

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. (SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{3}$. Gọi giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng tọa độ Oxz là $I(a; b; c)$. Tính $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: - 10

Gọi tọa độ giao điểm của d và (Oxz) là $I(a; 0; c)$.

Khi đó ta có: $\frac{a-1}{2} = \frac{0+2}{-1} = \frac{c+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ c = -7 \end{cases}$.

Vậy $I(-3; 0; -7)$. Nên $S = (-3) + 0 + (-7) = -10$.

Câu 2. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

Xét phương trình $2(2+t) - (5+4t) + 2(2+t) = 0 \Leftrightarrow 0t + 3 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm nên $\Delta // (P)$.

Chọn $M(2; 5; 2) \in \Delta$.

Khi đó:

$$d(\Delta, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 5 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

Câu 3. (Chuyên ĐH Vinh -2019) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

Lời giải

Trả lời: 30

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $u = (1; 2; -1)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $n = (1; -1; 2)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) , khi đó

$$\sin \varphi = \left| \cos(u, n) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ và mặt phẳng } (P): x-2y+2z+4=0$$

Lời giải

Trả lời : 1

Vì đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) nên : Chọn $M(1;3;2) \in d$

$$d(d;(P)) = d(M;(P)) = \frac{|1-6+4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 1$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(2; -1; 1)$. Biết rằng điểm $B(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho đường thẳng AB song song với đường thẳng d . Tính giá trị của $2a + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời: 10

$$AB: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = 1 + t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

Phương trình đường thẳng

$$B(a; b; c) \in (P) \Rightarrow t' = 1 \Rightarrow B(1; 2; 2).$$

$$\text{Vậy } 2a + b^2 + c^2 = 10.$$

Câu 6. Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$. Sàn nhà của công trình thuộc mặt phẳng Oxy , đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(5; 6; -2)$. Tính góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sàn. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 10

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 4; -1)$, mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Khi đó $\sin(\overrightarrow{AB}, (Oxy)) = |\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{33}} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, (Oxy)) \approx 10^\circ$

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 11 - 3t_1 \\ y = -5 + 4t_1 \\ z = mt_1 \end{cases} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = -4 + 5t_2 \\ y = 2 + 3t_2 \\ z = 2t_2 \end{cases}$$

Câu 7. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 ; với m là tham số thực; t_1, t_2 là tham số của phương trình đường thẳng. Tìm m để hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

Lời giải

Trả lời: 1,5

Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi hai vector chỉ phương vuông góc với nhau. Suy ra $(-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 + m \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Câu 8. Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$.



Tính góc giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là:

$$d: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \text{ và } d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{9}.$$

Lời giải

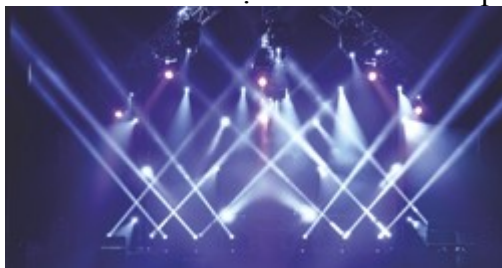
Trả lời: 90

d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $a = (2; 1; -1)$ và $a' = (3; 3; 9)$.

Ta có
$$\cos(d, d') = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + 9^2}} = 0$$
. Suy ra $(d, d') = 90^\circ$.

Câu 9. Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa tia sáng có phương trình

$$d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và mặt sàn sân khấu có phương trình } z = 0.$$



Lời giải

Trả lời: 45

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $a = (0; 1; 1)$. Mặt sàn sân khấu (P) có vectơ pháp tuyến $n = (0; 0; 1)$.

Ta có
$$\sin(d, (P)) = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
. Suy ra $(d, (P)) = 45^\circ$.

Câu 10. (THPT Hoàng Hoa Thám – Đà Nẵng 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng d có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 6 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (P): 2x - y + 3z + 12 = 0. \text{ Tìm sin của góc giữa } d \text{ và } (P)?$$

Lời giải

Trả lời: 1

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2t \\ y = 6+t \\ z = 1-3t \end{cases} \Rightarrow d$ có vector chỉ phương $u = (-2; 1; -3)$
Mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 12 = 0 \Rightarrow (P)$ có vector pháp tuyến $n = (2; -1; 3)$

Ta có $u \perp n$ nên $d \perp (P) \Rightarrow \left(\frac{d}{d}, (P) \right) = 90^\circ \Rightarrow \sin \left(\frac{d}{d}, (P) \right) = 1.$

Câu 11. (THPT GIA ĐỊNH-TP HỒ CHÍ MINH 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 2022 = 0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Khi đó $\sin \alpha = \frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính $a+b$

Lời giải

Trả lời : 13

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $u = (1; 2; -2)$; mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n = (2; -1; 2)$

Ta có $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}, \vec{u}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{4}{9}$

Câu 12. (Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Giá trị tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

Lời giải

Trả lời : -2

$M \in \Delta \Rightarrow M(12+4t; 9+3t; 1+t)$

$M \in (P) \Leftrightarrow 3(12+4t) + 5(9+3t) - (1+t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -3$

$M(0; 0; -2) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = -2$

Câu 13. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$. Gọi $M(a; b; c)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (ABC) . Tính tổng $S = a + b - c$.

Lời giải

Trả lời: - 7

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$

Điểm $M \in (d) \Rightarrow M(-t; 2+t; 3+t)$. Lại vì $M = d \cap (ABC)$ nên ta có

$$6(-t) + 3(2+t) + 2(3+t) - 6 = 0 \Leftrightarrow -t = -6 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow M(-6; 8; 9)$$

Vậy ta có $S = a + b - c = -6 + 8 - 9 = -7$

Câu 14. (Sở GD Lào Cai 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$, mặt phẳng $(P): 3x + y - z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x + 3y + z - 3 = 0$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua A , cắt và vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) . Tính sin của góc tạo bởi đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (P) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,94

Ta có mặt phẳng $(P): 3x + y - z - 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (3; 1; -1)$ và mặt phẳng $(Q): x + 3y + z - 3 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1; 3; 1)$.

Gọi $d = (P) \cap (Q)$ thì d nên có một vector chỉ phương là $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (4; -4; 8) = 4(1; -1; 2)$.

Suy ra d cũng nhận vector $u = (1; -1; 2)$ là một vector chỉ phương.

Lấy điểm $M \in d = (P) \cap (Q) \Rightarrow$ tọa độ điểm M thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ x + 3y + z - 3 = 0 \end{cases}$$
.

Chọn $y = 1 \Rightarrow x = z = 0 \Rightarrow M(0; 1; 0)$.

Phương trình tham số đường thẳng d là
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$
.

