BÀI 25. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

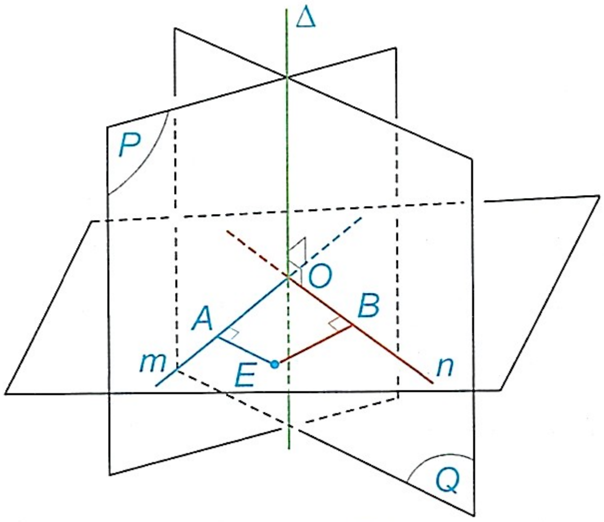
1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy các đường thẳng a,b tương ứng vuông góc với $(P),(Q)$. Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a,b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Chú ý. Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.

Ví dụ 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy một điểm O bất kì thuộc đường thẳng Δ. Gọi m,n là các đường thẳng đi qua O, tương ứng thuộc $(P),(Q)$ và vuông góc với Δ. Chứng minh rằng góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n.

Giải. (H.7.45)



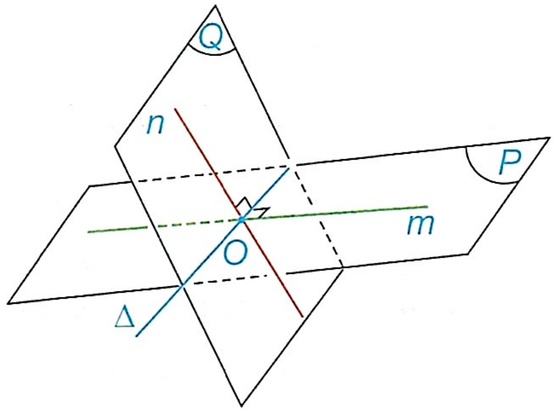
Hình 7.45

Trong mặt phẳng chứa m,n, lấy một điểm E không thuộc các đường thẳng m,n. Gọi A,B tương ứng là hình chiếu của E trên m,n. Khi đó Δ vuông góc với các đường thẳng EA,EB.

Do $EA \perp m, EA \perp \Delta$ nên $EA \perp (P)$. Tương tự, $EB \perp (Q)$. Do đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa EA và EB.

Do $\widehat{OAE} = 90^\circ = \widehat{OBE}$ nên bốn điểm O, A, E, B thuộc một đường tròn. Do đó, $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AEB}$ bằng hoặc bù nhau, tức là $(EA, EB) = (m,n)$. Vậy góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n.

Nhận xét. (H.7.46)



Hình 7.46

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai đường thẳng m,n tương ứng thuộc $(P),(Q)$ và cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ, cắt $(P),(Q)$ tương ứng theo các giao tuyến $m,n)$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n. Đặc biệt, (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n.

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với OB và OC. Chứng minh rằng các mặt phẳng (OAB) và (OAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Giải

Do OA vuông góc với OB và OC nên $OA \perp (OBC)$. Mặt khác, các mặt phẳng $(OAB),(OAC)$ chứa OA. Do đó chúng cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC).

3. TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Nhận xét. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P).

