

CĐ14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 45^\circ$; $2\angle B = 3\angle C$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

A. $BC < AC < AB$

B. $AC < AB < BC$

C. $AC < BC < AB$

D. $BC < AB < AC$

Lời giải

Chọn A

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 45^\circ$; $2\angle B = 3\angle C$

Suy ra $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A = 135^\circ$

$$\Rightarrow 2\angle B + 2\angle C = 270^\circ$$

$$\Rightarrow 3\angle C + 2\angle C = 270^\circ$$

$$\Rightarrow 5\angle C = 270^\circ \Rightarrow \angle C = 54^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B = 81^\circ$$

Do đó $\angle A < \angle B < \angle C \Rightarrow BC < AC < AB$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 10 \text{ cm}$. Biết độ dài cạnh BC (đơn vị cm) là một số nguyên.

Hỏi độ dài cạnh BC có thể nhận được bao nhiêu giá trị?

A. 10

B. 8

C. 11

D. 9

Lời giải

Chọn D

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle ABC$ ta được:

$$AC - AB < BC < AC + AB$$

Suy ra: $10 - 5 < BC < 10 + 5$ hay $5 < BC < 15$

Mà Biết độ dài cạnh BC (đơn vị cm) là một số nguyên nên BC có thể nhận một trong 9 giá trị 6 cm, 7 cm, 8 cm, ..., 14cm

Câu 3. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $\angle A + 4\angle B + 10\angle C = 360^\circ$ và $3\angle B + 9\angle C = 180^\circ$ thì khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. $AB < BC < AC$ B. $AB < AC < BC$ C. $BC > AC > AB$ D. $AB = BC = AC$

Lời giải

Chọn B

Ta có $3\angle B + 9\angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B + 3\angle C = 60^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ - 3\angle C \Rightarrow \angle B < 60^\circ$ (vì $\angle C > 0$) (1)

Lại có $3\angle C = 60^\circ - \angle B \Rightarrow \angle C < 20^\circ$ (vì $\angle B > 0$) (2)

$\angle A + 4\angle B + 10\angle C = 360^\circ \Rightarrow \angle A = 360^\circ - 4\angle B - 10\angle C \Rightarrow \angle A = 360^\circ - 4(60^\circ - 3\angle C) - 10\angle C$
 $\Rightarrow \angle A = 120^\circ + 2\angle C \Rightarrow \angle A$ là góc lớn nhất (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle C < \angle B < \angle A \Rightarrow AB < AC < BC$

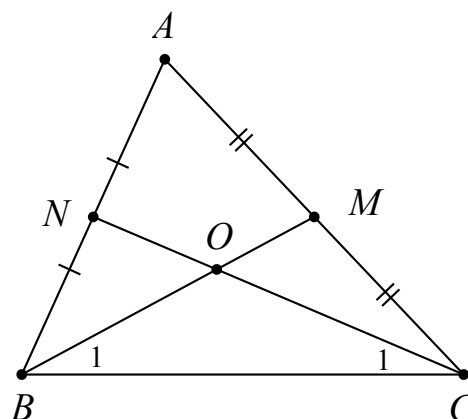
Câu 4. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM, CN . Biết $AC > AB$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

- A. $BM \leq CN$ B. $BM > CN$ C. $BM < CN$ D. $BM = CN$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm của BM và CN .

Xét $\triangle ABC$ có: $AC > AB$

$\Rightarrow \angle ABC > \angle ACB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)

$\Rightarrow B_1 > C_1$

Xét $\triangle OBC$ có: $B_1 > C_1$ (cmt)

$\Rightarrow OC > OB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)

mà $OC = \frac{2}{3}CN, OB = \frac{2}{3}BM$ (O là trọng tâm của $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \frac{2}{3}CN > \frac{2}{3}BM$

$\Rightarrow CN > BM$ hay $BM < CN$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$, hai đường trung tuyến BM, CN . Biết $AC > AB$. Chọn khẳng định đúng.