Giả sử $\Delta \cap d = B \Rightarrow B(t; 1-t; 2t) \Rightarrow \vec{AB} = (t-1; -t-1; 2t+3)$.

Vì $\vec{AB} \perp d \Rightarrow \vec{AB} \cdot u = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \vec{AB} = (-2; 0; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) , ta có

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{AB}, \vec{n}_1) \right| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{7}{\sqrt{55}} = \frac{7\sqrt{55}}{55} \approx 0,94$$

Câu 15. (SGD Thanh Hóa 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 4 = 0$ và $(Q): x - 2y + 2z + 6 = 0$. Tính khoảng cách h từ điểm $M(1; 0; 1)$ đến đường thẳng d .

Lời giải

Trả lời: 3

Hai mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 4 = 0$ và $(Q): x - 2y + 2z + 6 = 0$ có vector pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n}_P = (2; 1; -2); \vec{n}_Q = (1; -2; 2)$.

Giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) có vector chỉ phương: $\vec{u} = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (-2; -6; -5) = -1(2; 6; 5)$.

Đường thẳng d đi qua $N(0; 2; -1)$, có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 6; 5)$
 $\vec{MN} = (-1; 2; -2); [\vec{MN}, \vec{u}] = (22; 1; -10)$

$$d(M, d) = \frac{||[\vec{MN}, \vec{u}]||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{22^2 + 1^2 + (-10)^2}}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 5^2}} = 3$$

Câu 16. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định- 2023) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$ và điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OAB . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 2,6

Ta có: mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và $R = 2\sqrt{2}$.

$OM = 1 < R \Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi $h = d(O, d) \leq OM = 1$, khi đó ta có: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} h \cdot AB = \frac{1}{2} h \cdot 2\sqrt{OA^2 - h^2} = \sqrt{8h - h^3}$.

Xét hàm $f(x) = \sqrt{8x - x^3} \quad \forall x \in [0; 1]$.

$S_{\Delta OAB}$ đạt giá trị lớn nhất là $\max_{[0; 1]} f(x) = \sqrt{7} \approx 2,6 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow OM \perp d$.

Câu 17. (LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN- 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + ay + bz + c = 0$ chứa đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 1 = 0, (\beta): x + y - 2z - 1 = 0$. Biết khoảng cách từ $M(1; 2; 1)$ đến mặt phẳng (P) bằng 3. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Xét chùm mặt phẳng, ta có:
$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(d): \begin{cases} x = -3 - t \\ y = t \\ z = -2 \end{cases}$$

Vì đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng nên ta có:

Lấy $M(-3; 0; -2), N(-4; 1; -2) \in (d) \Rightarrow M, N \in (P) \Rightarrow \begin{cases} -6 - 2b + c = 0 \\ -8 + a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2b + 6 \end{cases}$

$$d(M, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|12 + 3b|}{\sqrt{8 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow |12 + 3b| = 3\sqrt{8 + b^2} \Leftrightarrow 72b = -72 \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Ta có:

Khi đó, ta có: $a + b + c = 5$.

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Câu 18. (THPT Đông Hà - Quảng Trị - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 45° . Tính khoảng cách từ $M(1; 4; 5)$ đến mặt phẳng (P) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 4,95

Vector chỉ phương của d là $u_d = (0; -1; 1)$. Vector pháp tuyến mặt phẳng (Oxy) là $n_1 = (0; 0; 1)$.

Gọi vector pháp tuyến của (P) là $n_p = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Do $d \subset (P)$ nên $u_d \cdot n_p = 0 \Leftrightarrow -b + c = 0 \Leftrightarrow b = c$.

$$(\overline{(P)}, (Oxy)) = 45^\circ \Leftrightarrow |\cos(\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_1})| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + 2c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4c^2 = 2(a^2 + 2c^2) \Leftrightarrow a = 0$$

Với $b = c = 1$ ta được $n_p = (0; 1; 1)$. Điểm $A(0; 2; 0) \in d \subset (P)$ nên $A(0; 2; 0) \in (P)$.

$$(P): y + z - 2 = 0$$

$$d(M, (P)) = \frac{|4 + 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4,95$$

Câu 19. (SGD Cần Thơ - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A , cắt d và (P) lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Biết Δ có một vector chỉ phương $u = (a; b; 4)$, giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 10

$$d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Ta có phương trình tham số của đường thẳng

$$\text{Do } M = \Delta \cap d \Rightarrow M \in d \Rightarrow M(-1 + t; 2t; 2 + t)$$

$$\text{Do } A(1; -1; 2) \text{ là trung điểm của } MN \text{ nên } N(3 - t; -2 - 2t; 2 - t)$$

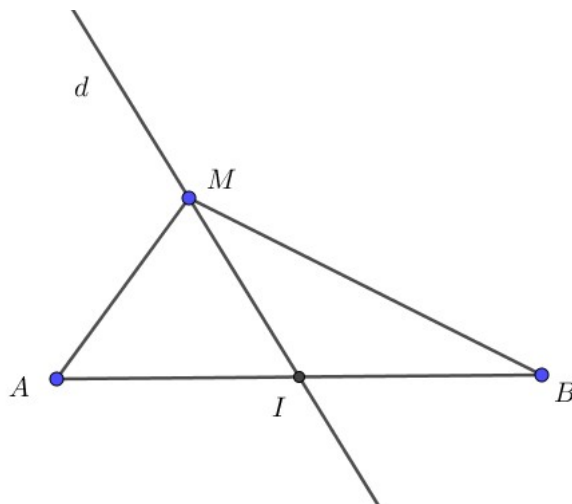
$$\text{Do } N = \Delta \cap (P) \Rightarrow N \in (P) \Rightarrow 3 - t - 2 - 2t - 4 + 2t + 5 = 0 \Rightarrow -t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow M(1; 4; 4)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = (0; 5; 2) \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = (0; 10; 4) \Rightarrow a = 0, b = 10 \Leftrightarrow a + b = 10$$

Câu 20. (THPT Sóc Sơn - Hà Nội - 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ và hai điểm $A(2; 0; 3)$, $B(2; -2; -3)$. Biết $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn: $P = MA^4 + MB^4 + MA^2 \cdot MB^2$ nhỏ nhất. Tìm tung độ điểm M

Lời giải

Trả lời: -1



Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB , khi đó $I(2; -1; 0)$. Nhận thấy điểm I thuộc d .

$$\overline{AB} = (0; -2; -6) \Rightarrow AB^2 = 40$$

Xét tam giác MAB có $MI^2 = \frac{2(MA^2 + MB^2) - AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + 20$

Ta có:

$$\begin{aligned} MA^4 + MB^4 + MA^2 \cdot MB^2 &= (MA^2 + MB^2)^2 - MA^2 \cdot MB^2 \\ &\geq (MA^2 + MB^2)^2 - \frac{(MA^2 + MB^2)^2}{4} = \frac{3}{4}(MA^2 + MB^2)^2 = \frac{3}{4}(2MI^2 + 20)^2 \geq \frac{3}{4}(20)^2 = 300 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi:

$$\begin{cases} MA = MB \\ MI = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv I$$

. Vậy tung độ điểm M là $y_0 = -1$.