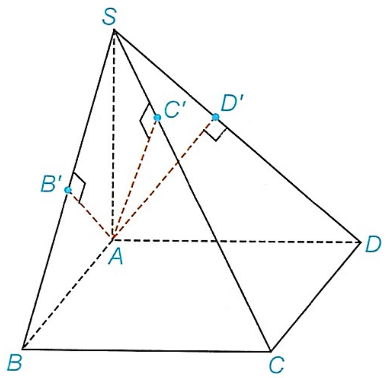
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B',C',D' tương ứng là hình chiếu của A trên SB,SC,SD. Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAB), AB' \perp (SBC), AD' \perp (SCD)$.

b) Các điểm A,B',C',D' cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải. (H.7.50)



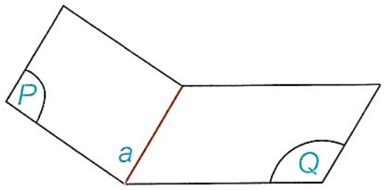
Hình 7.50

a) Vì $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$. Do đó, $(SBC) \perp (SAB)$. Đường thẳng AB' thuộc (SAB) và vuông góc với SB nên $AB' \perp (SBC)$. Tương tự $AD' \perp (SCD)$.

b) Từ câu a ta có $AB' \perp SC, AD' \perp SC$. Các đường thẳng AB', AC', AD' cùng đi qua A và vuông góc với SC nên cùng thuộc một mặt phẳng. Do đó bốn điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.

4. GÓC NHỊ DIỆN

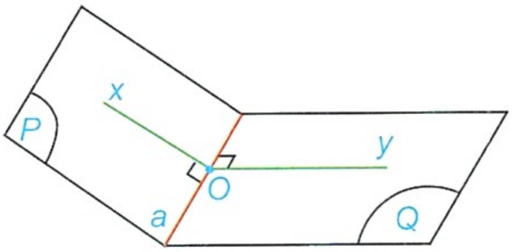
Hình gồm hai nửa mặt phẳng $(P),(Q)$ có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P,a,Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng $(P),(Q)$ tương ứng được gọi là cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.



Hình 7.52

Mỗi đường thẳng a trong một mặt phẳng chia mặt phẳng thành hai phần, mỗi phần cùng với a là một nửa mặt phẳng bờ a.

Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P,a,Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc $(P),(Q)$ và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P,a,Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P,a,Q]$.



Hình 7.53

Mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện xOy của $[P,a,Q]$ vuông góc với cạnh a.

Chú ý

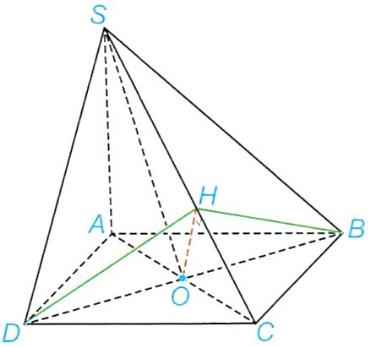
- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M,a,N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N.
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a, $AC = a, SA = \frac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

a) Tính số đo của các góc nhị diện $[B,SA,D]$; $[S,BD,A]$;$[S,BD,C]$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B,SC,D]$.

Giải. (H.7.54)



Hình 7.54

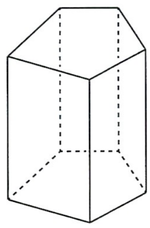
a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$. Hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $AC = a$ nên các tam giác ABC, ACD đều. Do đó $\widehat{BAD} = 120^{\circ}$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 120°. Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Vậy AC và SO vuông góc với BD. Suy ra $\widehat{AOS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, A]$ và $\widehat{COS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Tam giác SAO vuông tại A và có $SA = \frac{1}{2}a = AO$ nên $\widehat{AOS} = 45^{\circ}$. Suy ra $\widehat{COS} = 180^{\circ} - \widehat{AOS} = 135^{\circ}$.
Vậy các góc nhị diện $[S, BD, A]$, $[S, BD, C]$ tương ứng có số đo là $45^{\circ}, 135^{\circ}$.
b) Theo chứng minh trên, $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Mặt khác, $OH \perp SC$ nên $SC \perp (BHD)$. Do đó, $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

5. MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

a) Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

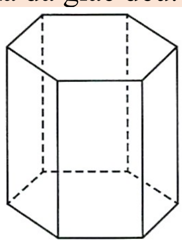


Hình 7.58

Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

b) Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

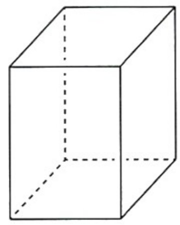


Hình 7.59

Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.

c) Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng, có đáy là hình bình hành.