A. $BM \leq CN$.

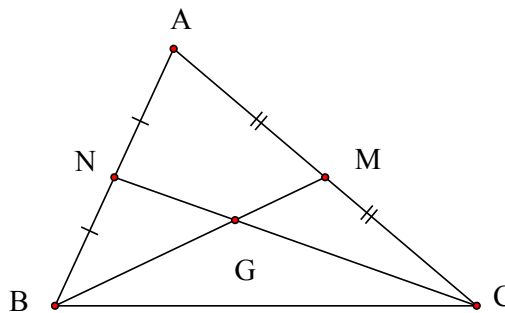
B. $BM > CN$.

C. $BM < CN$.

D. $BM = CN$.

Lời giải

Chọn C



Xét $\triangle ABC$ có $AC > AB$ nên $\angle ABC > \angle ACB$

$\Rightarrow$ Chiều cao từ A đến BM lớn hơn chiều cao từ A đến CN

$$S_{AMB} = S_{ANC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

Mặt khác

Do đó $CN > BM$.

Vậy $CN > BM$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $4\angle A = 6\angle B = 3\angle C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AC > AB > BC$.

B. $AC > BC > AB$.

C. $AB > BC > AC$.

D. $AB > AC > BC$.

Lời giải

Chọn C

Vì $3\angle C = 4\angle A = 6\angle B$ nên $\angle C > \angle A > \angle B$.

Do đó: $AB > BC > AC$ (mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong $\triangle ABC$).

Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Tam giác ABC cân có $AB = 8\text{cm}, AC = 5\text{cm}$ thì chu vi tam giác đó bằng:

- A. 21cm . B. 18cm .
C. 21cm hoặc 18cm . D. 20cm hoặc 18cm .

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $8 - 5 < BC < 8 + 5 \Rightarrow 2 < BC < 13$

Suy ra $BC = 5\text{cm}$ hoặc $BC = 8\text{cm}$

Do đó chu vi tam giác ABC bằng: $5 + 5 + 8 = 18(\text{cm})$ hoặc $5 + 8 + 8 = 21(\text{cm})$

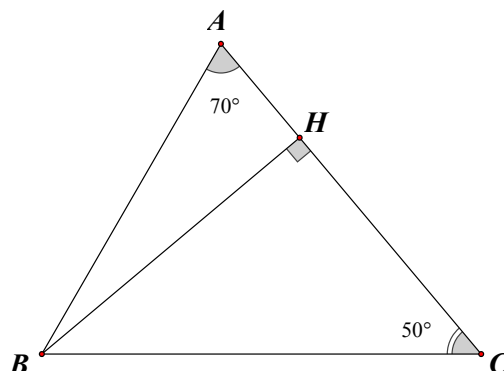
Câu 9. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 70^\circ; \angle ACB = 50^\circ$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B . Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $HB < HC$ B. $HB > HC$ C. $HB = HC$ D. $\angle BAC = 70^\circ$

Lời giải

Chọn B



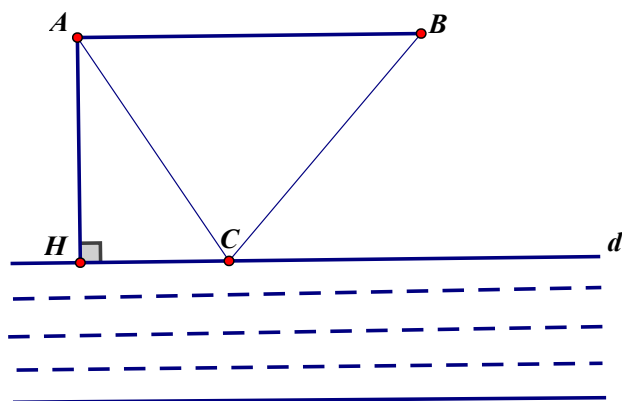
Ta có $\triangle BHC$ vuông tại H .