Câu 21. (THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2023) Cho đồ thị $(C): y = \frac{x+2}{x-1}$. Gọi A, B, C là ba điểm phân biệt thuộc (C) sao cho trực tâm H của tam giác ABC thuộc đường thẳng $\Delta: y = -3x + 10$. Độ dài đoạn thẳng OH bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 4,47

Do $H \in \Delta \Rightarrow H(x; -3x + 10)$

Mà A, B, C là ba điểm phân biệt thuộc (C) nên trực tâm H của tam giác ABC cũng thuộc (C) đó đó

$$-3x + 10 = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (-3x+10)(x-1) = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $H(2; 4) \Rightarrow \overline{OH} = (2; 4) \Rightarrow OH = 2\sqrt{5} \approx 4,47$

$$\int_0^3 x - 2f(x) dx = \int_0^3 x dx - \int_0^3 2f(x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 - 2 \int_0^3 f(x) dx = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2} \quad (\text{SGD Vĩnh Phúc})$$

- 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 1; 2), B(2; 1; 2), C(1; 1; 4)$. Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt mặt phẳng Oxy tại $M(a; b; 0)$. Tính tổng $a + b$

Lời giải

Trả lời: 0

$$\overline{AB} = (1; 0; 0); \overline{AC} = (0; 0; 2); \cos(\widehat{BAC}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = (1; 0; 0); \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = (0; 0; 1)$$

Suy ra: Có hai tia phân giác là d_1, d_2

$$\vec{u}_{d_1} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = (1; 0; 1)$$

$$\vec{u}_{d_2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = (1; 0; -1)$$

$$\Rightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$(d_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$(P): x + y = 0$$

$$\Rightarrow 1 + t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = -2$$

$$\Rightarrow M(-1; 1; 0)$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

Câu 22. (THPT Chuyên Lương Văn Chánh -2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$. Mặt phẳng $(\alpha): ax + 5y + bz + c = 0$ chứa Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc 45° . Khi đó $a + b + c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 9

Ta thấy Δ chứa O và có véc-tơ chỉ phương $u = (1; -1; -3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $n_P = (2; 0; -1)$.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $n_\alpha = (a; 5; b)$.

Mặt phẳng (α) chứa Δ suy ra $c = 0$ và $u \cdot n_\alpha = 0 \Leftrightarrow a = 5 + 3b$.

Mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng (P) một góc 45° suy ra

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_P|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2 + 25}} \Leftrightarrow 5(a^2 + b^2 + 25) = 2(2a - b)^2$$

Từ và suy ra $b = 1 \Rightarrow a = 8$.

Vậy $a + b + c = 9$.

Câu 23. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2023) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1; 1; -2)$, $\Delta // (P)$ và Δ cắt d . Giao điểm của Δ và mặt phẳng (Oxy) là $M(x_0; y_0; z_0)$, khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 6,4

Gọi $N = \Delta \cap d \Rightarrow M(2t - 1; t + 1; 3t + 2)$

Δ đi qua A và $N \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \vec{AN} = (2t - 2; t; 3t + 4)$

Vì $\Delta // (P) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 - t - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow \vec{AN} = (-8; -3; -5)$

Vậy $\Delta: \frac{x-1}{-8} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-5}$

Gọi $I = \Delta \cap (Oxy), I \in \Delta \Rightarrow I(8t + 1; 3t + 1; 5t - 2)$

$I \in (Oxy) \Rightarrow 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow I\left(\frac{21}{5}; \frac{11}{5}; 0\right) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = \frac{32}{5}$.

Câu 24. (THPT Nguyễn Khuyến- TPHCM- 2023) Trong không gian $Oxyz$, gọi d' là hình chiếu vuông

góc của $d: \begin{cases} x = -1 + 2at \\ y = 3 - 2t, \\ z = (a^2 - 2)t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ lên mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3z - 6 = 0$. Lấy các điểm $M(0; -3; -2), N(3; -1; 0)$ thuộc (α) . Tính tổng tất cả các giá trị của tham số a để $MN \perp d'$

Lời giải

Trả lời: -3

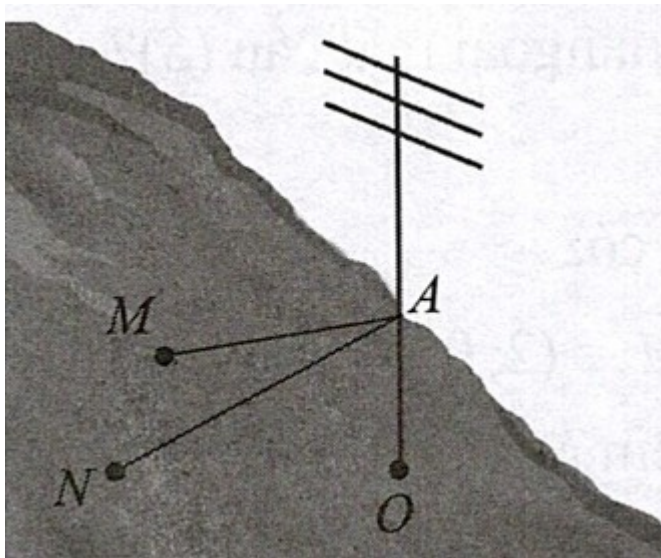
Theo định lí hình chiếu, ta có: $MN \perp d' \Leftrightarrow MN \perp d \Leftrightarrow \vec{MN} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \vec{MN} \cdot \vec{u}_d = 0$ (*)

có: $\vec{MN} = (3; 2; 2); \vec{u}_d = (2a; -2; a^2 - 2)$

(*) $\Leftrightarrow 6a - 4 + 2(a^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$

Tổng các giá trị của a là: -3.

Câu 25. Người ta muốn dựng một cột ăng-ten trên một sườn đồi. Ăng-ten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1 m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăng-ten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (Hình 6). Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0; 0; 0), A(0; 0; 6), M(3; -4; 3), N(-5; -2; 2)$.



Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 44

Ta có $\vec{MA} = (-3; 4; 3)$, $\vec{NA} = (5; 2; 4)$, suy ra

$$MA = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5,8(m),$$

$$NA = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{45} \approx 6,7(m).$$

Mặt phẳng (OMN) có cặp vector chỉ phương là $\vec{OM} = (3; -4; 3)$, $\vec{ON} = (-5; -2; 2)$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{OM}, \vec{ON}] = (-2; -21; -26)$

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi MA, NA với mặt phẳng (AMN) .

