. GV: Hãy nêu nhận xét về ba vectơ $\vec{v}, \vec{w}, \vec{r}$? HS nhận xét.	1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng Bài toán 1(SGK/96) 

GV: Hãy biểu diễn vector $\vec{r}$ thông qua hai vector $\vec{v}$ và $\vec{w}$? Tính $\vec{u} \cdot \vec{r}$.

HS thực hiện.

GV trình bày chi tiết lời giải.

GV nêu định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

GV: Làm thế nào để kiểm tra một đường thẳng có vuông góc với một mặt phẳng hay không?

HS trả lời.

GV nêu định lí 1.

GV hướng dẫn HS chứng minh định lí.

Giải: Vì d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau b và c nên ta có $\vec{r} = m\vec{v} + n\vec{w}$

Suy ra $\vec{r} \cdot \vec{u} = m\vec{v} \cdot \vec{u} + n\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

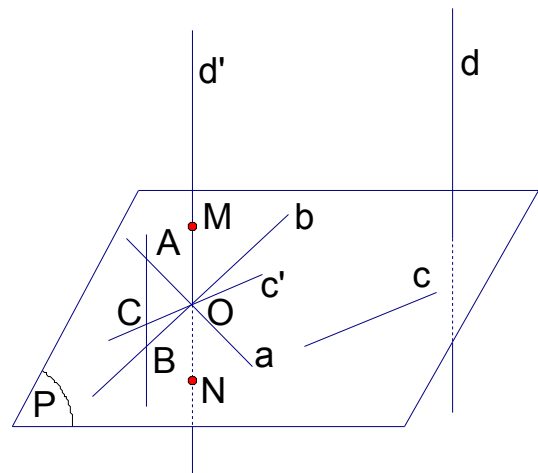
Vậy $a \perp d$

Định nghĩa 1: Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Kí hiệu $a \perp (P)$ hoặc $(P) \perp a$

Định lí 1 Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

Chứng minh



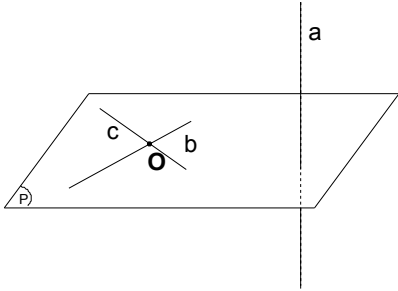
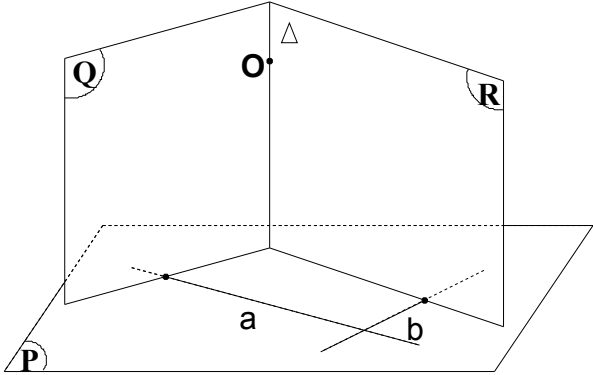
Gọi O là giao điểm của a và b .

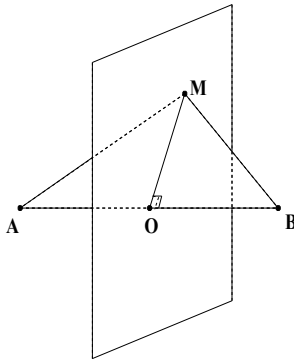
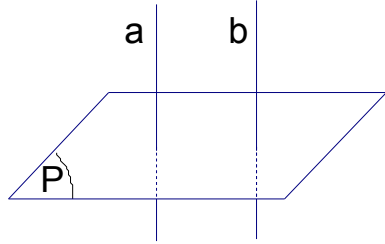
+ Nếu $c \parallel a$ hoặc $c \parallel b$ thì do $\Delta \perp a$ và $\Delta \perp b$ nên $\Delta \perp c$.