Và $\angle ACB = 50^\circ \Rightarrow \angle HCB = 50^\circ \Rightarrow \angle HBC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow \angle HCB > \angle HBC \Rightarrow HB > HC$ (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Câu 10. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

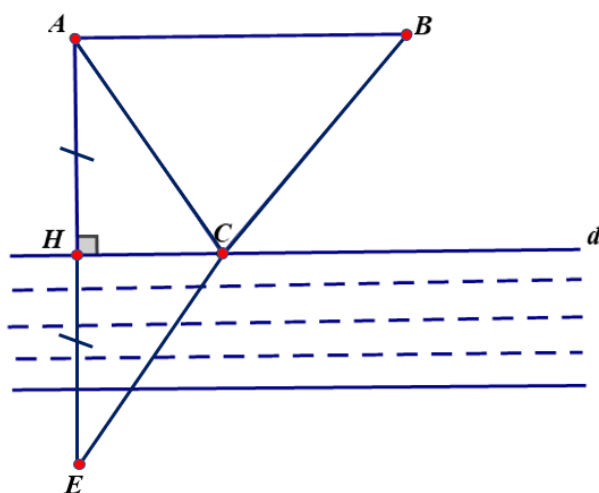
Một người đi từ điểm A đến điểm C (nào đó) trên bờ sông d , lấy nước rồi mang về điểm B . Biết AB song song d và khoảng cách từ A đến bờ sông d là AH . Quãng đường đi lấy nước $AC + CB$ ngắn nhất khi



- A. E, C, H thẳng hàng
 B. H, C, B thẳng hàng
 C. E, H, B thẳng hàng
 D. E, C, B thẳng hàng

Lời giải

Chọn D



Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $EH = HA$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H và $\triangle EHC$ vuông tại H có

HC chung

$EH = HA$

Do đó $\triangle AHC = \triangle EHC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = EC$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AC + CB = EC + CB$

Xét $\triangle EBC$ có $EC + BC \geq EB$ (Bất đẳng thức trong tam giác).

Suy ra $AC + CB$ ngắn nhất khi và chỉ khi $AC + CB = EB \Rightarrow E, C, B$ thẳng hàng

Câu 11. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

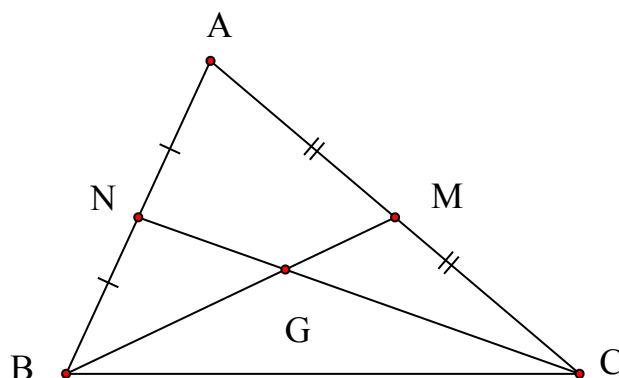
Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Biết $\angle ABC > \angle ACB$.

Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

- A. $BM \leq CN$
 B. $BM > CN$
 C. $BM < CN$
 D. $BM = CN$

Lời giải

Chọn C



Xét $\triangle GBC$ có $\angle GBC > \angle GCB$ nên $GC > GB$ (cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn).

Do G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $CG = \frac{2}{3}CN, BG = \frac{2}{3}BM$.

Khi đó $\frac{2}{3}CN > \frac{2}{3}BM$.

Do đó $CN > BM$.

Vậy $CN > BM$.

B. Tự luận

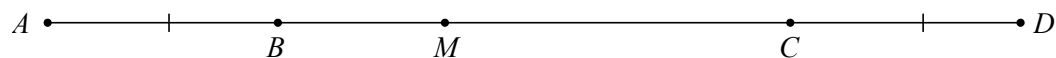
Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho hai điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD sao cho $AB = CD$. Lấy điểm M tùy ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng $MA + MD \geq MB + MC$.