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{MA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-21) + 3 \cdot (-26)|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-21)^2 + (-26)^2}}$$

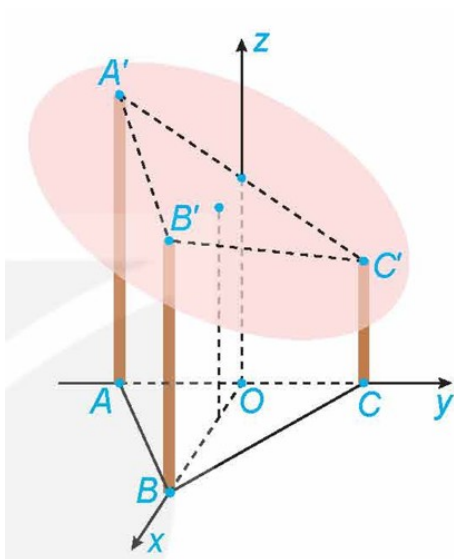
Ta có:

$$= \frac{156}{\sqrt{38114}} \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{|\vec{NA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{NA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-21) + 4 \cdot (-26)|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-21)^2 + (-26)^2}}$$

$$= \frac{156}{\sqrt{50445}} \Rightarrow \beta \approx 44^\circ.$$

Câu 26. Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ. Các cây cột vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là $7m, 6m, 5m$. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 4 m. Hỏi mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà một góc bao nhiêu độ? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 26,6

Giả sử $AA' = 7\text{ m}$, $BB' = 6\text{ m}$, $CC' = 5\text{ m}$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng 4 m nên $OB = 2\sqrt{3}\text{ m}$.

Đơn vị trên các trục tọa độ là mét, nên ta có: $A'(0; -2; 7)$, $B'(2\sqrt{3}; 0; 6)$, $C'(0; 2; 5)$
 $\Rightarrow \vec{AB'} = (2\sqrt{3}; 2; -1)$, $\vec{AC'} = (0; 4; -2)$.

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ là: $\vec{n} = [\vec{AB'}, \vec{AC'}] = 4\sqrt{3}(0; 1; 2)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

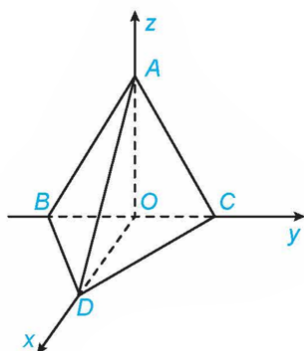
Khi đó $\cos((Oxy), (A'B'C')) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow ((Oxy), (A'B'C')) \approx 26,6^\circ$.

Vậy góc giữa mái nhà và mặt sàn là khoảng $26,6^\circ$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 0; 4)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(3; 0; 0)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 77,3



Mặt phẳng (ABD) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{BD} = (3; 3; 0)$ và $\overrightarrow{AD} = (3; 0; -4)$.

Suy ra (ABD) có vector pháp tuyến $[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}] = (-12; 12; -9)$.

Do đó $\vec{n} = (-4; 4; -3)$ cũng là vector pháp tuyến của (ABD) .

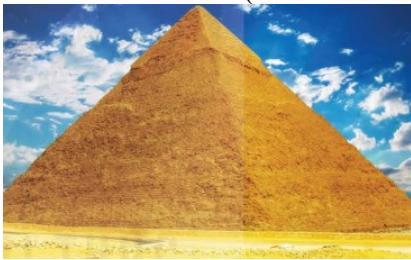
Mặt phẳng (ACD) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (0; 3; -4)$ và $\overrightarrow{AD} = (3; 0; -4)$. Suy ra (ACD) có vector pháp tuyến là $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (-12; -12; -9)$. Do đó $\vec{m} = (4; 4; 3)$ cũng là vector pháp tuyến của (ACD) .

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) . Khi đó:

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{m})| = \frac{|-4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{9}{41}.$$

Vậy $\varphi \approx 77,3^\circ$.

Câu 28. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài $219m$ (theo britannica.com). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 67,7

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho O là giao điểm của AC và BD , điểm A thuộc tia Ox , điểm B thuộc tia Oy , điểm S thuộc tia Oz .

Ta có $OA = OB = OC = 115\sqrt{2}, OS = 7\sqrt{439}$

$$\begin{aligned} & A(115\sqrt{2}; 0; 0), B(0; 115\sqrt{2}; 0), C(-115\sqrt{2}; 0; 0), S(0; 0; 7\sqrt{439}) \\ \Rightarrow \vec{SA} &= (115\sqrt{2}; 0; -7\sqrt{439}), \vec{SB} = (0; 115\sqrt{2}; -7\sqrt{439}), \vec{SC} = (-115\sqrt{2}; 0; -7\sqrt{439}) \end{aligned}$$

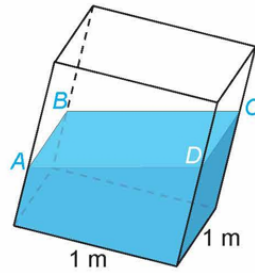
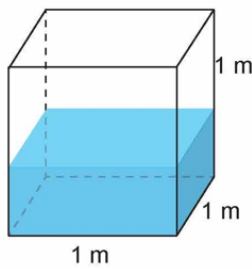
Từ các vector trên ta tính được:

- Một vector pháp tuyến của (SAB) là $\vec{n}_1 = 115\sqrt{2}(7\sqrt{439}; 7\sqrt{439}; 115\sqrt{2})$,

- Một vector pháp tuyến của (SBC) là $\vec{n}_2 = -115\sqrt{2}(7\sqrt{439}; -7\sqrt{439}; -115\sqrt{2})$.

$$\text{Do đó } \cos((SAB), (SBC)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{26450}{69472} \Rightarrow ((SAB), (SBC)) \approx 67,6^\circ$$

Câu 29. Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là $40\text{ cm}, 44\text{ cm}, 48\text{ cm}$. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 3,2

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho mặt phẳng (Oxy) chứa đáy bể, O là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống đáy bể, tia Ox chứa chân đường vuông góc kẻ từ A xuống đáy bể, tia Oy chứa chân đường vuông góc kẻ từ C xuống đáy bể, tia Oz chứa điểm B , đơn vị trên các trục là mét. Ta có: $A(1;0;0,4), B(0;0;0,44), C(0;1;0,48)$.

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên ta tính được $D(1;1;0,44)$. Do đó khoảng cách từ D đến đáy bể là 44 cm.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;0;0,04), \overrightarrow{BC} = (0;1;0,04)$.

Đặt $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (-0,04;0,04;-1)$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{k} = (0;0;1) \Rightarrow \cos((ABCD), (Oxy)) = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{25}{\sqrt{627}} \Rightarrow ((ABCD), (Oxy)) \approx 3,2^\circ$.

Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang khoảng $3,2^\circ$.

Câu 30. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m , người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài $4\text{ m}; 4,4\text{ m}; 4,8\text{ m}$. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 21,8

Gọi ba vị trí trên mặt bể là A, B, C thì tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 m. Gọi dây dọi lần lượt là AA', BB', CC' có độ dài lần lượt là $4\text{ m}; 4,4\text{ m}; 4,8\text{ m}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm của BC , tia Ox chứa điểm A , tia Oy chứa điểm B , tia Oz đi qua trung điểm của $B'C'$ và đơn vị trên các trục là mét.

Ta có: $OB = OC = 1, OA = \sqrt{3} \Rightarrow A' = (\sqrt{3};0;4), B' = (0;1;4,4), C' = (0;-1;4,8)$
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB'} = (-\sqrt{3};1;0,4), \overrightarrow{AC'} = (-\sqrt{3};-1;0,8)$.

Mặt phẳng $(A'B'C')$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{A'B'}, \vec{A'C'}] = 0,4 \sqrt{3}(\sqrt{3}; 1; 5)$.

Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó $\cos((ABC), (A'B'C')) = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{5}{\sqrt{29}}$. Góc cần tìm khoảng $21,8^\circ$.

Câu 31. (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d' . Điểm $M(2; 5; c)$ thuộc đường thẳng d' . Tìm c

Lời giải

Trả lời: - 4

Gọi $A = d \cap (P)$. Vì $A \in d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow A(t; -1 + 2t; 2 - t)$.

Mặt khác $A \in (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $A(1; 1; 1)$.

Lấy $B(0; -1; 2) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc (P) .

Thì $\Delta: \begin{cases} x = t' \\ y = -1 + t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$. Gọi C là hình chiếu của B lên (P) .

Suy ra $C \in \Delta \Rightarrow C(t'; -1 + t'; 2 + t')$.

Mặt khác $C \in (P) \Rightarrow t' - 1 + t' + 2 + t' - 3 = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{2}{3}$. Vậy $C\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Lúc này d' qua $A(1; 1; 1)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{AC} = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Hay d' nhận $\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm một vector chỉ phương.

Suy ra $d': \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 4s \\ z = 1 - 5s \end{cases}$. Vậy điểm thuộc đường thẳng d' là $M(2; 5; -4)$.

Câu 32. (Chuyên Bắc Giang 19) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$. Tọa độ giao điểm của d và (P) là $M(a; b; c)$ tìm $a + b + c$

Lời giải

Trả lời: - 2

Ta có $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow d: \begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Thay $x=12+4t$, $y=9+3t$, $z=1+t$ vào $(P): 3x+5y-z-2=0$, ta được:

$$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

Với $t=-3 \Rightarrow x=0$, $y=0$, $z=-2$.

Vậy tọa độ giao điểm của d và (P) là $(0;0;-2)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm $Q(3;1;c)$. Tìm c

Lời giải

Trả lời: -4

Gọi $A(-1+2t; -2+t; 1+t)$ và $B(-2-4t'; 1+t'; -2-t')$ là hai điểm lần lượt thuộc Δ_1 và Δ_2 .

$\overrightarrow{AB} = (-1-2t-4t'; 3-t+t'; -3-t-t')$. Δ_1 có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 1)$; Δ_2 có VTCP $\vec{v} = (-4; 1; -1)$.

$\overrightarrow{AB}$ là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1-2t-4t') + (3-t+t') + (-3-t-t') = 0 \\ -4(-1-2t-4t') + (3-t+t') - (-3-t-t') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t-8t' = 2 \\ 8t+18t' = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=-1 \end{cases}$$

Suy ra $A(1; -1; 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$.

Phương trình đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 là: $\begin{cases} x=1+t_1 \\ y=-1+t_1 \\ z=2-3t_1 \end{cases}$.

Suy ra $Q(3; 1; -4)$

Câu 34. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - Lần 01 - 2022 -2023). Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua điểm $A(5; -3; 5)$ cắt d_1 , d_2 tại hai điểm B và C . Độ dài đoạn thẳng BC bằng? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 4,36

Gọi $B(b+1; -1-b; 2b) \in d_1$; $C(c; 2c+1; c) \in d_2$.

$$\overrightarrow{AB}(b-4; 2-b; 2b-5); \overrightarrow{AC}(c-5; 2c+4; c-5)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} b-4=k(c-5) \\ 2-b=k(2c+4) \\ 2b-5=k(c-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-kc+5k=4 \\ -b-2kc-4k=-2 \\ 2b-kc+5k=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ kc=-\frac{1}{2} \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$$

A, B, C thẳng hàng

$$c=-1 \Rightarrow B(2, -2, 2), C(-1, -1, -1) \Rightarrow BC = \sqrt{19}$$

Câu 35. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - Lần 2 - 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 3; -2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}; d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng?

Lời giải

Trả lời: 3

$$\text{Vì } A \in d_1 \Rightarrow A(1+a; 2+3a; a), B \in d_2 \Rightarrow B(-1-b; 1+2b; 2+4b)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = (a-2; 3a-1; a+2); \overrightarrow{MB} = (-b-4; 2b-2; 4b+4)$$

Vì $M, A, B \in d$ nên chúng thẳng hàng, do đó tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

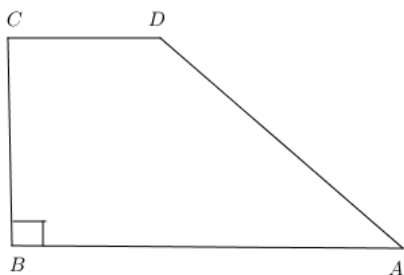
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=k(-4-b) \\ 3a-1=k(2b-2) \\ a+2=k(4b+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A(-2; -1; 2), B(-4; -2; 4)$$

$$\text{Vậy } AB = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Câu 36. (Mã 101 - THPT Bảo Thắng - Lào Cai - Lần 1 - Năm 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Biết $A(1; 2; 1), B(2; 0; -1), C(6; 1; 0)$ và diện tích hình thang $ABCD$ bằng $6\sqrt{2}$. Gọi $D(a; b; c)$, khi đó biểu thức $T = a - 2b + 4c$ bằng?

Lời giải

Trả lời: 5



$$\vec{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow AB = 3 \quad \vec{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$$

Ta nhận thấy $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC$ nên hình thang $ABCD$ vuông tại B và C .

