

Câu 1.

Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36 = 0$

b) $\frac{x-2}{2009} + \frac{x-42}{1969} + \frac{x-121}{1890} = 3$

Câu 2.

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x > y > 0$ và $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

Câu 3.

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$

b) Cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$

Câu 4.

Cho tam giác ABC cân tại A, có $BC = a$ không đổi. Gọi I là trung điểm của BC. Lấy $P \in AB$ và $Q \in AC$ sao cho $\angle PIQ = \angle ABC$. Vẽ $IK \perp AC$ ($K \in AC$)

a) Chứng minh rằng tích $BP \cdot CQ$ không đổi.

b) Chứng minh rằng PI là tia phân giác của góc $\angle BPQ$, QI là tia phân giác của $\angle PQC$

c) Gọi chu vi tam giác APQ là b , chứng minh rằng $b = 2 \cdot AK$. Tính b theo a khi $\angle BAC = 60^\circ$

Câu 5.

a) Chứng minh rằng $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ chia hết cho 1930

b) Cho a, b, c là 3 số thỏa mãn $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$. Chứng minh rằng: $a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = (a + b + c)^{2009}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$PT \Leftrightarrow (x-3)(2x^3+7x^2-x+12)=0$$

$$a) \Leftrightarrow (x-3)(x+4)(2x^2-x+3)=0$$

Do $2x^2-x+3 > 0$ với mọi x nên phương trình có tập nghiệm $S = \{3; -4\}$

$$b) PT \Leftrightarrow \frac{x-2}{2009} - 1 + \frac{x-42}{1969} - 1 + \frac{x-121}{1890} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2011}{2009} + \frac{x-2011}{1969} + \frac{x-2011}{1890} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2011=0 \Leftrightarrow x=2011$$

Câu 2.

$$PT \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-7)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+xy+y^2-7=0 (\forall x > y) \Leftrightarrow (x-y)^2=7-3xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq 2$$

Vì $x > y > 0$ nên $xy=2$, do đó $x=2; y=1$

Câu 3.

a)

$$P = \frac{x^2-8x+7}{x^2+1} = \frac{2x^2-8x+8-x^2-1}{x^2+1} = \frac{2(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow P_{\min} = -1 \Leftrightarrow x=2$$

$$P = \frac{x^2-8x+7}{x^2+1} = \frac{9x^2+9-8x^2-8x-2}{x^2+1} = 9 - \frac{2(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 9 \Rightarrow P_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

b)

Ta có: $(a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0 \Leftrightarrow a^4-a^3-a+1 \geq 0 \quad (1)$

Tương tự cũng có:

$$b^4-b^3-b+1 \geq 0 \quad (2)$$

$$c^4-c^3-c+1 \geq 0 \quad (3)$$

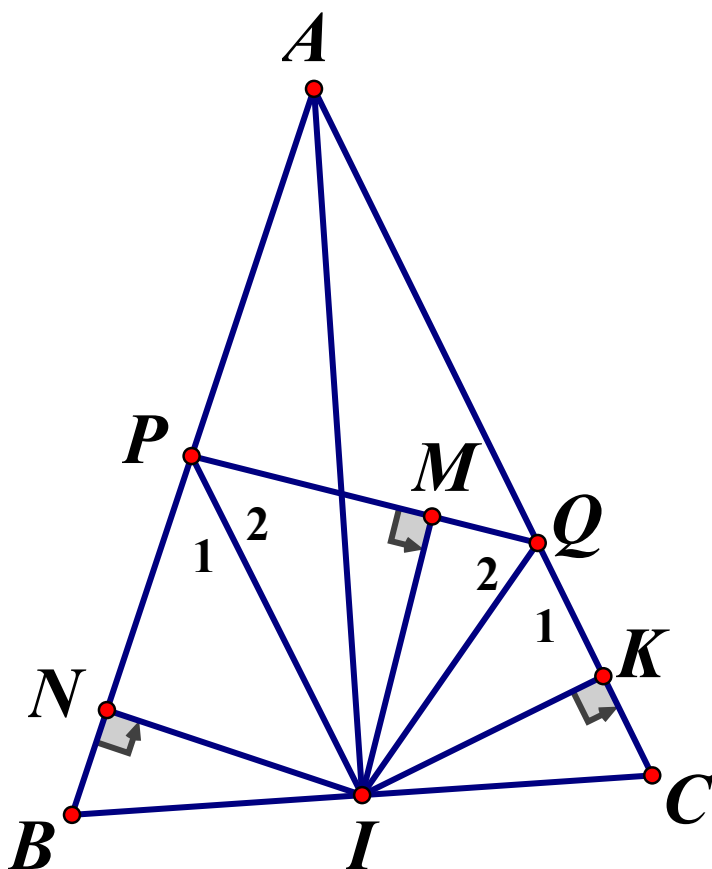
Cộng (1);(2);(3) ta được:

$$a^4 - a^3 - a + 1 + b^4 - b^3 - b + 1 + c^4 - c^3 - c + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3 \text{ (Dfcm)}$$

Câu 4.



a) Theo tính chất góc ngoài tam giác thì $\angle PIC = \angle B + \angle P_1$

Mặt khác, $\angle PIC = \angle PIQ + \angle QIC = \angle B + \angle QIC$.

Suy ra $\angle P_1 = \angle QIC \Rightarrow \triangle BPI \sim \triangle CIQ$

$$\Rightarrow \frac{BP}{BI} = \frac{CI}{CQ} \Rightarrow BP.CQ = BI.CI = \frac{a^2}{4} \text{ không đổi}$$

$$\Delta BPI \sim \Delta CIQ \Rightarrow \frac{PI}{QI} = \frac{BP}{CI} \Rightarrow \frac{PI}{QI} = \frac{BP}{BI} \Rightarrow \Delta BPI \sim \Delta IPQ \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{P}_2$$

b) Từ

Do đó PI là tia phân giác của $\hat{B}PQ$

Chứng minh tương tự, cũng có QI là tia phân giác $\hat{P}QC$

c) Kẻ $IM \perp PQ (M \in PQ), IN \perp AB (N \in AB)$. Vì PI, QI, AI là các tia phân giác và ΔABC cân tại A nên suy ra

$$IM = IN = IK, AN = AK, PM = PN, QK = QM$$

Có

$$\begin{aligned} b &= AP + PQ + AQ = AP + (PM + QM) + AQ \\ &= AP + PN + AQ + QK = AN + AK = 2.AK \end{aligned}$$

Nếu $\hat{B}AC = 60^\circ$ thì $AB = BC = CA = a$ và $CK = \frac{CI}{2} = \frac{a}{4}$

$$\text{Suy ra } b = 2.AK = 2.(AC - CK) = 2.\left(a - \frac{a}{4}\right) = \frac{3a}{2} \text{ (đơn vị dài)}$$

Câu 5.

a) Đặt $a = 3^7, b = -2^8, c = (-1)^3$. Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1 &= (3^7)^3 + (-2^8)^3 + (-1)^3 - 3.3^7.(-2^8).(-1) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

Mà $a + b + c = 3^7 + (-2^8) + (-1)^3 = 1930$ nên suy ra đpcm.

b) Ta có: $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = (a + b)(b + c)(c + a)$ nên từ đề bài suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b = 0$ thì $a = -b$, suy ra $a^{2009} = -b^{2009}$, do đó: $a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = c^{2009} = (a + b + c)^{2009}$