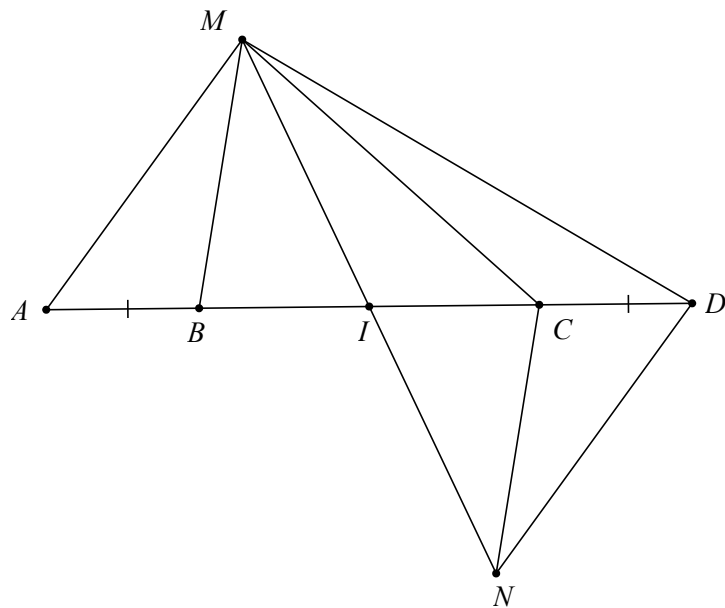
Lời giải

Xét 2 trường hợp

* Trường hợp điểm $M \in AD$ thì ta có: $MA + MD > MB + MC$



* Trường hợp $M \notin AD$, Gọi I là trung điểm của BC



Trên tia đối của tia IM lấy điểm N sao cho $IM = IN$ và ta có $IB = IC$

$$\frac{AB = CD}{AB + IB = IC + CD} \Rightarrow AI = ID$$

*Chứng minh được $\triangle IMA = \triangle IND$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = ND$

- Điểm C nằm trong $\triangle MDN$ chứng minh được $ND + MD > NC + MC$

- Chứng minh $\triangle IBM = \triangle ICN$ (c.g.c) suy ra $MA + MD > MB + MC$

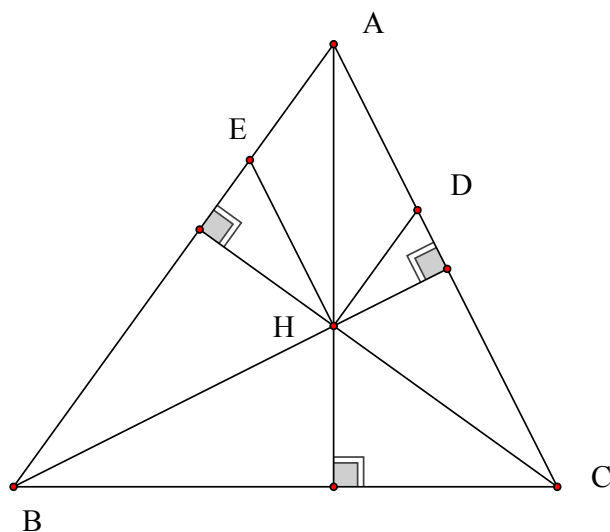
Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019; huyện Tân An; trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H .

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Chứng minh rằng:

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại D , kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E .

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle HAE$ có:

$$\widehat{HAD} = \widehat{AHE} \text{ (So le trong, } AD \parallel HE \text{)}$$

AH chung

$$\widehat{AHD} = \widehat{HAE} \text{ (So le trong, } AE \parallel HD \text{)}$$

Suy ra $\triangle AHD = \triangle HAE$ (g.c.g)

Suy ra $AD = HE$, $HD = AE$ (Hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$ (Theo bất đẳng thức tam giác)

Suy ra $HA < AE + AD$ (1)

Ta có $BH \perp AC$; $HE \parallel AC$

Suy ra $HE \perp BH$

Do đó $\triangle HBE$ vuông tại H , suy ra $HB < BE$ (2)

Chứng minh tương tự ta có $HC < CD$ (3)

Từ (1), (2), (3) và suy ra $HA + HB + HC < AE + AD + BE + CD$

Suy ra $HA + HB + HC < AB + AC$

Chứng minh tương tự ta có $HA + HB + HC < AB + BC$

$HA + HB + HC < BC + AC$

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Từ đó suy ra (đpcm).