Đường thẳng CD đi qua $C(6; 1; 0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{AB} = (1; -2; -2)$ nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$$

tham số

$$D \in CD \Rightarrow D(6+t; 1-2t; -2t) \Rightarrow \vec{DC} = (-t; 2t; 2t) \Rightarrow DC = 3|t|$$

Diện tích hình thang $ABCD$ là $\frac{AB+DC}{2} \cdot BC = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3+3|t|}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow |t| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{3}$

+ Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{DC} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$: loại vì ngược hướng với $\vec{AB} = (1; -2; -2)$

+ Với $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow \vec{DC} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$: thỏa mãn, khi đó $D\left(\frac{17}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow T = a - 2b + 4c = 5$

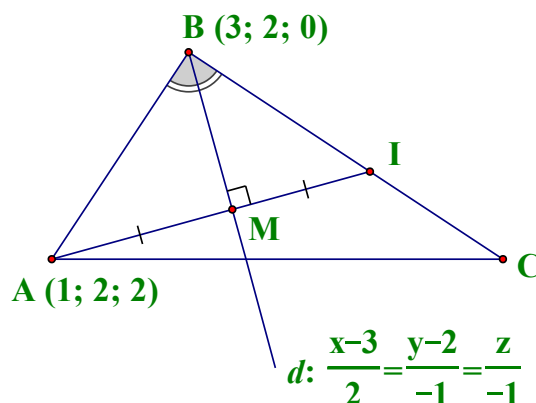
Câu 37. (Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 1A - 2022 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; 2)$, $B(3; 2; 0)$ và đường phân giác đỉnh B là $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$. Điểm $M(a; 3; 0)$ thuộc đường thẳng BC , tìm a ?

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi I là điểm đối xứng của A qua phân giác đỉnh B , khi đó $I \in BC$.

Gọi M là giao điểm của AI và phân giác đó suy ra M là trung điểm cạnh AI .



Ta có $M(3+2t; 2-t; -t)$ với $t \in \mathbb{R}$ nên $\vec{AM} = (2+2t; -t; -2-t)$; đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; -1; -1)$.

Khi đó: $\vec{AM} \cdot \vec{u}_d = 2 \cdot (2+2t) + (-1) \cdot (-t) + (-1) \cdot (-2-t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ suy ra $M(1; 3; 1)$.

Lại có M là trung điểm AI nên
$$\begin{cases} x_I = 2x_M - x_A = 1 \\ y_I = 2y_M - y_A = 4 \\ z_I = 2z_M - z_A = 0 \end{cases} \text{ nên } I(1; 4; 0).$$

Ta có: $\vec{BI} = (-2; 2; 0)$, đường thẳng $BC: \begin{cases} \text{qua } B(3; 2; 0) \\ \text{có VTCP } u = (-1; 1; 0) \end{cases}$ do đó: $BC: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 38. (THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019) Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$ và điểm $A(2; -1; 3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P) , biết Δ có một vector chỉ phương là $u = (a; b; c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz . Tính $\frac{a}{c}$.

Lời giải

Trả lời: 2

(P) có một vector pháp tuyến là $n = (1; 1; -1)$.

Δ đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và có một vector chỉ phương là $u = (a; b; c)$.

Oz đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ và có một vector chỉ phương là $k = (0; 0; 1)$.

Δ không song song với $Oz \Leftrightarrow a:b:c \neq 0:0:1$.

Δ đồng phẳng với $Oz \Leftrightarrow$ Ba vector $u; k; \vec{OA}$ đồng phẳng

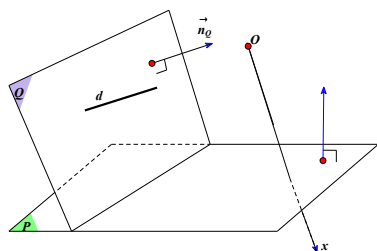
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} k & \vec{OA} \end{vmatrix} u = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b$.

Do $\Delta // (P) \Rightarrow u \perp n \Leftrightarrow u \cdot n = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Rightarrow c = -b$. Suy ra $\frac{a}{c} = 2$.

Câu 39. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P) , d' nhận $u = (a; b; 2019)$ là một vector chỉ phương. Xác định tổng $b - a$.

Lời giải

Trả lời: 3365



Chọn $A(1; 2; -1) \in d; u_d = (2; 1; 3); [u, i] = (0; 3; -1)$.

Ta thấy $[u_d; i] \cdot \vec{OA} = 7 \neq 0 \Rightarrow d$ và Ox chéo nhau.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Ox .

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $n_Q = [u_d; i] = (0; 3; -1)$.

Hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (P) là đường giao tuyến giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

d' có một vector chỉ phương là $[n_Q; n_P] = (-4; 1; 3) \Rightarrow u = 673[n_Q; n_P] = (-2692; 673; 2019)$ cũng là một vector chỉ phương.

Vậy $b - a = 3365$.

Câu 40. (Chuyên Hạ Long 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}; d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-11}{4} = \frac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5; -3; 5)$ cắt $d_1; d_2$ lần lượt ở B, C . Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Lời giải

Trả lời: 0,5

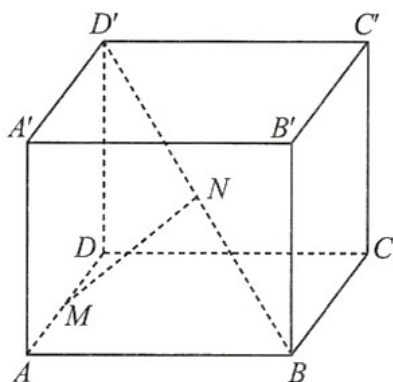
$B \in d_1 \Rightarrow B(4+t; -4-t; 6+2t)$. PT tham số của $d_2: \begin{cases} x = 5 + 2s \\ y = 11 + 4s \\ z = 5 + 2s \end{cases}$.

$C \in d_2 \Rightarrow C(5+2s; 11+4s; 5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (1-t; -1-t; 2t+1); \overrightarrow{AC} = (2s; 4s+14; 2s)$.

Do A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=2ks \\ -t-1=4ks+14k \\ 2t+1=2ks \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ s=-3 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$. Do đó: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$.

Câu 41. Có một chiếc lồng bằng sắt dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2m, AD = 3m, AA' = 1m$. Người thợ hàn muốn hàn một thanh sắt MN nối hai đoạn AD và BD' (Hình). Tính chiều dài ngắn nhất của đoạn thanh sắt MN . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét.



Lời giải

Trả lời: 0,89

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với D và $A(3;0;0), C(0;2;0), D'(0;0;1), B(3;2;0)$.