+ Nếu c không song song với a và b thì từ O kẻ $d' \parallel d$ và kẻ $c' \parallel c$. Ta chứng minh $d' \perp c'$

Trên c' lấy điểm $C \neq O$ và kẻ qua C đường thẳng cắt a và b lần lượt tại A và B khác O .

Trên d' về hai phía của O lấy hai điểm M và N sao cho $OM = ON$

GV hướng dẫn HS thực hiện hoạt động 2.	Khi đó a và b đều là trung trực của đoạn MN nên $AM = AN$ và $BM = BN$ Suy ra $\triangle MAB = \triangle NAB$ Do đó $\widehat{MBC} = \widehat{NBC}$ Xét $\triangle MBC$ và $\triangle NBC$ có BC chung $\widehat{MBC} = \widehat{NBC}$ $MB = NB$ Nên $\triangle MBC = \triangle NBC$ Suy ra $MC = NC$ $\triangle CMN$ cân tại C nên trung tuyến CO cũng là đường cao. Vậy $d' \perp c'$.
Hoạt động 2: 2. Các tính chất	
GV đặt vấn đề: Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng đã cho. GV nêu tính chất 1. GV đặt vấn đề: Có bao nhiêu đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với mặt phẳng đã cho. GV nêu tính chất 2. GV: Hãy nêu cách xác định mặt phẳng (P) trong tính chất 1. HS trả lời. GV: Hãy nêu cách xác định đường thẳng (Δ) trong tính chất 2. HS trả lời. GV nêu định nghĩa mặt phẳng trung trực	2. Các tính chất Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.  Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.  Định nghĩa 2: Mặt phẳng trung trực

của đoạn thẳng. GV: Hãy lấy một ví dụ về mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng. HS trả lời. Thực hiện hoạt động 3. GV cho HS vẽ hình và hướng dẫn HS thực hiện.	của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó. 
Hoạt động 3: 3.Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng	
GV: Cho $a // b$, $(P) \perp a$. Hỏi (P) có vuông góc với b hay không? GV nêu tính chất 3. GV: Hãy chứng minh tính chất 3. HS chứng minh. GV: Cho $(P) // (Q)$, $(P) \perp a$. Hỏi (Q) có vuông góc với a hay không? GV nêu tóm tắt tính chất 4. GV: Hãy viết biểu thức và chứng minh tính chất 4.	3.Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng Tính chất 3(SGK/98) $\left. \begin{matrix} a // b \\ (P) \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow (P) \perp b$ $\left. \begin{matrix} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \neq b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a // b$  Tính chất 4(SGK/99) $\left. \begin{matrix} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \perp (Q)$ $\left. \begin{matrix} a \perp (P) \\ a \perp (Q) \\ (P) \neq (Q) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (P) // (Q)$

GV nêu tóm tắt tính chất 5. GV: Hãy viết biểu thức và chứng minh tính chất 5. GV đặt vấn đề: Cho $a // (P)$, $b \perp a$. Khi đó b có vuông góc với (P) hay không?	Tính chất 5(SGK/99) • $\left. \begin{array}{l} a // (P) \\ b \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp a$ • $\left. \begin{array}{l} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a // (P)$
Hoạt động 4: 4. Định lí ba đường vuông góc	
GV gọi một HS nhắc lại định nghĩa của phép chiếu song song. GV: Khi $\ell \perp (P)$ thì ta gọi phép chiếu song song theo phương ℓ lên mặt phẳng (P) là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P). Vậy phép chiếu vuông góc là gì? HS trả lời. GV nêu lại định nghĩa. GV: Có những cách nào để chứng minh hai đường thẳng trong không gian vuông góc với nhau?	4. Định lí ba đường vuông góc a) Phép chiếu vuông góc Định nghĩa 3: Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

HS trả lời.

GV kết luận và nêu định lí.

GV hướng dẫn HS chứng minh.

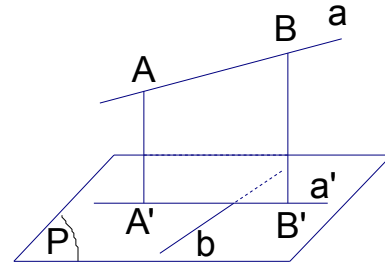
GV cho một ví dụ để HS nắm được kiến thức vừa học.