Câu 3. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

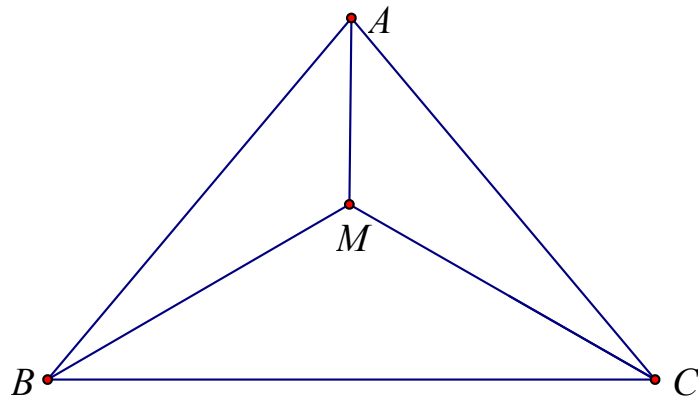
a) Cho tam giác ABC . M là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh:

$$2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Cho tam giác ABC . AN, BP, CQ là ba trung tuyến. Chứng minh:

$$\frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

Lời giải



a) Tam giác MBC có : $MB + MC > BC$

Tương tự : $MC + MA > AC; MA + MB > AB$

$$\Rightarrow 2MA + 2MB + 2MC > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow 2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác. Áp dụng câu a ta có:

$$2(GA + GB + GC) > AB + AC + BC$$

$$GA = \frac{2}{3}AN; GB = \frac{2}{3}BP; GC = \frac{2}{3}CQ$$

Có:

Thay vào trên được:

$$2\left(\frac{2}{3}AN + \frac{2}{3}BP + \frac{2}{3}CQ\right) > AB + AC + BC$$

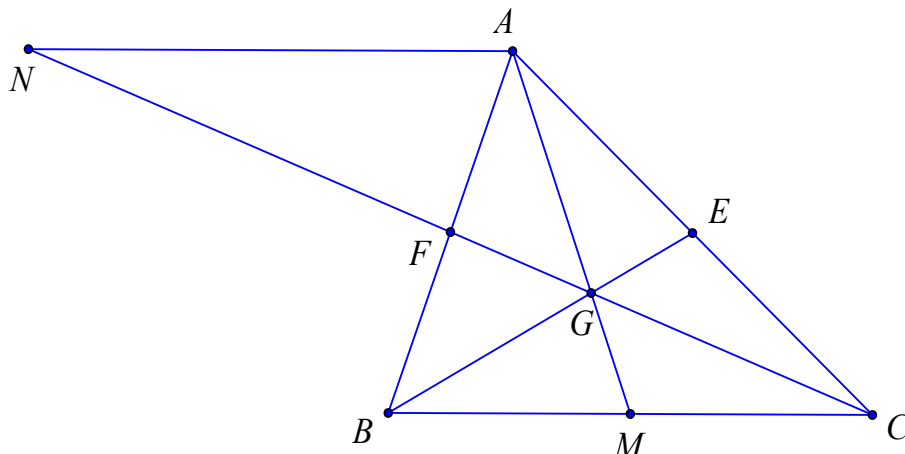
$$\Rightarrow \frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

Câu 4. (HSG 7 huyện An Nhơn năm 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM và BE cắt nhau tại G .

Chứng minh rằng nếu $\angle AGB \leq 90^\circ$ thì $AC + BC > 3AB$.

Lời giải



Vẽ trung tuyến CF , trên tia đối tia FC lấy điểm N sao cho $NF = CF$.

Xét $\triangle AFN$ và $\triangle BFC$ có:

$$AF = BF; \angle AFN = \angle BFC; NF = CF;$$

$$\Rightarrow \triangle AFN = \triangle BFC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AN = BC$$

Xét $\triangle ACN$ có $AN + AC > NC$ (BĐT tam giác)

$$\text{Hay } BC + AC > NC \quad (1)$$

Lại có G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow CF = 3GF \Rightarrow NC = 6GF \quad (2)$$

Ta chứng minh nếu $\angle AGB \leq 90^\circ$ thì $GF \geq \frac{AB}{2}$

$$GF < \frac{AB}{2} = AF = BF$$

Thật vậy, giả sử

$$\text{Thì } \angle FAG < \angle AFG \text{ và } \angle PBG < \angle BGF$$

$$\text{suy ra } \angle FAG + \angle PBG < \angle AFG + \angle BGF = \angle AGB \leq 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle FAG + \angle PBG + \angle AGB < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ (Vô lý)}$$