Phương trình đường thẳng $AD: \begin{cases} x=t \\ y=0 (t \in \mathbb{R}) \\ z=0 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng $BD': \begin{cases} x=3t' \\ y=2t' (t' \in \mathbb{R}) \\ z=1-t' \end{cases}$

$M \in AD \Rightarrow M(t;0;0); N \in BD' \Rightarrow N(3t';2t';1-t'); MN = (3t'-t;2t';1-t')$

MN ngắn nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t' - t = 0 \\ 14t' - 3t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t' = \frac{1}{5} \end{cases}$

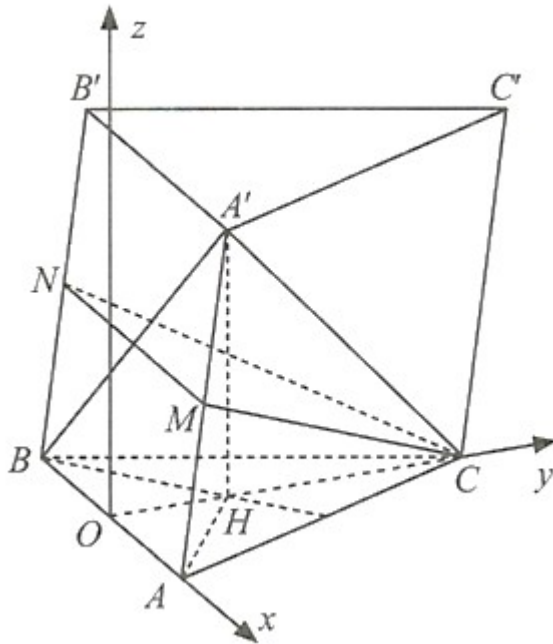
Vậy $MN = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89(m)$

Câu 42. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Trả lời: 0,57

Gọi O là trung điểm của AB .



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{1}{2};0;0\right), B\left(-\frac{1}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right), AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\vec{AB} = \vec{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có

Dễ thấy (ABC) có vector pháp tuyến là $n_1 = (0;0;1)$.

$$AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right),$$

M là trung điểm

$$BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

N là trung điểm

$$\vec{MN} = (-1;0;0), \vec{CM} = \left(\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\Rightarrow (CMN) \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n}_2 = \left(0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0;2\sqrt{2};5)$$

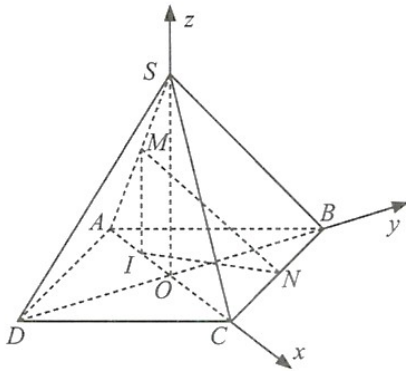
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) , ta có

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0,57.$$

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC . Biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Trả lời: 0,58



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

Khi đó $CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét $\triangle CNI$ có: $CN = \frac{a}{2}, \angle NCI = 45^\circ$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$$\begin{aligned} NI &= \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}. \end{aligned}$$

Xét $\triangle MIN$ vuông tại I nên

$$MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Mà $MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình.

Ta có:

$$\begin{aligned} &O(0;0;0), B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right), \\ &A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{14}}{2}\right), M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right). \end{aligned}$$

$$\vec{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4} \right), \vec{SB} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2} \right), \vec{SD} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2} \right)$$

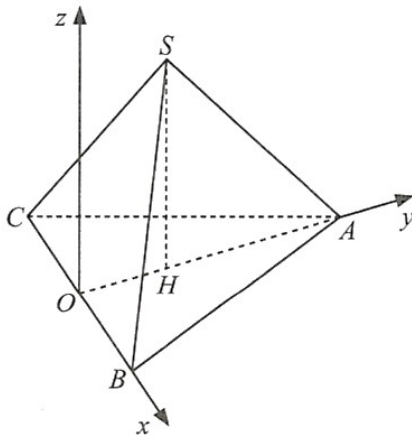
Khi đó

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(SBD): \vec{n} = \vec{SB} \wedge \vec{SD} = (-\sqrt{7}; 0; 0)$.

$$\sin(MN, (SBD)) = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{n}|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sqrt{7}) \right|}{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

Suy ra

- Câu 44.** Một vật trang trí kim tự tháp dạng hình chóp tam giác đều có chiều cao 110 mm và đáy là tam giác đều cạnh 120 mm được vẽ lại như Hình. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với trung điểm của cạnh đáy BC , đỉnh B thuộc tia Ox và đỉnh A thuộc tia Oy . Tính cosin của góc giữa hai mặt bên của vật trang trí đó.



Lời giải

Trả lời: 0,36

Ta có $B(60; 0; 0), A(0; 60\sqrt{3}; 0), S(0; 20\sqrt{3}; 110)$,

$\vec{SB} = (60; -20\sqrt{3}; -110), \vec{AB} = (60; -60\sqrt{3}; 0)$.

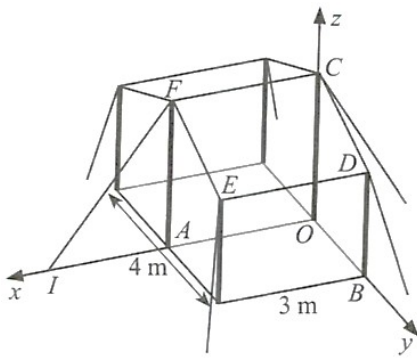
Mặt phẳng (SAB) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (11\sqrt{3}; 11; 4\sqrt{3})$.

Tương tự, mặt phẳng (SAC) có vector pháp tuyến $\vec{m} = (11\sqrt{3}; -11; -4\sqrt{3})$.

$$|\cos(\vec{n}, \vec{m})| = \frac{97}{266} \approx 0,36$$

Suy ra

- Câu 45.** Một lều trại có mặt trước và mặt sau rộng 4 m, hai mặt bên rộng 3 m gồm sáu thanh cọc tre, vải bạt chống thấm nước, dây dù hoặc dây thừng để cố định lều tại sáu cọc sắt cắm sát đất như Hình. Biết rằng, hai thanh AF, OC có chiều dài $2,2\text{ m}$; bốn thanh còn lại có chiều dài $1,7\text{ m}$ và đoạn dây thừng $IF = 3\text{ m}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ và cho biết góc giữa đường thẳng chứa dây thừng IF và mặt phẳng chứa tấm bạt $(CDEF)$ là a° . Tính giá trị của a . Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ.



Lời giải

Trả lời: 46

$$AI = \sqrt{3^2 - 2,2^2} \approx 2(m).$$

$$A(3; 0; 0), I(5; 0; 0), B(0; 2; 0), E(3; 2; 1,7), F(3; 0; 2,2), C(0; 0; 2,2).$$

$$\vec{IF} = (-2; 0; 2,2), \vec{EF} = (0; -2; 0,5), \vec{EC} = (-3; -2; 0,5).$$

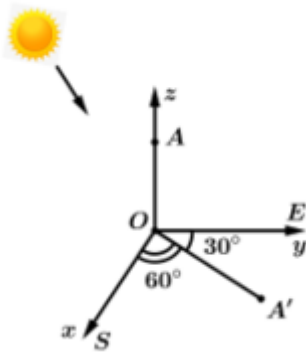
126

$(CDEF)$ có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 1; 4)$.

$$\sin(\vec{IF}, (CDEF)) = \frac{8,8}{17\sqrt{13}} = \frac{44}{17\sqrt{13}} \Rightarrow (\vec{IF}, (CDEF)) \approx 46^\circ.$$

Suy ra $a = 46$.