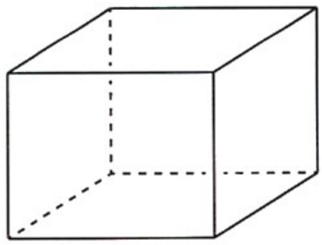


Hình 7.60

Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.

d) Hình hộp chữ nhật

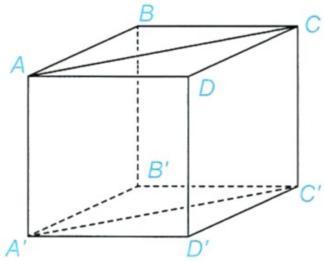
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.



Hình 7.61

Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $ACC'A'$ là một hình chữ nhật.
Giải. (H.7.62)



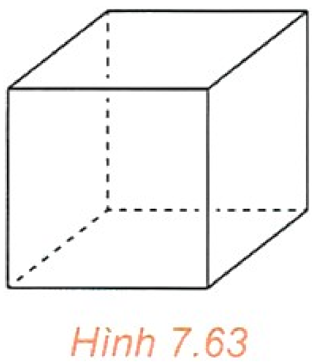
Hình 7.62

Ta có $AA'=CC'$ và $AA'//CC'$ (vì AA', CC' cùng bằng và cùng song song với DD'). Do đó $ACC'A'$ là một hình bình hành.

Mặt khác, $AA' \perp (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp A'C'$. Do đó $ACC'A'$ là một hình chữ nhật.

e) Hình lập phương

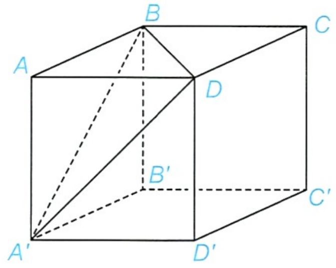
Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.



Hình 7.63

Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.
Chú ý. Khi đáy của hình lăng trụ đứng (đều) là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... đôi khi ta cũng tương ứng gọi rõ là hình lăng trụ đứng (đều) tam giác, tứ giác, ngũ giác,...

Ví dụ 6. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'BD$ là tam giác đều.
Giải. (H.7.64)



Hình 7.64

Gọi a là độ dài các cạnh của hình lập phương. Do các mặt của hình lập phương là các hình vuông nên

$A'D = \sqrt{AA'^2 + AD^2} = a\sqrt{2};$

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2};$

$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = a\sqrt{2}.$

Tam giác $A'BD$ có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều.

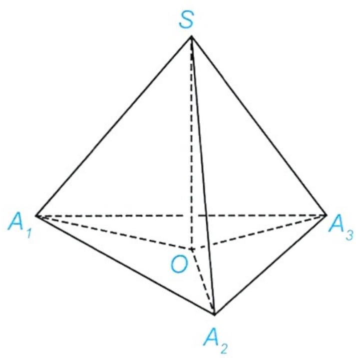
6. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý. Tương tự như đối với hình chóp, khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều,... đôi khi ta cũng gọi rõ chúng tương ứng là hình chóp tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều,...

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.
Giải. (H.7.68)



Hình 7.68

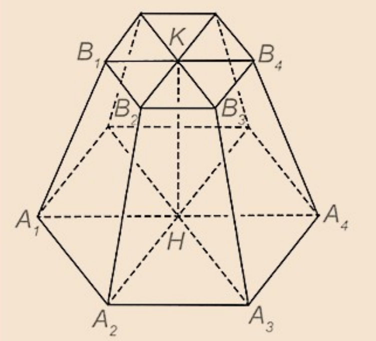
Xét hình chóp $S.A_1A_2\cdots A_n$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy.