GV gọi 1 HS lên bảng vẽ hình

Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P) . Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P) .

Chứng minh



Nếu a nằm trong (P) thì kết quả hiển nhiên.

Nếu a không nằm trong (P) thì ta lấy hai điểm phân biệt A và B thuộc a . Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên (P) . Khi đó hình chiếu a' của đường thẳng a trên (P) chính là đường thẳng đi qua A' và B' .

Vì $b \subset (P)$ nên $b \perp AA'$

Vậy nếu $b \perp a$ thì $b \perp mp(a, a')$.

Do đó $b \perp a'$

Ngược lại, nếu $b \perp a'$ thì $b \perp mp(a', a)$

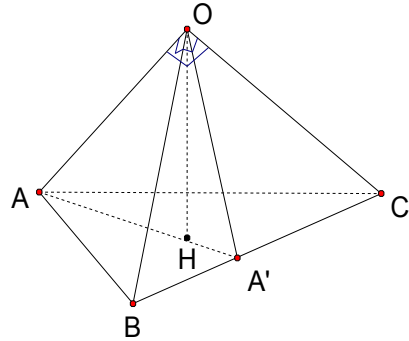
Do đó $b \perp a$

Ví dụ Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc nhau. Chứng minh rằng

- Tứ diện $OABC$ có các cặp cạnh đối vuông góc nhau
- Hình chiếu H của O lên (ABC) trùng với trực tâm ΔABC
- $$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Chứng minh

GV hướng dẫn HS giải
GV trình bày bài giải chi tiết



a) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$$

$OA \perp BC$

Tương tự, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$

b) AH là hình chiếu của OA lên (ABC)
(vì $OH \perp (ABC)$)

$BC \perp OA$ (vì $OA \perp (OBC)$)

Theo định lí ba đường vuông góc, ta có
 $BC \perp AH$

Tương tự, $AB \perp CH$. Do đó, H là trực tâm ΔABC

c) Gọi $A' = AH \cap BC$.

$\Rightarrow OH$ là đường cao của $\Delta OAA'$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}$$

OA' là đường cao của tam giác vuông OBC

$$\Rightarrow \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Hoạt động 5: 5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

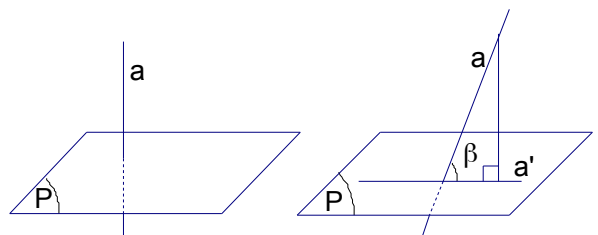
GV: Hãy nhắc lại định nghĩa góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

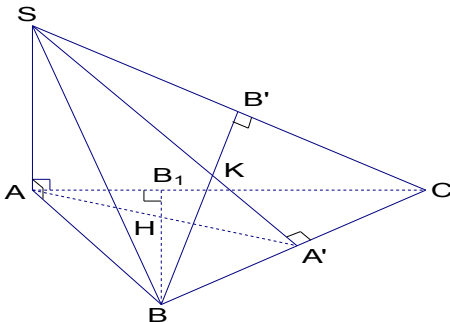
HS nhắc lại.

GV: Vậy để xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ta làm như thế nào?

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) .