Câu 46. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao $6m$ vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột $3m$ về hướng $S60^\circ E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60° và tạo với hướng đông góc 30°) (Hình vẽ).



Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ là O , tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét đi qua điểm $V(1; \sqrt{3}; c)$. Tìm c ?

Lời giải

Trả lời: 2

$$\text{Ta có: } A(0;0;6), A'(3\cos 60^\circ; 3\cos 30^\circ; 0) = A'\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; -6\right) = \frac{3}{2}(1; \sqrt{3}; -4)$$

Phương trình đường thẳng AA' là: $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z-6}{-4}$.

Câu 47. Anh Danh là một nhiếp ảnh gia chuyên săn ảnh chim hoang dã. Giả sử với hệ trục $Oxyz$ cho trước, anh Bình đang ngắm và ống kính ở vị trí $A(200; 685; 436)$ thì có một con gà lôi tía xuất hiện ở vị trí B có tọa độ $B(640; 550; 474)$. Biết đường thẳng chứa đoạn thẳng nối vị trí ống kính ngắm của anh Danh và con gà lôi tía đi qua điểm $N(a; 820; c)$. Tính $P = a + c$.

Lời giải

Trả lời: 158

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Vì Δ đi qua A, B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (440; -135; 38)$.

$$\Delta: \begin{cases} x = 200 + 440t \\ y = 685 - 135t, t \in \mathbb{R} \\ z = 436 + 38t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng Δ là

$$\text{Điểm } N(a; 820; c) \text{ thuộc } \Delta \text{ nên ta có } \begin{cases} a = 200 + 440t \\ 820 = 685 - 135t \\ c = 436 + 38t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -240 \\ t = -1 \\ c = 398 \end{cases} \Rightarrow N(-240; 820; 398)$$

Vậy $P = a + c = 158$.

Câu 48. Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 20 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 17m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 4; 20)$ và $(30; 27; 17)$. Giả sử tọa độ của du khách khi ở độ cao 18m là $(a; b; c)$. Tính $a + b$ (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Trả lời: 40,3

Theo giả thiết, ta có $A(3; 4; 20), B(30; 27; 17)$

Đường thẳng đi qua hai điểm A, B có $VTCP: u = \overrightarrow{AB} = (27; 23; -3)$ và đi qua điểm $A(3; 4; 20)$

$$\begin{cases} x = 3 + 27t \\ y = 4 + 23t \\ z = 20 - 3t \end{cases}$$

nên có PTTS là $\begin{cases} x = 3 + 27t \\ y = 4 + 23t \\ z = 20 - 3t \end{cases}$. Khi du khách khi ở độ cao 18m thì $z = 20 - 3t = 18 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$.

$$t = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ b = \frac{58}{3} \\ c = 18 \end{cases} \Rightarrow a + b \approx 40,3$$

Với

Câu 49. Khi gắn hệ toạ độ O_{xyz} (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5; 0; 5)$ đến vị trí $B(10; 10; 3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a; b; 0)$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

Lời giải

Trả lời: 42,5

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-5}{5} = \frac{y}{10} = \frac{z-5}{-2}$.

Vì M thuộc AB nên tồn tại số thực sao cho $M(5t+5; 10t; -2t+5)$.

Ngoài ra, M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $-2t+5=0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$.

Suy ra $M(17,5; 25; 0)$. Vậy $a + b = 17,5 + 25 = 42,5$.

Câu 50. Trong không gian O_{xyz} cho trước (1 đơn vị $= 1cm$), có một chú kiến vàng và một chú kiến đen bò trên hai sợi dây thẳng khác nhau. Giả sử tại thời điểm t (tính bằng phút), kiến vàng ở tại vị trí $(6+t; 8t; 3+t)$ trên đường thẳng d_1 . Cùng thời điểm đó, kiến đen ở tại vị trí $(1+t; 2+t; 2t)$ trên đường thẳng d_2 . Khoảng cách ngắn nhất giữa hai chú kiến là bao nhiêu cm. Viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

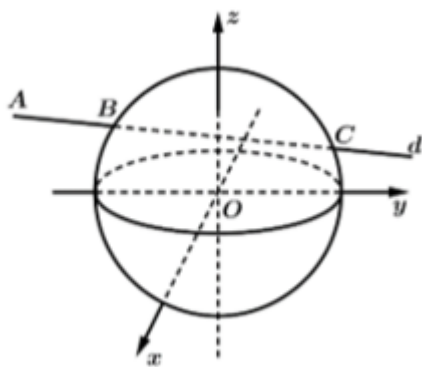
Lời giải

Trả lời: 5,7

Khoảng cách giữa hai chú kiến bằng $AB = \sqrt{5^2 + (7t-2)^2 + (3-t)^2} = \sqrt{50t^2 - 34t + 38} = P$

$$\Rightarrow P_{\min} = P\left(\frac{17}{50}\right) = \sqrt{\frac{1611}{50}} \approx 5,7 \text{ cm}$$

Câu 51. Trong không gian với hệ toạ độ O_{xyz} , đài kiểm soát không lưu sân bay có toạ độ $O(0; 0; 0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1km.



Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình radar. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688; -185; 8)$, chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $u = (91; 75; 0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Toạ độ của vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình radar là $C(a; b; c)$. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 463

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(-688; -185; 8)$ và có vectơ chỉ phương $u(91; 75; 0)$ là

$$\begin{cases} x = -688 + 91t \\ y = -185 + 75t \\ z = 8 \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ ta thấy B là vị trí sớm nhất máy bay xuất hiện trên màn hình radar và C là vị trí máy bay ra khỏi màn hình radar, gọi $C(-688 + 91t; -185 + 75t; 8)$

Giải phương trình $OC = 417 \Leftrightarrow \sqrt{(91t - 688)^2 + (75t - 185)^2 + 8^2} = 417$

$$\Leftrightarrow 13906t^2 - 152966t + 333744 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 8 \end{cases}$$

Ứng với $t = 3$ ta được điểm $B(-415; 40; 8)$ là vị trí sớm nhất máy bay xuất hiện trên màn hình radar.

Ứng với $t = 8$ ta được điểm $C(40; 415; 8)$ là vị trí máy bay ra khỏi màn hình radar.

Vậy $a + b + c = 40 + 415 + 8 = 463$