Giả sử hình chóp là đều, khi đó O là tâm của đa giác đều $A_1A_2\cdots A_n$. Các tam giác $SOA_1, SOA_2, \cdots, SOA_n$ đều vuông tại O, có chung cạnh SO và có các cạnh $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$ bằng nhau, do đó chúng bằng nhau.

Vậy $\widehat{SA_1O} = \widehat{SA_2O} = \cdots = \widehat{SA_nO}$, tức là các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Ngược lại, giả sử hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau. Khi đó, $\widehat{SA_1O} = \widehat{SA_2O} = \cdots = \widehat{SA_nO}$. Từ đó suy ra các tam giác vuông $SOA_1, SOA_2, \cdots, SOA_n$ bằng nhau. Do đó, $SA_1 = SA_2 = \cdots = SA_n$. Mặt khác, $A_1A_2\cdots A_n$ là đa giác đều, do đó $S.A_1A_2\cdots A_n$ là hình chóp đều.

- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2\cdots A_n, B_1B_2\cdots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \cdots, A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trong HĐ13 được gọi là một hình chóp cụt đều (nói đơn giản là hình chóp cụt đều được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_4A_2\cdots A_n$ sau khi cắt đi hình chóp đều $S.B_1B_2\cdots B_n$), kí hiệu là $A_1A_2\cdots A_n \cdot B_1B_2\cdots B_n (H.7.70)$.

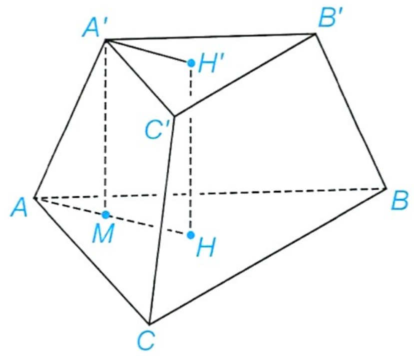


Hình 7.70

- Các đa giác đều $A_1A_2\cdots A_n, B_1B_2\cdots B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \cdots, A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cụt đều. Các đoạn thẳng $A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_nB_n$ được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cụt đều.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cụt đều.

Ví dụ 8. Cho hình chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có chiều cao bằng h, các đáy là các tam giác đều $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng là $a, a' \left(a > a'\right)$. Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt đều.

Giải. (H.7.71)



Hình 7.71

Gọi H, H' tương ứng là tâm của các tam giác $ABC, A'B'C'$.

Khi đó, HH' vuông góc với hai đáy của hình chóp cụt đều.

Trong tam giác đều ABC, ta có $HA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $H'A' = \dfrac{a'}{\sqrt{3}}$.

Hình thang $AHH'A'$ vuông tại H và H'. Kẻ $A'M \perp HA \ (M \in HA)$.

Ta có $AA' = \sqrt{A'M^2 + MA^2} = \sqrt{H'H^2 + \left(HA - H'A'\right)^2} = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}} - \dfrac{a'}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \dfrac{\left(a - a'\right)^2}{3}}$.

Vậy các cạnh bên của hình chóp cụt đều có độ dài bằng $\sqrt{h^2 + \dfrac{\left(a - a'\right)^2}{3}}$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Câu 1. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có tâm $O, SO \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình vuông.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC, AD = BD$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $(CDM) \perp (ABC)$ và $(CDM) \perp (ABD)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, góc BAD bằng 60°. Kẻ OH vuông góc với SC tại H. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $(SBD) \perp (SAC)$;

b) $(SBC) \perp (BDH)$;

c) $(SBC) \perp (SCD)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Các tam giác SAC và SBD cân tại S. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$;

b) $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(SBM) \perp (SAC)$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAB)$;

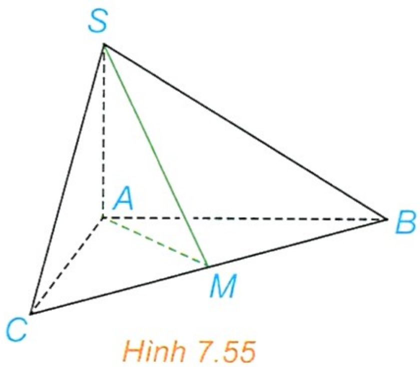
b) $(SCD) \perp (SAD)$;

c) $(SBD) \perp (SAC)$;

d) $(SAC) \perp (AHK)$.