GV nêu định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	Định nghĩa 4 - Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° - Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) Lưu ý : Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không quá 90°
Hoạt động 6: Củng cố và luyện tập	
GV tổng kết lại các kiến thức đã học. GV đọc đề và hướng dẫn HS vẽ hình. GV: Em có nhận xét gì về ba đường thẳng AH, SK và BC? HS trả lời. GV: Từ đó hãy tìm cách chứng minh AH, SK và BC đồng quy. GV gọi 1 HS lên bảng làm câu a.	1. Củng cố 2. Luyện tập Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Các tam giác ABC và SBC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng - AH, SK, BC đồng quy $SC \perp mp(BHK)$ $HK \perp mp(SBC)$ - Tính góc tạo bởi SA' và mp(ABC), nếu $SA = a\sqrt{3}$, $AB = AC = a\sqrt{10}$, $BC = 2a$ <u>Chứng minh</u>  a) Gọi AA' là đường cao của ΔABC Do $SA \perp (ABC)$ nên AA' là hình chiếu của SA' lên mp(ABC) Suy ra $BC \perp SA'$ Vì H, K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC nên $H \in AA'$, $K \in SA'$ Hay AH, SK và BC đồng quy.

GV hướng dẫn HS làm câu b, c, d.
Một HS lên bảng trình bày lời giải.

b) Ta có $BK \perp SC$ (1)

Mặt khác

$$\begin{cases} HB \perp AC \\ HB \perp SA \end{cases} \Rightarrow HB \perp (SAC)$$

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $HB \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (BHK)$

c) Ta có $SC \perp (BHK)$ nên $HK \perp SC$

Vì $BC \perp (SAA')$ nên $BC \perp HK$

Do đó $HK \perp (SBC)$

d) Vì $SA \perp (ABC)$, AA' là hình chiếu của SA' lên (ABC) nên $\widehat{SA'A}$ chính là góc tạo bởi SA' và (ABC)

Ta có $AA' = \sqrt{AB^2 - A'B^2}$

$$\therefore \sqrt{AB^2 - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{10a^2 - a^2} = 3a$$

Trong tam giác vuông SAA' , ta có

$$\tan \widehat{SA'A} = \frac{SA}{AA'} = \frac{a\sqrt{3}}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{SA'A} = 30^\circ$$

V. Hệ thống bài tập

1. Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a. Phương pháp

Cách 1 Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , ta chứng minh a vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau b, c nằm trong (P) .

Cách 2

$$\left. \begin{matrix} a \parallel b \\ (P) \cap a \end{matrix} \right\} \Rightarrow (P) \perp b$$

Cách 3

$$\left. \begin{matrix} (P) \parallel (Q) \\ a \perp (P) \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \perp (Q)$$

b. Một số ví dụ

Ví dụ 1 Cho tứ diện $SABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại B , $SA \perp (ABC)$

a. Chứng minh $BC \perp (SAB)$

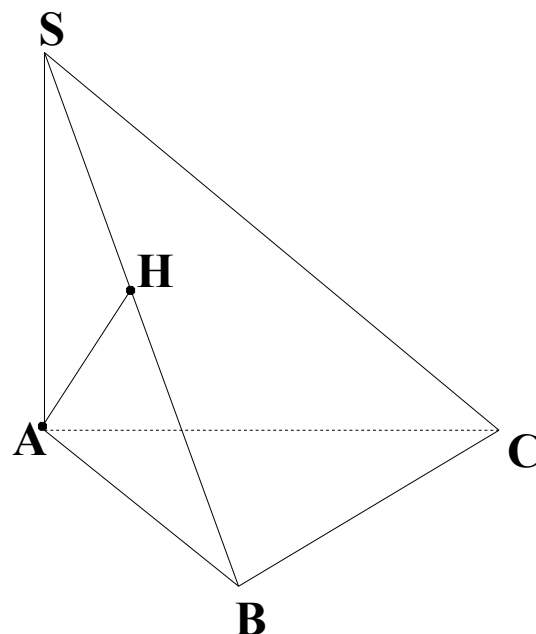
b. Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$.