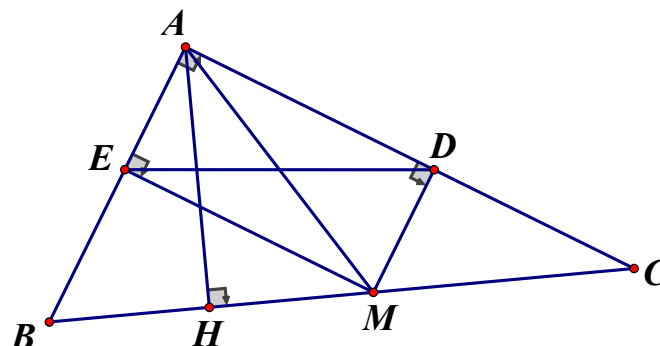
$$\text{Vậy } GF \geq \frac{AB}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow NC \geq 3AB \Rightarrow AC + BC > 3AB$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



Để thấy $\triangle AEM = \triangle AMD$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$$\Rightarrow EM = AD \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \triangle AEM = \triangle EAD \text{ (2 cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow AM = ED \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Kẻ $AH \perp BC$ tại H

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có:

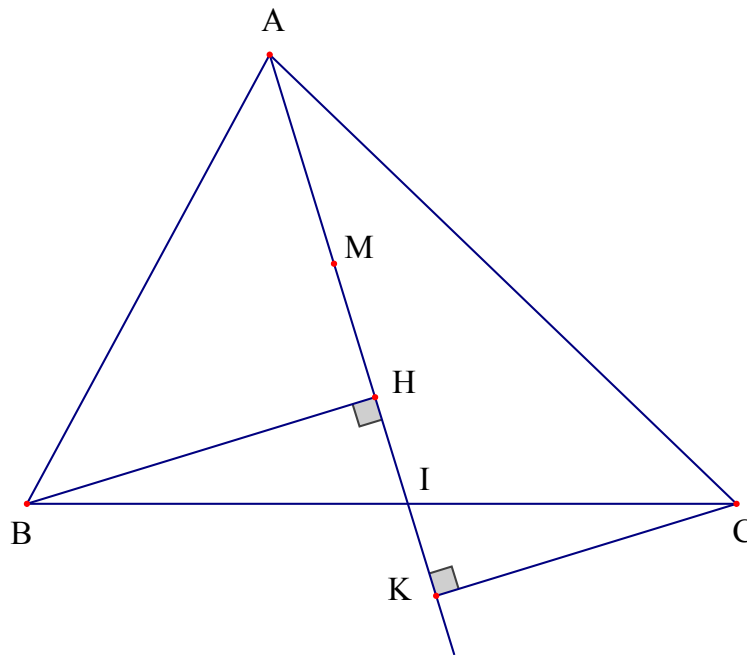
$$DE = AM \geq AH \quad (AH \text{ là đường cao của } \triangle ABC)$$

Vậy DE nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất $\Rightarrow M$ trùng với H .

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Gọi M là một điểm bất kì nằm trong tam giác, xác định vị trí của M để biểu thức: $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Kẻ BH và CK cùng vuông góc với AM , ta có:

$$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot BH + \frac{1}{2} AM \cdot CK = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \quad (1)$$

Mặt khác: $BH \leq BI$; $CK \leq CI$

Suy ra: $BH + CK \leq BI + CI$ hay $BH + CK \leq BC$ (2)

$$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \leq \frac{1}{2} AM \cdot BC \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

Dấu “=” xảy ra khi $AM \perp BC$

$$S_{MBC} + S_{MAB} \leq \frac{AC \cdot BM}{2} \quad (4)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$S_{MBC} + S_{MAC} \leq \frac{AB \cdot MC}{2} \quad (5)$$

$$2[S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}] \leq \frac{BC \cdot AM}{2} + \frac{AC \cdot BM}{2} + \frac{AB \cdot MC}{2}$$

Từ (3), (4) và (5) ta được:

$$\text{hay } 4S_{ABC} \leq MA.BC + MB.CA + MC.AB$$

Dấu "=" xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC .

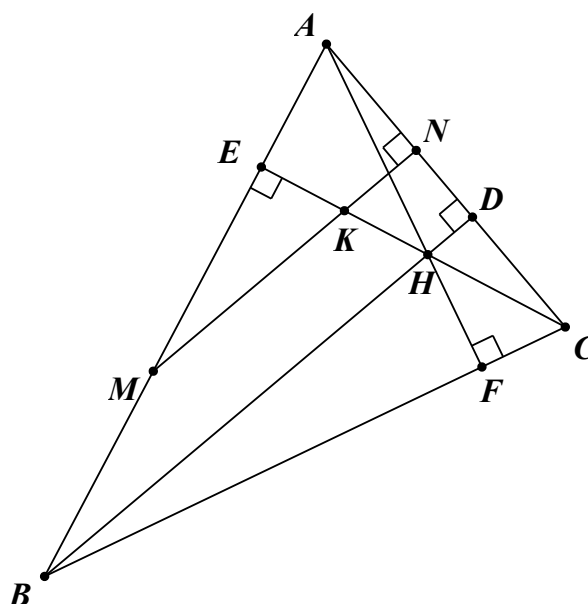
Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA.BC + MB.CA + MC.AB = 4S_{ABC} = 4.S_{ABC}$

Xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ hay M là trực tâm của ΔABC .

Câu 7. (HSG trường Tôn Đức Thắng 2018 - 2019; trường Trần Hưng Đạo 2017 - 2018)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Lời giải



Ta có $\Delta AEC = \Delta ANM$ (c.g.c) nên $CE = MN$

Giả sử $AB + CE > AC + BD$

Suy ra $AB - AC > BD - CE \Rightarrow AB - AM > BD - MN \Rightarrow BM > BD - MN$

Vẽ $MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$ (BM là cạnh huyền) (luôn đúng)

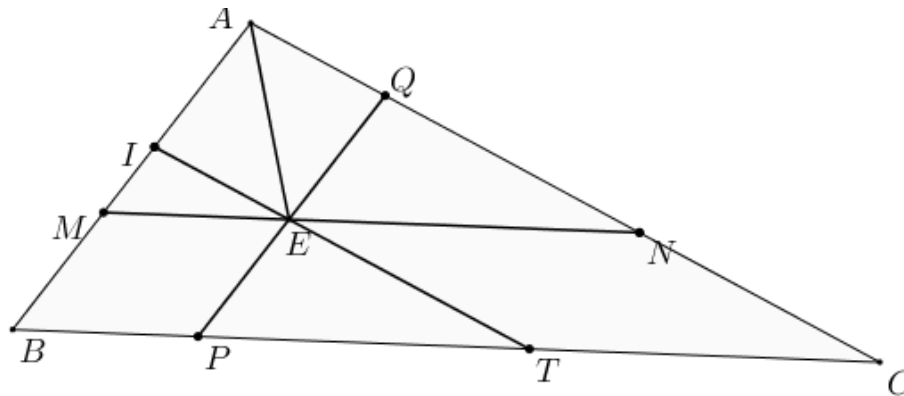
Vậy $AB + CE > AC + BD$.

Câu 88. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Điểm E nằm trong tam giác.

Chứng minh $EA + EB + EC < AC + BC$.

Lời giải



Từ E kẻ các đường thẳng MN, PQ, IT theo thứ tự song song với BC, AB, AC

Kết hợp với $AB < AC < BC$ ta xét trong $\triangle PET, \triangle QEN$ ta cũng có $PT > ET > EP$ và $EN > QN > EQ$ (2)

Trong $\triangle BEP, \triangle AEQ, \triangle CET$, ta có :

$$\begin{cases} EA < EQ + AQ \\ EB < BP + TC \\ EC < ET + TC \end{cases} \quad \text{và do (2) ta có :} \quad \begin{cases} EA < QN < AQ \\ EB < BP + PT \\ EC < TC + NC \end{cases}$$

Lại có $EC = NC$ (hai đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song)

$$\Rightarrow EA + EB + EC < QN + AQ + NC + BP + PT + TC$$

Nên $EA + EB + EC < BC + AC$

Vậy $EA + EB + EC < BC + AC$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>