Dạng 2. Góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện

Câu 7. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^{\circ}, SA = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Gọi M là trung điểm của BC.



Hình 7.55

a) Chứng minh rằng $\widehat{SMA}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 8. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{\frac{5}{12}}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 9. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại $A, \widehat{ABC} = 30^{\circ}, AC = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 10. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C']$, $[A, BD, C']$.

Câu 11. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = a$, biết $SA \perp (ABC), SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC).

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính tang của góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(A'BD)$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Câu 15. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD, kẻ AH vuông góc với BM tại H.

a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

b) Tính côsin của góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD).

Câu 16. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC).

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$.

b) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[A',BD,C']$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, biết $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính côsin của số đo góc nhị diện $[S,BD,C]$ và góc nhị diện $[B,SC,D]$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB.

a) Tính côsin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SHC)$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các canh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B và $AB \perp (BCD)$. Cho biết $BC = a\sqrt{2}, AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Cho biết $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và $(ABCD)$ là 60°. Tính độ dài SI.

Câu 24. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC), tính $\cos\alpha$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$

Câu 26. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC=a, SA=\frac{a}{2}$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC. Tính số đo các góc phẳng nhị diện:

a) $[B,SA,D]$;

b) $[S,BD,A]$;

c) $[S,BD,C]$;

d) $[D,SC,B]$.

Câu 27. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ, AC=a, SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC=a$. Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B,SA,C]$;

b) $[S,DA,B]$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AB\perp BC, SA=AB=3a, BC=4a$. Gọi α,β,γ lần lượt là số đo của các góc nhị diện $[B,SA,C],[A,BC,S]$, $[A,SC,B]$. Tính:

a) $\cos\alpha,\cos\beta$;

b*) $\cos\gamma$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại $O, SO\perp(ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a.

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$. Tính $\cos\alpha$.

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và $(SCD), \beta$ là số đo của góc nhị diện $[A,d,D]$. Tính $\cos\beta$.

$d^*)$ Gọi γ là số đo góc nhị diện $[B,SC,D]$. Tính $\cos\gamma$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), ABCD$ là hình thoi cạnh $a, AC=a$, $SA=\frac{a}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O. Gọi α,β lần lượt là số đo của các nhị diện $[A,SO,B]$ và $[B,SO,C]$. Tính $\alpha+\beta$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ lần lượt là góc giữa các đường thẳng SA,SB,SC,SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng: $SA=SB=SC=SD\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4$.

Câu 35. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD;

b) Chiều cao và thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$;

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD);

d) Côsin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$.

Dạng 3. Một số bài toán liên quan hình lăng trụ đặc biệt

Câu 36. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC'.

Câu 37. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $2a$.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Câu 38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

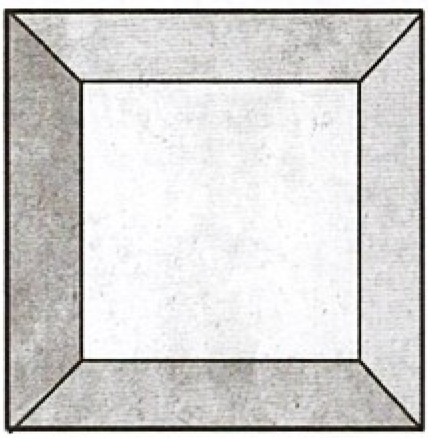
Câu 39. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên $2a$. Tính đường cao của hình chóp cụt và đường cao của mặt bên.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a) Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

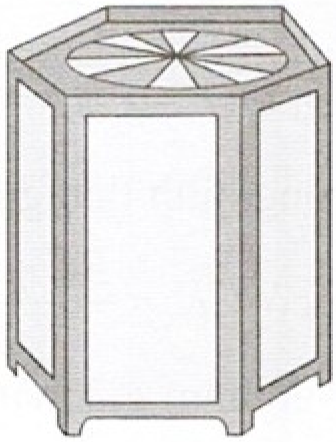
b) Các giao tuyến ở câu a tạo thành hình gì? Tính diện tích của hình đó.