Chứng minh $AH \perp SC$

Hướng dẫn:

$$\begin{matrix} a. \left\{ \begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{matrix} \right\} \\ \Rightarrow BC \perp (SAB) \end{matrix}$$

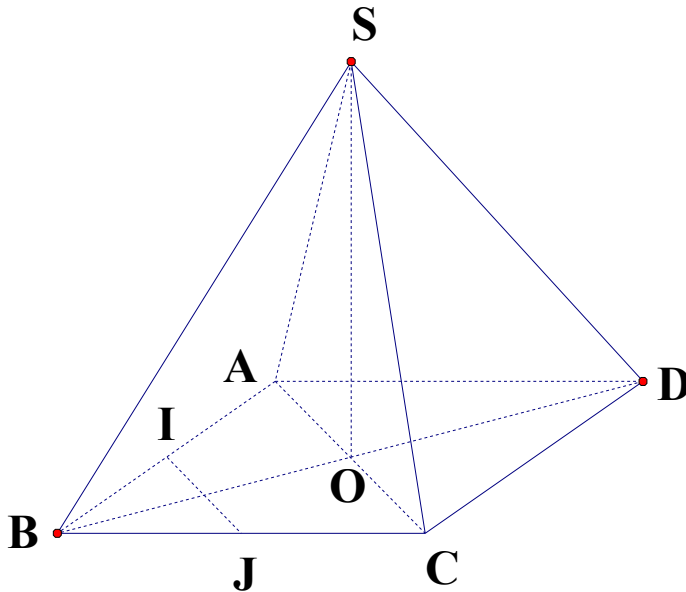
$$\begin{matrix} b. \left\{ \begin{matrix} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB)) \end{matrix} \right\} \\ \Rightarrow AH \perp (SBC) \end{matrix}$$



Ví dụ 2 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, $SA = SC$, $SB = SD$.

- Chứng minh $SO \perp (ABCD)$
- Gọi I, J là trung điểm các cạnh AB, BC. Chứng minh $IJ \perp (SBD)$

Hướng dẫn

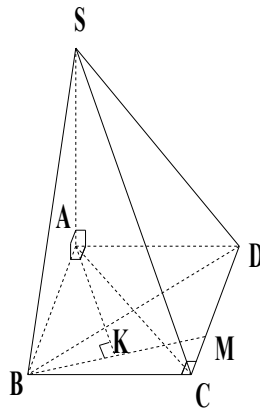


- $SO \perp AC$ vì $\triangle SAC$ cân tại S
 $SO \perp BD$ vì $\triangle SBD$ cân tại S
- $\left. \begin{array}{l} AC \perp (SBD) \\ IJ \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow IJ \perp (SBD)$

Ví dụ 3 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi M là điểm di động trên CD. Đặt $CM = x$, gọi K là hình chiếu của S lên BM.

- Tính SK
- Tìm quỹ tích điểm K khi M thay đổi trên CD

Hướng dẫn



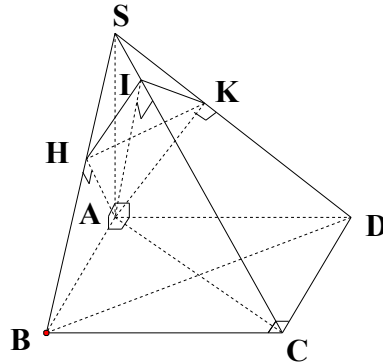
- $SK^2 = SA^2 + AK^2$
 $\triangle AKB \quad \triangle BCM$
- Theo định lý ba đường vuông góc,
 $AK \perp BM \Rightarrow \widehat{AKB} = 90^\circ$
 Quỹ tích điểm K là cung tròn BO của đường tròn đường kính AB nằm trong mặt phẳng (ABCD).

Ví dụ 4 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$.

Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên SB, SC, SD.

- Chứng minh $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$
- Chứng minh $SC \perp (AHK)$, $I \in (AHK)$

Hướng dẫn



b. Ta có

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB)) \\ AH \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$$\text{và } \left. \begin{array}{l} AK \perp CD \text{ (vì } CD \perp (SAD)) \\ AK \perp SD \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp (SCD)$$

Mặt khác, ta có

$$\left. \begin{array}{l} SC \perp (AHK) \\ AI \parallel SC \\ A \in (AHK) \end{array} \right\} \Rightarrow AI \subset (AHK)$$

2. Dạng 2: Tìm thiết diện của hình không gian với một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng

a. Phương pháp

Dựng mặt phẳng (P) qua điểm M và một đường thẳng d, ta thực hiện như sau

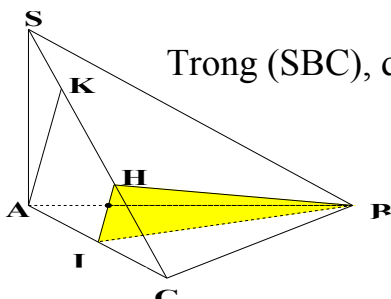
- Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d, trong đó có ít nhất một đường thẳng đi qua M. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng nói trên chính là (P).
- Nếu có sẵn hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a và b cùng vuông góc với d thì ta chọn (P) song song với a (hoặc chứa a) và (P) song song với b (hoặc chứa b)

Sau khi dựng (P), ta tìm giao tuyến với các mặt của hình không gian

b. Một số ví dụ

Ví dụ 1 Cho tứ diện SABC với $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tìm thiết diện do (P) cắt tứ diện và tính diện tích thiết diện.

Hướng dẫn:



Trong (SBC), dựng $BH \perp SC$ ($H \in SC$)

Gọi I là trung điểm của AC. Cần chứng minh

$$SC \perp (BIH)$$

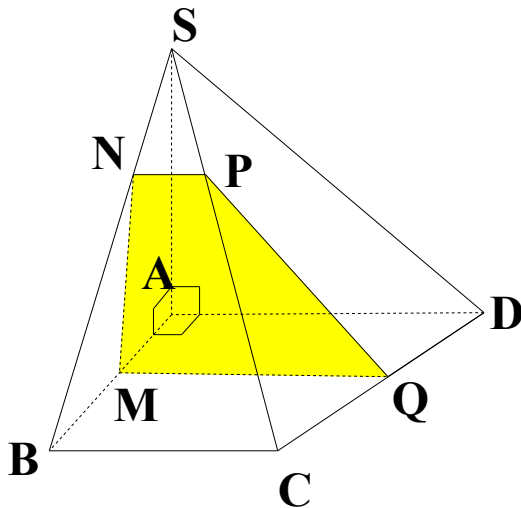
$$\text{và } BI \perp IH.$$

Khi đó, $\triangle BIH$ là thiết diện cần tìm.

Ví dụ 2 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, với $AB = BC = a$, $AD = SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi $M \in AB$, $AM = x$ ($0 < x < a$) và (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

- Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (P). Thiết diện đó là hình gì?
- Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Hướng dẫn:



Nhận xét: $\left. \begin{array}{l} SA \notin (P) \\ SA \perp AB \\ (P) \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SA \parallel (P)$

và $\left. \begin{array}{l} AD \notin (P) \\ AD \perp AB \\ (P) \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel (P)$

Nhận xét: SA và AD thuộc mặt phẳng (SAD).

Do đó $(P) \parallel (SAD)$

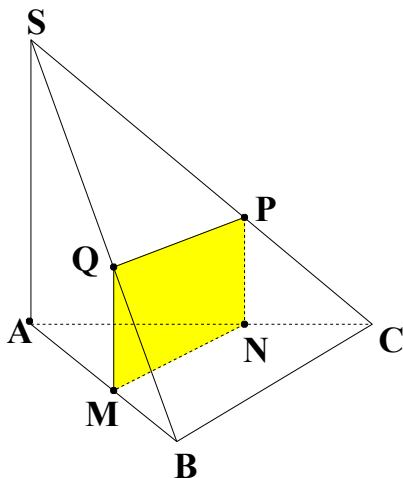
(P) chính là mặt phẳng qua M và song song với (SAD).

Thiết diện là hình thang vuông MNPQ.

Ví dụ 3 Cho tứ diện SABC có $\triangle ABC$ vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm tùy ý trên AB, $AM = x$ ($0 < x < a$), (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB

- Tìm thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (P).
- Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm giá trị của x để diện tích thiết diện đó là lớn nhất.

Hướng dẫn:



Tương tự như ví dụ 2, ở ví dụ này (P) qua M và song song với SA và BC.

Nhận xét SA và BC chéo nhau. Khi đó, thiết diện là hình chữ nhật MNPQ.

VI. Tổng kết rút kinh nghiệm