Câu 41. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $2m$, đáy nhỏ có cạnh bằng $1m$ và cạnh bên bằng $2m$ (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



Hình 14

Câu 42. Một hộp đèn treo trên trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (hình 15), cạnh đáy bằng 10cm và cạnh bên bằng 50cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

Câu 43. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AC\perp\left(BDD'B'\right)$.

Câu 44. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a, SA=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Tính chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.

b) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

c) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

d) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[S,CD,B]$.

e) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[A,SD,C]$.

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$;

b) Số đo của góc nhị diện $\left[A,CD,B'\right]$;

c) Tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$;

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và BC;

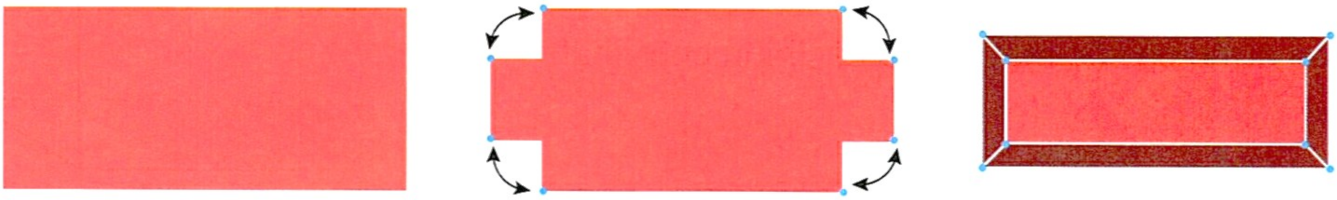
e*) Góc giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Dạng 4. Ứng dụng

Câu 46. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Trong cửa sổ ở Hình 7.56, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính $80\,cm$, bản lề được đính ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi $d=40\,cm$.

Hình 7.56

Câu 47. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắn các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.



Hình 7.65

Câu 48. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8m$; $OA = 2,8m; OB = 4m$.

Hình 7.72

a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.

c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5m$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

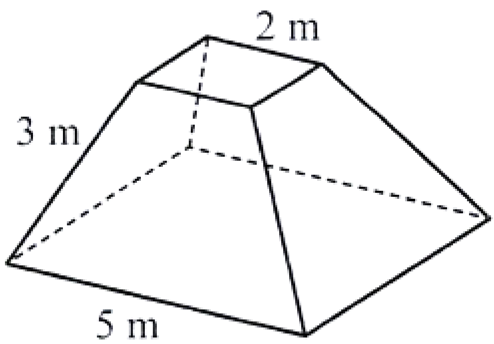
Câu 49. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà, mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 50. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD, ABMN$, $AD = 4m, AN = 3m, DN = 5m$. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 51. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

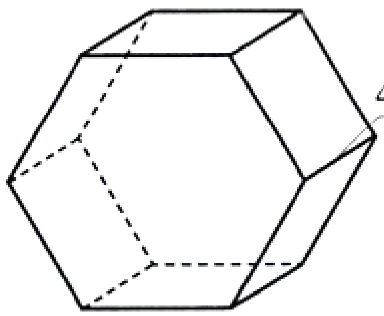
Câu 52. Hình 19 minh hoạ một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2m$. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

Câu 53. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

Câu 54. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là $4cm$ và cạnh lục giác dài $21,5cm$. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimét khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
https://www.vnteach.com